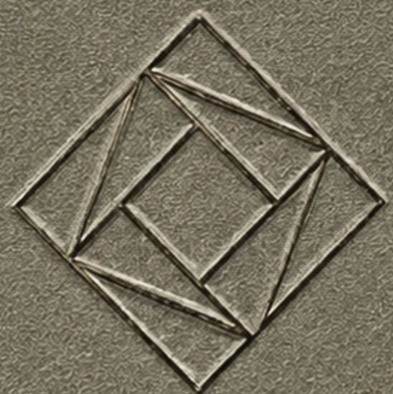
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ

СЛОВАРЬ



НАУЧНО-РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ИЗДАТЕЛЬСТВА
«СОВЕТСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ»

А.М. ПРОХОРОВ (председатель), И.В. АБАШИДЗЕ, П.А. АЗЬОВ, А.П. АЛЕКСАНДРОВ, В.А. АМБАРЦУМЯН, М.С. АСИМОВ, С.Ф. АХРОМЕВ, Ф.С. БАБИЧЕВ, Н.В. БАРАНОВ, А.Ф. БЕЛОВ, Н.Н. БОГОЛЮБОВ, Ю.В. ОМЛЕЙ, В.В. ВОЛЬСКИЙ, В.П. ГЛУШКО, Д.Б. ГУЛИЕВ, А.А. ГУСЕВ (заместитель председателя), А.Г. ЕГОРОВ, В.П. ЕЛЮТИН, В.С. ЕМЕЛЬЯНОВ, П.ЕРАН, Ю.А. ИЗРАЭЛЬ, А.А. ИМШЕНЕЦКИЙ, А.Ю. ИШЛИНСКИЙ, М.И. БАЧНИК, В.М. КАРЕВ, Г.В. КЕЛДЫШ, В.А. КИРИЛЛИН, И.Л. КНУНЦ, Е.А. КОЗЛОВСКИЙ, М.И. КОНДАКОВ, Ф.В. КОНСТАНТИНОВ, М.АОРОЛЕВ, В.А. КОТЕЛЬНИКОВ, В.Н. КУДРЯВЦЕВ, В.Г. КУЛИКОВ, Г.ИАРЧУК, Ю.Ю. МАТУЛИС, Г.И. НААН, И.С. НАЯШКОВ, М.Ф. НЕНАШ, А.А. НИКОНОВ, Р. Н. НУРГАЛИЕВ, Б.О. ОРУЗБАЕВА, В.Г. ПАНОВ (первый заместитель председателя), Б.Е. ПАТОН, В.М. ПОЛЕВОЙ, Ю.В. ПРОХОРОВ, А.М. РУМЯНЦЕВ, Б.А. РЫБАКОВ, В.И. СМИРНОВ, В.Н. СТОЛЕТОВ, И.М. ТРЕХОВ, В.А. ТРАПЕЗНИКОВ, П.Н.ФЕДОСЕЕВ, К.Х. ХАНАЗАРОВ, М.Н. ХРОВ (заместитель председателя), Е.И. ЧАЗОВ, И.П. ШАМЯКИН, Г.А. ЯГОДИ, В.Р. ЯЩЕНКО.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ

СЛОВАРЬ

Главный редактор
Ю.В.ПРОХОРОВ

Редакционная коллегия

С.И. АДЯН, Н.С. БАХВАЛОВ, В.И. БИТЮЦКОВ
(заместитель главного редактора), А.П. ЕРШОВ,
Л.Д.КУДРЯВЦЕВ, А.Л.ОНИЩИК, А.П.ЮШКЕВИЧ

МОСКВА
«СОВЕТСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ»
1988

51(03)
М 34

НАУЧНЫЕ КОНСУЛЬТАНТЫ

А.В. ВИЦАДЗЕ, А.А. КАРАЦУВА, Е.Ф. МИЩЕНКО, С.П. НОВИКОВ, Э.Г. ПОЗНЯК, А.Г. СВЕШНИКОВ, В.И. СОВОЛЕВ, Е.Д. СОЛОМЕНЦЕВ, А.Н. ТИХОНОВ, П.Л. УЛЬЯНОВ, С.В. ЯВЛОНСКИЙ.

РЕДАКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

Зав. редакцией В.И. БИТЮЦКОВ, ст. научные редакторы М.И. ВОЙЦЕХОВСКИЙ, А.Б. ИВАНОВ, О.А. ИВАНОВА, С.А. РУКОВА, научные редакторы Л.В. ЗЕЛЕНОВА, Е.Г. СОВОЛЕВСКАЯ, мл. редакторы Л.Р. СЕМЕНОВА, Л.В. СОКОЛОВА.

В подготовке Словаря принимали участие:

Редакция Словника — зав. редакцией А.Л. ГРЕКУЛОВА, редактор Н.М. ГНАТЕНКО.

Литературно-контрольная редакция — зав. редакцией Г.И. ЗАМАНИ, редакторы Л.В. КРЫЛОВА, Н.Г. РУДНИЦКАЯ.

Группа библиографии — ст. научный редактор В.А. СТУЛОВ, ст. редактор З.С. ИЗМАЙЛОВА.

Группа транскрипции и этимологии — научные редакторы М.А. КРОНГАУЗ, Е.Л. РИФ.

Редакция иллюстраций — зав. редакцией А.В. АКИМОВ, ст. художественный редактор З.А. СУХОВА.

Отдел комплектования — зав. отделом Р.В. ИВАННИКОВА, мл. редактор Н.А. ФЕДОРОВА.

Техническая редакция — зав. редакцией А.В. РАДИШЕВСКАЯ, ст. технический редактор Г.В. СМИРНОВА.

Корректорская — Н.М. КАТОЛИКОВА, Т.И. ВАРАНОВСКАЯ.

М $\frac{1702020000\text{-}002}{007(01)\text{-}88}$ КБ-54-8-1987

© Издательство «Советская энциклопедия», 1988

СОДЕРЖАНИЕ

Математика (А. Н. Колмогоров) 7
Алфавитный словарь терминов 39
Биографический словарь 659
Математика в энциклопедиях прежних лет 773
Словарь школьной информатики 805

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Настоящий МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ призван удовлетворить потребность широкого круга читателей в общедоступном справочно-энциклопедическом издании по вопросам математики. Словарь открывается статьёй **МАТЕМАТИКА**. Для этой головной статьи Словаря и четырёх его частей используются различные типы набора.

Название каждой статьи дано жирным **ПРОПИСНЫМ** шрифтом; в отдельных случаях продолжение названия статьи даётся в разрядку (**АНТИЛОГАРИФМ** числа). Если название статьи — термин, имеющий синоним, то последний приводится после основного, выделяется также при помощи разрядки (**АНТИНОМИЯ**, парадокс) и выносится в алфавит в качестве отдельной ссылочной статьи (**ПАРАДОКС** — то же, что *антиномия*). Разрядка применяется и внутри текста статей, если даётся определение понятия (кривая наз. неприводимой, если ...), необходимого для понимания данной статьи, или формулируется теорема, правило и т. д., имеющие специальное название (Теорема Вейерштрасса утверждает, что ...); соответствующему термину также посвящается отдельная статья. Такой подход к построению Словаря позволил отказаться от предметного указателя. В случаях когда названия статей состоят из двух и более слов, термины даются либо в наиболее распространённом виде (**АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ**), либо на первое место выносится главное по смыслу слово (**АВТОМАТОВ ТЕОРИЯ**, но не **ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ**). Если в название статьи входит собственное имя, оно выносится на первое место (**АБЕЛЯ НЕРАВЕНСТВО**). Названия статей даются преимущественно в единственном числе (**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ**).

В Словаре широко применяется система ссылок на статьи, где читатель найдёт дополнительную к рассматриваемой теме информацию; ссылки на другие статьи выделяются *курсивом*, причём допускаются ссылки только на статьи той же части. К терминам, входящим в название статьи и представляющим собой заимствования из других языков, приводятся этимологические справки. Все буквенные обозначения в формулах объясняются в тексте статей за исключением общепринятых (например, π, $f(x)$, sin). С целью экономии места в статьях приняты обычные для энциклопедий сокращения слов. Литература отделяется от текста статьи знаком ●, а сочинения в биографиях — знаком ■.

ОТ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ — однотомное справочное издание по всем вопросам математики, начиная от самых элементарных. В книге около 5 000 статей. При подготовке Словаря частично использованы материалы, опубликованные в Большой советской энциклопедии и Математической энциклопедии. Статьи Словаря максимально насыщены конкретными сведениями и одновременно доступны по изложению широкому кругу читателей. Авторы статей — специалисты, работающие в соответствующей области математики. Список авторов помещён в конце книги; под наиболее важными статьями поставлены подписи авторов.

В основной части Словаря («Алфавитный словарь терминов»), содержащей примерно 3500 статей, помещены обстоятельные обзоры по всем разделам математики, включающие исторические очерки (такова, например, ст. **АЛГЕБРА**), по общим проблемам математики (например, ст. **АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА**) и разнообразные справочные статьи, посвящённые отдельным понятиям (ст. **ВЕКТОР**), фактам (ст. **БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ЗАКОН**), методам (ст. **ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД**). Значительное внимание уделено прикладным вопросам математики. Все обзорные статьи снабжены библиографическими указателями, использование которых поможет читателям получить более полную информацию; при этом редакция сознательно избегала труднодоступных источников.

Принцип расположения статей в Словаре — алфавитный; исключение представляет статья **МАТЕМАТИКА**, помещённая в начале Словаря.

Вторая часть — «Биографический словарь» — посвящена биографиям учёных-математиков. Здесь около 900 биографических статей-справок, многие из них снабжены портретами, списком основных сочинений и литературой об учёных. В частности, даны статьи о всех учёных, упомянутых в основной части Словаря. (Подробнее об этой части Словаря см. в отдельном редакционном вступлении.)

В третьей части Словаря — «Математика в энциклопедиях прежних лет», носящей хрестоматийный характер, читатель найдёт написанные выдающимися учёными математические статьи для энциклопедий прошлого. В частности, впервые на русском языке публикуются переводы отдельных математических статей французского математика Ж. Д'Аламбера из знаменитой «Энциклопедии» Д. Дидро, а также воспроизводятся «Предуведомление» и приме-

ры статей из «Лексикона чистой и прикладной математики» (1839) академика В. Я. Буняковского. В «Предуведомлении», в частности, сказано: «Всякое сочинение, как дело человеческое, имеет свои недостатки. Я очень знаю, что мой труд, более, нежели многие другие, должен, по сущности своей, подать повод к справедливым критическим замечаниям. Разнообразие предметов, которые для полноты должны входить в состав Лексикона Чистой и Прикладной Математики, трудность соразмерить объём статей с относительною их важностию и не упустить из виду единства в изложении, решительная невозможность избежать в некоторых случаях повторений, необработанность нашего математическаго языка,— всё это заставляет меня думать, что несмотря на все мои старания, книга моя далёко еще не удовлетворит условиям хорошаго лексикографическаго руководства. Может быть, отечественные математики найдут также, что некоторые термины и речения переданы не совсем удачно в моем Лексиконе; заранее прошу их быть снисходительными к таким недостаткам». Полностью разделяя это высказывание В. Я. Буняковского, Редколлегия настоящего Словаря с благодарностью примет все замечания читателей, что позволит улучшить Словарь при возможном переиздании.

В качестве отдельного приложения даётся «Словарь школьной информатики», содержащий определения понятий нового учебного предмета средней школы — «Основы информатики и вычислительной техники».

* * *

МАТЕМАТИКА

А. Н. КОЛМОГОРОВ

СОДЕРЖАНИЕ:

I. Определение предмета математики, связь с другими науками и техникой 7
II. История математики до 19 века 9
1. Зарождение математики 10
2. Период элементарной математики 12
3. Период создания математики переменных величин 21
III. Современная математика 27
1. Расширение предмета математики 27
2. Вопросы обоснования математики. Роль теории множеств и математической логики 29
3. История математики в 19 веке и начале 20 века 31
IV. Заключение 37

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДМЕТА МАТЕМАТИКИ, СВЯЗЬ С ДРУГИМИ НАУКАМИ И ТЕХНИКОЙ

Математика (греч. μαθηματικά, от μάθημα — знание, наука) — наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

«Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть — весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное» (Энгельс Ф., см. Маркс К. и Энгельс Ф., Соч., 2 изд., т. 20, с. 37). Абстрактность М., однако, не означает её отрыва от материальной действительности. В неразрывной связи с запросами техники и естествознания запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых М., непрерывно расширяется, так что данное выше определение М. наполняется всё более богатым содержанием.

Математика и другие науки. Приложения М. весьма разнообразны. Принципиально область применения математич. метода не ограничена: все виды движения материи могут изучаться математически. Однако роль и значение математич. метода в различных случаях различны. Никакая определённая математич. схема не исчерпывает всей конкретности действительных явлений, поэтому процесс познания конкретного протекает всегда в борьбе двух тенденций: с одной стороны, выделения формы изучаемых явлений и логич. анализа этой формы, с другой стороны, вскрытия моментов, не укладывающихся в установленные формы, и перехода к рассмотрению новых форм, более гибких и полнее охватывающих явления. Если же трудности изучения какого-либо круга явлений состоят в осуществлении второй тенденции, если каждый новый шаг исследования связан с привлечением к рассмотрению качественно новых сторон явлений, то математич. метод отступает на задний план; в этом случае диалектич. анализ всей конкретности явления может быть лишь затемнён математич. схематизацией. Если, наоборот, сравнительно простые и устойчивые основные формы изучаемых явлений охватывают эти явления с большой точностью и полнотой, но зато уже в пределах этих зафиксированных форм возникают достаточно трудные и сложные проблемы, требующие специального математич. исследования, в частности создания специальной символич. записи и специального алгоритма для своего решения, то мы попадаем в сферу господства математич. метода.

Типичным примером полного господства математич. метода является небесная механика, в частности учение о движении планет. Имеющий очень простое математич. выражение закон всемирного тяготения почти полностью определя-

ет изучаемый здесь круг явлений. За исключением теории движения Луны, законно, в пределах доступной нам точности наблюдений, пренебрежение формой и размерами небесных тел — замена их «материальными точками». Но решение возникающей здесь задачи движения n материальных точек под действием сил тяготения уже в случае $n=3$ представляет колоссальные трудности. Зато каждый результат, полученный при помощи математич. анализа принятой схемы явления, с огромной точностью осуществляется в действительности: логически очень простая схема хорошо отражает избранный круг явлений, и все трудности заключаются в извлечении математических следствий из принятой схемы.

С переходом от механики к физике ещё не происходит заметного уменьшения роли математич. метода, однако значительно возрастают трудности его применения. Почти не существует области физики, не требующей употребления весьма развитого математич. аппарата, но часто основная трудность исследования заключается не в развитии математич. теории, а в выборе предпосылок для математич. обработки и в истолковании результатов, полученных математич. путём.

На примере ряда физич. теорий можно наблюдать способность математич. метода охватывать и самый процесс перехода познания действительности с одной ступени на следующую, более высокую и качественно новую. Классич. образцом может служить соотношение между макроскопич. теорией диффузии, предполагающей диффундирующее вещество распределённым непрерывно, и статистич. теорией диффузии, исходящей из рассмотрения движения отдельных частиц диффундирующего вещества. В первой теории плотность диффундирующего вещества удовлетворяет определённому дифференциальному уравнению с частными производными. К нахождению решений этого дифференциального уравнения при надлежащих краевых и начальных условиях и сводится изучение различных проблем, относящихся к диффузии. Непрерывная теория диффузии с очень большой точностью передаёт действительный ход явлений, поскольку дело идёт об обычных для нас (макроскопических) пространственных и временны́х масштабах. Однако для малых частей пространства (вмещающих лишь небольшое число частиц диффундирующего вещества) само понятие плотности теряет определённый смысл. Статистич. теория диффузии исходит из рассмотрения микроскопич. случайных перемещений диффундирующих частиц под действием молекул растворяющего вещества. Точные количественные закономерности этих микроскопич. перемещений нам неизвестны. Однако математич. теория вероятностей позволяет (из общих предпосылок о малости перемещений за малые промежутки и независимости перемещений частицы за два последовательных промежутка времени) получить определённые количественные следствия: определить (приближённо) законы распределения вероятностей для перемещений частиц за большие (макроскопические) промежутки времени. Так как число отдельных частиц диффундирующего вещества очень велико, то законы распределения вероятностей для перемещений отдельных частиц приводят, в предположении независимости перемещений каждой частицы от других, к вполне определённым, уже не случайным закономерностям для перемещения диффундирующего вещества в целом: к тем самым дифференциальным уравнениям, на к-рых построена непрерывная теория. Приведённый пример достаточно типичен в том смысле, что очень часто на почве одного круга закономерностей (в примере — законов движения отдельных частиц диффундирующего вещества) происходит образование другого, качественно нового рода закономерностей (в примере — дифференциальных уравнений непрерывной теории диффузии) через посредство статистики случайных явлений.

В биологич. науках математич. метод играет более подчинённую роль. В ещё большей степени, чем в биологии, математич. метод уступает своё место непосредственному анализу явлений во всей их конкретной сложности в социальных и гуманитарных науках. Применение математич. метода в биологич., социальных и гуманитарных науках осуществляется гл. обр. через *кибернетику*. Существенным остаётся значение М. для социальных дисциплин (как и для биологич. наук) в форме подсобной науки — математич. статистики. В окончательном же анализе социальных явлений моменты качественного своеобразия

каждого историч. этапа приобретают столь доминирующее положение, что математич. метод часто отступает на задний план.

Математика и техника. Начала арифметики и элементарной геометрии, как будет видно из историч. очерка, возникли из непосредственных запросов практики; дальнейшее формирование новых математич. методов и идей происходит под влиянием опирающегося в своём развитии на запросы практики математич. естествознания (астрономии, механики, физики и т. д.). Прямые же связи М. с техникой чаще имеют характер применения уже созданных математич. теорий к технич. проблемам. Укажем, однако, примеры возникновения новых общих математич. теорий на основе непосредственных запросов техники. Создание метода наименьших квадратов связано с геодезич. работами; изучение многих новых типов дифференциальных уравнений с частными производными впервые было начато с решения технич. проблем; операторные методы решения дифференциальных уравнений были развиты в связи с электротехникой и т. д. Из запросов электротехники возник новый раздел теории вероятностей — теория информации. Задачи синтеза управляющих систем привели к развитию новых разделов математич. логики. Наряду с нуждами астрономии решающую роль в развитии методов приближённого решения дифференциальных уравнений играли технич. задачи. Целиком на технич. почве были созданы многие методы приближённого решения дифференциальных уравнений с частными производными и интегральных уравнений. Задача быстрого фактич. получения численных решений приобретает бо́льшую остроту с усложнением технич. проблем. В связи с возможностями, к-рые открыли ЭВМ для решения практич. задач, всё большее значение приобретают численные методы. Высокий уровень теоретич. М. дал возможность быстро развить методы *вычислительной математики*. Вычислительная М. сыграла большую роль в решении ряда крупнейших практич. проблем, включая проблемы использования атомной энергии и космич. исследования.

II. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ ДО 19 ВЕКА

В предлагаемой далее периодизации истории М. даётся только её глобальная характеристика, относящаяся на ранних стадиях к Европе, Азии и Северной Африке и не учитывающая ни региональные особенности, иногда довольно существенные, ни частое отсутствие синхронности прогресса математич. знаний в различных регионах и странах.

Ясное понимание самостоятельного положения М. как особой науки, имеющей собственный предмет и метод, стало возможным только после накопления достаточно большого фактич. материала и возникло впервые в Др. Греции в 6—5 вв. до н. э. Развитие М. до этого времени естественно отнести к периоду зарождения математики, а к 6—5 вв. до н. э. приурочить начало периода элементарной математики, продолжавшегося до 16 в. В течение этих двух первых периодов математич. исследования имеют дело преимущественно с весьма ограниченным запасом основных понятий, возникших ещё на очень ранних ступенях историч. развития в связи с самыми простыми запросами хозяйственной жизни, сводившимися к счёту предметов, измерению количества продуктов, площадей земельных участков, определению размеров отдельных частей архитектурных сооружений, измерению времени, коммерческим расчётам, навигации и т. п. Первые задачи механики и физики за исключением отдельных исследований Архимеда (3 в. до н. э.), требовавших уже начатков исчисления бесконечно малых, могли ещё удовлетворяться этим же запасом основных математич. понятий. Единственной наукой, к-рая задолго до широкого развития математич. изучения явлений природы в 17—18 вв. систематически предъявляла М. свои особые и очень большие требования, была астрономия, целиком обусловившая, напр., раннее развитие тригонометрии.

В 17 в. новые запросы естествознания и техники заставляют математиков сосредоточить своё внимание на создании методов, позволяющих математически изучать движение, процессы изменения величин, преобразования геометрич. фигур (при проектировании и т. п.). С употребления переменных величин в аналитич. геометрии Р. Декарта и создания дифференциального и интегрального

исчисления начинается период математики переменных величин.

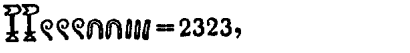
Дальнейшее расширение круга количественных отношений и пространственных форм, изучаемых М., привело в нач. 19 в. к необходимости отнестись к процессу расширения предмета математич. исследований сознательно, поставив перед собой задачу систематич. изучения с достаточно общей точки зрения возможных типов количественных отношений и пространственных форм. Создание Н. И. Лобачевским его «воображаемой геометрии», получившей впоследствии вполне реальные применения, было первым значительным шагом в этом направлении. Развитие подобного рода исследований внесло в строение М. столь важные черты, что М. в 19 и 20 вв. естественно отнести к особому периоду современной математики.

Эта глобальная характеристика четырёх основных периодов будет дополнена в последующем изложении.

1. Зарождение математики.

Счёт предметов на самых ранних ступенях развития культуры привёл к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел. Только на основе разработанной системы устного счисления возникают письменные системы счисления и постепенно вырабатываются приёмы выполнения над натуральными числами четырёх арифметич. действий (из к-рых только деление ещё долго представляло большие трудности). Потребности измерения (количества зерна, длины дороги и т. п.) приводят к появлению названий и обозначений простейших дробных чисел и к разработке приёмов выполнения арифметич. действий над дробями. Таким образом накапливался материал, складывающийся постепенно в древнейшую математич. науку — *арифметику*. Измерение площадей и объёмов, потребности строительной техники, а несколько позднее — астрономии, вызывают развитие начатков *геометрии*. Эти процессы шли у многих народов в значительной мере независимо и параллельно. Особенное значение для дальнейшего развития науки имело накопление арифметич. и геометрич. знаний в Др. Египте и Вавилоне. В Вавилоне на основе развитой техники арифметич. вычислений появились также начатки *алгебры*, а в связи с запросами астрономии — начатки *тригонометрии*.

Египет. Сохранившиеся древнейшие математические тексты Др. Египта, относящиеся к нач. 2-го тыс. до н. э., состоят по преимуществу из примеров на решение отдельных задач и, в лучшем случае, рецептов для их решения, к-рые иногда удаётся понять, лишь анализируя числовые примеры, данные в текстах; эти решения часто сопровождаются проверкой ответа. Следует говорить именно о рецептах для решения отдельных типов задач, т. к. математич. теория в смысле системы взаимосвязанных и, вообще говоря, так или иначе доказываемых общих теорем, видимо, вовсе не существовала. Об этом свидетельствует, напр., то, что точные решения употреблялись без всякого отличия от приближённых. Тем не менее самый запас установленных математич. фактов был, в соответствии с высокой строительной техникой, сложностью земельных отношений, потребностью в точном календаре и т. п., довольно велик. По папирусам 1-й пол. 2-го тыс. до н. э. состояние египетской М. того времени может быть охарактеризовано в следующих чертах. Преодолев трудности действий с целыми числами на основе непозиционной десятичной системы счисления, понятной из примера



египтяне создали своеобразный и довольно сложный аппарат действий с дробями, требовавший специальных вспомогательных таблиц. Основную роль при этом играли операции удвоения и раздвоения целых чисел, а также представление дробей в виде сумм долей единицы и, кроме того, дроби $^2/_3$. Удвоение и раздвоение, как особого рода действия, через ряд промежуточных звеньев дошли до Европы средних веков. Систематически решались задачи на нахождение неизвестных чисел, к-рые были бы теперь записаны в виде уравнения с одним неизвестным. Геометрия сводилась к правилам вычисления площадей и объёмов. Правильно вычислялись площади треугольника и трапеции, объёмы паралле-

лепипеда и пирамиды с квадратным основанием. Наивысшим известным нам достижением египтян в этом направлении явилось открытие способа вычисления объёма усечённой пирамиды с квадратным основанием, соответствующего формуле

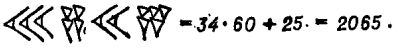
$$v=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2).$$

Правила вычисления площади круга и объёмов цилиндра и конуса соответствуют иногда грубо приближённому значению $\pi=3$, иногда же значительно более точному $\pi=\left(\frac{16}{9}\right)^2=3{,}16...$

Наличие правила вычисления объёма усечённой пирамиды, указания, как вычислить, напр., площадь равнобочной трапеции с помощью её преобразования в равновеликий прямоугольник, и ряд других обстоятельств свидетельствуют о том, что в египетской М. уже намечалось формирование математического дедуктивного мышления. Сами древние папирусы имели учебное назначение и не отражали в полной мере суммы знаний и методов египетских математиков.

См. также *Папирусы*.

Вавилон. Математич. текстов, позволяющих судить о М. в Вавилоне, несравненно больше, чем египетских. Вавилонские клинописные математич. тексты охватывают период от начала 2-го тыс. до н. э. (эпоха династии Хаммурапи и касситов) до возникновения и развития греч. М. Однако уже первые из этих текстов относятся к периоду расцвета вавилонской М., дальнейшие тексты, несмотря на наличие нек-рых новых моментов, свидетельствуют в целом скорее о её застое. Вавилоняне времён династии Хаммурапи получили ещё от шумерского периода развитую смешанную десятично-шестидесятеричную систему нумерации, заключавшую уже в себе позиционный принцип со знаками для 1 и 60, а также 10 (одни и те же знаки обозначают одно и то же число единиц разных шестидесятеричных разрядов). Напр.:



Аналогично обозначались и шестидесятеричные дроби. Это позволяло совершать действия с целыми числами и с шестидесятеричными дробями по единообразным правилам. В более позднее время появляется и особый знак для обозначения отсутствия в данном числе промежуточных разрядов. Деление при помощи таблиц обратных чисел сводилось к умножению (такой приём встречается иногда и в египетских текстах). В более поздних текстах вычисление обратных чисел, отличных от 2^α, 3^β, 5^γ, т. е. не выражающихся конечной шестидесятеричной дробью, иногда доводится до восьмого шестидесятеричного знака; возможно, что при этом была обнаружена периодичность таких дробей, напр. в случае $^1/_7$. Кроме таблиц обратных чисел, имеются таблицы произведений, квадратов, кубов и др. Большое количество хозяйственных записей доказывает широкое употребление всех этих средств в сложной хозяйственной дворцовой и храмовой деятельности. Широкое развитие получили также расчёты процентов по долгам. Имеется также ряд текстов времён династии Хаммурапи, посвящённых решению задач, к-рые с современной точки зрения сводятся к уравнениям первой, второй и даже третьей степеней.

Задачи на квадратные уравнения возникли, вероятно, путём обращения чисто практич. геометрич. задач, к-рое во многих случаях свидетельствует о существенном развитии отвлечённой математич. мысли. Такова, напр., задача на определение стороны прямоугольника по его площади и периметру. Впрочем, эта задача не приводилась к трёхчленному квадратному уравнению, а решалась, по-видимому, с помощью преобразования, к-рое мы бы записали $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$, что приводит почти сразу к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Другая задача, связанная с т. н. теоремой Пифагора, известной в Вавилоне с древнейших времён, на определение катетов по данным гипотенузе и площади, представлялась трёхчленным уравнением с единственным положительным корнем. Задачи подбираются так, чтобы корни были всегда целые положительные и по большей части одни и те же. Это показывает, что сохранившиеся глиняные таблички — учебные упражнения; пре-

подавание было, по-видимому, устным. Но вавилоняне знали и приёмы приближённого вычисления квадратного корня, напр. длины диагонали квадрата с данной стороной. Таким образом, алгебраич. компонента вавилонской М. была значительной и достигла высокого уровня. Наряду с этим вавилоняне умели суммировать арифметич. прогрессии, по крайней мере простейшие конечные геометрич. прогрессии и даже знали правило суммирования последовательных квадратных чисел, начиная с 1.

Существует предположение, что такие более отвлечённые научные интересы, не ограничивающиеся непосредственно необходимой в практике рецептурой, а приводившие к созданию общих алгебраич. методов решения задач, возникли в «школах писцов», где ученики готовились к счётно-хозяйственной деятельности. Тексты такого рода позднее исчезают. Зато дальше развивается техника вычислений с многозначными числами в связи с развитием в 1-м тыс. до н. э. более точных методов в астрономии. На почве астрономии возникают первые обширные таблицы эмпирически найденных зависимостей, в к-рых можно видеть прообраз идеи функции. Вавилонская клинописная математич. традиция продолжается в Ассирии, персидском государстве и даже в эллинистич. эпоху вплоть до 1 в. до н. э. Из достижений вавилонской М. в области геометрии, выходящих за пределы познаний египтян, следует отметить разработанное измерение углов и нек-рые зачатки тригонометрии, связанные, очевидно, с развитием астрономии; позднее в клинописных текстах появляются нек-рые правильные многоугольники, вписанные в круг.

См. также *Клинописные математические тексты.*

2. Период элементарной математики.

Только после накопления большого конкретного материала в виде разрозненных приёмов арифметич. вычислений, способов определения площадей и объёмов и т. п. возникает М. как самостоятельная наука с ясным пониманием своеобразия её метода и необходимости систематич. развития её основных понятий и предложений в достаточно общей форме. В применении к арифметике и алгебре возможно, что указанный процесс начался уже в Вавилоне. Однако вполне определилось это новое течение, заключавшееся в систематическом и логически последовательном построении основ математич. науки, в Др. Греции. Созданная древними греками система изложения элементарной геометрии на два тысячелетия вперёд сделалась образцом дедуктивного построения математич. теории. Из арифметики постепенно вырастает *чисел теория*. Создаётся систематич. учение о *величинах* и измерении. Процесс формирования (в связи с задачей измерения величин) понятия действительного числа (см. *Число*) оказывается весьма длительным. Дело в том, что понятия иррационального и отрицательного числа относятся к тем более сложным математич. абстракциям, к-рые, в отличие от понятий натурального числа, дроби или геометрич. фигуры, не имеют достаточно прочной опоры в донаучном общечеловеческом опыте.

Создание алгебры как буквенного исчисления завершается лишь в конце рассматриваемого двухтысячелетнего периода. Специальные обозначения для неизвестных появляются у Диофанта (вероятно, 3 в.) и более систематически — в Индии в 7 в., но обозначение буквами коэффициентов уравнения введено только в 16 в. Ф. Виетом.

Развитие геодезии и астрономии рано приводит к детальной разработке тригонометрии, как плоской, так и сферической.

Период элементарной М. заканчивается (в Зап. Европе в нач. 17 в.), когда центр тяжести математич. интересов переносится в область М. переменных величин. Естественно, что этот переход был подготовлен предшествующим развитием М. Ещё в М. древнего мира на материале изучения тригонометрич. функций и при составлении их таблиц формируются представления о функциональной зависимости. Но, напр., представление об угловом аргументе, изменяющемся от 0 до $+\infty$, и тригонометрич. функциях от такого аргумента возникает только в 16 в. (у Ф. Виета). Греч. натурфилософы и математики начиная с 7—6 вв. и вплоть до 3 в. до н. э. подходят к идее *бесконечности* и затем к приёмам анализа бесконечно малых, но это течение не получает развития; интерес к нему после попыток целого ряда средневековых учёных возобновляется лишь в эпоху

Возрождения в кон. 16 в. Таким образом, весь период до 17 в. остаётся в основном периодом элементарной М.

Начало рассматриваемого периода развития М. (греческая, эллинистическая и римская М.) относится к эпохе рабовладельч. общества, вторая же половина — к эпохе феодального (в Китае, Индии, Средней Азии, на Ближнем Востоке и в Зап. Европе); впрочем, как известно, феодализм в разных регионах приобретает существенно различные формы и развивается неравномерно (сказанное относится и к рабовладению). После бурного расцвета греч. и эллинистич. М. в условиях краха Римской империи приходит к окончательному упадку. В средние века в странах Востока с их большими гидротехнич. сооружениями, развитием мировых торговых центров, возросшими потребностями в крупных геодезич. работах и более практич. тенденциями чиновничьей бюрократии, тесно сращивающейся с купечеством, особенное развитие получает вычислительная сторона М.

В конце рассматриваемого периода на темпы роста западноевропейской М. оказывает влияние процесс зарождения в недрах феодализма нового буржуазного общества. В эпоху Возрождения (15—16 вв.) быстро возрастают запросы к М. со стороны инженеров, строителей, художников, военных, мореплавателей и географов. Вместе с тем создание в университетах возможности более свободной научной критики и научной конкуренции стимулирует решение трудных, казавшихся ранее неразрешимыми задач и более смелое развитие теории.

Древняя Греция. Развитие М. в Др. Греции приняло существенно иное направление, чем на Востоке. Если в отношении вычислительной техники, искусства решения задач алгебраич. характера и разработки математич. средств астрономии лишь в эллинистич. эпоху был достигнут и превзойдён уровень вавилонской М., то уже с 7—6 вв. до н. э. М. в Др. Греции вступила в совершенно новый этап логич. развития. Появилась потребность в отчётливых математич. доказательствах, были сделаны первые попытки систематич. построения математич. теории. М., как и всё научное и художественное творчество, перестала быть безличной, какой она была в странах Древнего Востока; она создаётся теперь известными по именам математиками, оставившими после себя математич. сочинения (дошедшие до нас лишь в отрывках, сохранённых позднейшими комментаторами). Это изменение характера математич. науки объясняется более развитой общественно-политической и культурной жизнью греч. государств, приведшей к высокому развитию диалектики, искусства спора, к необходимости отстаивать свои утверждения в борьбе с противником. Возникновение независимой от религии философской мысли привело к потребности в рациональном объяснении явлений природы, что поставило перед М. новые задачи.

Первоначально теоретич. М. развивалась в рамках натурфилософских систем, причём ранее всего в греч. поселениях на побережье Малой Азии (Иония), средиземноморских островах и на Аппенинском полуострове. Связь с более ранними восточными цивилизациями несомненна, хотя в деталях прослежена быть не может. Сами греки считали себя в области арифметики учениками финикийцев, объясняя высокое развитие арифметики у них потребностями их обширной торговли, начало же греч. геометрии традиция связывает с путешествиями в Египет (7—6 вв. до н. э.) первых греч. геометров и философов Фалеса Милетского (Иония) и Пифагора Самосского. В школе Пифагора арифметика из простого искусства счисления перерастает в теорию чисел. Суммируются простейшие арифметич. прогрессии [в частности, $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$], изучаются делимость чисел, различные виды средних (арифметическое, геометрическое и гармоническое), вопросы теории чисел (напр., разыскание т. н. совершенных чисел) связываются в школе Пифагора с мистич., магич. значением, приписываемым числовым соотношениям. В связи с геометрич. теоремой Пифагора был найден метод получения неограниченного ряда троек («пифагоровых чисел», т. е. троек целых чисел, удовлетворяющих соотношению $a^2+b^2=c^2$). Возможно, что эти знания восходят к Вавилону. В области геометрии задачи, к-рыми занимались греч. геометры 6—5 вв. до н. э., также естественно возникают из простейших запросов строительного искусства, землемерия и навигации. Таковы, напр., вопросы о соотношении между площадями подобных фигур, *квадратуре круга*, *трисекции угла* и *удвоении куба*. Новым, однако, является подход к этим

задачам, ставший необходимым с усложнением предмета исследования. Не ограничиваясь приближёнными, эмпирически найденными решениями, греч. геометры ищут точных доказательств и логически исчерпывающих решений проблемы. Ярким примером этой новой тенденции может служить доказательство несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. Во 2-й пол. 5 в. до н. э. философская и научная жизнь Греции сосредоточивается в Афинах. Здесь протекает основная деятельность Гиппия Элидского и Гиппократа Хиосского, к-рым приписывается первый систематич. учебник геометрии. К этому времени, несомненно, уже была создана разработанная система геометрии, не пренебрегавшая такими логич. тонкостями, как доказательство случаев равенства треугольников и т. п. Отражением в М. первых, хотя бы и чисто умозрительных, попыток рационального объяснения строения материи явилось едва ли не самое замечательное достижение геометрии 5 в. до н. э.— разыскание всех пяти правильных многогранников — результат поисков идеальных простейших тел, могущих служить основными камнями мироздания.

Принципиально новым шагом вперёд явилось возникновение в натурфилософских школах 6—5 вв. до н. э. идеи бесконечности, в различных формах получившей применения в М. На границе 5 и 4 вв. до н. э. Демокрит, исходя из атомистич. представлений, создаёт способ определения объёмов, послуживший первым вариантом *неделимых метода*, одного из исходных пунктов исчисления бесконечно малых. Однако логич. трудности, присущие понятиям бесконечности и нашедшие выражение в апориях Зенона Элейского (5 в. до н. э.), привели к заключению, что результаты, полученные с помощью метода неделимых, нельзя считать строго доказанными. Стандартным приёмом измерения различных площадей и объёмов, не поддающихся определению элементарными средствами, стал *исчерпывания метод*, состоящий в приближении искомой величины сходящимися к ней снизу и сверху последовательностями известных величин. Так, площадь круга аппроксимировалась последовательностями вписанных и описанных правильных многоугольников с неограниченно возрастающим числом неограниченно уменьшающихся сторон. Возможно, что толчок в этом направлении сообщили первые попытки решить задачу квадратуры круга, вписывая в него правильные многоугольники, получающиеся из вписанного треугольника или квадрата с помощью удвоения сторон: для каждого такого многоугольника можно построить равновеликий квадрат с помощью циркуля и линейки. Рассматривая круг как многоугольник с бесконечным числом сторон философ Антифонт (5 в. до н. э.) сделал вывод, что можно построить с помощью тех же средств и квадрат, равновеликий кругу. Некорректность такого умозаключения была вскоре установлена.

Наиболее значительным конкретным достижением математиков 4 в. до н. э. можно считать связанные с тенденцией к логич. анализу основ геометрии исследования Евдокса Книдского, разработавшего общую теорию пропорций и давшего первое доказательство теоремы об объёме пирамиды, удовлетворявшее возросшим требованиям к строгости математич. выводов. По поводу этого доказательства им было сформулировано общее допущение (называемое часто аксиомой Архимеда), лежащее в основе метода исчерпывания, представляющего собой, по существу, раннюю форму теории пределов. В стороне от главного течения М. в 4 в. до н. э. следует отметить начало математич. разработки механики у Архита Тарентского — полководца и автора одного из решений задачи об удвоении куба.

Эллинистическая и римская эпоха. С 3 в. до н. э. на протяжении семи столетий основным центром научных и особенно математич. исследований являлась Александрия. Здесь в обстановке объединения различных мировых культур, больших строительных задач и невиданного ранее по своей широте государственного покровительства науке греч. М. достигла своего высшего расцвета. Несмотря на распространение греч. образованности и научных интересов во всём эллинистич. и римском мире, Александрия с её «музеем», являвшимся первым научно-исследовательским институтом в современном смысле слова, и библиотеками обладала столь большой притягательной силой, что почти все крупнейшие учёные стекались сюда. Из упоминающихся ниже математиков лишь Архимед остался верным родным Сиракузам. Наибольшей напряжённостью

математич. творчества отличается первый век александрийской эпохи (3 в. до н. э.). Этому веку принадлежат Евклид, Архимед, Эратосфен и Аполлоний Пергский.

Сложные гидротехнич. сооружения (напр., архимедов винт), требования военной техники (метательные машины Архимеда), запросы мореплавания (исследования Архимеда о равновесии и устойчивости плавающих тел), развитие геодезии и картографии (определение Эратосфеном размеров земного шара), а также разработка точных астрономич. измерений и вычислений (Юлианское приближение к длине года, равное $365^1/_4$ дней), наконец, развитие механики и оптики — всё это поставило перед М. множество новых задач. 3 в. до н. э. явился веком плодотворного соединения соответствующего этим требованиям стремительного развития М. вширь с глубиной теоретич. мысли. В частности, возникший из прикладных нужд интерес к приближённому измерению величин и приближённым вычислениям не привёл математиков 3 в. до н. э. к отказу от математич. строгости. Все многочисленные приближённые извлечения корней и даже все астрономич. вычисления производились ими с точным указанием границ погрешности по типу знаменитого архимедова определения длины окружности в форме безукоризненно доказанных неравенств

$$3\tfrac{10}{71}\,d < p < 3\tfrac{1}{7}\,d,$$

где p — длина окружности с диаметром d. Это отчётливое понимание того, что приближённая М. не есть «нестрогая» М., было позднее надолго забыто.

В своих «Началах» Евклид собрал и подверг окончательной логич. переработке достижения предыдущего периода в области геометрии (см. *«Начала» Евклида*). Вместе с тем в «Началах» же Евклид впервые заложил основы систематич. теории чисел, доказав бесконечность ряда простых чисел и построив законченную теорию делимости. Наконец, «Начала» содержат во второй, шестой и десятой книгах своеобразную геометрич. замену алгебры, позволившую в геометрич. форме не только решать квадратные уравнения, но и производить сложные преобразования квадратичных иррациональных выражений. В стиле этой же «геометрической алгебры» Архимед сформулировал и доказал теорему о сумме квадратов членов арифметич. прогрессии. Из геометрич. работ, не вошедших в «Начала», наибольшее значение для дальнейшего развития М. имело создание Аполлонием Пергским законченной теории конич. сечений. Основной заслугой Архимеда в геометрии явилось определение разнообразных площадей и объёмов (в т. ч. площадей параболич. сегмента и поверхности шара, объёмов шара, шарового сегмента, сегмента параболоида и т. д.) и центров тяжести (напр., шарового сегмента и сегмента параболоида); архимедова спираль является лишь одним из примеров изучавшихся в 3 в. до н. э. трансцендентных кривых. В ряде случаев вычисления Архимеда равносильны применению интегральных сумм Дарбу и отысканию их пределов; наряду с интегрированными приёмами у него имеются и зачатки дифференциальных методов, применённые при построении касательной к носящей его имя спирали. После Архимеда, хотя и продолжался рост объёма научных знаний, александрийская наука уже не достигала прежней цельности и глубины. В астрономии это выразилось в том, что, несмотря на возросшую точность наблюдений и усовершенствования математич. аппарата, вполне усвоенные лучшими умами предшествующих поколений идеи Аристарха Самосского (конец 4 в.— 1-я пол. 3 в. до н. э.) о движении Земли вокруг Солнца и о расстояниях до неподвижных звёзд были отвергнуты и на долгие века утвердилась геоцентрич. система конечной вселенной, подробно изложенная в «Альмагесте» Птолемея (1—2 вв.). В М. зачатки анализа бесконечно малых, содержащиеся в эвристич. приёмах Архимеда (сообщённых им в специальном сочинении «О методе» с указанием на их нестрогость; в окончательном изложении он считал нужным заменять их методом исчерпывания), не получили дальнейшего серьёзного развития.

Существенным недостатком всей М. древнего мира было отсутствие окончательно сформированного понятия иррационального числа. Это обстоятельство привело влиятельных философов 4 в. до н. э. (как, напр., Аристотеля) к полному отрицанию законности применения арифметики к изучению геометрич. величин. В действительности, в общей теории пропорций Евдокса и в методе

исчерпывания математикам 4 и 3 вв. до н. э. всё же удалось косвенным образом осуществить это применение арифметики к геометрии. Ближайшие века принесли не положительное разрешение проблемы путём создания фундаментального нового понятия (иррационального числа), а постепенное её забвение, ставшее возможным с постепенной утратой представлений о математич. строгости. На этом этапе истории М. временный отказ от математич. строгости оказался, однако, полезным, открыв возможность беспрепятственного развития алгебры, допускавшейся в рамках строгих концепций евклидовых «Начал» лишь в чрезвычайно стеснительной форме «геометрической алгебры» отрезков, площадей и объёмов.

Значительные успехи в этом направлении можно отметить в «Метрике» Герона Александрийского (вероятно, 1 в.), известного своими работами по геодезии, составившими основу грандиозной практич. деятельности римских геодезистов. Это замечательное сочинение, являющееся первым дошедшим до нас самостоятельным изложением приёмов вычислительной геометрии, содержит, между прочим, т. н. формулу Герона (известную, впрочем, ещё Архимеду)

$$s = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

для площади треугольника (под знаком корня произведение четырёх отрезков — выражение, геометрически бессмысленное). Однако самостоятельное и широкое развитие настоящего алгебраич. исчисления встречается лишь в «Арифметике» Диофанта Александрийского (вероятно, 3 в.), посвящённой в основном решению уравнений. Здесь появляются первые известные нам начатки алгебраич. символики, формулируется правило перенесения членов из одной части уравнения в другую, производится умножение обеих частей уравнений на одно и то же выражение, даются общие приёмы решения квадратных уравнений, решаются также нек-рые задачи, приводящие к уравнениям третьей степени, и задачи на неопределённые уравнения с несколькими неизвестными. Диофант ищет всегда положительные решения; однако при умножении алгебраич. выражений употребляет правило для умножения «отнимаемых» чисел, предваряющее позднейшие правила действий с отрицательными числами. Относя свои исследования к чистой арифметике, Диофант, естественно, ограничивается, в отличие от практика Герона, рациональными решениями, исключая тем самым возможность геометрич. или механич. приложений своей алгебры. Тригонометрия воспринимается в древнем мире в большой мере как часть астрономии, а не как часть М. К ней так же, как и к вычислительной геометрии Герона, не предъявляется требований полной строгости формулировок и доказательств. Гиппарх (2 в. до н. э.) первый составил таблицы хорд, исполнявшие роль наших таблиц синусов. Начала сферич. тригонометрии создаются Менелаем (1 в.) и Птолемеем. Птолемею же принадлежит инициатива систематич. употребления широт и долгот для обозначения географич. мест, что явилось, по-видимому, первой формой употребления системы *координат*.

В области чистой М. деятельность учёных последних веков древнего мира (кроме Диофанта) всё более сосредоточивается на комментировании старых авторов. Труды учёных-комментаторов этого времени [Паппа (3 в.), Прокла (5 в.) и др.], при всей их универсальности, не могли в обстановке упадка античного мира привести к объединению изолированно развивавшихся алгебры Диофанта, включённой в астрономию тригонометрии, и откровенно нестрогой вычислительной геометрии Герона в единую, способную к большому развитию науку.

Китай. Наличие у китайских математиков высокоразработанной техники вычислений и интереса к общим алгебраич. методам обнаруживает уже «Математика в девяти книгах», составленная по более ранним источникам во 2—1 вв. до н. э. В этом сочинении, положившем начало прогрессу М. в Китае вплоть до 14 в., описываются, в частности, способы извлечения квадратных и кубических корней из целых чисел. Большое число задач решается так, что их можно понять только как примеры, служившие для разъяснения отчётливо воспринятой схемы исключения неизвестных в системах линейных уравнений. В связи с календарными расчётами в Китае возник интерес к задачам такого типа: при делении числа на 3 остаток есть 2, при делении на 5 остаток есть 3, а при делении на 7 остаток есть 2, каково это число? Сунь-цзы (3 в.) и более пол-

но Цзинь Цзюшао (13 в.) дают изложенное на примерах описание регулярного алгоритма для решения таких задач. Примером высокого развития вычислительных методов в геометрии может служить результат Цзу Чунчжи (2-я пол. 5 в.), к-рый, вычисляя площади нек-рых вписанных в круг и описанных многоугольников, показал, что отношение π длины окружности к диаметру лежит в пределах

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927.$$

Как правило, впрочем, в задачах вычислительной геометрии пользовались приближённым значением π, равным 3. Примечательно, что наряду с этим был сформулирован т. н. принцип Кавальери, применённый к сравнению объёма шара диаметра d с объёмом тела, заключённого между поверхностями двух вписанных в куб d^3 цилиндров со взаимно перпендикулярными осями. Ранее объём этого тела, равный $(^2/_3)d$, определил Архимед, вывод к-рого не сохранился. Вопрос о возможных связях между М. Др. Китая и Др. Греции, а также Вавилона остаётся открытым.

Особенно замечательны работы китайцев по численному решению уравнений. Геометрич. задачи, приводящие к уравнениям третьей степени, впервые встречаются у астронома и математика Ван Сяотуна (7 в.). Изложение методов решения уравнений четвёртой и высших степеней было дано в работах математиков 13—14 вв. Цзинь Цзюшао, Ли Е, Ян Хуэя и Чжу Шицзе.

Индия. Наиболее ранние сведения о М. в древней Индии встречаются в литературе 7—5 вв. до н. э., содержащей правила построения алтарей. Уже в это время здесь, как и в Др. Греции и ранее в Вавилоне, была известна и применялась теорема Пифагора. Расцвет индийской М. относится к 5—12 вв. (наиболее известны индийские математики Ариабхата I, Брахмагупта, Бхаскара II). Индийцам принадлежат две основные заслуги. Первой из них является введение в широкое употребление современной десятичной позиционной системы счисления и систематич. употребление нуля для обозначения отсутствия единиц данного разряда. Происхождение употреблявшихся в Индии цифр, называемых теперь «арабскими», не вполне выяснено. Второй, ещё более важной заслугой индийских математиков является создание алгебры, свободно оперирующей не только с дробями, но и с иррациональными и отрицательными числами. Однако обычно при истолковании решений задач отрицательные решения считаются невозможными. Вообще следует отметить, что в то время как дробные и иррациональные числа с самого момента своего возникновения связаны с измерением непрерывных величин, отрицательные числа возникают в основном из внутренних потребностей алгебры и лишь позднее (в полной мере в 17 в.) получают самостоятельное значение.

Брахмагупта дал общее правило решения квадратных уравнений (объединяя при помощи употребления отрицательных чисел различные случаи, рассматривавшиеся Диофантом, в один). Бхаскара указал на двузначность квадратного корня, занимался исследованием иррациональных выражений вида $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, делал преобразования типа $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, владел приёмами освобождения дроби от иррациональности в знаменателе, решал нек-рые частные случаи уравнений высших степеней. Наконец, Брахмагупта и Бхаскара дали общие методы решения в целых числах неопределённого уравнения первой степени с двумя неизвестными, а также уравнений вида: $ax^2+b=cy^2$ и $xy=ax+by+c$. В тригонометрии заслугой индийских математиков явилось введение линий синуса, косинуса, синус-верзуса.

Средняя Азия и Ближний Восток. Арабские завоевания и кратковременное объединение огромных территорий под властью арабских халифов привели к тому, что в течение 9—15 вв. учёные Ср. Азии, Бл. Востока, Сев. Африки и Пиренейского п-ова пользовались гл. обр. арабским языком. Наука здесь развивается в мировых торговых городах, в обстановке широкого международного общения и государственной поддержки больших научных начинаний. Блестящим завершением этой эпохи явилась в 15 в. деятельность Улугбека, к-рый при своем дворе в обсерватории в Самарканде собрал более ста учёных и организовал долго остававшиеся непревзойдёнными по точности астрономич. наблюдения, вычисление математич. таблиц и т. п.

В истории науки длительное время господствовало мнение, что роль «арабской культуры» в области М. сводится в основном к сохранению и передаче математикам Зап. Европы математич. открытий древнего мира и Индии. (Так, сочинения греч. математиков впервые стали известны в Зап. Европе по арабским переводам.) В действительности вклад математиков, писавших на арабском языке, и, в частности, математиков, живших на территории современной советской Ср. Азии и Кавказа (хорезмийских, узбекских, таджикских, азербайджанских), в развитие науки значительно больше.

В 1-й пол. 9 в. Мухаммед бен Муса аль-Хорезми, работавший в багдадском «Доме мудрости», своего рода академии, написал сочинение об «индийском счете», оригинальный текст к-рого до сих пор не обнаружен, но к-рое известно по неполному латинскому переводу, а также по обработкам, сделанным на Пиренейском п-ове в 12 в. Это сочинение явилось основным источником распространения десятичной позиционной системы счисления на Востоке и затем в Европе. Тот же аль-Хорезми впервые дал изложение алгебры как самостоятельной науки. Термин «алгебра» производят от начала названия сочинения аль-Хорезми «Аль-джебр», по к-рому европейские математики раннего средневековья познакомились с решением квадратных уравнений. Вскоре после аль-Хорезми впервые начинают систематически рассматриваться задачи, приводящие к уравнениям третьей степени. Среднеазиатский учёный Бируни (кон. 9 в.— 1-я пол. 10 в.) привёл задачу о нахождении стороны правильного девятиугольника к решению уравнения $x^3+1=3x$ и получил приближённое решение этого уравнения в виде шестидесятеричной дроби. Задача о построении правильного семиугольника была сведена к решению уравнения $x^3+1=2x+x^2$. Ибн аль-Хайсам из Ирака (кон. 10 в.— нач. 11 в.) свёл одну из задач геометрич. оптики к решению уравнения четвёртой степени.

Омар Хайям (11—12 вв.) систематически изучил уравнения третьей степени, дал их классификацию, выяснил условия их разрешимости (в смысле существования положительных корней). Омар Хайям в своём алгебраич. трактате говорит, что он много занимался поисками точного решения уравнений третьей степени. В этом направлении поиски среднеазиатских метематиков не увенчались успехом, но им были хорошо известны как восходящие к греч. М. геометрические (при помощи конич. сечений), так и приближённые численные методы решения. Заимствовав от индийцев десятичную систему счисления с употреблением нуля, математики Ср. Азии и Бл. Востока применяли в больших научных вычислениях по преимуществу шестидесятеричную систему (по-видимому, в связи с шестидесятеричным делением углов в астрономии). На этой основе ими была создана и единая система обозначения шестидесятеричных целых и дробных чисел: запись

$$43;\ 0;\ 16;\ +8;\ 37$$

(знак + здесь отделяет целые разряды от дробных) обозначала число

$$43\cdot 60^2+0\cdot 60+16+\frac{8}{60}+\frac{37}{60^2}.$$

Абу-ль-Вефа (10 в.), уже пользовавшийся этой системой, написал сочинение о способах извлечения корней третьей, четвёртой и пятой степеней. Омар Хайям в недошедшем до нас сочинении изложил способы извлечения корней с любым натуральным показателем; позднее их описал Насирэддин Туси (13 в.), сформулировавший словесно формулу бинома Ньютона для натуральных показателей и правило образования биномиальных коэффициентов

$$C_n^m=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^m.$$

В связи с астрономич. и геодезич. работами большое развитие получила тригонометрия. Аль-Баттани (кон. 9 в.— нач. 10 в.) ввёл в употребление тригонометрич. функции синус, тангенс и котангенс, Абу-ль-Вефа — все шесть тригонометрич. функций, он же выразил словесно алгебраич. зависимости между ними, вычислил таблицы синусов через 10′ с точностью до $^1/_{60^4}$ и таблицы тангенсов и установил теорему синусов для сферич. треугольников. Насирэддин Туси достиг известного завершения разработки сферич. тригонометрии, систематически рассмотрев все шесть случаев решения сферич. треугольников; сам он впервые нашёл решение двух труднейших случаев (определение углов по

трём сторонам и сторон по трём углам). Насирэддин Туси перевёл на арабский язык и комментировал «Начала» Евклида; комментарии к «Началам» составил также Омар Хайям. Их занимает принципиальный вопрос о доказуемости постулата о параллельных. Собственные их сочинения написаны с большим вниманием к изложению строгих доказательств теорем. Принципиальное значение имеет возникновение у Омар Хайяма и Насирэддина Туси ясной концепции действительного (положительного) числа. Напр., о произвольном отношении величин (соизмеримых или несоизмеримых) Насирэддин Туси писал: «каждое из этих отношений может быть названо числом, которое определяется единицей так же, как один из членов этого отношения определяется другим из этих членов».

В заключение следует специально остановиться на достижениях сотрудника Улугбека аль-Каши (нач. 15 в.). Аль-Каши дал систематич. изложение арифметики десятичных дробей, к-рые справедливо считал более доступными, чем шестидесятеричные; при этом он подробно разработал приёмы своих предшественников. В «Трактате об окружности» (ок. 1427) аль-Каши, определяя периметры вписанного и описанного $3 \cdot 2^{28}$-угольников, нашёл π с семнадцатью десятичными знаками. В связи с построением обширных таблиц синусов аль-Каши дал весьма совершенный итерационный метод численного решения кубич. уравнений, к-рый применил к столь же точному вычислению $\sin 1°$.

Западная Европа до 16 века. 12—15 вв. являются для зап.-европейской М. по преимуществу периодом усвоения наследства древнего мира и Востока. Тем не менее уже в этот период, не приведший ещё к открытию особенно значительных новых математич. фактов, общий характер европейской математич. культуры отличается рядом существенных прогрессивных черт, обусловивших возможность стремительного развития М. в последующие века. Высокий уровень требований быстро богатеющей и политически независимой буржуазии итальянских городов привёл к созданию и широкому распространению учебников, соединяющих практическое общее направление с большой обстоятельностью и научностью. Меньше чем через 100 лет после появления в 12 в. первых латинских переводов греческих и арабских математич. сочинений Леонардо Пизанский (Фибоначчи) выпускает в свет свои «Книгу об абаке» (1202) и «Практику геометрии» (1220), на высоком научном уровне излагающие арифметику, коммерческую арифметику, алгебру и геометрию. К концу рассматриваемой эпохи (с изобретением книгопечатания) учебники получают ещё более широкое распространение. Основными центрами теоретической научной мысли в это время становятся университеты. Прогресс алгебры как теоретич. дисциплины, а не только собрания практич. правил для решения задач, сказывается в ясном понимании природы иррациональных чисел как отношений несоизмеримых величин [Фома Брадвардин (1-я пол. 14 в.) и Н. Орем (сер. 14 в.)] и особенно во введении дробных (Н. Орем), отрицательных и нулевых [Н. Шюке (кон. 15 в.)] показателей степеней. Здесь же возникают первые, предваряющие следующую эпоху идеи о бесконечно больших и бесконечно малых величинах. В Оксфордском и Парижском университетах [Р. Суайнсхед, Суайнскод (сер. 14 в.), Н. Орем и др.] развиваются первые элементы теории изменения текущих величин, как функций времени и их графич. представление; впервые объектом изучения становится неравномерное движение и вводятся понятия мгновенной скорости и ускорения. Одним из результатов является открытие основных свойств равномерноускоренного прямолинейного движения, однако вне связи с проблемой падения тяжёлых тел. В рассмотрение вводятся нек-рые неограниченно протяжённые площади конечной величины. Важным средством исследования служит при этом сходящаяся бесконечная геометрич. прогрессия. С другой стороны, замечательным открытием Н. Орема является точное доказательство расходимости гармонич. ряда, вновь открытое в 17 в. Эта теория, излагавшаяся во многих университетах Европы и книгах, оказала влияние на формирование М. и механики таких учёных 17 в., как Дж. Непер, Г. Галилей и др. вплоть до И. Ньютона. Широкий размах научных исследований этой эпохи нашёл отражение не только в многочисленных переводах и изданиях греческих и арабских авторов, но и в таких начинаниях, как составление обширных тригонометрич. таблиц, вычисленных Региомонтаном (И. Мюллером) с точностью до седьмого знака.

Значительно совершенствуется математич. символика (см. *Математические знаки*). Развиваются научная критика и полемика. Поиски решения трудных задач, поощряемые обычаем публичных состязаний в их решении, приводят к первым доказательствам неразрешимости. Уже Леонардо Пизанский в соч. «Цветок» (ок. 1225), в к-ром собраны предложенные ему и блестяще решённые им задачи, доказал неразрешимость уравнений $x^3+2x^2+10x=20$ не только в рациональных числах, но и при помощи простейших квадратичных иррациональностей (вида $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ и т. п.).

Западная Европа в 16 веке. Этот век был первым веком превосходства Зап. Европы над древним миром и Востоком. Так было и в астрономии (открытие Н. Коперника) и в механике (к концу этого столетия уже появляются первые исследования Г. Галилея), так в целом обстоит дело и в М., несмотря на то, что в нек-рых направлениях европейская наука ещё отстаёт от достижений среднеазиатских математиков 15 в. и что в действительности большие новые идеи, определившие дальнейшее развитие новой европейской М., возникают лишь в следующем 17 в. В 16 же веке казалось, что новая эра в М. начинается с открытием алгебраич. решения уравнений третьей (С. Ферро, ок. 1515, и позднее и независимо Н. Тартальей, ок. 1530) и четвёртой (Л. Феррари, 1545) степеней, к-рое считалось в течение столетий неосуществимым. Дж. Кардано исследовал уравнения третьей степени, открыв т. н. неприводимый случай, в к-ром действительные корни уравнения выражаются комплексно. Это заставило Дж. Кардано, хотя и очень неуверенно, признать пользу вычислений с введёнными им комплексными числами; основные правила действий с комплексными числами вскоре систематически изложил Р. Бомбелли (1572). Дальнейшее развитие алгебра получила у Ф. Виета — основателя настоящего алгебраич. буквенного исчисления (1591) (до него буквами обозначились лишь неизвестные). Из других достижений 16 в. следует указать разложение квадратных корней в непрерывную дробь (Р. Бомбелли, 1572), первое точное аналитич. выражение для π в виде бесконечного произведения (Ф. Виет, 1593), определение тригонометрич. функций для аргумента, изменяющегося до $+\infty$(Ф. Виет, 1594). Учение о перспективе, развивавшееся в геометрии ещё ранее 16 в., излагается А. Дюрером (1525). Ф. Виет применил алгебраич. методы к исследованию возможности геометрич. построений, являясь также тонким мастером в синтетич. решении задач на построение [он восстановил (1600), напр., утерянное решение задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трёх данных]. М. Штифель (1544) вновь открыл закон образования биномиальных коэффициентов, а С. Стевин разработал (1585) правило арифметич. действий с десятичными дробями.

Россия до 18 века. Математич. образование в России находилось в 9—13 вв. на уровне наиболее культурных стран Вост. и Зап. Европы. Затем оно было надолго задержано монгольским нашествием. В 15—16 вв. в связи с укреплением Русского государства и экономич. ростом страны значительно выросли потребности общества в математич. знаниях. В кон. 16 в. и особенно в 17 в. появились многочисленные рукописные руководства по арифметике, геометрии, в к-рых излагались довольно обширные сведения, необходимые для практической деятельности (торговли, налогового дела, артиллерийского дела, строительства и пр.).

В Др. Руси получила распространение сходная с греко-византийской система числовых знаков, основанная на славянском алфавите,— славянская нумерация, к-рая в русской математич. литературе встречается до нач. 18 в., но уже с кон. 16 в. эту нумерацию всё более вытесняет принятая ныне десятичная позиционная система.

Наиболее древнее, известное нам математич. произведение относится к 1136 и принадлежит новгородскому монаху Кирику. Оно посвящено арифметико-хронологич. расчётам, к-рые показывают, что в то время на Руси умели решать сложную задачу вычисления пасхалий (определения на каждый год дня наступления праздника пасхи), сводящуюся в своей математич. части к решению в целых числах неопределённых уравнений первой степени. Арифметич. рукописи кон. 16—17 вв. содержат, помимо описания славянской и арабской нумерации, арифметич. операции с целыми положительными числами, а также

подробное изложение правил действия с дробями, тройное правило и решение уравнений первой степени с одним неизвестным посредством правила ложного положения. Для целей практич. использования общих правил в рукописях рассматривалось много примеров реального содержания и излагался т. н. дощаной счёт — прототип русских счётов. Подобным же образом была построена и первая арифметич. часть знаменитой «Арифметики» Л. Ф. Магницкого (1703). В геометрич. рукописях, в большинстве своём преследовавших также практич. цели, содержалось изложение правил определения площадей фигур и объёмов тел, часто приближённых, использовались свойства подобных треугольников и теорема Пифагора.

3. Период создания математики переменных величин

С 17 в. начинается существенно новый период развития математики. «Поворотным пунктом в математике была Декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и тем самым диалектика и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление...» (Энгельс Ф., см. Маркс К. и Энгельс Ф., Соч., 2 изд., т. 20, с. 573). Круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых теперь М., уже не исчерпывается числами, величинами и геометрич. фигурами. В основном это было обусловлено явным введением в М. идей движения и изменения. Уже в алгебре в скрытом виде содержится идея зависимости между величинами (значение суммы зависит от значений слагаемых и т. д.). Однако, чтобы охватить количественные отношения в процессе их изменения, надо было самые зависимости между величинами сделать самостоятельным предметом изучения. Поэтому на первый план выдвигается понятие *функции*, играющее в дальнейшем такую же роль основного и самостоятельного предмета изучения, как ранее понятия величины или числа. Изучение переменных величин и функциональных зависимостей приводит к основным понятиям *математического анализа*, вводящим в М. в явном виде идею бесконечного, к понятиям предела, производной, дифференциала и интеграла. Создаётся анализ бесконечно малых, в первую очередь в виде *дифференциального исчисления* и *интегрального исчисления*, позволяющий связывать конечные изменения переменных величин с их поведением в непосредственной близости отдельных принимаемых ими значений. Основные законы механики и физики записываются в форме *дифференциальных уравнений*, и задача интегрирования этих уравнений выдвигается в качестве одной из важнейших задач М. Разыскание неизвестных функций, определённых другого рода условиями, составляет предмет *вариационного исчисления*. Таким образом, наряду с уравнениями, в к-рых неизвестными являются числа, появляются уравнения, в к-рых неизвестны и подлежат определению функции.

Предмет изучения геометрии также существенно расширяется с проникновением в геометрию идей движения и преобразования фигур. Геометрия начинает изучать движение и преобразование сами по себе. Напр., в *проективной геометрии* одним из основных объектов изучения являются сами проективные преобразования плоскости или пространства. Впрочем, сознательное развитие этих идей относится лишь к кон. 18 в. и нач. 19 в. Гораздо раньше, с созданием в 17 в. *аналитической геометрии*, принципиально изменилось отношение геометрии к остальной М.: был найден универсальный способ перевода вопросов геометрии на язык алгебры и анализа и решения их чисто алгебраич. и аналитич. методами, а с другой стороны, открылась широкая возможность изображения (иллюстрирования) алгебраич. и аналитич. фактов геометрически, напр. при графич. изображении функциональных зависимостей. Эта обратная возможность была, однако, ограничена трёхмерностью пространства. Такое положение привело к склонности рассматривать арифметику, алгебру и анализ с теорией функций как части «чистой» М., определяемой в качестве науки о числах, величинах и зависимостях между изменяющимися величинами, геометрию же считать первой частью (предшествующей, напр., механике) «прикладной» М., применяющей результаты «чистой» М. и вырабатывающей свои методы для специального изучения геометрич. фигур и геометрич. преобразований. На сле-

дующем этапе развития такое подчинённое положение геометрии было вновь устранено.

Алгебра 17 и 18 вв. в значительной мере посвящена следствиям, вытекающим из возможности изучать левую часть уравнения $P(x)=0$ как функцию переменного x. Этот подход к делу позволил изучить вопрос о числе действительных корней, дать методы их отделения и приближённого вычисления, в комплексной же области привёл Ж. Д 'Аламбера (и почти одновременно и независимо Л. Эйлера) к не вполне строгому, но для математиков 18 в. достаточно убедительному доказательству «основной теоремы алгебры» о существовании у любого алгебраич. уравнения хотя бы одного корня. Достижения «чистой» алгебры, не нуждающейся в заимствованных из анализа понятиях о непрерывном изменении величин, в 17—18 вв. были тоже значительны (достаточно указать здесь на решение произвольных систем линейных уравнений при помощи определителей, разработку теории делимости многочленов, исключения неизвестных и т. д.), однако сознательное отделение собственно алгебраич. фактов и методов от фактов и методов математич. анализа типично лишь для более позднего времени (2-я пол. 19 в.— 20 в.). В 17—18 вв. алгебра в значительной мере воспринималась как первая глава анализа, в к-рой вместо исследования произвольных зависимостей между величинами и решения произвольных уравнений ограничиваются зависимостями и уравнениями алгебраическими.

Создание новой М. переменных величин в 17 в. было делом учёных передовых стран Зап. Европы, причём более всего И. Ньютона и Г. Лейбница. В 18 в. одним из основных центров научных математич. исследований становится также Петербургская академия наук, где работает ряд крупнейших математиков того времени иностранного происхождения (Л. Эйлер, Д. Бернулли) и постепенно складывается русская математич. школа, блестяще развернувшая свои исследования в 19 в.

17 век. Охарактеризованный выше новый этап развития М. органически связан с созданием в 17 в. математич. естествознания, имеющего целью объяснение течения отдельных природных явлений действием общих, математически сформулированных законов природы. На протяжении 17 в. действительно глубокие и обширные математич. исследования относятся лишь к двум областям естественных наук — к механике [Г. Галилей открывает законы падения тел (1632, 1638), И. Кеплер — законы движения планет (1609, 1610), И. Ньютон — закон всемирного тяготения (1687)] и к оптике [Г. Галилей (1609) и И. Кеплер (1611) сооружают зрительные трубы, И. Ньютон развивает оптику на основе теории истечения, Х. Гюйгенс и Р. Гук — на основе волновой теории]. Тем не менее рационалистич. философия 17 в. выдвигает идею универсальности математич. метода (Р. Декарт, Б. Спиноза, Г. Лейбниц), придающую особенную яркость устремлениям этой, по преимуществу философской, эпохи в развитии М.

Серьёзные новые математич. проблемы выдвигают перед М. в 17 в. навигация (необходимость усовершенствования часового дела и создания точных хронометров), а также картография, баллистика, гидравлика. Авторы 17 в. понимают и любят подчёркивать большое практич. значение М. Опираясь на свою тесную связь с естествознанием, М. 17 в. смогла подняться на новый этап развития. Новые понятия, не укладывающиеся в старые формально-логич. категории М., получали своё оправдание в соответствии реальным соотношениям действительного мира. Так, напр., реальность понятия производной вытекала из реальности понятия скорости в механике; поэтому вопрос заключался не в том, можно ли логически оправдать это понятие, а лишь в том, как это сделать.

Математич. достижения 17 в. начинаются открытием логарифмов. Дж. Непер, опубликовавший свои таблицы в 1614, обосновывает их построение не ссылкой на давно известные свойства арифметич. и геометрич. прогрессий, а рассматривает непрерывное «течение» логарифма при изменении числа, т. е. впервые вводит представление о непрерывной функции, не заданной никаким алгебраич. выражением или геометрич. построением. В 1637 Р. Декарт публикует свою «Геометрию», содержащую основы координатного метода в геометрии, классификацию кривых с подразделением их на алгебраические и трансцендентные, а алгебраических — по «родам» (к роду m он относит в современной терминологии кривые порядков $2m-1$ и $2m$). В тесной связи с воз-

можностью представить корни уравнения $P(x)=0$ точками пересечения кривой $y=P(x)$ с осью абсцисс в алгебре исследуются действительные корни уравнения любой степени (Р. Декарт, И. Ньютон, М. Ролль). Исследования П. Ферма о максимумах и минимумах и разыскании касательных к кривым уже содержат в себе, по существу, приёмы дифференциального исчисления, но самые эти приёмы ещё не выделены и не развиты, и слова «производная» или «дифференциал» остаются ещё не произнесёнными. Другим источником анализа бесконечно малых является развитый И. Кеплером (1615) и Б. Кавальери (1635) метод неделимых, применённый ими к определению объёмов тел вращения и ряду других задач. В этом методе действительная принципиальная новизна основных понятий анализа бесконечно малых представляется в мистич. форме неразрешённого противоречия (напр., между объёмом тела и совокупностью не имеющих объёма плоских сечений, при помощи к-рых этот объём должен быть определён). Неудивительно поэтому, что приёмы И. Кеплера и Б. Кавальери подвергались критике (1635—41) со стороны П. Гульдина, предпочитавшего пользоваться классич. методом исчерпывания. Однако свободное употребление бесконечно малых одерживает окончательную победу в работах по определению площадей («квадратур») П. Ферма, Б. Паскаля и Дж. Валлиса. Так, в геометрич. форме были, по существу, созданы начала дифференциального и интегрального исчисления.

Параллельно развивается учение о бесконечных рядах. Свойства простейших рядов, начиная с геометрич. прогрессий, возникающих из представления обыкновенных дробей в виде периодических десятичных, изучил Дж. Валлис (1685). Н. Меркатор, интегрируя разложение $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\ldots$, получил разложение в степенной ряд $\ln(1+x)$. И. Ньютон вывел формулу бинома для любого показателя, интегрируя разложение $(1-x^2)^{-1/2}$, получил разложение $\arcsin x$ и, наконец, нашёл степенные ряды обратных к $y=\ln(1+x)$ и $y=\arcsin x$ функций

$$x=e^y-1=\frac{y}{1}+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+\ldots$$

и соответственно

$$x=\sin y=\frac{y}{1}-\frac{y^3}{6}+\frac{y^5}{120}-\ldots$$

В дальнейшем развитии учения о бесконечных рядах приняли участие почти все математики 17 в. (Дж. Грегори, Х. Гюйгенс, Г. Лейбниц, Я. Бернулли и др.). Следует отметить, что авторы 17 в. имели достаточно ясные представления о понятии предела последовательности и сходимости ряда и считали нужным доказывать сходимость употребляемых ими рядов. С созданием координатного метода и распространением представлений о направленных механич. величинах (скорости, ускорения) понятие отрицательного числа приобрело полную наглядность и ясность. Наоборот, комплексные числа, по-прежнему оставаясь побочным продуктом алгебраич. аппарата, продолжают быть по преимуществу лишь предметом бесплодных споров. С наибольшей определённостью их признавал А. Жирар, впервые (1629) заявивший, что каждое уравнение n-й степени имеет n корней (что, как известно, справедливо лишь в комплексной области и при надлежащем учёте кратности корней).

К последней трети 17 в. относится открытие дифференциального и интегрального исчисления в собственном смысле слова. В отношении публикации приоритет этого открытия принадлежит Г. Лейбницу, давшему развёрнутое изложение основных идей нового исчисления в статьях, опубликованных в 1682—86. В отношении же времени фактического получения основных результатов имеются все основания считать приоритет принадлежащим И. Ньютону, который к основным идеям дифференциального и интегрального исчисления пришёл в течение 1665—66. «Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов» И. Ньютона в 1669 был передан им в рукописи И. Барроу и Дж. Коллинзу и получил широкую известность среди английских математиков. «Метод флюксий» — сочинение, в к-ром И. Ньютон дал систематич. изложение своей теории,— был написан в 1670—71 (издан в 1736). Г. Лейбниц же начал свои исследования по анализу бесконечно малых лишь в 1673. И. Ньютон и Г. Лейб-

ниц впервые в общем виде рассмотрели основные для нового исчисления операции дифференцирования и интегрирования функций, установили связь между этими операциями (т. н. формула Ньютона — Лейбница) и разработали для них общий единообразный алгоритм. Подход к делу у И. Ньютона и Г. Лейбница, однако, различен. Для И. Ньютона исходными понятиями являются понятия «флюенты» (переменной величины) и её «флюксии» (скорости её изменения). Прямой задаче нахождения флюксий и соотношений между флюксиями по заданным флюентам (дифференцирование и составление дифференциальных уравнений) И. Ньютон противопоставлял обратную задачу нахождения флюент по заданным соотношениям между флюксиями, т. е. сразу общую задачу интегрирования дифференциальных уравнений; задача нахождения первообразной появляется здесь как частный случай интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения.

Такая точка зрения была вполне естественна для И. Ньютона как создателя математич. естествознания: его исчисление флюксий являлось просто отражением той идеи, что элементарные законы природы выражаются дифференциальными уравнениями, а предсказание хода описываемых этими уравнениями процессов требует их интегрирования. Для Г. Лейбница в центре внимания находился вопрос о переходе от алгебры конечного к алгебре бесконечно малых; интеграл воспринимался прежде всего как сумма бесконечно большого числа бесконечно малых, а основным понятием дифференциального исчисления являлись дифференциалы — бесконечно малые приращения переменных величин (наоборот, И. Ньютон, вводя соответствующее понятие «момента», стремился в более поздних работах от него освободиться). С публикации работ Г. Лейбница в континентальной Европе начался период интенсивной коллективной работы над дифференциальным и интегральным исчислением, интегрированием дифференциальных уравнений и геометрич. приложениями анализа, в к-рой принимали участие, кроме самого Г. Лейбница, Я. Бернулли, И. Бернулли, Г. Лопиталь и др. Здесь создаётся современный стиль математич. работы, при к-ром полученные результаты немедленно публикуются в журнальных статьях или ежегодных «Записках» академий наук и уже очень скоро после опубликования используются в исследованиях других учёных. Очень большую роль в распространении научной информации играет переписка между учёными.

Кроме аналитич. геометрии развивается в тесной связи с алгеброй и анализом *дифференциальная геометрия* [в области последней следует отметить, в частности, введение понятия радиуса кривизны у И. Кеплера (1604), изучение эволют и эвольвент у Х. Гюйгенса (1673) и т. п.]. В 17 в. закладываются основы дальнейшего развития чистой геометрии, гл. обр. в направлении создания основных понятий проективной геометрии. Ж. Дезарг, занимаясь теорией перспективы (1636), развил целую систему представлений о бесконечно удалённых элементах, ввёл понятие инволюции и т. д. Теория конич. сечений разрабатывается с проективной точки зрения Ж. Дезаргом (1639), Б. Паскалем (1640), Ф. Лаиром (1685). Из других открытий 17 в. следует отметить: в теории чисел — формулировку принципа математич. индукции (Б. Паскаль, 1665) и глубокие исследования П. Ферма, в значительной мере определившие дальнейшее развитие этой науки, разработку основных понятий комбинаторики (П. Ферма, Б. Паскаль, Г. Лейбниц); первые работы по теории вероятностей (П. Ферма, Б. Паскаль), увенчавшиеся в конце века результатом принципиального значения — открытием простейшей формы закона больших чисел (Я. Бернулли, опубликовано в 1713); теорию непрерывных дробей [П. Катальди (1613), Д. Швентер (1617—18), Дж. Валлис (1656), Х. Гюйгенс (1703)]; метод неопределённых коэффициентов (Р. Декарт, 1637); формулировку т. н. теоремы Эйлера о многогранниках (Р. Декарт, ок. 1620). Необходимо указать ещё на построение В. Шикардом (1623), Б. Паскалем (1641) и Г. Лейбницем (1673—74) первых счётных машин, оставшееся надолго, впрочем, без практич. последствий.

18 век. В нач. 18 в. общий стиль математич. исследований постепенно меняется. Успех 17 в., обусловленный в основном новизной метода, создавался гл. обр. смелостью и глубиной общих идей, что сближало М. с философией. К нач. 18 в. развитие новых областей М., созданных в 17 в., достигло того уров-

ня, при к-ром дальнейшее продвижение вперёд стало требовать в первую очередь искусства в овладении математич. аппаратом и изобретательности в разыскании неожиданных обходных решений трудных задач. Из двух величайших математиков 18 в. Л. Эйлер является наиболее ярким представителем этой виртуозной тенденции, а Ж. Лагранж, быть может, уступая Л. Эйлеру в количестве и разнообразии решённых задач, соединил блестящую технику с широкими обобщающими концепциями, типичными для французской математич. школы 2-й пол. 18 в., тесно связанной с большим философским движением французских просветителей и материалистов. Увлечение необычайной силой аппарата математич. анализа приводит, естественно, к вере в возможность его чисто автоматич. развития, в безошибочность математич. выкладок даже тогда, когда в них входят символы, лишённые смысла. Если при создании анализа бесконечно малых сказывалось неумение логически справиться с идеями, имевшими полную наглядную убедительность, то теперь открыто проповедуется право вычислять по обычным правилам лишённые непосредственного смысла математич. выражения, не опираясь ни на наглядность, ни на к.-л. оправдание законности таких операций. Из старшего поколения в эту сторону всё больше склоняется Г. Лейбниц, к-рый в 1702 по поводу интегрирования рациональных дробей при помощи их разложения на мнимые выражения говорит о «чудесном вмешательстве идеального мира» и т. п. Более реалистически настроенный Л. Эйлер не говорит о чудесах, но воспринимает законность операций с мнимыми числами и с расходящимися рядами [напр., по Л. Эйлеру, $+1-1+2-6+24-120+\ldots+(-1)^n n!+\ldots=0{,}5963475922\ldots$] как эмпирич. факт, подтверждаемый правильностью получаемых при помощи подобных преобразований следствий (позднее методы Л. Эйлера суммирования расходящихся рядов в уточнённом виде вошли в современную М.). Л. Эйлер и К. Маклорен начинают всё же работу по рациональному уяснению основ анализа бесконечно малых. Наиболее последовательным в стремлении к логич. строгости и отчётливости из математиков 18 в. представителем этой тенденции является Ж. Д'Аламбер. В частности, по вопросу о логич. основах анализа Ж. Д'Аламбер, развивая воззрения И. Ньютона и нек-рых его последователей, сформулировал в общих чертах близкие современным взгляды о переменных бесконечно больших и бесконечно малых величинах, о производной как конечном пределе отношения двух бесконечно малых и т. д. В России с критикой различных способов обоснования анализа выступил С. Е. Гурьев в «Опыте об усовершении елементов геометрии» (1798). Однако систематич. проведение логич. обоснования анализа было осуществлено лишь в 19 в. Поэтому Ж. Лагранж, не удовлетворённый незаконченными концепциями своих современников, сделал попытку освободиться сразу от всех трудностей, связанных как с самим понятием функции, так и с обоснованием анализа бесконечно малых, став на чисто алгебраич. точку зрения: он заменил непосредственное рассмотрение функций вычислениями с их рядами Тейлора и свёл таким образом дифференцирование и интегрирование и все дальнейшие операции анализа к алгебраич. действиям с коэффициентами рядов.

Если виднейшие математики 17 в. очень часто были в то же время философами или физиками-экспериментаторами, притом нередко просто любителями М. (как Р. Декарт, П. Ферма, Б. Паскаль и др.), то в 18 в. научная работа математика становится самостоятельной профессией. Математики 18 в.— это люди из разных кругов общества, рано выделившиеся своими математич. способностями, с быстро развивающейся академич. карьерой (Л. Эйлер, происходя из пасторской семьи в Базеле, в возрасте 20 лет был приглашён адъюнктом в Петерб. академию наук, 23 лет становится там же профессором, 39 лет — председателем физико-математич. класса Берлинской академии наук; Ж. Лагранж — сын французского чиновника, 19 лет — профессор в Турине, 30 лет — председатель физико-математич. класса Берлинской академии наук; П. Лаплас — сын французского крестьянина, 22 лет — профессор военной школы в Париже, 36 лет — член Парижской академии наук). При этом, однако, математич. естествознание (механика, математич. физика) и технич. применения М. остаются в сфере деятельности математиков. Л. Эйлер занимается вопросами кораблестроения и оптики, Ж. Лагранж создаёт основы аналитич. механики, П. Лап-

лас, считавший себя в основном математиком, также является крупнейшим астрономом и физиком своего времени и т. д.

М. в 18 в. обогатилась многими выдающимися результатами. Благодаря работам Л. Эйлера, Ж. Лагранжа и А. Лежандра теория чисел приобретает характер систематич. науки. Ж. Лагранж дал (1769, опубл. в 1771) общее решение неопределённых уравнений второй степени. Л. Эйлер установил (1772, опубл. в 1783) закон взаимности для квадратичных вычетов. Он же привлёк (1737, 1748, 1749) для изучения простых чисел дзета-функцию, чем положил начало аналитич. теории чисел.

При помощи разложений в непрерывные дроби Л. Эйлер доказал (1737, опубл. в 1744) иррациональность e и e^2, а И. Ламберт (1766, опубл. в 1768) — иррациональность π. В алгебре Г. Крамер (1750) ввёл для решения систем линейных уравнений определители (известные ранее Г. Лейбницу, не опубликовавшему своего открытия). Дальнейшей разработкой линейной алгебры занимались П. Лаплас и А. Вандермонд. И. Ньютон, Л. Эйлер и Э. Безу развивали теорию делимости многочленов и теорию исключения. О первых (неполных) доказательствах существования у каждого алгебраич. уравнения корня вида $A+B\sqrt{-1}$ (Ж. Д'Аламбер, Л. Эйлер) уже говорилось. Постепенно укореняется убеждение, что вообще мнимые выражения (не только в алгебре, но и в анализе) всегда приводимы к виду $A+B\sqrt{-1}$. Формулы Р. Котеса, А. Муавра и Л. Эйлера, связывающие показательную и тригонометрич. функции комплексных аргументов, привели к дальнейшему расширению применений комплексных чисел в анализе. Л. Эйлер применял комплексные переменные к вычислению нек-рых специальных интегралов, основываясь на дифференциальных уравнениях, к-рые связывают действительную и мнимую части функции комплексного переменного; ещё раньше к этим уравнениям пришёл на другом пути в работах по гидромеханике Ж. Д'Аламбер. Те же уравнения были получены позднее О. Коши и Б. Риманом, Л. Эйлер же применил в работах по картографии конформные отображения. Тем самым были сделаны первые шаги в общей теории аналитич. функций. И. Ньютон, Дж. Стирлинг, Л. Эйлер и П. Лаплас заложили основы *конечных разностей исчисления*. Ж. Лагранж развивал символич. исчисление, рассматривая положительные и отрицательные степени операторов Δ и d; П. Лаплас дал общие методы решения разностных уравнений. Б. Тейлор открыл (1715) формулу разложения произвольной функции в степенной ряд, известную, впрочем, ранее Дж. Грегори и И. Ньютону, но ими не опубликованную. У исследователей 18 в., особенно у Л. Эйлера, ряды становятся одним из самых мощных и гибких орудий анализа. С Ж. Д'Аламбера начинается серьёзное изучение условий сходимости рядов. Л. Эйлер, Ж. Лагранж и особенно А. Лежандр заложили основы исследования эллиптич. интегралов — первого вида неэлементарных функций, подвергнутого глубокому специальному изучению. И. Бернулли, Я. Риккати, Д. Бернулли, Л. Эйлер и А. Клеро интегрируют новые типы обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядка. Л. Эйлер дал (1739, опубл. в 1743) первый метод решения однородного линейного дифференциального уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами, решение неоднородного уравнения он опубликовал десять лет спустя. Ж. Д'Аламбер рассматривал системы дифференциальных уравнений, Ж. Лагранж и П. Лаплас развивали общую теорию линейных дифференциальных уравнений любого порядка. Ж. Д'Аламбер, Л. Эйлер, Г. Монж и Ж. Лагранж заложили основы общей теории дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, они же и П. Лаплас — второго порядка. Специальный интерес представляет введение в анализ разложения функций в тригонометрич. ряды, т. к. в связи с этой задачей, возникающей в ходе решения задачи волнового уравнения, выражающего малые колебания упругой струны, между Л. Эйлером, Д. Бернулли, Ж. Д'Аламбером, Г. Монжем и Ж. Лагранжем развернулась полемика по вопросу о понятии функции, подготовившая фундаментальные результаты 19 в. о соотношении между аналитич. выражением и произвольным заданием функции. Наконец, новым отделом анализа, возникшим в 18 в., является вариационное исчисление, созданное Л. Эйлером и Ж. Лагранжем. Я. Бернулли, А. Муавр, П. Лаплас

на основе отдельных достижений 17—18 вв. заложили начала *вероятностей теории.*

В области геометрии Л. Эйлер привёл к завершению систему элементарной аналитич. геометрии. Начиная с И. Ньютона, систематически изучаются кривые третьего порядка. Э. Варинг установил ряд свойств алгебраич. кривых любого порядка. В работах Л. Эйлера, А. Клеро, Г. Монжа и Ж. Менье были заложены основы дифференциальной геометрии пространственных кривых и поверхностей. Проблемы дифференциальной геометрии явились одним из источников упомянутого выше развития теории дифференциальных уравнений с частными производными. И. Ламберт развил теорию перспективы, а Г. Монж придал окончательную форму *начертательной геометрии.*

Из приведённого обзора видно, что М. 18 в., основываясь на идеях 17 в., по размаху работы далеко превзошла предыдущие века. Этот расцвет М. был связан по преимуществу с деятельностью академий; университеты играли меньшую роль. Отдалённость крупнейших математиков от университетского преподавания возмещалась той энергией, с к-рой все они, начиная с Л. Эйлера и Ж. Лагранжа, писали учебники и обширные, включающие отдельные исследования, трактаты. Новую струю в организацию науки внесла в кон. 18 в. Великая франц. революция. Крупнейшие учёные (Ж. Лагранж, П. Лаплас, А. Лежандр, Г. Монж) привлекаются к созданию метрич. системы мер, связанному с ней измерению меридиана, организованному на государственные средства вычислению новых тригонометрич. таблиц и т. д. Наиболее важным для дальнейшего развития М. оказалось учреждение в 1794 Политехнической школы в Париже, возглавленной Г. Монжем и сделавшейся для Франции в нач. 19 в. основным центром математич. культуры.

III. СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

Все созданные в 17 и 18 вв. разделы математич. анализа продолжали с большой интенсивностью развиваться в 19 и 20 вв. Чрезвычайно расширился за это время и круг их применений к задачам, выдвигаемым естествознанием и техникой. Однако, помимо этого количественного роста, с последних лет 18 в. и в нач. 19 в. в развитии М. наблюдается и ряд существенно новых черт.

1. Расширение предмета математики

Накопленный в 17 и 18 вв. огромный фактич. материал привёл к необходимости углублённого логич. анализа и объединения его с новых точек зрения. Открытие и введение в употребление геометрич. интерпретации *комплексных чисел* [К. Вессель, 1799, и Ж. Арган (Арганд), 1806], доказательство неразрешимости в радикалах общего алгебраич. уравнения пятой степени (Н. Абель, 1824), разработка О. Коши основ теории функций комплексного переменного, его работы по строгому обоснованию анализа бесконечно малых, создание Н. И. Лобачевским (1826, опубл. в 1829—30) и Я. Больяй (1832) *неевклидовой геометрии*, работы К. Гаусса (1827) по внутренней геометрии поверхностей — типичные примеры наметившихся на рубеже 18 и 19 вв. новых тенденций в развитии М.

Связь М. с естествознанием, оставаясь, по существу, не менее тесной, приобретает теперь более сложные формы. Большие новые теории возникают не только в результате непосредственных запросов естествознания или техники, но также из внутренних потребностей самой М. Таково в основном было развитие теории функций комплексного переменного, занявшей в нач. и сер. 19 в. центральное положение во всём математич. анализе. Главная линия развития заключалась здесь в том, что переход в комплексную область делал более ясными и обозримыми свойства подлежащих изучению функций. Широкий интерес к непосредственному реальному применению функций комплексного переменного, напр., как функций, задающих конформное отображение, развился позднее, хотя возможности таких применений были намечены ещё Л. Эйлером.

Ещё более замечательным примером теории, возникшей в результате внутреннего развития самой М., явилась «воображаемая геометрия» Лобачевского (см. *Лобачевского геометрия*). Возможность этой новой системы геометрии была усмотрена Н. И. Лобачевским на основе выяснения происхождения основных геометрич. понятий из материальной действительности и логич. анализа строе-

ния обычной евклидовой геометрии. Самому Н. И. Лобачевскому удалось применить свою геометрию лишь к вычислению нек-рых интегралов. Позднее были обнаружены связи его геометрии с теорией поверхностей и с теорией групп преобразований, геометрия эта нашла применение при исследовании важных классов аналитич. функций и т. д. Только в 20 в. с созданием теории относительности получило осуществление предположение Н. И. Лобачевского о возможности применения его геометрич. идей к исследованию реального физического пространства.

Можно привести ещё один пример того, как начавшийся в кон. 18 в. и в 1-й пол. 19 в. пересмотр с более общих точек зрения добытых ранее конкретных математич. фактов нашёл во 2-й пол. 19 в. и в 20 в. мощную поддержку в новых запросах естествознания. Теория групп ведёт своё начало с рассмотрения Ж. Лагранжем (1771) групп подстановок в связи с проблемой разрешимости в радикалах алгебраич. уравнений высших степеней. Э. Галуа (1830—32, опубл. в 1832, 1846) при помощи теории групп подстановок дал окончательный ответ на вопрос об условиях разрешимости в радикалах алгебраич. уравнений любой степени. В сер. 19 в. А. Кэли дал общее «абстрактное» определение группы. С.Ли разработал, исходя из общих проблем геометрии, теорию непрерывных групп. И лишь после этого Е. С. Фёдоров (1890) и А. Шёнфлис (1891) установили, что теоретико-групповым закономерностям подчинено строение кристаллов; ещё позднее теория групп становится мощным средством исследования в квантовой физике.

В более непосредственной и непрерывной зависимости от запросов механики и физики происходило формирование *векторного исчисления* и *тензорного исчисления*. Постепенно всё более обнаруживалось, что именно с точки зрения механики и физики «скалярные» величины, послужившие исходным материалом для формирования понятий действительного числа, являются лишь частным случаем величин многомерных. Рассмотрение функциональных зависимостей между такими величинами и составляет содержание векторного и тензорного исчисления. Перенесение векторных и тензорных представлений на бесконечномерные величины происходит в рамках *функционального анализа* и тесно связывается с потребностями современной физики.

Таким образом, в результате как внутренних потребностей М., так и новых запросов естествознания, круг количественных отношений и пространственных форм, изучаемых М., чрезвычайно расширяется; в него входят отношения, существующие между элементами произвольной группы, векторами, операторами в функциональных пространствах, всё разнообразие форм пространств любого числа измерений и т. п. При таком широком понимании терминов «количественные отношения» и «пространственные формы» приведённое в начале статьи определение М. применимо и на новом, современном этапе её развития (см. также *Пространство*).

Существенная новизна начавшегося в 19 в. этапа развития М. состоит в том, что вопросы необходимого расширения круга подлежащих изучению количественных отношений и пространственных форм становятся предметом сознательного и активного интереса математиков. Если прежде, напр., введение в употребление отрицательных и комплексных чисел и точная формулировка правил действий с ними требовали длительной работы, то теперь развитие М. потребовало выработки приёмов сознательного и планомерного создания новых геометрич. систем, новых «алгебр» с «некоммутативным» или даже «неассоциативным» умножением и т. д. по мере возникновения в них потребности. Но трудно переоценить важность той перестройки всего склада математич. мышления, к-рая для этого должна была произойти в течение 19 в. С этой идейной стороны, наиболее значительным среди открытий нач. 19 в. явилось открытие неевклидовой геометрии Лобачевского. Именно на примере этой геометрии была преодолена вера в незыблемость освящённых тысячелетним развитием М. аксиом, была понята возможность создания существенно новых математич. теорий путём правильно выполненной абстракции от налагавшихся ранее ограничений, не имеющих внутренней логич. необходимости, и, наконец, было обнаружено, что подобная абстрактная теория может получить со временем всё более широкие, вполне конкретные применения.

2. Вопросы обоснования математики. Роль теории множеств и математической логики

Чрезвычайное расширение предмета М. привлекло в 19 в. усиленное внимание к вопросам её «обоснования», т. е. критич. пересмотра её исходных положений (аксиом), построения строгой системы определений и доказательств, а также критич. рассмотрения логич. приёмов, употребляемых при этих доказательствах. Важность такого рода работы становится особо понятной, если учесть то, что было выше сказано об изменившемся характере взаимоотношений между развитием математич. теории и её проверкой на практич. материале, доставляемом естествознанием и техникой. При построении обширных и иногда весьма абстрактных теорий, охватывающих, помимо тех частных случаев, к-рые привели к их созданию, огромный материал, получающий конкретные применения лишь в перспективе десятилетий, ждать непосредственных сигналов о недостаточной корректности теории в форме зарегистрированных ошибок уже нельзя. Вместо этого приходится обратиться ко всему накопленному опыту работы человеческой мысли, к-рый как раз и суммируется в вырабатываемых постепенно наукой требованиях к «строгости» доказательств. В соответствии с этим работы по строгому обоснованию тех или иных отделов М. справедливо занимают значительное место в М. 19 и 20 вв. В применении к основам анализа (теория действительных чисел, теория пределов и строгое обоснование всех приёмов дифференциального и интегрального исчисления) результаты этой работы с большей или меньшей полнотой излагаются в настоящее время в большинстве учебников (даже чисто практич. характера). Однако до последнего времени встречаются случаи, когда строгое обоснование возникшей из практич. потребностей математич. теории запаздывает. Так в течение долгого времени уже на рубеже 19 и 20 вв. было с *операционным исчислением*, получившим весьма широкие применения в механике и электротехнике. Лишь с большим запозданием было построено логически безупречное изложение математич. теории вероятностей. И в настоящее время ещё отсутствует строгое обоснование многих математич. методов, широко применяемых в современной теоретич. физике, где много ценных результатов получается при помощи незаконных математич. приёмов, дающих, напр., иногда правильный ответ лишь «с точностью» до заведомо ошибочного множителя, поправляемого из посторонних данному «математич. выводу» соображений, или при помощи отбрасывания в сумме слагаемых, обращающихся в бесконечность, и т. п.

Только к кон. 19 в. сложился стандарт требований к логич. строгости, остающийся и до настоящего времени господствующим в практич. работе математиков над развитием отдельных математич. теорий. Этот стандарт основан на теоретико-множественной концепции строения любой математич. теории (см. *Множеств теория*, *Аксиоматический метод*). С этой точки зрения любая математич. теория имеет дело с одним или несколькими множествами объектов, связанных между собой нек-рыми отношениями. Все формальные свойства этих объектов и отношений, необходимые для развития теории, фиксируются в виде аксиом, не затрагивающих конкретной природы самих объектов и отношений. Теория применима к любой системе объектов с отношениями, удовлетворяющими положенной в её основу системе аксиом. В соответствии с этим теория может считаться логически строго построенной только в том случае, если при её развитии не используется никаких конкретных, не упомянутых в аксиомах свойств изучаемых объектов и отношений между ними, а все новые объекты или отношения, вводимые по мере развития теории сверх упомянутых в аксиомах, формально определяются через эти последние.

Из указанных требований, в частности, вытекает, что математич. теория, применимая к к.-л. системе объектов, применима автоматически и к любой «изоморфной» системе. Заметим по этому поводу, что кажущееся иногда весьма абстрактным понятие *изоморфизма* является просто математич. выражением идеи «моделирования» физич. явлений из к.-л. одной области (напр., тепловых) физич. явлениями иной природы (напр., электрическими).

Изложенная концепция строения математич. теории является, по существу, лишь нек-рой конкретизацией определения М. как науки о количественных отношениях в разъяснённом выше широком понимании термина «количественные

отношения». «Безразличие» количественных отношений к конкретной природ тех предметов, к-рые они связывают, находит здесь свое выражение в возможности свободно переходить от одной системы объектов к любой, ей изоморфной.

Теоретико-множественная концепция не только доставила основной в настоящее время стандарт математич. «строгости», но и позволила в значительной мере разобраться в разнообразии возможных математич. теорий и их систематизировать. Так, чистая алгебра определяется как наука о системах объектов, в к-рых задано конечное число операций, применимых (каждая) к определённому конечному числу объектов системы и производящих из них новый объект системы [напр., в случае алгебраич. поля — две операции (сложение и умножение) над двумя элементами каждая]. Этим чистая алгебра отделяется от анализа и геометрии (в собственном смысле слова, предполагающем известную «непрерывность» изучаемых пространств), к-рые существенно требуют введения «предельных» отношений, связывающих бесконечное число объектов.

Естественно, что аксиоматич. изложение к.-л. специальной математич. теории (напр., теории вероятностей) не начинают на пустом месте, а пользуются понятиями натурального или действительного числа. В результате этого безукоризненное проведение аксиоматич. изложения математич. теорий перестало быть чем-либо особенно обременительным и всё больше входит во всеобщее употребление. При изучении таких сложных и в то же время общих образований, как, напр., непрерывные группы, различные виды векторных пространств, этот способ изложения и исследования необходим для достижения полной ясности и избежания ошибок.

Во всех конкретных, хотя бы и весьма общих, математич. теориях (от теории действительных чисел до общей теории топологич. пространств и т. п.) точка зрения теории множеств себя вполне оправдала в том смысле, что благодаря её проведению из конкретных математич. исследований практически исчезли случаи длительных неясностей и разногласий по вопросу о корректности определений и достаточной убедительности доказательств отдельных теорем. Возникшие в самой теории множеств неясности и даже прямые противоречия связаны гл. обр. с теми её областями, где понятию бесконечного множества придаётся общность, излишняя для к.-л. приложений. С принципиальной стороны, однако, следует иметь в виду, что теоретико-множественное построение всех основных математич. теорий, начиная с арифметики натуральных и действительных чисел, требует обращения именно к теории бесконечных множеств, а их теория сама требует логич. обоснования, так как абстракция, приводящая к понятию бесконечного множества, законна и осмыслена лишь при определённых условиях, к-рые ещё далеко не выяснены.

Другую сторону строения любой математич. теории освещает *математическая логика*. Система аксиом в изложенном выше (теоретико-множественном) понимании лишь ограничивает извне область применения данной математич. теории, указывая свойства подлежащей изучению системы объектов с отношениями, но не даёт никаких указаний относительно логич. средств, при помощи к-рых эту математич. теорию придётся развивать. Напр., свойства системы натуральных чисел с точностью до изоморфизма задаются при помощи очень простой системы аксиом. Тем не менее решение вопросов, ответ на к-рые в принципе однозначно предопределён принятием этой системы аксиом, оказывается часто очень сложным: именно теория чисел изобилует давно поставленными и очень простыми по формулировке проблемами, не нашедшими и до настоящего времени решения. Возникает, естественно, вопрос о том, происходит ли это только потому, что решение нек-рых просто формулируемых проблем теории чисел требует очень длинной цепи рассуждений, составленной из известных и уже вошедших в употребление элементарных звеньев, или же потому, что для решения нек-рых проблем теории чисел необходимы существенно новые, не употреблявшиеся ранее приёмы логич. вывода.

Современная математич. логика дала на этот вопрос определённый ответ: никакая единая дедуктивная теория не может исчерпать разнообразия проблем теории чисел. Точнее, уже в пределах теории натуральных чисел можно сформулировать последовательность проблем такого рода, что для любой дедуктивной теории среди этих проблем найдётся неразрешимая в пределах данной

теории (К. Гёдель). При этом под «дедуктивной теорией» понимается теория, к-рая развивается из конечного числа аксиом при помощи построения сколь угодно длинных цепей рассуждений, составленных из звеньев, принадлежащих к конечному числу фиксированных для данной теории элементарных способов логич. вывода.

Таким образом было обнаружено, что понятие математич. теории в смысле теории, охватываемой единой системой аксиом теоретико-множественного типа, существенно шире, чем логич. понятие дедуктивной теории: даже при развитии арифметики натуральных чисел неизбежно неограниченное обращение к существенно новым способам логич. рассуждений, выходящим за пределы любого конечного набора стандартизированных приёмов.

Все те результаты, к-рые могут быть получены в пределах одной дедуктивной теории, могут быть также получены вычислением, производимым по данным раз и навсегда правилам. Если для решения нек-рого класса проблем даётся строго определённый рецепт их вычислительного решения, то говорят о математич. *алгоритме*. С самого создания достаточно разработанной системы математич. знаков проблемы построения достаточно общих и в то же время кратких алгоритмов занимали большое место в истории М. Но только в результате развития математич. логики начала создаваться общая теория алгоритмов и «алгоритмич. разрешимости» математич. проблем.

Отмеченной выше ограниченности возможностей любой фиксированной дедуктивной теории в теории алгоритмов соответствуют теоремы о невозможности «универсальных» алгоритмов для достаточно общих классов математич. проблем. Эти теоремы дали философии М. наиболее интересную и острую конкретизацию общего положения о том, что живое мышление принципиально отличается от работы любого вида вычисляющих автоматов.

Теория множеств, успешное построение большинства математич. теорий на основе теоретико-множественной аксиоматики и успехов математич. логики (с входящей в неё теорией алгоритмов) являются весьма важными предпосылками для разрешения многих философских проблем современной М. Благодаря теоретико-множественной переработке всех отделов М., решение проблем, связанных с понятием бесконечности в М., сведено к обоснованию и критич. выяснению содержания понятия бесконечного множества. Теоретико-множественная аксиоматика, как уже было указано, даёт средства для достаточно общей трактовки вопроса о количественном характере изучаемых М. отношений. Она же позволяет с единой точки зрения рассмотреть строение специальных математич. теорий, предметное содержание к-рых закрепляется при помощи соответствующей системы аксиом, и, таким образом, до известной степени осветить как вопрос об отношении математич. теории к действительности, так и вопрос о своеобразии математич. метода исследования. Как было отмечено, возникающее таким образом понятие математич. теории существенно шире, чем понятие дедуктивной теории в смысле формальной логики. Относящиеся к этому вопросу результаты современной математич. логики позволяют с полной конкретностью проследить диалектич. процесс создания дедуктивных теорий и алгоритмов, к-рые доставляют нам формально-логические и вычислительные средства для решения всё более широкого круга проблем математич. теории.

3. История математики в 19 веке и в начале 20 века

Начало и середина 19 века. В начале 19 в. происходит новое значительное расширение области приложений математич. анализа. Если до этого времени основными отделами физики, требовавшими большого математич. аппарата, оставались механика и оптика, то теперь к ним присоединяются электродинамика, теория магнетизма и термодинамика. Получают широкое развитие важнейшие разделы механики непрерывных сред, из к-рых только гидродинамика несжимаемой идеальной жидкости была создана ещё в 18 в. Д. Бернулли, Л. Эйлером, Ж. Д'Аламбером и Ж. Лагранжем. Быстро растут и математич. запросы техники. В нач. 19 в.— это вопросы термодинамики паровых машин, технич. механики, баллистики. В качестве основного аппарата новых областей механики и *математической физики* усиленно разрабатывается теория дифференциальных уравнений с частными производными и особенно теория потенциала.

В этом направлении работает большинство крупных аналитиков нач. и сер. 19 в.—К. Гаусс, Ж. Фурье, С. Пуассон, О. Коши, П. Дирихле, Дж. Грин, М. В. Остроградский. М. В. Остроградский заложил основы вариационного исчисления для функций нескольких переменных, нашёл (1826, опубл. в 1831) знаменитую формулу преобразования тройных интегралов в двойные и её n-мерное обобщение (1834, опубл. в 1838), усовершенствовал теорию замены переменных в кратных интегралах (1836, опубл. в 1838), получив, по существу, те результаты, к-рые были для общего n-мерного случая компактно формулированы позднее (1841) К. Якоби. В результате исследований по уравнениям математич. физики в работах Дж. Стокса и других возникает *векторный анализ* (одной из основных формул к-рого, впрочем, являлась, по существу, и упомянутая формула Остроградского).

Несмотря на господствовавшее в естествознании нач. 19 в. механистич. убеждение в возможности описать все природные явления дифференциальными уравнениями, под давлением запросов практики получает дальнейшее значительное развитие теория вероятностей. П. Лаплас и С. Пуассон создают с этой целью новый мощный аналитич. аппарат. В России применением теории вероятностей к приёмочному контролю и статистике занимаются М. В. Остроградский и В. Я. Буняковский; П. Л. Чебышев даёт строгое обоснование элементов теории вероятностей и доказывает свою знаменитую теорему (1867), объединившую в одной общей формулировке известные ранее формы закона больших чисел.

Как уже отмечалось, наряду с развитием работ, возникших из новых запросов естествознания и техники, чрезвычайное внимание математиков с самого начала 19 в. привлекают вопросы строгого обоснования анализа. Одним из первых приступил к исследованиям в этом направлении Б. Больцано, аналитически доказавший (1817) теорему о промежуточных значениях непрерывной функции; при этом он впервые дал современное определение непрерывной функции и доказал т. н. теорему Больцано — Вейерштрасса о существовании хотя бы одной предельной точки у всякого бесконечного ограниченного точечного множества. Для полной строгости выводов Б. Больцано не доставало теории действительного числа; в его рукописях, опубликованных лишь в наше время, имеется незавершённый набросок такой теории. Однако небольшая брошюра Б. Больцано (1817) оставалась незамеченной около полустолетия, и реальным отправным пунктом перестройки анализа стали курсы О. Коши, к-рый в 1821 и 1823 опубликовал читанные в Политехнической школе лекции, содержащие строгое изложение теории пределов, теории рядов, определение понятия непрерывности функции и основанное на теории пределов изложение дифференциального и интегрального исчисления (в частности, теорему существования интеграла от непрерывной функции). Нек-рые дополнения к этому изложению, а также теорема о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений, уже известные О. Коши в это время, были опубликованы позднее. Н. И. Лобачевский (1834) и независимо П. Дирихле (1837) отчётливо сформулировали определение функции как совершенно произвольного соответствия (восходящее, впрочем, к Л. Эйлеру, 1755). П. Дирихле доказал (1829, 1837) изобразимость любой функции с конечным числом максимумов и минимумов рядом Фурье; перекрывающиеся (в смысле общности) условия сходимости рядов Фурье дал Н. И. Лобачевский (1834—35).

Выше уже отмечалась работа К. Весселя, содержавшая геометрич. интерпретацию комплексных чисел, но она оставалась незамеченной. В 1799 К. Гаусс опубликовал первое доказательство основной теоремы алгебры, осторожно формулируя, однако, эту теорему в чисто действительных терминах (разложимость действительного многочлена на действительные множители первой и второй степени). Лишь значительно позже (1831) К. Гаусс явно изложил теорию комплексных чисел. Тем временем Ж. Арган опубликовал в 1806 теорию комплексных чисел с их геометрич. интерпретацией и доказательством т. н. леммы Д'Аламбера, а в 1815 — доказательство основной теоремы алгебры, близкое по идее к доказательству О. Коши (1821).

На основе ясного понимания природы комплексных чисел возникает теория функций комплексного переменного. К. Гаусс очень много знал в этой области, но почти ничего не опубликовал. Общие основы теории были заложены

О. Коши, теория эллиптич. функций была развита Н. Абелем и К. Якоби. Уже на этом этапе характерно, в отличие от чисто алгоритмич. подхода 18 в., сосредоточение внимания на выяснении своеобразия поведения функций в комплексной области и основных господствующих здесь геометрич. закономерностей (начиная с зависимости радиуса сходимости ряда Тейлора от расположения особых точек, открытой О. Коши). Этот в известном смысле слова «качественный» и геометрич. характер теории функций комплексного переменного ещё усиливается в сер. 19 в. у Б. Римана. Здесь оказывается, что естественным геометрич. носителем аналитич. функции в случае её многозначности является не плоскость комплексного переменного, а т. н. риманова поверхность, соответствующая данной функции. К. Вейерштрасс достигает той же общности, что и Б. Риман, оставаясь на почве чистого анализа. Однако геометрич. идеи Б. Римана оказываются в дальнейшем всё более определяющими весь стиль мышления в области теории функций комплексного переменного.

В период увлечения теорией функций комплексного переменного крупнейшим представителем интереса к конкретным вопросам теории функций в действительной области является П. Л. Чебышев. Наиболее ярким выражением этой тенденции явилась созданная (начиная с 1854) П. Л. Чебышевым, исходившим из запросов теории механизмов, теория наилучших приближений.

В алгебре после доказательства неразрешимости в радикалах общего уравнения пятой степени (П. Руффини, Н. Абель) Э. Галуа показал, что вопрос о разрешимости уравнений в радикалах зависит от свойств связанной с уравнением группы Галуа (см. *Галуа теория*). Задача общего абстрактного изучения групп ставится А. Кэли. Следует отметить, что даже в алгебре всеобщее признание значения теории групп произошло только после работ К. Жордана в 70-х гг. От работ Э. Галуа и Н. Абеля берёт начало также понятие поля алгебраич. чисел, приведшее к созданию новой науки — алгебраич. теории чисел. На существенно новую ступень поднимается в 19 в. разработка старых задач теории чисел, связанных с простейшими свойствами обычных целых чисел. К. Гаусс разрабатывает (1801) теорию представимости чисел квадратичными формами, П. Л. Чебышев получает (1848, 1850) основные результаты о плотности расположения в натуральном ряде простых чисел. П. Дирихле доказывает (1837) теорему о существовании бесконечного числа простых чисел в арифметич. прогрессиях и т. д.

Дифференциальная геометрия поверхностей создаётся К. Гауссом (1827), Ф. Миндингом и К. М. Петерсоном (1853). Для выработки новых взглядов на предмет геометрии основное значение, как уже было указано, имело создание Н. И. Лобачевским неевклидовой геометрии. Параллельно развивалась долгое время независимо от неевклидовой геометрии проективная геометрия (Ж. Понселе, Я. Штейнер, К. Штаудт и др.), также связанная с существенным изменением старых взглядов на пространство. Ю. Плюккер строит геометрию, рассматривая в качестве основных элементов прямые, Г. Грассман создаёт афинную и метрич. геометрию n-мерного векторного пространства.

Уже в гауссовской внутренней геометрии поверхностей дифференциальная геометрия, по существу, также освобождается от неразрывной связи с геометрией Евклида: то, что поверхность лежит в трёхмерном евклидовом пространстве, является для этой теории случайным обстоятельством. Исходя из этого, Б. Риман создаёт (1854, опубл. в 1866) концепцию n-мерного многообразия с метрич. геометрией, определяемой дифференциальной квадратичной формой. Этим было положено начало общей дифференциальной геометрии n-мерных многообразий (см. *Римановa геометрия*). Б. Риману же принадлежат и первые идеи в области топологии многомерных многообразий.

Конец 19 века и начало 20 века. Лишь в нач. 70-х гг. 19 в. Ф. Клейн находит модель неевклидовой геометрии Лобачевского, к-рая окончательно устраняет сомнения в её непротиворечивости. Ф. Клейн подчиняет (1872) всё разнообразие построенных к этому времени «геометрий» пространств различного числа измерений идее изучения инвариантов той или иной группы преобразований. В это же время (1872) работы по обоснованию анализа получают необходимый фундамент в виде строгой теории иррациональных чисел (Р. Дедекинд, Г. Кантор и К. Вейерштрасс) (см. *Действительное число*). В 1879—84 публикуются ос-

новные работы Г. Кантора по общей теории бесконечных множеств, в разработке к-рой видную роль сыграл вначале также Р. Дедекинд. Только после этого могли быть сформулированы современные общие представления о предмете М., строении математич. теории, роли аксиоматики и т. д. Широкое их распространение потребовало ещё нескольких десятилетий (общее признание современной концепции строения геометрии обычно связывается с выходом в свет в 1899 «Оснований геометрии» Д. Гильберта).

Дальнейшее углубление исследований по основаниям математики сосредоточивается на преодолении логич. трудностей, возникших в общей теории множеств, и на исследовании строения математич. теории и приёмов конструктивного решения математич. задач средствами математич. логики. Эти исследования вырастают в большой самостоятельный отдел М.— математич. логику. Основы математич. логики создаются в 19 в. Дж. Булем, П. С. Порецким, Э. Шрёдером, Г. Фреге, Дж. Пеано и др. В нач. 20 в. в этой области получены большие достижения (теория доказательств Д. Гильберта; интуиционистская логика, созданная Л. Брауэром и его последователями).

Чрезвычайное развитие, превосходящее предшествующие периоды не только по количеству работ, но также по совершенству и силе методов и окончательности результатов, получают в кон. 19 в. и в нач. 20 в. все разделы М., начиная с самого старого из них — теории чисел. Э. Куммер, Л. Кронекер, Р. Дедекинд, Е. И. Золотарёв и Д. Гильберт закладывают основы современной алгебраич. теории чисел. Ш. Эрмит в 1873 доказывает трансцендентность числа e, Ф. Линдеман в 1882 — числа π, Ж. Адамар (1896) и Ш. Ла Валле Пуссен (1896) завершают исследования П. Л. Чебышева о законе убывания плотности расположения простых чисел в натуральном ряду. Г. Минковский вводит в теоретико-числовые исследования геометрич. методы. В России работы по теории чисел после П. Л. Чебышева блестяще развивают, кроме уже упомянутого Е. И. Золотарёва, А. Н. Коркин, Г. Ф. Вороной и А. А. Марков. Достигнутое благодаря их работам ведущее положение русской науки в области теории чисел ещё более закрепляется в советское время. Продолжают развиваться классич. отделы алгебры. В частности, подробно исследуются различные возможности сведения решения уравнений высших степеней (не разрешимых в радикалах) к решению уравнений возможно более простого вида — т. н. проблема резольвент (Ф. Клейн, Д. Гильберт). В связи с запросами теории колебаний (устойчивость, автоматич. управление) широко исследуется вопрос о критериях того или иного расположения корней уравнения на плоскости. Вопросы линейной алгебры, получающей всё более широкое применение в механике и физике, освещаются с совершенно новой стороны, благодаря привлечению геометрич. идей теории n-мерных векторных пространств. Однако центр тяжести теоретич. алгебраич. исследований переносится в её новые области: теорию групп, полей, колец, решёток и т. д. Многие из этих отделов получают глубокие применения в естествознании: в частности, теория групп — в кристаллографии (в работах Е. С. Фёдорова и А. Шёнфлиса), а позднее — в квантовой физике.

На границе между алгеброй и геометрией С. Ли создаёт (начиная с 1873) теорию непрерывных групп, методы к-рой позднее проникают во все новые области М. и естествознания.

Элементарная и проективная геометрия привлекают внимание математиков гл. обр. под углом зрения изучения их логич. и аксиоматич. основ. Но основными отделами геометрии, привлекающими наиболее значительные научные силы, становится дифференциальная и *алгебраическая геометрия*. Дифференциальная геометрия евклидова трёхмерного пространства получает полное систематич. развитие в работах Э. Бельтрами, Г. Дарбу и др. Позднее бурно развивается дифференциальная геометрия различных, более широких (чем группа евклидовых движений) групп преобразований и особенно дифференциальная геометрия многомерных пространств. Это направление геометрич. исследований, получившее мощный импульс к развитию с возникновением общей теории относительности, создано прежде всего работами Т. Леви-Чивиты, Э. Картана и Г. Вейля.

В связи с развитием более общих точек зрения теории множеств и теории функций действительного переменного теория *аналитических функций* в кон.

19 в. лишается того исключительного положения ядра всего математич. анализа, к-рое намечается для неё в нач. и сер. 19 в. Однако она продолжает не менее интенсивно развиваться как в соответствии со своими внутренними потребностями, так и из-за обнаруживающихся новых связей её с другими отделами анализа и непосредственно с естествознанием. Особенно существенным в этом последнем направлении было выяснение роли конформных отображений при решении краевых задач для уравнений с частными производными (напр., задачи Дирихле для уравнения Лапласа), при изучении плоских течений идеальной жидкости и в задачах теории упругости.

Ф. Клейн и А. Пуанкаре создают теорию автоморфных функций, в к-рой находит замечательные применения геометрия Лобачевского. Э. Пикар, А. Пуанкаре, Ж. Адамар, Э. Борель глубоко разрабатывают теорию целых функций, что позволяет, в частности, получить уже упоминавшуюся теорему о плотности расположения простых чисел. Геометрич. теорию функций и теорию римановых поверхностей развивают А. Пуанкаре, Д. Гильберт и др.

В результате систематич. построения математич. анализа на основе строгой арифметич. теории иррациональных чисел и теории множеств возникла новая отрасль М.— теория функций действительного переменного. Под этим несколько условным названием понимают по преимуществу исследование основных понятий анализа (напр., понятий функции, производной, интеграла) и основных операций анализа (напр., разложения функций в тригонометрич. ряды) с достаточно общей точки зрения. Если ранее систематически изучались лишь функции, возникающие «естественно» из тех или иных специальных задач, то для теории функций действительного переменного типичен интерес к полному выяснению действительного объёма общих определений (в самом начале её развития Б. Больцано и позднее К. Вейерштрассом было, напр., обнаружено, что непрерывная функция может не иметь производной ни в одной точке) и к обобщению основных понятий анализа в тех случаях, когда в первоначальной форме они не дают исчерпывающего ответа на ту задачу, из решения к-рой они возникли (напр., создание такого процесса интегрирования, к-рый позволил бы восстановить с точностью до постоянной любую функцию, имеющую в каждой точке производную по этой производной). Основы современной теории функций действительного переменного заложили математики французской школы (К. Жордан, Э. Борель, А. Лебег, Р. Бэр), позднее ведущая роль переходит к русской и советской школе (см. *Метрическая теория функций*).

Исследование функций действительного переменного велось, однако, и с другой, примыкающей к П. Л. Чебышеву, классич. точки зрения. Именно, было обнаружено, что более узкие классы функций, имеющие основной практич. интерес (классы функций, данное число раз дифференцируемых, или аналитич. функций), могут быть охарактеризованы тем, насколько быстро убывают с возрастанием n отклонения от функции наилучшим образом аппроксимирующих её многочленов степени n. Наиболее значительные результаты были получены в кон. 19 в. и в нач. 20 в. русскими и советскими математиками (см. *Приближение функций*). Разрабатывается также теория приближения функций многочленами в комплексной области.

Помимо своего непосредственного интереса, теория функций действительного переменного оказала большое влияние на развитие многих других отделов М. Выработанные в её пределах методы оказались особенно необходимыми при построении основ функционального анализа. Если в отношении методов функциональный анализ развивался под влиянием теории функций действительного переменного и теории множеств, то по своему содержанию и характеру решаемых в нём задач он примыкает непосредственно к классич. анализу и математич. физике, становясь особенно необходимым (гл. обр. в форме теории операторов) в квантовой физике. Впервые сознательное выделение функционального анализа как особой ветви М. было произведено В. Вольтеррой в кон. 19 в. В качестве частей функционального анализа воспринимаются теперь возникшее много ранее вариационное исчисление и теория *интегральных уравнений*, систематич. построение к-рой было начато тем же В. Вольтеррой и продолжено И. Фредгольмом, закончившим в общих чертах теорию важного класса линейных интегральных уравнений, наз-

ванных его именем. С более общей точки зрения центральное положение в функциональном анализе занимает теория бесконечномерных пространств (разработанная в наиболее употребительной ныне форме С. Банахом) и операторов в них. Наиболее важный специальный случай операторов в гильбертовом пространстве, основная роль к-рого выяснилась из работ Д. Гильберта по интегральным уравнениям, разрабатывается особенно интенсивно.

Наибольшее число задач, выдвигаемых перед М. естествознанием и техникой, сводится к решению дифференциальных уравнений, как обыкновенных (при изучении систем с конечным числом степеней свободы), так и с частными производными (при изучении непрерывных сред и в квантовой физике). Поэтому все направления исследований дифференциальных уравнений в рассматриваемый период интенсивно культивируются. Для решения сложных линейных систем создаются методы операционного исчисления. При исследовании нелинейных систем с малой нелинейностью широко применяется метод разложения по параметру. Продолжает разрабатываться аналитич. теория обыкновенных дифференциальных уравнений (А. Пуанкаре и др.). Однако наибольшее внимание в области теории обыкновенных дифференциальных уравнений привлекают теперь вопросы качественного исследования их решений: классификация особых точек (А. Пуанкаре и др.), вопросы устойчивости, особенно глубоко изученные А. М. Ляпуновым.

Качественная теория дифференциальных уравнений послужила А. Пуанкаре отправным пунктом для широкого продолжения лишь едва намеченных Б. Риманом исследований по топологии многообразий, особенно в направлении изучения неподвижных точек их непрерывных отображений на самих себя. Здесь получили свое начало «комбинаторные», «гомологические» и «гомотопические» методы современной *топологии*. Другое направление в топологии возникло на почве теории множеств и функционального анализа и привело к систематич. построению теории общих топологич. пространств, в частности теории их размерности.

Теория дифференциальных уравнений с частными производными ещё в кон. 19 в. получает существенно новый вид благодаря сосредоточению основного внимания на краевых задачах и отказу от ограничения аналитическими краевыми условиями. Аналитич. теория, восходящая к О. Коши, К. Вейерштрассу и С. В. Ковалевской, не теряет при этом своего значения, но несколько отступает на задний план, т. к. обнаруживается, что при решении краевых задач она не гарантирует корректности, т. е. возможности приближённо найти решение, зная граничные условия тоже лишь приближённо, в то время как без этой возможности теоретич. решение не имеет практич. ценности. Картина более сложна, чем представлялось с точки зрения аналитич. теории: краевые задачи, к-рые можно корректно ставить для разных типов дифференциальных уравнений, оказываются различными. Наиболее надёжным путеводителем в выборе для каждого типа уравнений надлежащих краевых задач становится непосредственное обращение к соответствующим физич. представлениям (о распространении волн, течении тепла, диффузии и т. п.). Связанное с этим превращение теории дифференциальных уравнений с частными производными гл. обр. в теорию уравнений математич. физики имело большое положительное значение в смысле накопления огромного конкретного материала, в то же время служит и признаком недостаточного развития общей теории краевых задач, к-рая позволила бы систематически изучать все теоретически возможные «корректные» краевые задачи. Существенный прогресс в этом направлении достигнут в работах советских математиков. Работы по отдельным типам уравнений математич. физики справедливо составляют значительную часть всей математич. продукции. После П. Дирихле и Б. Римана уравнениями математич. физики занимались А. Пуанкаре, Ж. Адамар, Д. Гильберт, а в России А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов и др.

Существенным дополнением к методам дифференциальных уравнений при изучении природы и решении технич. задач являются методы теории вероятностей. Если в нач. 19 в. главными потребителями вероятностных методов были теория артиллерийской стрельбы и теория ошибок, то в кон. 19 в. и в нач. 20 в. теория вероятностей получает много новых применений благодаря развитию

статистич. физики и механики и разработке аппарата *математической статистики*. Наиболее глубокие теоретич. исследования по общим вопросам теории вероятностей в кон. 19 в. и в нач. 20 в. принадлежат русской школе (П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов). Они сосредоточиваются вокруг вопроса об условиях применимости центральной предельной теоремы теории вероятностей. В 20 в. происходит общий подъём интереса к теории вероятностей во всех странах. Создаются основы теории случайных процессов и даётся окончательная форма аксиоматич. изложения теории вероятностей, исходящая из усмотренных впервые Э. Борелем аналогий между понятием вероятности и понятием меры в теории функций действительного переменного.

Практич. использование результатов теоретич. математич. исследования требует получения ответа на поставленную задачу в численной форме. Между тем даже после исчерпывающего теоретич. разбора задачи это часто оказывается совсем не лёгким делом. В кон. 19 в. и в нач. 20 в. численные методы анализа выросли в самостоятельную ветвь М. Особенно большое внимание уделялось при этом методам численного интегрирования дифференциальных уравнений (методы Адамса, Штёрмера, Рунге и др.) и квадратурным формулам (П. Л. Чебышев, А. А. Марков, В. А. Стеклов). Широкое развитие работ, требующих численных расчётов, привело к необходимости вычисления и публикации всё возрастающего количества математич. таблиц.

Со 2-й пол. 19 в. начинается интенсивная разработка вопросов истории М.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше были отмечены основные особенности современной М. (пп. 1, 2) и были перечислены (п. 3) основные направления исследований М. по разделам, как они сложились в нач. 20 в. В значительной мере это деление на разделы сохраняется, несмотря на стремительное развитие М. в 20 в., особенно после окончания 2-й мировой войны 1939—45. Современное состояние М. и заслуги научных школ и отдельных учёных отражены в соответствующих статьях.

Потребности развития самой М., «математизация» различных областей науки, проникновение математич. методов во многие сферы практич. деятельности, быстрый прогресс вычислительной техники приводят к перемещению основных усилий математиков внутри сложившихся разделов М. и к появлению целого ряда новых математич. дисциплин (см., напр., *Алгоритмов теория*, *Информации теория*, *Исследование операций*, *Игр теория;* см. также *Информатика*, *Кибернетика*, *Программирование*).

На основе задач теории *управляющих систем*, *комбинаторного анализа*, теории *графов*, теории *кодирования* возникла конечная или *дискретная математика*.

Вопросы о наилучшем (в том или ином смысле) управлении физич. или механич. системами, описываемыми дифференциальными уравнениями, привели к созданию математич. теории *оптимального управления*, близкие вопросы об управлении объектами в конфликтных ситуациях — к возникновению и развитию теории *дифференциальных игр*.

Исследования в области общих проблем управления и связанных с ними областях М. в соединении с прогрессом вычислительной техники дают основу для автоматизации новых сфер человеческой деятельности.

Советская М. занимает передовое место в мировой математич. науке. Во многих направлениях работы советских учёных играют определяющую роль. Успехи дореволюционной русской М. были связаны с исследованиями отдельных выдающихся учёных и опирались на узкую базу. Научные математич. центры имелись в немногих городах (Петербург, Москва, Казань, Харьков, Киев). При этом основные достижения были связаны с работой петербургской школы. После Великой Октябрьской социалистич. революции ряд новых важных направлений возник в московской математич. школе. В дореволюционной России основными центрами математич. исследований являлись университеты (Петербургский, Московский, Казанский и др.). Развитие научных исследований в области М. и её приложений после 1917 было самым тесным образом связано с развитием и укреплением АН СССР; эти исследования в значительной мере сконцентрированы в *математических институтах* АН СССР, АН союзных рес-

публик и ведущих университетах. Важной чертой развития М. является возникновение за годы Советской власти многочисленных научных школ в городах, где раньше не велось заметной работы в области М. Таковы математич. школы в Тбилиси, Ереване, Баку, Вильнюсе, Ташкенте, Минске, Свердловске и др. городах и созданная в 60-х гг. научная школа в Академгородке близ Новосибирска.

За рубежом математич. исследования ведутся как в математич. институтах, так и в университетах (особенно в капиталистич. странах).

Ещё на рубеже 17—18 вв. появились первые *математические общества*, имеющиеся сейчас во многих странах. Обзорные доклады о мировых достижениях математич. науки и её приложений, а также сообщения о наиболее интересных работах отдельных учёных читаются и обсуждаются на происходящих раз в 4 года (начиная с 1898) международных *математических конгрессах*. Организация и поощрение международного сотрудничества в области М., подготовка научных программ международных математич. конгрессов и др. является задачей международного *математического союза*. Текущие математич. исследования (а также информация о математич. жизни в различных странах) публикуются в *математических журналах*, общее число к-рых (нач. 80-х гг. 20 в.) более 250.

● **Философия и история математики.** Математика, ее содержание, методы и значения, т. 1—3, М., 1956; Цейтен Г. Г., История математики в древности и в средние века, пер. с франц., 2 изд., М.— Л., 1938; его же, История математики в XVI и XVII веках, пер. с нем., 2 изд., М.— Л., 1938; Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона, Греции, пер. с голл., М., 1959; Нейгебауэр О., Точные науки в древности, пер. с англ., М., 1968; Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961; Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966; его же, Хрестоматия по истории математики, составленная по первоисточникам..., пер. с нем., 2 изд., М.— Л., 1935; Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.— Л., 1937; Рыбников К. А., История математики, 2 изд., М., 1974; Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963; Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, пер. с нем., 3 изд., М., 1978; История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 1—3, М., 1970—72; Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978; Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций, М., 1981; Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление, М., 1987; Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия, М., 1976; Хрестоматия по истории математики. Математический анализ. Теория вероятностей, М., 1977; Александрова Н. В., Математические термины. Справочник, М., 1978; Cantor M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 3 Aufl., Bd 1—4, Lpz., 1907—13; Dieudonné J., Abrégé d'histoire des mathématiques. 1700—1900, P., 1978.

Обзоры и энциклопедии. Виноградов И. М., Математика и научный прогресс, в кн.: Ленин и современная наука, кн. 2, М., 1970; Математика. [Сб. ст.], М.— Л., 1932 (Наука в СССР за 15 лет. 1917—1932); Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947. Сб. ст., М.— Л., 1948; Математика в СССР за сорок лет. 1917—1957. Сб. ст., т. 1, М., 1959; Вейль Г., Полвека математики, пер. с англ., М., 1969.

Математическая энциклопедия, т. 1—5, М., 1977—85; Энциклопедия элементарной математики, кн. 1—5, М.— Л., 1951—66; Вебер Г. и Вельштейн И., Энциклопедия элементарной математики, пер. с нем., 2 изд., т. 1—3, Одесса, 1911—14; Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen, Bd 1—6, Lpz., 1898—1934; 2 Aufl., Bd 1—3, Lpz., 1950—67; Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, t. 1—7, P.— Lpz., 1904—14; Mathematik, 12 Aufl., Lpz., 1983 (Kleine Enzyklopädie); Mathematisches Wörterbuch, 2 Aufl., Bd 1—2, B.— Lpz., 1962.

АЛФАВИТНЫЙ СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

АБА́К (лат. abacus, от греч. ἄβαξ,— счётная доска)— счётная доска, применявшаяся для арифметических вычислений в Др. Греции, Риме, затем в Зап. Европе до 18 в. Доска разделялась на полосы, счёт осуществлялся передвижением находящихся в полосах счётных марок (костяшек, камней и т. п.). В странах Дальнего Востока распространён китайский аналог А.— с у а н - п а н, в России — *счёты*.

А́БЕЛЕВ ИНТЕГРА́Л — интеграл от алгебраической функции, т. е. интеграл вида

$$\int_{z_0}^{z_1} R\,(z,\ w)\,dz, \qquad (*)$$

где $R(z, w)$ — рациональная функция от переменных z и w, связанных особого вида алгебраич. уравнением. Как правило, А. и. не выражаются через элементарные функции. Интегралы вида (*) названы по имени Н. Абеля, к-рый совместно с К. Якоби поставил и решил (1827) проблему обращения *эллиптических интегралов* (важный частный случай А. и.). Частным случаем А. и. являются также *гиперэллиптические интегралы*.

А́БЕЛЕВА А́ЛГЕБРА ЛИ — см. *Ли алгебра*.

А́БЕЛЕВА ГРУ́ППА, к о м м у т а т и в н а я г р у п п а,— группа, операция в которой обладает свойством коммутативности. Названа по имени Н. Абеля, установившего (1824, 1826) разрешимость в радикалах тех алгебраич. уравнений, чья группа коммутативна (см. *Галуа теория*).

Обычно для обозначения операции в А. г. используется а д д и т и в н а я з а п и с ь, т. е. знак + для самой операции, наз. сложением, и знак 0 для нейтрального элемента, наз. нулем (в м у л ь т и п л и к а т и в н о й з а п и с и он наз. единицей).

Примерами (бесконечных) А. г. являются многие числовые системы: комплексные, действительные, рациональные, целые, чётные числа с обычной операцией сложения, а также множества отличных от нуля комплексных, действительных или рациональных чисел с обычной операцией умножения чисел.

Всякая подгруппа и всякая факторгруппа А. г., а также прямая сумма А. г. абелева. Все циклич. группы — абелевы. Важный пример А. г.— г р у п п а т и п а p^∞, обозначаемая Z_{p^∞} (бесконечная А. г., все собственные подгруппы к-рой конечные циклические, p—простое). Она может быть определена, в частности, как группа всех комплексных корней уравнений

$$x^{p^n}=1, \quad n=1, 2, \ldots,$$

с обычной операцией умножения комплексных чисел. Совокупность всех элементов конечного порядка А. г. образует подгруппу, наз. п е р и о д и ч е с к о й ч а с т ь ю А. г. Факторгруппа А. г. по её периодич. части является г р у п п о й б е з к р у ч е н и я, т. е. группой, все элементы к-рой имеют бесконечный порядок. Периодич. А. г., порядки всех элементов к-рой являются степенями фиксированного простого числа p, наз. п р и м а р н о й по простому числу p (в общей теории групп в этом случае употребляется термин «p-группа»). Всякая периодич. А. г. может быть разложена, притом единственным способом, в прямую сумму примарных групп, относящихся к различным простым числам. Неразложимые в прямую сумму примарные группы исчерпываются циклич. примарными группами и группами Z_{p^∞}.

Наиболее полное описание известно для А. г. с конечным числом образующих: всякая конечно порождённая А. г. разлагается в прямую сумму конечного числа неразложимых циклич. подгрупп, из к-рых часть — конечные примарные, часть — бесконечные (т. е. изоморфные аддитивной группе целых чисел). Всякая подгруппа А. г. с конечным числом образующих сама обладает конечной системой образующих.

Для групп, не являющихся конечно порождёнными, ситуация сложнее: не всякая А. г. представима в виде прямой суммы (даже бесконечного числа) циклич. групп. Однако любая подгруппа А. г., разложимой в прямую сумму циклич. подгрупп, сама разложима в прямую сумму циклич. подгрупп. Для примарных А. г. известно необходимое и достаточное условие существования такого разложения.

Важный класс А. г.— п о л н ы е, или д е л и м ы е, г р у п п ы. Это группы, в к-рых для всякого элемента a и всякого целого n разрешимо уравнение $nx=a$. Все делимые А. г. исчерпываются всевозможными прямыми суммами групп, изоморфных группе $\mathbb{Q}$ рациональных чисел по сложению и группам Z_{p^∞} (для различных p). Всякая А. г. может быть изоморфно вложена в нек-рую делимую А. г., т. е. изоморфна нек-рой её подгруппе.

В теории А. г. удаётся ввести понятие линейной зависимости, обобщающее одноимённое понятие теории векторных пространств, а также понятие ранга А. г. (ранг периодич. группы равен нулю). С другой стороны, с теорией А. г. тесно связана теория модулей (любая А. г.— модуль над кольцом целых чисел). Многие результаты теории А. г. удаётся перенести на случай модулей над кольцом главных идеалов.

Теория А. г., берущая свое начало в теории чисел, находит применение во многих современных математич.

теориях. Относительная простота и изученность А. г. (что подтверждает, напр., разрешимость элементарной теории А. г.) вместе с довольно разнообразным запасом объектов делают А. г. постоянным источником примеров во многих разделах математики.

● Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; Фукс Л., Бесконечные абелевы группы, пер. с англ., т. 1—2, М., 1974—77.

Ю. Л. Ершов.

АБЕЛЕВО МНОГООБРАЗИЕ — алгебраическая группа, являющаяся одновременно неприводимым проективным алгебраическим многообразием. Операция (наз. сложением) на А. м. всегда коммутативна. Простейшим примером А. м. является гладкая неприводимая проективная кривая X в проективной плоскости P^2, наз. также эллиптич. кривой. Чтобы задать сложение на X, следует выбрать точку $P^0 \in X$, объявляемую нулём группы. Тогда сложение однозначно определяется следующим геометрич. условием: сумма трёх точек на X равна нулю тогда и только тогда, когда они лежат на одной прямой. Любое одномерное А. м. бирационально изоморфно эллиптич. кривой, причём этот изоморфизм можно выбрать согласованным с операцией сложения.

Теория А. м. над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ эквивалентна по существу теории абелевых функций, основы к-рой были заложены в работах Н. Абеля, К. Якоби и Б. Римана. Если X — комплексное g-мерное А. м., то оно является g-мерной компактной комплексной *Ли группой*.

Теория А. м. над произвольным полем разработана А. Вейлем (40-е гг. 20 в.). Она имеет большое число приложений как в алгебраич. геометрии, так и в других областях математики, особенно в теории чисел и теории автоморфных функций. Теория А. м. над конечными полями применяется в теории кодирования.

АБЕЛЯ НЕРАВЕНСТВО об оценке суммы попарных произведений чисел: если заданы такие множества чисел a_k и b_k, что все суммы

$$B_k = b_1 + b_2 + \ldots + b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

ограничены по абсолютной величине числом B, т. е. $|B_k| \leqslant B$ и либо $a_i \geqslant a_{i+1}$, либо $a_i \leqslant a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, то

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leqslant B\,(|a_1| + 2|a_n|).$$

В случае когда a_k не возрастают и неотрицательны, оценка упрощается:

$$\left| \sum_{k=1}^{N} a_k b_k \right| \leqslant B a_1.$$

Доказано Н. Абелем (1826).

АБЕЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, суммирование по частям,— преобразование вида:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k = a_N b_N - a_1 B_0 - \sum_{k=1}^{N-1} B_k (a_{k+1} - a_k),$$

где a_k, b_k заданы, B_0 выбирается произвольно, а

$$B_k = B_{k-1} + b_k = B_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_k, \quad k = 1, \ldots, N.$$

А. п. есть дискретный аналог формулы интегрирования по частям.

Если $a_N \to 0$ и последовательность $\{B_k\}$ ограничена, то А. п. обобщается на ряды:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) B_k - a_1 B_0.$$

При помощи А. п. доказываются многие признаки сходимости числовых и функциональных рядов.

А. п. введено Н. Абелем (1826).

АБЕЛЯ ПРИЗНАК — признак сходимости *ряда*. Установлен Н. Абелем (1826).

АБЕЛЯ ТЕОРЕМА об алгебраических уравнениях: ни для какого n, большего или равного пяти, нельзя указать формулу, которая выражала бы корни любого уравнения n-й степени через его коэффициенты при помощи радикалов.

Найдена Н. Абелем (1824).

АБЕЛЯ — ПУАССОНА МЕТОД СУММИРОВАНИЯ — один из методов *суммирования* рядов.

АБСОЛЮТ (от лат. absolutus — безусловный, неограниченный) — кривая (поверхность) 2-го порядка, представляющая собой множество бесконечно удалённых точек в проективной интерпретации неевклидовой плоскости (пространства), с помощью к-рой вводится проективное мероопределение. См. *Неевклидовы геометрии*.

АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА, модуль действительного числа a — неотрицательное число (обозначается $|a|$), определяемое следующим образом: если $a \geqslant 0$, то $|a| = a$; если $a < 0$, то $|a| = -a$. А. в. (модуль) комплексного числа $z = x + iy$ (x и y — действительные числа) — число $+\sqrt{x^2+y^2}$.

Для А. в. имеют место следующие соотношения:

$$|a| = |-a|,$$

$$|a|^2 = |a^2|,$$

$$|a| - |b| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$|a| - |b| \leqslant |a-b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$

а при $b \neq 0$

$$\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|.$$

АБСОЛЮТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ — геометрия, в основе которой лежат все аксиомы евклидовой геометрии, кроме аксиомы о параллельных (V постулат). А. г. содержит предложения, общие для *евклидовой геометрии* и для *Лобачевского геометрии*. Термин «А. г.» ввёл Я. Больяй (1832).

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ интеграла — одно из свойств интеграла Лебега. См. *Метрическая теория функций*.

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ — усиление понятия непрерывности. См. *Метрическая теория функций*.

АБСОЛЮТНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ — см. *Погрешность*.

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ — важный частный случай сходимости рядов и интегралов. Числовой ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

наз. абсолютно сходящимся, если сходится ряд из абсолютных величин его членов

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots .$$

Свойства абсолютно сходящихся рядов аналогичны свойствам конечных сумм; всякий абсолютно сходящийся ряд сходится, и его сумма не зависит от порядка членов ряда (в отличие от условно сходящихся рядов, для к-рых последнее свойство не имеет места). Для установления А. с. рядов применимы признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Аналогично определяется А. с. несобственных интегралов. Если наряду с $I = \int_0^\infty f(x)dx$ сходится $\int_0^\infty |f(x)|dx$, то I наз. абсолютно сходящимся. Понятия А. с. и *условной сходимости* предложены О. Коши (1821) и получили развитие у П. Дирихле (1837) и Б. Римана (1864).

АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей, соответствующая функция распределения которого абсолютно непрерывна как функция действительного переменного.

АБСОЛЮТНО СВОБОДНАЯ АЛГЕБРА — *свободная универсальная алгебра* в многообразии всех алгебр данной сигнатуры.

АБСОЛЮ́ТНОЕ ЗНАЧЕ́НИЕ — обобщение понятия абсолютной величины числа на случай произвольного поля (см. *Нормирование*).

АБСОЛЮ́ТНЫЙ МА́КСИМУМ функции — см. *Экстремум.*

АБСОЛЮ́ТНЫЙ МИ́НИМУМ функции — см. *Экстремум.*

АБСОЛЮ́ТНЫЙ МОМЕ́НТ — см. *Момент.*

АБСТРА́КТНАЯ А́ЛГЕБРА (от лат. abstractus — удалённый, отвлечённый) — то же, что *общая алгебра.*

АБСТРА́КТНАЯ МАШИ́НА — частный случай *управляющих систем.* См. *Машина.*

АБСТРА́КЦИЯ АКТУА́ЛЬНОЙ БЕСКОНЕ́ЧНОСТИ (от лат. abstractio — удаление, отвлечение) — математическая абстракция, состоящая в отвлечении от принципиальной невозможности завершить процесс построения бесконечного множества объектов и в рассмотрении бесконечной совокупности как математического объекта. А. а. б. ведёт к понятию *актуальной бесконечности.* Применение А. а. б. можно проиллюстрировать на примере образования понятия натурального ряда. Представление о натуральных числах возникает из счёта. Можно говорить о построении натурального числа, понимая под этим указание конечного множества предметов, количество к-рых равно данному числу. В частности, натуральные числа можно строить путём написания ряда вертикальных чёрточек. Напр., | есть число «один», || есть «два» и т. д. Очевидно, таким образом можно построить любое натуральное число: если построено число n то, приписав к нему справа чёрточку, получим число $n+1$. Однако процесс построения всех натуральных чисел никогда не завершится. Мысленно отвлекаясь от этой незавершённости, мы начинаем рассуждать так, как будто все натуральные числа уже построены, и вводим в рассмотрение множество натуральных чисел как завершённый объект. В этом и состоит применение А. а. б.

А. а. б. позволяет в рассуждениях не делать различие между конечными множествами и бесконечными, применяя к последним логич. законы, выработанные при обращении с конечными совокупностями, в частности *исключённого третьего закон.* Этот закон состоит в том, что если A — нек-рое утверждение, $\neg A$ — его отрицание, то истинно одно из утверждений A или $\neg A$. Если утверждение A относится к объектам из какой-то конечной совокупности, то проверив все эти объекты, можно выяснить, имеет ли место A или $\neg A$. В случае бесконечной совокупности такая проверка невозможна. Но, применяя А. а. б., мы мысленно отвлекаемся от невозможности осуществить бесконечное число актов проверки. Таким образом, в обосновании закона исключённого третьего А. а. б. играет существенную роль.

А. а. б. широко используется в теории множеств, где в качестве объектов рассматриваются произвольные бесконечные множества. В результате многократного применения А. а. б. и других математич. абстракций возникают объекты, к-рые с трудом поддаются интуитивному осмыслению. В связи с этим неограниченное применение А. а. б. вызывало возражения со стороны ряда математиков.

Предпринимаются попытки построения математики без использования А. а. б. (см. *Интуиционизм, Конструктивная математика*).

АБСТРА́КЦИЯ ОТОЖДЕСТВЛЕ́НИЯ — см. *Конструктивная математика.*

АБСТРА́КЦИЯ ПОТЕНЦИА́ЛЬНОЙ ОСУЩЕСТВИ́МОСТИ — математическая абстракция, состоящая в отвлечении от возможных пространственных, временны́х и материальных препятствий к построению конструктивного объекта (см. *Конструктивная математика*). Применение А. п. о. можно проиллюстрировать на примере построения натуральных чисел. Под построением натурального числа условимся понимать написание мелом на доске ряда вертикальных чёрточек. Напр., | есть число «один», || есть «два» и т. д. При осуществлении процесса построения достаточно больших чисел естественно возникнут затруднения, напр. не хватит места на доске, кончится мел или умрёт человек, осуществляющий построение. Отвлекаясь от этих реальных затруднений, мы начинаем рассуждать так, как будто любое натуральное число может быть фактически построено, в частности, мы считаем, что к числу n можно приписать справа чёрточку и получить число $n+1$. В этом и состоит применение абстракции потенциальной осуществимости.

А. п. о. позволяет рассматривать произвольный объект, порождаемый данным конструктивным процессом, но, в отличие от *абстракции актуальной бесконечности*, не приводит к образованию множества всех порождаемых объектов. Это связано с тем, что А. п. о. не предполагает, что может быть осуществлено бесконечное число операций построения, а основывается лишь на том, что может быть осуществлена любая такая операция.

А. п. о. играет важную роль в конструктивной математике. В условиях отказа от использования абстракции актуальной бесконечности А. п. о. позволяет рассматривать произвольные объекты из нек-рой бесконечной совокупности и приводит к понятию *потенциальной бесконечности.*

АБСЦИ́ССА (лат. abscissa — отрезанная) — одна из декартовых координат точки, обычно первая, обозначаемая буквой x.

АВТОМА́Т (от греч. αὐτόματος — самодействующий) — *управляющая система*, являющаяся *конечным автоматом* или некоторой его модификацией, полученной путём изменения его компонент или функционирования. Основное понятие — конечный А.— возникло в сер. 20 в. в связи с попытками описать на математич. языке функционирование нервных систем, универсальных вычислительных машин и других реальных А. Характерной особенностью такого описания является дискретность соответствующих математич. моделей и конечность областей значений их параметров, что приводит к понятию конечного А.

Наряду с понятием конечного А. рассматриваются различные его обобщения и модификации, отражающие те или иные особенности реальных устройств. Для конечного А. (A, S, B, φ, ψ) существующие модификации можно разбить на следующие три основные группы. К первой группе относятся А., у к-рых нек-рые из алфавитов A (входной), S (состояний) или B (выходной) бесконечны, в связи с чем такие А. наз. бесконечными. Ко второй группе относятся А., у к-рых вместо выходной и переходной функций φ и ψ допускаются произвольные отношения или случайные функции. Таковы частичные, недетерминированные, вероятностные и другие А. К третьей группе относятся А. со специфич. множествами входных объектов. Таковы, напр., А. с переменной структурой. Существуют А., принадлежащие одновременно разным группам. Наряду с этим большую роль играют специальные подклассы конечных А., напр. А. без памяти. Кроме того, использование понятий и методов из других разделов математики также приводит к появлению специфич. классов А. и связанных с ними задач. Напр., при применении алгебраич. средств возникают понятия А. над термами, линейного, группового, свободного и др. (см. *Автоматов алгебраическая теория*); вопросы теории кодирования порождают понятия самонастраивающихся, обратимых А. и др. (см. также *Вероятностный автомат*).

● Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., Введение в теорию автоматов, М., 1985.

АВТОМА́Т БЕЗ ПА́МЯТИ — см. *Надёжность и контроль управляющих систем.*

АВТОМА́ТА ПОВЕДЕ́НИЕ — математическое понятие, описывающее взаимодействие автомата с внешней средой. Примером внешней среды конечного автомата является множество входных слов, а поведением — словарная функ-

ция, реализуемая автоматом, или событие, представимое автоматом.

АВТОМА́ТНАЯ ГРАММА́ТИКА — см. *Математическая лингвистика.*

АВТОМА́ТОВ АЛГЕБРАИ́ЧЕСКАЯ ТЕО́РИЯ — направление в *автоматов теории*, характеризующееся использованием алгебраических средств в изучении автоматов. А. а. т. основана на том, что автоматы можно рассматривать как нек-рые специальные алгебры или алгебраич. системы. Кроме того, события, представимые конечными автоматами, относительно операций объединения, произведения и итерации образуют алгебру, порождаемую конечным множеством т. н. элементарных событий, каждое из к-рых состоит из одного однобуквенного или пустого слова. Алгебраич. подход позволяет непосредственно использовать алгебраич. результаты в теории автоматов, а также помогает в нек-рых случаях установлению связи теории автоматов с другими областями математики.

● Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, пер. с англ., М., 1975; Глушков В. М., «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 5, с. 3—62.

АВТОМА́ТОВ ТЕО́РИЯ — раздел теории *управляющих систем*, изучающий математические модели преобразователей дискретной информации, называемые *автоматами*. С определённой точки зрения такими преобразователями являются как реальные устройства (вычислительные машины, автоматы, живые организмы и т. д.), так и абстрактные системы (напр., *формальная система*, аксиоматич. теории и т. д.). А. т. возникла в сер. 20 в. в связи с изучением *конечных автоматов* как математич. моделей нервных систем и вычислительных машин. В дальнейшем класс объектов и проблематика А. т. существенно расширились, включив нек-рые понятия и задачи других разделов математики. Наиболее тесно А. т. связана с *алгоритмов теорией.*

Большинство задач А. т.— общие для основных видов управляющих систем. К ним относятся задачи анализа и синтеза автоматов, задачи полноты, минимизации, эквивалентных преобразований автоматов и др. Задача анализа состоит в том, чтобы по заданному автомату описать его поведение или по неполным данным об автомате и его функционированию установить те или иные его свойства. Задача синтеза автоматов состоит в построении автомата с наперёд заданным поведением или функционированием. Задача полноты состоит в выяснении, обладает ли множество $M' \subseteq M$ автоматов свойством полноты (т. е. совпадает ли с M множество всех автоматов, к-рые получаются путём конечного числа применений нек-рых операций к автоматам из заданного подмножества автоматов M'). Задача эквивалентных преобразований в общем виде состоит в том, чтобы найти систему правил преобразований (т. н. полную систему правил) автоматов, к-рые удовлетворяют определённым условиям и позволяют преобразовать произвольный автомат в любой эквивалентный ему автомат (два автомата эквивалентны, если они имеют одинаковое *автомата поведение*).

Помимо перечисленных, в А. т. имеются специфич. проблемы, характерные для автоматов. Так, в зависимости от условий задачи поведение автомата удобно задавать на разных языках, в связи с чем важными задачами являются выбор достаточно удобного адекватного языка и перевод с одного языка на другой. В тесной связи с задачами синтеза и эквивалентных преобразований находится задача минимизации числа состояний автомата, а также получение соответствующих оценок. Близкий круг вопросов возникает в связи с моделированием поведения автоматов одного класса автоматами другого класса. Здесь также представляют интерес вопросы минимизации моделирующих автоматов и оценки их сложности. Специальный раздел А. т. связан с т. н. экспериментами с автоматами (т. е. способами получения информации о внутренней структуре автоматов по их поведению). Основная задача здесь состоит в том, чтобы получить определённые сведения о строении автомата путём наблюдения его реакции на те или иные внешние воздействия. При этом возникает большой круг задач, связанный с классификацией экспериментов и с вопросами разрешимости задач определёнными видами экспериментов, а также с оценками длин минимальных экспериментов, достаточных для решения тех или иных задач. Понятие эксперимента с автоматами используется также в задачах *надёжности и контроля управляющих систем*, в частности контроля автоматов. Многие из перечисленных выше задач могут рассматриваться как *алгоритмические проблемы.* Для конечных автоматов большинство из них имеет положительное решение.

А. т. находит применение как в других областях математики, так и в решении практич. задач. Напр., средствами А. т. доказывается разрешимость нек-рых формальных исчислений. Применение методов и понятий А. т. к изучению формальных и естественных языков привело к возникновению *математической лингвистики.* Понятие автомата может служить модельным объектом в самых разнообразных задачах, благодаря чему возможно применение А. т. в различных научных и прикладных исследованиях.

● Автоматы. Сб. статей. Под ред. К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, пер. с англ., М., 1956; Глушков В. М., Синтез цифровых автоматов, М., 1962.

В. Б. Кудрявцев.

АВТОМОРФИ́ЗМ (от греч. αὐτός — сам и μορφή — форма, вид) — *изоморфизм* некоторой системы объектов на себя. Все А. алгебраич. системы A (в частности, группы, кольца, поля) образуют группу относительно умножения отображений. Обычно эта группа обозначается $\mathrm{Aut}\, A$. Всякое невырожденное линейное преобразование векторного пространства V является А. этого пространства, и $\mathrm{Aut}\, V$ — подгруппа в полугруппе всех линейных преобразований пространства V. Среди А. групп выделяются внутренние А. Внутренний автоморфизм группы G — это такой А. φ, для к-рого

$$\varphi(x) = g^{-1}xg,$$

где g — нек-рый фиксированный элемент из G. А., не являющиеся внутренними, наз. внешними. Совокупность всех внутренних А. группы G является нормальной подгруппой в $\mathrm{Aut}\, G$. Аналогично (с помощью обратимых элементов) определяются внутренние А. ассоциативного кольца с единицей и внутренние А. полугруппы с единицей (моноида). Группа А. $\mathrm{Aut}\, A$ несёт в себе существенную информацию о строении самой системы A.

АВТОМО́РФНАЯ ФУ́НКЦИЯ — мероморфная функция, значения которой не изменяются, если её аргумент подвергается некоторым дробно-линейным преобразованиям. К А. ф. относятся периодич. функции и, в частности, эллиптич. функции. Так, напр., если указанные преобразования — целые и имеют вид $z' = z + \omega$, где ω — комплексное число, отличное от нуля, то получаются А. ф., характеризуемые уравнением $f(z+\omega) = f(z)$, т. е. периодич. функции с периодом ω. В этом примере преобразованием, не изменяющим функции, является сдвиг плоскости на вектор ω. Тот же сдвиг, повторенный сколько угодно раз, также не изменяет функции. В результате получается группа линейных преобразований $z' = z + n\omega$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, не изменяющих $f(z)$.

В общем случае, пусть Γ — нек-рая группа дискретных дробно-линейных преобразований:

$$z' = T_k(z) = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}, \quad \alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k \neq 0,$$

и D — область, к-рая каждым из этих преобразований отображается сама на себя. Тогда функция f, однозначная и аналитическая в области D, является А. ф. (по отношению к данной группе Γ), если $f(T_k(z)) = f(z)$, $k = 1, 2, \ldots$. Наиболее важен случай, когда D есть круг или полуплоскость. Такую область можно рассматривать как изображение плоскости Лобачевского (см. *Лобачевского геометрия*), а преобразования группы Γ — как движения в плос-

кости Лобачевского. Соответствующие А. ф. можно рассматривать как такое обобщение периодич. функций, при к-ром сдвиги в евклидовой плоскости заменены движениями в плоскости Лобачевского. Эта точка зрения, развитая А. Пуанкаре, обеспечила успех в построении общей теории А. ф. (до А. Пуанкаре существенные результаты теории А. ф. были получены Ф. Клейном). Вообще, теория А. ф. представляет замечательный пример плодотворности геометрич. идей Н. И. Лобачевского в их применении к задачам математич. анализа и теории функций.

К А. ф., помимо вопросов конформного отображения, приводит также теория линейных дифференциальных уравнений, изучение алгебраич. кривых порядка выше четвёртого, решение алгебраич. уравнений (напр., решение общего уравнения пятой степени с одним неизвестным получается посредством А. ф.) и т. д.

● Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.— Л., 1950; Форд Р., Автоморфные функции, пер. с англ., М.— Л., 1936.

АВТОПОЛЯРНАЯ ФИГУРА (от греч. αὐτός — сам и πόλος — ось, полюс) — см. *Поляра*.

АДА — *программирования язык* широкого назначения, созданный на основе языка *Паскаль*. Разработан в кон. 70-х гг. (во Франции). Характеризуется возможностью программирования задач управления автоматич. устройствами в масштабе реального времени, сборки программ из готовых программных модулей, удобством переноса программ на машины разных типов, управления и синхронизации параллельно протекающих вычислительных процессов, а также адаптируемостью программ к различным условиям их применения.

● Пайл Я., АДА — язык встроенных систем, пер. с англ., М., 1984.

АДАМАРОВА КОНФИГУРАЦИЯ — см. *Блок-схема*.

АДАМСА МЕТОД — конечноразностный метод решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

В случае сетки с постоянным шагом $x_n = x_0 + nh$ расчётные формулы имеют вид: а) экстраполяционные

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} f(x_{n-\lambda}, y_{n-\lambda}),$$

б) интерполяционные

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{\lambda=-1}^{k-1} v_{-\lambda} f(x_{n-\lambda}, y_{n-\lambda}),$$

где $u_{-\lambda}$, $v_{-\lambda}$ — некоторые вычисляемые постоянные. При одном и том же k формула б) точнее, но требует решения нелинейной системы уравнений для нахождения значения y_{n+1}. На практике находят приближение из а), а затем приводят одно-два уточнения по формуле

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + h \sum_{\lambda=0}^{k-1} v_{-\lambda} f(x_{n-\lambda}, y_{n-\lambda}) + h v_1 f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(i)}).$$

Структура погрешности А. м. такова, что погрешность остаётся ограниченной или растёт очень медленно в случае асимптотически устойчивых решений уравнения; это позволяет использовать этот метод для отыскания устойчивых периодич. решений.

Метод предложен Дж. Адамсом (1855).

● Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 1—2, М., 1962; Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.

АДДИТИВНАЯ ГРУППА кольца — абелева группа, образуемая всеми элементами данного кольца относительно операции сложения в кольце.

АДДИТИВНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ — теория, охватывающая комплекс вопросов, связанных с задачами разложения натуральных чисел (т. е. чисел бесконечного ряда: 1, 2, 3, 4, 5, . . .) на слагаемые определённого вида. Такова, напр., задача о представлении чисел в виде суммы определённого числа n-х степеней (т. н. проблема Варинга) — суммы четырёх квадратов, девяти кубов и т. д.; о представлении всякого чётного числа > 2 в виде суммы двух простых чисел и всякого нечётного > 5 в виде суммы трёх простых (т. н. проблема Гольдбаха) и т. п. (см. *Чисел теория*).

АДДИТИВНОСТЬ (от лат. additivus — прибавляемый) — свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям при любом разбиении объекта на части. Напр., А. объёма означает, что объём целого тела равен сумме объёмов составляющих его частей. Другие примеры величин, обладающих свойством А.: длина линии, площадь поверхности, масса физич. тела.

p-АДИЧЕСКОЕ ЧИСЛО — одно из обобщений понятия числа, играющее большую роль в топологии, алгебре, алгебраич. геометрии. Поле p-адических чисел (p — фиксированное простое число) получается из поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел пополнением его, но не в обычной метрике (индуцируемой абсолютной величиной числа), а в метрике, связанной с p-адическим абсолютным значением (p-адической нормой) $|\ |_p$, к-рая определяется следующим образом. Пусть $\alpha \neq 0$ — рациональное число и $\alpha = \frac{a}{b} p^k$, где a, b — взаимно простые целые числа, не делящиеся на p, k — целое число (каждое рациональное число единственным образом записывается в таком виде). Тогда $|\alpha|_p = \frac{1}{p^k}$, $|0|_p = \infty$.

Каждый элемент поля p-А. ч. $\mathbb{Q}_p$ может быть представлен в виде

$$x = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k p^k, \quad 0 \leqslant a_k < p, \qquad (*)$$

где a_k — целые, k_0 — нек-рое целое число, $a_k \neq 0$ и ряд (*) сходится в метрике поля $\mathbb{Q}_p$. Числа x, удовлетворяющие неравенству $|x|_p \leqslant 1$ (т. е. с $k_0 \geqslant 0$), образуют кольцо $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел, являющееся пополнением кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ поля $\mathbb{Q}$. Поле p-А. ч. не является алгебраически замкнутым, но пополнение его алгебраич. замыкания будет алгебраически замкнутым полем.

p-А. ч. были введены как аппарат для решения диофантовых уравнений. Существующее для них канонич. представление (*) является аналогом разложения аналитич. функций в степенной ряд. Это есть одно из проявлений аналогии между алгебраическими числами и алгебраическими функциями.

● Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 3 изд., М., 1985; Коблиц Н., p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции, пер. с англ., М., 1982.

АДЪЮНКТА (лат. adjuncta — присоединённая, сопряжённая) — то же, что *алгебраическое дополнение*.

АЗИМУТАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ (араб. ас-сумут, мн. ч. ас-самт — путь, направление) — одна из *картографических проекций*.

АКСИАЛЬНЫЙ ВЕКТОР (от лат. axis — ось) — то же, что *осевой вектор*.

АКСИОМ СХЕМА — единый способ задания серии аксиом, обладающих одной и той же синтаксической структурой. Конкретная А. с. обычно реализуется при помощи фиксирующего её синтаксич. структуру выражения $\mathfrak{A}$ (чаще всего не принадлежащего языку, в к-ром записываются аксиомы) и правил, позволяющих, исходя из выражения $\mathfrak{A}$, получить произвольную аксиому данной структуры.

В контекстах с заранее сформулированными или однозначно подразумеваемыми правилами порождения аксиом с помощью выражения $\mathfrak{A}$ само выражение $\mathfrak{A}$ обычно наз. А. с. Так, выражение $A \supset (B \supset A)$, где под A и B подразумеваются произвольные формулы исчисления высказываний, является примером А. с.

Примером схемы нелогич. аксиом является следующий вариант схемы индукции в традиционных аксиоматизациях арифметики:

$$(\alpha(0) \,\&\, \forall x (\alpha(x) \supset \alpha(x'))) \supset \forall x \alpha(x);$$

здесь α и x предполагаются не принадлежащими алфавиту языка рассматриваемой формализации арифметики и интерпретируются соответственно как произвольная формула и произвольная переменная этой формализации.

Применение А. с. обычно позволяет при построении формальных теорий обойтись без правила подстановки. Так, напр., во всяком достаточно сильном пропозициональном исчислении с двумя правилами вывода — правилом подстановки и правилом заключения — оказывается возможным ограничиться при выводах подстановками только в аксиомы, что позволяет эквивалентным образом модифицировать такое исчисление, заменив каждую аксиому соответствующей А. с. и удалив правило подстановки из числа действующих в нём правил вывода.

АКСИО́МА (греч. ἀξίωμα — принятие положения, от ἀξιόω — считаю достойным, настаиваю, требую) — основное положение, самоочевидный принцип. В дедуктивных научных теориях А. наз. основные исходные положения той или иной теории, из к-рых путём дедукции, т. е. чисто логич. средствами, извлекается всё остальное её содержание. См. *Аксиоматический метод*.

АКСИОМАТИ́ЧЕСКАЯ ТЕО́РИЯ МНО́ЖЕСТВ — раздел математической логики, изучающий *множеств теорию* как аксиоматическую теорию.

А. т. м. исходит из развивавшейся Г. Кантором в кон. 19 в. «наивной» теории множеств. Теория Кантора в самом начале своего развития натолкнулась на серьёзные трудности в результате обнаружения в ней парадоксов. Один из них, парадокс (или антиномия) Рассела, связан с множеством всех таких множеств, к-рые не являются элементами самих себя. Обозначим это множество через S. Согласно определению, если S есть элемент S, то S также и не есть элемент S, и если S не есть элемент S, то S есть элемент S. В любом случае S есть элемент S и S не есть элемент S. Одно из направлений критики парадоксов теории множеств было нацелено на содержащееся в них допущение, что для любого свойства $P(x)$ существует соответствующее множество всех элементов x, обладающих свойством $P(x)$. Если отвергнуть это допущение, то известные парадоксы становятся невозможными. (Так, парадокс Рассела в этом случае лишь доказывает, что не существует множества S всех множеств, к-рые не принадлежат самим себе в качестве элемента.) Однако при этом необходимо принять нек-рые новые постулаты для того, чтобы мы могли, опираясь на них, доказать существование таких множеств, в к-рых нуждаются математики. Впервые такая А. т. м. была построена Э. Цермело (1908). Эта теория в дальнейшем была развита, усовершенствована и видоизменена рядом учёных.

А. т. м. представляет собой построение теории множеств *аксиоматическим методом*. Исследование проблем теории множеств средствами математич. логики предполагает оформление А. т. м. в виде *формальной системы*. Построение формальной А. т. м. начинается с описания языка, на к-ром будут записываться утверждения теории множеств. Один из наиболее употребительных вариантов языка А. т. м. содержит следующие символы: 1) переменные x, y, z, u, v, w, . . . (возможно, с индексами); 2) двуместные предикатные символы $\in$ (знак принадлежности) и $=$ (равенство); 3) логич. связки и кванторы: $\equiv$ (эквивалентность), $\supset$ (импликация), $\vee$ (дизъюнкция), $\&$ (конъюнкция), $\neg$ (отрицание), $\forall$ (квантор всеобщности), $\exists$ (квантор существования); 4) скобки ( ). Этот язык не содержит констант, т. е. имён к.-л. конкретных множеств. Формулы А. т. м. строятся по следующим правилам. 1) Если a и b — переменные, то $a\in b$ и $a=b$ — формулы. 2) Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, a — переменная, то $(\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})$, $\neg\mathfrak{A}$, $\forall a\mathfrak{A}$, $\exists a\mathfrak{A}$ суть формулы.

В описанном языке посредством формул могут быть выражены различные свойства множеств и отношения между множествами, возникающие в теории множеств. Напр., формула $\forall z(z\in x\supset z\in y)$ означает, что $x\subseteq y$ (x есть подмножество y); $\forall y\,\neg y\in x$ означает, что $x=\varnothing$ (x — пустое множество); $\forall z(z\in y\equiv z\subseteq x)$ означает, что y есть множество всех подмножеств x (обычно обозначаемое Px). В дальнейшем мы будем употреблять выражения $x\subseteq y$, $y=Px$, $x=\varnothing$ как сокращённые обозначения для соответствующих формул. Приведём ещё нек-рые наиболее употребительные обозначения. Пусть $\rightleftarrows$ означает «есть по определению». Тогда

$$y=\{x\}\rightleftarrows\forall z\,(z\in y\equiv z=x)$$

(y — одноэлементное множество, состоящее из x);

$$z=\{x,\ y\}\rightleftarrows\forall x\,(u\in z\equiv(u=x\vee u=y))$$

(z — неупорядоченная пара x и y);

$$z=\langle x,\ y\rangle\rightleftarrows z=\{\{x\},\ \{x,\ y\}\}$$

(z — упорядоченная пара x и y);

$$z=x\cup y\rightleftarrows\forall u\,(u\in z\equiv(u\in x\vee u\in y))$$

(z — объединение x и y);

$$z=x\cap y\rightleftarrows\forall u\,(u\in z\equiv(u\in x\&u\in y))$$

(z — пересечение x и y);

$$y=\bigcup x\rightleftarrows\forall z\,(z\in y\equiv\exists u\ (u\in x\&z\in u))$$

(y — объединение всех элементов из x);

$$y=x_1\times x_2\rightleftarrows\forall u\,(u\in y\equiv\exists z_1\exists z_2\,(z_1\in x_1\&z_2\in x_2\&u=\langle z_1,\ z_2\rangle))$$

(y — декартово произведение x_1 и x_2);

$$\mathrm{Fnc}\,(x)\rightleftarrows(\forall y\,(y\in x\supset\exists u\exists v\,(y=\langle u,\ v\rangle))\&$$
$$\&\forall y\forall u\forall v\forall s\forall t\,(s=\langle y,\ u\rangle\&t=\langle y,\ v\rangle\&s\in x\&t\in x)\supset u=v)$$

(x есть функция);

$$\mathrm{Inf}\,(z)\rightleftarrows\forall x\,(x=\varnothing\supset x\in z)\&\forall u\,(u\in z\supset$$
$$\supset\forall v\,(v=u\cup\{u\}\supset v\in z))$$

(z есть стандартное бесконечное множество);

$$y=w'x\rightleftarrows\forall u\,(u=\langle x,\ y\rangle\supset u\in w)$$

(y — значение функции w на элементе x).

Основные принципы «наивной» теории множеств могут быть выражены посредством формул, к-рые естественно было бы объявить аксиомами строящейся формальной системы. Рассмотрим, напр., аксиоматич. теорию с аксиомами:

А1. Аксиома объёмности

$$\forall z\,(z\in x\equiv z\in y)\supset x=y$$

(два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов).

А2. Аксиома свёртывания

$$\exists y\forall x\,(x\in y\equiv A\,(x)),$$

где $A(x)$ — произвольная формула, не содержащая y (существует множество y, содержащее те и только те x, для к-рых имеет место $A(x)$).

Эта теория противоречива. Действительно, если в аксиоме А2 в качестве $A(x)$ взять формулу $\neg x\in x$, то в соответствии с правилами логики можно провести те же рассуждения, что и в парадоксе Рассела, и получить противоречие.

Для предложенной Э. Цермело системы А. т. м. Z характерно такое ограничение аксиомы свёртывания, к-рое сохраняет основное содержание теории множеств, используемое в математике, и в то же время позволяет избежать известных парадоксов. Систему Z можно сформулировать в описанном выше языке. Правила вывода и логич. аксиомы системы Z совпадают с постулатами *предикатов исчисления* с равенством, а нелогич. аксиомы следующие (при введённых выше обозначениях):

Z1. Аксиома объёмности А1.

Z2. Аксиома пары

$$\exists z\,(z=\{x,\ y\}).$$

Z3. Аксиома суммы

$$\exists y\,(y=\bigcup x).$$

Z4. Аксиома степени

$$\exists y\,(y=Px).$$

Аксиома выделения

$$\exists y\forall z\,(z\in y\equiv(z\in x\&A)),$$

где A — формула, не содержащая y (существует множество, состоящее в точности из тех элементов множества x, для к-рых выполняется A).

Z6. Аксиома бесконечности

$$\exists x \operatorname{Inf}(x).$$

Z7. Аксиома выбора

$$\forall z \exists w\,(\operatorname{Fn}(w) \,\&\, \forall x\,(x \in z \,\&\, \neg x = \varnothing \supset \exists u\,(u = w'x \,\&\, u \in x)))$$

(для любого множества z существует функция w такая, что $w'x \in x$ для всякого непустого элемента x множества z).

Z8. Аксиома фундирования

$$\forall x\,(\neg x = \varnothing \supset \exists y\,(y \in x \,\&\, \forall z\,(z = y \cap x \supset z = \varnothing)))$$

(всякое непустое множество x содержит элемент, не имеющий с x общих элементов).

Заметим, что в системе Z отсутствует аксиома свёртывания в общем виде, но аксиомы Z2—Z5 являются её частными случаями.

В системе Z можно развивать арифметику, анализ и нек-рые другие разделы математики. Однако эта система оказывается недостаточной для того, чтобы в полной мере развивать теорию *кардинальных чисел*: в ней невозможно доказать существование $\aleph_\omega$ и более высоких кардиналов. В связи с этим А. Френкель (1922) предложил пополнить систему Z новой аксиомой, к-рую он назвал аксиомой подстановки:

ZF9. $\forall y \forall z \forall w\,((y \in x \,\&\, A(y, z) \,\&\, A(y, w)) \supset z = w) \supset \exists r \forall s$
$(s \in r \equiv \exists t\,(t \in x \,\&\, A(t, s)))$,

где $A(t, s)$ — произвольная формула (для каждого однозначного бинарного отношения A существует множество r, состоящее из таких объектов s, что $A(t, s)$ для нек-рого $t \in x$).

Система ZF получается добавлением аксиомы подстановки ZF9 к системе Z. Все обычные математич. теоремы формализуются в ZF.

Другую аксиоматику теории множеств предложил Дж. Нейман. Его идея заключалась во введении в теорию множеств нового первичного понятия — понятия класса. Интуитивный смысл этого понятия таков: X является классом, если X представляет собой совокупность всех предметов, обладающих нек-рым свойством. Такая совокупность не всегда будет множеством (напр., совокупность всех таких x, что $\neg x \in x$). Система NBG, предложенная Дж. Нейманом и в дальнейшем тщательно переработанная П. Бернайсом и К. Гёделем, строится в языке, к-рый содержит два типа переменных — по множествам (x, y, z,. . .) и по классам (X, Y, Z,. . .) и имеет конечное число аксиом существования классов, к-рые позволяют, в частности, доказать формулы вида

$$\exists Y \forall x\,(x \in Y \equiv A(x)),$$

где $A(x)$ — формула, не содержащая кванторов по классам (по каждой формуле $A(x)$ можно образовать класс всех множеств, обладающих свойством $A(x)$). Благодаря этому в системе NBG удаётся обойтись конечным числом аксиом, что является одним из её преимуществ перед системой ZF, в к-рой аксиома выделения и аксиома подстановки представляют собой схемы аксиом, превращающиеся в аксиомы при выборе конкретной формулы A.

Всякая формула системы ZF доказуема в системе NBG тогда и только тогда, когда она доказуема в ZF.

Как бы ни отличались различные системы А. т. м. своими внешними чертами, общее для них содержание составляют те фундаментальные теоремы, на к-рые в повседневной практике опираются математики. ZF или другая подходящая система А. т. м. допускает все обычные способы рассуждения, принятые в математике, и в ней могут быть выведены все обычные математич. факты. Это позволяет придать точный смысл утверждению о принципиальной неразрешимости нек-рых математич. проблем и строго доказать его. Исследуемая проблема A записывается в виде формулы в языке А. т. м., а затем математич. методами устанавливается, что в ZF невозможно вывести ни A, ни отрицание A. Отсюда следует, что данная проблема не может быть разрешена обычными методами рассуждения, так как все они формализованы в ZF.

Оказалось, что неразрешимыми являются многие проблемы теории множеств, возникшие и интенсивно обсуждавшиеся в первый период её развития. К их числу относится континуум-гипотеза — выдвинутое Г. Кантором предположение о том, что всякое бесконечное подмножество множества мощности континуума либо равномощно множеству натуральных чисел, либо имеет мощность континуума. К. Гёдель (1939) показал, что если система ZF непротиворечива, то она остаётся непротиворечивой и после добавления континуум-гипотезы. Вопрос о том, можно ли вывести в ZF континуум-гипотезу, оставался открытым вплоть до 1963, когда П. Коэн с помощью разработанного им метода вынуждения доказал, что если ZF непротиворечива, то она остаётся таковой и после присоединения отрицания континуум-гипотезы.

Методы А. т. м., в частности метод вынуждения, предложенный П. Коэном и усовершенствованный затем другими учёными, позволили решить ряд других трудных проблем классич. математики.

● Френкель А. А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; Коэн П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969; Йех Т., Теория множеств и метод форсинга, пер. с англ., М., 1973; Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., 2 изд., М., 1976.

АКСИОМАТИ́ЧЕСКИЙ МЕ́ТОД — способ построения научной теории, при котором в основу теории кладутся некоторые исходные положения, называемые *аксиомами* теории, а все остальные предложения теории получаются как логические следствия аксиом.

В математике А. м. зародился в работах древнегреч. геометров. Блестящим образцом применения А. м. вплоть до 19 в. была геометрич. система, известная под названием «Начал» Евклида (ок. 300 до н. э.). Хотя в то время не вставал ещё вопрос об описании логич. средств, применяемых для извлечения содержательных следствий из аксиом, в системе Евклида уже достаточно чётко проведена идея получения всего основного содержания геометрич. теории чисто дедуктивным путём, из нек-рого, относительно небольшого, числа утверждений — аксиом, истинность к-рых представлялась наглядно очевидной.

Открытие в нач. 19 в. неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским и Я. Больяй явилось толчком к дальнейшему развитию А. м. Они установили, что, заменив привычный и, казалось бы, единственно «объективно истинный» V постулат Евклида о параллельных его отрицанием, можно развивать чисто логич. путём геометрич. теорию, столь же стройную и богатую содержанием, как и геометрия Евклида. Этот факт заставил математиков 19 в. обратить специальное внимание на дедуктивный способ построения математич. теорий, что повлекло за собой возникновение связанной с самим понятием А. м. и формальной (аксиоматич.) математич. теории новой проблематики, на основе к-рой выросла т. н. теория доказательств как основной раздел современной математич. логики.

Понимание необходимости обоснования математики и конкретные задачи в этой области зародились в более или менее отчётливой форме уже в 19 в. Уточнение основных понятий анализа и сведение более сложных понятий к простейшим на точной и логически всё более строгой основе, а также открытие неевклидовых геометрий стимулировали развитие А. м. и возникновение проблем более общего математич. характера, таких, как *непротиворечивость*, *полнота* и *независимость* той или иной системы аксиом.

Первые результаты в этой области принёс метод интерпретаций, к-рый может быть описан следующим образом. Пусть каждому исходному понятию и отношению данной аксиоматич. теории T поставлен в соответствие нек-рый конкретный математич. объект. Совокупность таких объектов наз. полем интерпретации. Всякому утверждению $\mathfrak{A}$ теории T естествен-

ным образом ставится в соответствие нек-рое высказывание $\mathfrak{A}^*$ об элементах поля интерпретации, к-рое может быть истинным или ложным. Тогда говорят, что утверждение $\mathfrak{A}$ теории T соответственно истинно или ложно в данной интерпретации. Поле интерпретации и его свойства обычно сами являются объектом рассмотрения к.-л. математич. теории T_1, к-рая, в частности, может быть тоже аксиоматической.

Метод интерпретаций позволяет устанавливать факт относительной непротиворечивости, т. е. доказывать суждения типа: «если теория T_1 непротиворечива, то непротиворечива и теория T». Пусть теория T проинтерпретирована в теории T_1 таким образом, что все аксиомы A_i теории T интерпретируются истинными суждениями A_i^* теории T_1. Тогда всякая *теорема* теории T, т. е. всякое утверждение A, логически выведенное из аксиом A_i в T, интерпретируется в T_1 нек-рым утверждением A^*, выводимым в T из интерпретаций A_i^* аксиом A_i, и следовательно истинным. Последнее утверждение опирается на ещё одно неявно делаемое нами допущение известного подобия логич. средств, применяемых в теориях T и T_1. Практически это условие обычно выполняется. Пусть теперь теория T противоречива, т. е. нек-рое утверждение A этой теории выводимо в ней вместе со своим отрицанием. Тогда из вышесказанного следует, что утверждения A^* и «не A^*» будут одновременно истинными утверждениями теории T_1, т.е. что теория T_1 противоречива. Этим методом была, напр., доказана (Ф. Клейн, А. Пуанкаре) непротиворечивость неевклидовой геометрии Лобачевского в предположении, что непротиворечива геометрия Евклида, а вопрос о непротиворечивости гильбертовой аксиоматизации евклидовой геометрии был сведён (Д. Гильберт) к проблеме непротиворечивости арифметики.

Метод интерпретаций позволяет также решать вопрос о независимости систем аксиом: для доказательства того, что аксиома A теории T не выводима из остальных аксиом этой теории и, следовательно, существенно необходима для получения всего объёма данной теории, достаточно построить такую интерпретацию теории T, в к-рой аксиома A была бы ложна, а все остальные аксиомы этой теории истинны. Упомянутое выше сведение проблемы непротиворечивости геометрии Лобачевского к проблеме непротиворечивости евклидовой геометрии, а этой последней — к вопросу о непротиворечивости арифметики имеет своим следствием утверждение, что V постулат Евклида не выводим из остальных аксиом геометрии, если только непротиворечива арифметика натуральных чисел.

Слабая сторона метода интерпретаций состоит в том, что в вопросах непротиворечивости и независимости систем аксиом он даёт возможность получать только результаты, носящие относительный характер. Важным достижением этого метода стал тот факт, что с его помощью была выявлена особая роль арифметики как такой математич. теории, к вопросу о непротиворечивости к-рой сводится аналогичный вопрос для целого ряда других теорий.

Дальнейшее развитие — в известном смысле это была вершина — А. м. получил в работах Д. Гильберта и его школы. В рамках этого направления было выработано дальнейшее уточнение понятия аксиоматич. теории, а именно понятие *формальной системы*. В результате этого уточнения оказалось возможным представлять сами математич. теории как точные математич. объекты и строить общую теорию, или *метатеорию*, таких теорий. При этом соблазнительной представлялась перспектива (и Д. Гильберт был в своё время ею увлечён) решить на этом пути все главные вопросы обоснования математики. Всякая формальная система строится как точно очерченный класс выражений — формул, в к-ром нек-рым точным образом выделяется подкласс формул, наз. теоремами данной формальной системы. При этом формулы формальной системы сами не несут в себе никакого содержательного смысла; их можно строить из произвольных знаков или элементарных символов, руководствуясь только соображениями технич. удобства. На самом деле способ построения формул и понятие теоремы той или иной формальной системы выбираются с таким расчётом, чтобы весь этот формальный аппарат можно было применять для возможно более адекватного и полного выражения той или иной конкретной математической (или не математической) теории, точнее, как её фактич. содержания, так и её дедуктивной структуры. Всякую конкретную математич. теорию T можно перевести на язык подходящей формальной системы S таким образом, что каждое осмысленное (ложное или истинное) предложение теории T выражается некрой формулой системы S.

Естественно было надеяться, что метод формализации позволит строить всё положительное содержание математич. теорий на такой точной и, казалось бы, надёжной основе, как понятие выводимой формулы (теоремы формальной системы), а принципиальные вопросы типа проблемы непротиворечивости математич. теорий решать в форме доказательств соответствующих утверждений о формализующих эти теории формальных системах. Чтобы получить доказательства утверждений о непротиворечивости, не зависящие от тех мощных средств, к-рые в классич. математич. теориях как раз и являются причиной трудностей их обоснования, Д. Гильберт предлагал исследовать формальные системы т. н. финитным и методами (см. *Метаматематика*).

Однако результаты К. Гёделя начала 30-х гг. 20 в. привели к краху основных надежд, связывавшихся с этой программой. К. Гёдель показал следующее.

1) Всякая естественная, непротиворечивая формализация S арифметики или любой другой математич. теории, содержащей арифметику (напр., теории множеств), неполна и непополнима в том смысле, что: а) в S имеются (содержательно истинные) неразрешимые формулы, т. е. такие формулы A, что ни A, ни отрицание A не выводимы в S (неполнота формализованной арифметики); б) каким бы конечным множеством дополнительных аксиом (напр., неразрешимыми в S формулами) ни расширить систему S, в новой, усиленной таким образом формальной системе неизбежно появятся свои неразрешимые формулы (непополнимость; см. также *Гёделя теорема о неполноте*).

2) Если формализованная арифметика в действительности непротиворечива, то, хотя утверждение о её непротиворечивости выразимо на её собственном языке, доказательство этого утверждения невозможно провести средствами, формализуемыми в ней самой.

Это означает, что уже для арифметики принципиально невозможно исчерпать весь объём её содержательно истинных суждений классом выводимых формул какой бы то ни было формальной системы и что нет никакой надежды получить к.-л. финитное доказательство непротиворечивости арифметики, т. к., по-видимому, всякое разумное уточнение понятия финитного доказательства оказывается формализуемым в формальной арифметике.

Всё это ставит определённые границы возможностям А. м. в том его виде, к-рый он приобрёл в рамках гильбертовского формализма. Однако и в этих границах он сыграл и продолжает играть важную роль в основаниях математики. Так, напр., уже после описанных результатов К. Гёделя им же в 1938—40, а затем П. Коэном в 1963 на основе аксиоматич. подхода с применением метода интерпретаций были получены фундаментальные результаты о совместимости (т. е. относительной непротиворечивости) и независимости аксиомы выбора и континуум-гипотезы в теории множеств. Что касается такого основного вопроса оснований математики, как проблема непротиворечивости, то после результатов К. Гёделя стало ясно, что для его решения, по-видимому, не обойтись без других, отличных от финитистских, средств и идей. Здесь оказались возможными разные подходы, ввиду существования различных точек зрения на допустимость тех или иных логич. средств.

Из результатов о непротиворечивости формальных систем следует указать на доказательство непротиворечивости формализованной арифметики, к-рое опирается на бесконечную индукцию до нек-рого счётного *трансфинитного числа*.

● «Начала» Евклида, пер. с греч., кн. 1—15, М.— Л., 1948—50; Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.— Л., 1949; Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М. — Л., 1948; Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., М., 1979; их же, Основания математики. Теория доказательств, пер. с нем., М., 1982; Гёдель К., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1, с. 96—149; Коэн П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969; Генцен Г., Непротиворечивость чистой теории чисел, в кн.: Математическая теория логического вывода, М., 1967, с. 77—153. *П. С. Новиков.*

АКСОНОМЕ́ТРИЯ (от греч. ἄξων — ось и μετρέω — измеряю) — один из способов изображения пространственных фигур на плоскости. А. заключается в том, что фигура, выбранная прямоугольная декартова система координат и ортогональная проекция фигуры на одну из координатных плоскостей проектируются на плоскость чертежа. В зависимости от способа проектирования А. делится на параллельную и центральную.

Если направление параллельного проектирования на плоскость чертежа перпендикулярно этой плоскости, то А. наз. ортогональной или нормальной, в противном случае — косоугольной. При ортогональной А. указывают косинусы углов наклона координатных осей к плоскости чертежа, наз. иногда показателями (или коэффициентами) искажения. Если два показателя искажения равны, то А. наз. диметрией; если равны три показателя — изометрией; если все показатели искажения различны — триметрией. Иногда для упрощения построений пользуются «приведённой» А., в к-рой показатели искажения принимают такими, что координаты в проекции сохраняют свою величину.

АКТУА́ЛЬНАЯ БЕСКОНЕ́ЧНОСТЬ (от позднелат. actualis — фактически существующий, настоящий) — понятие о *бесконечности*, состоящее в рассмотрении бесконечной совокупности объектов как завершённого объекта, независимо от процесса построения этих объектов. Мы имеем дело с А. б., напр., когда рассматриваем натуральный ряд так, как будто все натуральные числа даны нам одновременно, или когда рассматриваем геометрич. фигуру как бесконечное множество точек. А. б. имеет идеализированный характер, поскольку построение бесконечного числа отдельных объектов принципиально не может быть завершено. А. б. возникает в результате мысленного отвлечения от этой незавершимости, т. е. в результате применения *абстракции актуальной бесконечности*.

В математич. практике использование А. б. проявляется в том, что не делается принципиальных различий между конечными и бесконечными множествами. Последние рассматриваются таким образом, как будто все их элементы уже построены и даны нам одновременно. В связи с этим в рассуждениях об актуально бесконечных множествах используются те же логич. законы, что и в рассуждениях о конечных множествах, в частности закон исключённого третьего. Понятию А. б. противопоставляется понятие *потенциальной бесконечности*.

А́ЛГЕБРА — 1) часть математики (см. *Алгебра*). В этом понимании термин «А.» употребляется в таких сочетаниях, как *гомологическая алгебра*, *коммутативная алгебра*, *линейная алгебра*, *топологическая алгебра*.

2) А. над полем (или телом) P, наз. также линейной алгеброй. А. в этом смысле есть кольцо, в к-ром определено умножение элементов на элементы из P, удовлетворяющее естественным аксиомам:

$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \quad a\cdot 1 = a,$$
$$(ab)\alpha = (a\alpha)\, b = a\,(b\alpha),$$

где 1, α — элементы из P; a, b, $a\alpha$, $b\alpha$ — элементы кольца. Таким образом, А., рассматриваемая лишь относительно сложения и этого внешнего умножения, является векторным пространством над P; для А. сохраняется и терминология векторных пространств — понятия линейной зависимости и независимости элементов, базы, ранга (размерности). Первые примеры конечномерных алгебр над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел носили название гиперкомплексных систем (см. *Гиперкомплексное число*). Рассматриваются также А. над коммутативным ассоциативным кольцом с единицей, определяемые теми же аксиомами.

3) То же, что *универсальная алгебра*.

АЛГЕБРА.

СОДЕРЖАНИЕ:

Общие сведения 47
Исторический очерк 48
Современное состояние алгебры 50

Общие сведения

Алгебра — часть математики, принадлежащая наряду с *арифметикой* и *геометрией* к числу старейших ветвей этой науки. Задачи, а также методы А., отличающие её от других отраслей математики, создавались постепенно, начиная с древности. А. возникла под влиянием нужд общественной практики, в результате поисков общих приёмов для решения однотипных арифметич. задач. Приёмы эти заключаются обычно в составлении и решении уравнений.

Задачи решения и исследования уравнений оказали большое влияние на развитие первоначального арифметич. понятия числа. С введением в науку отрицательных, иррациональных, комплексных чисел общее исследование свойств этих различных числовых систем тоже отошло к А. При этом в А. сформировались характерные для неё буквенные обозначения, позволившие записать свойства действий над числами в сжатой форме, удобной для построения исчисления над буквенными выражениями. Буквенное исчисление тождественных преобразований, давшее возможность преобразовывать по определённым правилам (отражающим свойства действий) буквенную запись результата действий, составляет аппарат классич. А. Тем самым А. отграничилась от арифметики: А. изучает, пользуясь буквенными обозначениями, общие свойства числовых систем и общие методы решения задач при помощи уравнений; арифметика занимается приёмами вычислений с конкретно заданными числами, а в своих более высоких областях (см. *Чисел теория*) — тонкими индивидуальными свойствами чисел. Развитие А., её методов и символики оказало очень большое влияние на развитие более новых областей математики, подготовив, в частности, появление математич. анализа. Запись простейших основных понятий анализа, таких, как переменная величина, функция, невозможна без буквенной символики, а в анализе, в частности в дифференциальном и интегральном исчислениях, полностью пользуются аппаратом классич. А. Применение аппарата классич. А. возможно всюду, где приходится иметь дело с операциями, аналогичными сложению и умножению чисел. Эти операции могут производиться при этом и не над числами, а над объектами самой различной природы. Наиболее известным примером такого расширенного применения алгебраич. методов является *векторная алгебра*. Следом за векторной А. возникла тензорная алгебра (см. *Тензорное исчисление*), ставшая одним из вспомогательных средств современной физики.

Таким образом, А. в более широком, современном, понимании может быть определена как наука о системах объектов той или иной природы, в к-рых установлены операции, по своим свойствам более или менее сходные со сложением и умножением чисел. Такие операции наз. *алгебраическими операциями*. А. классифицирует системы с заданными на них алгебраич. операциями по их свойствам и изучает различные задачи, естественно возникающие в этих системах, включая и задачу решения и исследования уравнений, к-рая в новых системах объектов получает новый смысл (решением уравнений может быть вектор,

матрица, оператор и т. д.). Этот новый взгляд на А., вполне оформившийся лишь в 20 в., способствовал дальнейшему расширению области применения алгебраич. методов, в том числе и за пределами математики, в частности в физике. Вместе с тем он укрепил связи А. с другими отделами математики и усилил влияние А. на их дальнейшее развитие.

Исторический очерк

Начальное развитие. Алгебре предшествовала арифметика как собрание постепенно накопленных практич. правил для решения повседневных житейских задач. Эти правила арифметики сводились к сложению, вычитанию, умножению и делению чисел, вначале только целых, а затем — постепенно и в очень медленном развитии — и дробных. Характерное отличие А. от арифметики заключается в том, что в А. вводится неизвестная величина; действия над ней, диктуемые условиями задачи, приводят к уравнению, из к-рого уже находится сама неизвестная. Намёк на такую трактовку арифметич. задач есть уже в древнеегипетском *папирусе* Ахмеса (ок. 2000 до н. э.), где искомая величина наз. словом «куча» и обозначается соответствующим иероглифом. Древние египтяне решали и гораздо более сложные задачи (напр., на арифметич. и геометрич. прогрессии). Как формулировка задачи, так и решение давались в словесной форме и только в виде конкретных численных примеров. И всё же за этими примерами чувствуется наличие накопленных общих методов, если не по форме, то по существу равносильных решению уравнений 1-й и иногда 2-й степеней. Имеются и первые математич. знаки (напр., особый знак для дробей).

В нач. 20 в. были расшифрованы многочисленные *клинописные математические тексты* и другой древнейшей культуры — вавилонской. Это открыло миру высоту математич. культуры, существовавшей уже за 4000 лет до наших дней. Вавилоняне с помощью обширных специальных таблиц умели решать разнообразные задачи; нек-рые из них равносильны решению квадратных уравнений и даже одного вида уравнения 3-й степени. Среди учёных, разрабатывающих историю математики, возник спор о том, в какой мере математику вавилонян можно считать А. Нельзя, однако, забывать, что древняя математика едина. Разделение произошло гораздо позднее.

В Др. Греции отчётливо выделена геометрия. У древнегреч. геометров впервые сознательно поставлено исследование, каждый шаг к-рого оправдан логич. доказательством. Мощь этого метода так велика, что вопросы переводились на язык геометрии: величины трактовались как длины, произведение двух величин — как площадь прямоугольника и т. д. И в современном математич. языке сохранилось, напр., название «квадрат» для произведения величины на самоё себя. Характерное для более древних культур единство научных знаний и практич. приложений было в древнегреч. математике разорвано: геометрию считали логич. дисциплиной, необходимой школой для философского ума, а всякого рода исчисления, т. е. вопросы арифметики и А., идеалистич. философия Платона не считала достойным предметом науки. Несомненно, эти отрасли также продолжали развиваться (на основе вавилонских и египетских традиций), но до нашего времени дошёл только трактат Диофанта Александрийского «Арифметика» (вероятно, 3 в.), в к-ром он уже довольно свободно оперирует с уравнениями 1-й и 2-й степеней; в зачаточной форме у него можно найти и употребление отрицательных чисел.

Наследие древнегреч. науки восприняли учёные средневекового Востока — Ср. Азии, Месопотамии, Сев. Африки. Международным научным языком служил для них арабский язык (подобно тому, как для учёных средневекового Запада таким языком был латинский), поэтому этот период в истории математики иногда называют «арабским». В действительности же одним из крупнейших научных центров этого времени (9—15 вв.) была Ср. Азия. Среди многих примеров достаточно назвать деятельность математика и астронома 9 в., уроженца Хорезма Мухаммеда аль-Хорезми и великого учёного-энциклопедиста Бируни; создание в 15 в. обсерватории Улугбека в Самарканде. Учёные средневекового Востока передали Европе математику греков и индийцев в оригинальной переработке, причём особенно много они занимались именно А. Само слово «алгебра» — арабское (аль-джебр) и является началом названия одного из сочинений аль-Хорезми (аль-джебр означало один из приёмов преобразования уравнений). Со времени аль-Хорезми А. можно рассматривать как отдельную отрасль математики.

Математики средневекового Востока все действия излагали словами. Дальнейший прогресс А. стал возможным только после появления во всеобщем употреблении удобных символов для обозначения действий (см. *Математические знаки*). Этот процесс шёл медленно и зигзагами. Выше упоминалось о знаке дроби у древних египтян. У Диофанта буква ι (начало слова ἴσος, т. е. равный) применялась как знак равенства, были подобные сокращения и у индийцев (5—7 вв.),но затем эта зарождавшаяся символика снова терялась. Дальнейшее развитие А. принадлежит итальянцам, перенявшим в 12 в. математику средневекового Востока. Леонардо Пизанский (13 в.) — наиболее выдающийся математик этой эпохи, занимавшийся алгебраич. проблемами. Постепенно алгебраич. методы проникают в вычислительную практику, в первое время ожесточённо конкурируя с арифметическими. Приспособляясь к практике, итальянские учёные вновь переходят к удобным сокращениям; напр., вместо слов «плюс» и «минус» стали употреблять латинские буквы p и m с особой чёрточкой сверху. В кон. 15 в. в математич. сочинениях появляются принятые теперь знаки $+$ и $-$, причём есть указания, что эти знаки задолго до этого употреблялись в торговой практике для обозначения избытка и недостатка в весе.

Быстро следует введение и всеобщее признание остальных знаков (степени, корня, скобок и т. д.). К сер. 17 в. полностью сложился аппарат символов современной А.— употребление букв для обозначения не только искомого неизвестного, но и всех вообще входящих в задачу величин. До этой реформы, окончательно закреплённой Ф. Виетом (кон. 16 в.), в А. и арифметике как бы нет общих правил и доказательств; рассматриваются исключительно численные примеры. Почти невозможно было высказать к.-л. общие суждения. Даже элементарные учебники этого времени очень трудны, т. к. дают десятки частных правил вместо одного общего. Ф. Виет первым начал писать свои задачи в общем виде, обозначая неизвестные величины гласными A, E, I,. . ., а известные — согласными B, C, D, ... Эти буквы он соединяет введёнными уже в то время знаками математич. операций. Таким образом впервые возникают буквенные формулы, столь характерные для современной А. Начиная с Р. Декарта (17 в.) для неизвестных употребляют преимущественно последние буквы алфавита (x, y, z).

Введение символич. обозначений и операций над буквами, заменяющими какие угодно конкретные числа, имело исключительно важное значение. Без этого орудия — языка формул — были бы немыслимы блестящее развитие высшей математики начиная с 17 в., создание математич. анализа, математич. выражения законов механики и физики и т. д.

Содержание А. охватывало во время Диофанта уравнения 1-й и 2-й степеней. К уравнениям 2-й степени (т. н. квадратным) древнегреч. математики пришли, по-видимому, геометрич. путём, т. к. задачи, приводящие к этим уравнениям, естественно возникают при определении площадей и построении окружности по различным данным. Однако в одном, очень существенном отношении решение уравнений у древних математиков отличалось от современного: они не употребляли отрицательных чисел. Поэтому даже уравнение 1-й степени (с точки зрения древних) не всегда имело решение. При рассмотрении уравне-

ний 2-й степени приходилось различать много частных случаев (по знакам коэффициентов). Решающий шаг — применение отрицательных чисел — был сделан индийскими математиками (10 в.), но учёные средневекового Востока не пошли по этому пути. С отрицательными числами свыклись постепенно; этому особенно способствовали коммерч. вычисления, в к-рых отрицательные числа имеют наглядный смысл убытка, расхода, недостатка и т. д. Окончательно же отрицательные числа были приняты только в 17 в., после того как Р. Декарт воспользовался их наглядным геометрич. представлением для аналитич. геометрии.

Возникновение *аналитической геометрии* было вместе с тем и торжеством А. Если раньше, у древних греков, чисто алгебраич. задачи облекались в геометрич. форму, то теперь, наоборот, алгебраич. средства выражения оказались уже настолько удобными и наглядными, что геометрич. задачи переводились на язык алгебраич. формул. Подробнее о постепенном расширении области чисел, употребляемых в математике, о введении отрицательных, иррациональных, мнимых чисел см. в ст. *Число*. Здесь же надо отметить, что необходимость введения всех этих чисел особенно настоятельно ощущалась как раз в А.: так, напр., квадратные иррациональности (корни) возникают при решении уравнений 2-й степени. Конечно, уже древнегреческие и среднеазиатские математики не могли пройти мимо извлечения корней и придумали остроумные способы их приближённого вычисления; но взгляд на иррациональность как на число установился значительно позже. Введение же комплексных или «мнимых» чисел относится к следующей эпохе (18 в.).

Итак, к 18 в. А. сложилась приблизительно в том объёме, к-рый до наших дней преподаётся в средней школе. Эта А. охватывает действия сложения, умножения с обратными им действиями вычитания и деления, а также возведение в степень (частный случай умножения) и обратное ему — извлечение корня. Эти действия производились над числами или буквами, к-рые могли обозначать положительные или отрицательные, рациональные или иррациональные числа. Указанные действия употреблялись в решении задач, по существу сводившихся к уравнениям 1-й и 2-й степеней. Эта «элементарная» А. применяется повседневно в технике, физике и др. областях науки и практики. Но содержание науки А. и её приложений этим далеко не ограничивается. Трудны и медленны были только первые шаги. С 16 в., и особенно в 18 в., начинается быстрое развитие А., а в 20 в. она переживает новый расцвет.

На русском языке изложение элементарной А. в том виде, в каком она сложилась к нач. 18 в., было впервые дано в знаменитой «Арифметике» Л. Ф. Магницкого, вышедшей в 1703.

А л г е б р а в 18—19 в е к а х. В кон. 17 — нач. 18 вв. произошёл величайший перелом в истории математики и естествознания; был создан и быстро распространялся анализ бесконечно малых (дифференциальное и интегральное исчисления). Этот перелом был вызван развитием производительных сил, потребностями техники и естествознания того времени и подготовлен он был всем предшествующим развитием А. В частности, буквенные обозначения и действия над ними ещё в 16—17 вв. способствовали зарождению взгляда на математич. величины как на переменные, что так характерно для анализа бесконечно малых, где непрерывному изменению одной величины обычно соответствует непрерывное изменение другой — её функции.

А. и анализ развивались в 17—18 вв. в тесной связи. В А. проникали функциональные представления, в этом направлении её обогатил И. Ньютон. С другой стороны, А. принесла анализу свой богатый набор формул и преобразований, игравших большую роль в начальный период интегрального исчисления и теории дифференциальных уравнений. Крупным событием в А. этого периода было появление курса алгебры Л. Эйлера, работавшего тогда в Петербургской академии наук. Этот курс вышел сначала на русском языке (1768—69), а затем неоднократно издавался на иностранных языках. Отличие А. от анализа в 18—19 вв. характеризуется тем, что А. имеет своим основным предметом прерывное, конечное. Эту особенность А. подчеркнул в 1-й пол. 19 в. Н. И. Лобачевский, назвавший свою книгу «Алгебра, или вычисление конечных» (1834). А. занимается основными операциями (сложение и умножение), производимыми конечное число раз.

Простейшим результатом умножения является одночлен. Сумма конечного числа одночленов (с целыми степенями) наз. *многочленом*. А. 18—19 вв. и есть прежде всего А. многочленов.

Объём А., таким образом, оказывается значительно уже, чем объём анализа, но зато простейшие операции и объекты, составляющие предмет А., изучаются с большей глубиной и подробностью; и именно потому, что они простейшие, их изучение имеет фундаментальное значение для математики в целом. Вместе с тем А. и анализ продолжают иметь много точек соприкосновения, и разграничение между ними не является жёстким. Так, напр., анализ перенял от А. её символику, без к-рой он не мог бы и возникнуть. Во многих случаях изучение многочленов как более простых функций пролагало пути для общей теории функций. Наконец, через всю дальнейшую историю математики проходит тенденция сводить изучение более сложных функций к многочленам или рядам многочленов (простейший пример — ряд Тейлора). С другой стороны, А. нередко пользуется идеей непрерывности, а представление о бесконечном числе объектов стало господствующим в А. последнего времени, но уже в новом, специфич. виде (см. ниже — Современное состояние алгебры).

Если приравнять многочлен нулю (или вообще к.-л. определённому числу), то получают *алгебраическое уравнение*. Исторически первой задачей А. было р е ш е н и е таких уравнений, т. е. нахождение их к о р н е й — тех значений неизвестной величины x, при к-рых многочлен равен пулю. С древних времён известно решение *квадратного уравнения*. Алгебраич. решение уравнения 3-й и 4-й степеней было найдено в 16 в. (см. *Кубическое уравнение*, *Кардано формула*, *Феррари метод*). После этого начались настойчивые поиски формул, к-рые решали бы уравнения и высших степеней подобным образом, т. е. сводили бы решение к извлечениям корней («решение в радикалах»). Эти поиски продолжались около трёх столетий, и лишь в нач. 19 в. Н. Абель и Э. Галуа доказали, что уравнения степеней выше 4-й в общем случае в радикалах не решаются: оказалось, что существуют неразрешимые в радикалах уравнения n-й степени для любого n, большего или равного 5. Таково, напр., уравнение $x^5-4x-2=0$. Это открытие имело большое значение, т. к. оказалось, что корни алгебраич. уравнений — предмет гораздо более сложный, чем радикалы. Э. Галуа не ограничился этим, так сказать, отрицательным результатом, а положил начало более глубокой теории уравнений, связав с каждым уравнением группу подстановок его корней. Решение уравнения в радикалах равносильно сведению первоначального уравнения к цепи уравнений вида: $y^m=a$ (к-рое и выражает собой, что $y=\sqrt[m]{a}$). Сведение к таким уравнениям оказалось в общем случае невозможным, но возник вопрос: к цепи каких более простых уравнений можно свести решение уравнения заданного? Напр., через корни каких уравнений корни заданного уравнения выражаются рационально, т. е. при помощи четырёх действий — сложения, вычитания, умножения и деления. В таком более широком понимании *Галуа теория* продолжает развиваться вплоть до нашего времени.

С чисто практич. стороны для вычисления корней уравнения по заданным коэффициентам не было особой необходимости в общих формулах решения для уравнений высших степеней, т. к. уже для уравнений 3-й и 4-й степеней такие формулы практически мало полезны. Численное

решение уравнений пошло иным путём, т. е. путём приближённого вычисления, тем более уместным, что на практике (напр., в астрономии и технике) и сами коэффициенты обычно являются результатом измерений, т. е. известны лишь приближённо, с той или иной точностью.

Приближённое вычисление корней алгебраич. уравнений является важной задачей вычислительной математики; разработано огромное число приёмов её решения, в частности с использованием современной вычислительной техники. Но математика состоит не только из описания способов вычисления. Не менее важна — даже для приложений — другая сторона математики: уметь чисто теоретич. путём, без вычислений, дать ответ на поставленные вопросы. В области теории алгебраич. уравнений таким является вопрос о числе корней и их характере. Ответ зависит от того, какие числа рассматриваются. Если допустить положительные и отрицательные числа, то уравнение 1-й степени всегда имеет решение, и притом только одно. Но уже квадратное уравнение может и не иметь решений среди действительных чисел; напр., уравнение $x^2+2=0$ не может быть удовлетворено ни при каком положительном или отрицательном x, т. к. слева всегда окажется положительное число, а не нуль. Представление решения в виде $x=\sqrt{-2}$ не имеет смысла, пока не будет разъяснено, что такое квадратный корень из отрицательного числа. Именно такого рода задачи и натолкнули математиков на мнимые числа. Ещё раньше отдельные смелые исследователи ими пользовались, но окончательно они были введены в науку только в 19 в. Эти числа оказались важнейшим орудием не только в А., но и почти во всех разделах математики и её приложений. По мере того как привыкали к мнимым числам, они теряли всякую таинственность и «мнимость», почему теперь их называют чаще всего не мнимыми, а *комплексными числами*.

Если допускать и комплексные числа, то оказывается что любое уравнение n-й степени имеет корни, причём это верно и для уравнений с любыми комплексными коэффициентами. Эта важная теорема, носящая название о с н о в н о й т е о р е м ы А., была впервые высказана в 17 в., но первое строгое доказательство её было дано в самом кон. 18 в. К. Гауссом; с тех пор были опубликованы десятки различных доказательств. Все эти доказательства должны были в той или иной форме прибегнуть к непрерывности; таким образом, доказательство основной теоремы А. само выходило за пределы А., демонстрируя лишний раз неразрывность математич. науки в целом.

Если x_i — один из корней алгебраич. уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

то легко доказать, что многочлен, стоящий в левой части уравнения, делится без остатка на $x-x_i$. Из основной теоремы А. легко выводится, что всякий многочлен n-й степени распадается на n таких множителей 1-й степени, т. е.

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

при любых значениях x, причём многочлен допускает лишь одно-единственное разложение на множители такого вида.

Таким образом, уравнение n-й степени имеет n корней. В частных случаях может оказаться, что нек-рые из множителей равны, т. е. нек-рые корни повторяются несколько раз (к р а т н ы е к о р н и); следовательно, число различных корней может быть и меньше n. Часто не так важно вычислить корни, как разобраться в том, каков характер этих корней. Как пример можно привести найденное ещё Р. Декартом т. н. п р а в и л о з н а к о в (см. *Декарта теорема*): уравнение имеет не больше положительных корней, чем число перемен знака в ряду его коэффициентов (а если меньше, то на чётное число). Напр., в рассмотренном выше уравнении $x^5-4x-2=0$ одна перемена знака (первый коэффициент положительный, остальные — отрицательные), значит, не решая уравнения, можно утверждать, что оно имеет один и только один положительный корень. Общий вопрос о числе действительных корней в заданных пределах решается *Штурма теоремой*. Очень важно, что у уравнения с действительными коэффициентами комплексные корни могут являться только парами: наряду с корнем $a+bi$ корнем того же уравнения всегда будет и $a-bi$. Приложения ставят иногда и более сложные задачи этого рода; так, в механике доказывается, что движение устойчиво, если нек-рое алгебраич. уравнение имеет только такие корни (хотя бы и комплексные), у к-рых действительная часть отрицательна, и это заставило искать условия, при к-рых корни уравнения обладают этим свойством (см. *Рауса — Гурвица критерий*).

Многие теоретич. и практич. вопросы приводят не к одному уравнению, а к целой системе уравнений с несколькими неизвестными. Особенно важен случай системы *линейных уравнений*, т. е. системы m уравнений 1-й степени с n неизвестными:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\
a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m.
\end{aligned}$$

Здесь $x_1,\ldots,x_n$ — неизвестные, а коэффициенты записаны так, что индексы при них указывают на номер уравнения и номер неизвестного. Значение систем 1-й степени определяется не только тем, что они — простейшие. На практике (напр., для отыскания поправок в астрономич. вычислениях, при оценке погрешности в приближённых вычислениях) часто имеют дело с заведомо малыми величинами, старшими степенями к-рых можно пренебречь (ввиду их чрезвычайной малости), так что уравнения с такими величинами сводятся в первом приближении к линейным. Не менее важно, что решение систем линейных уравнений составляет существенную часть при численном решении разнообразных прикладных задач. Ещё Г. Лейбниц (1693) обратил внимание на то, что при изучении систем линейных уравнений наиболее существенной является таблица, состоящая из коэффициентов, и показал, как из этих коэффициентов (в случае $m=n$) строить т. н. *определители*, при помощи к-рых исследуются системы линейных уравнений. Впоследствии такие таблицы, или *матрицы*, стали предметом самостоятельного изучения, т. к. обнаружилось, что их роль не исчерпывается приложениями к теории систем линейных уравнений.

Современное состояние алгебры

Современная А., понимаемая как учение об операциях над любыми математич. объектами, является одним из разделов математики, формирующих общие понятия и методы для всей математики. Эту роль А. разделяет с топологией, в к-рой изучаются наиболее общие свойства непрерывных протяжённостей. Для современной А. характерно то, что в центре внимания оказываются свойства операций, а не объектов, над к-рыми производятся эти операции. Простой пример даёт возможность проследить, как это происходит. Всем известна формула $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Её выводом является цепочка равенств: $(a+b)^2=(a+b)\times(a+b)=(a+b)a+(a+b)b=(a^2+ba)(ab+b^2)=a^2+(ba++ab)+b^2=a^2+2ab+b^2$. Для обоснования дважды пользуются законом дистрибутивности: $c(a+b)=ca+cb$ (роль c играет $a+b$) и $(a+b)c=ac+bc$ (роль c играют a и b); закон ассоциативности при сложении позволяет перегруппировать слагаемые, наконец, используется закон коммутативности: $ba=ab$. Что представляют собой объекты, закодированные буквами a и b, остаётся безразличным; важно, чтобы они принадлежали системе объектов, в к-рой определены две операции — сложение и умножение, удовлетворяющие перечисленным требованиям, касающимся свойств операций, а не объектов. Формула останется верной, если a и b означают векторы на плоскости или в пространстве, сложение принимается сперва как векторное сложение, потом — как сложение чисел, умножение — как скалярное умножение векторов. Вместо a и b можно подставить коммутирующие матрицы (т. е. такие, что $ab=ba$, что для матриц может не выполняться), операторы дифференцирования по двум независимым переменным и т. д.

Свойства операций над математич. объектами в разных ситуациях иногда оказываются одинаковыми, несмотря на различие объектов. Отвлекаясь от природы объектов, но фиксируя определённые свойства операций над ними, приходят к понятию множества, наделённого алгебраической структурой, или *универсальной алгебры*. В ходе развития математики и её приложений первоначально выделились сравнительно немногие типы универсальных алгебр: *группы*, *векторные пространства*, ассоциативные *кольца* и *алгебры*, *модули*. В дальнейшем предметом изучения стали также другие классы: неассоциативные кольца и алгебры (в том числе *Ли алгебры*, *Йордановы алгебры*), *решётки* (долгое время называвшиеся структурами), *полугруппы*, *квазигруппы* и т. д. Исследование сложившихся типов универсальных алгебр, а также исследование свойств универсальных алгебр вообще на теоретико-множественной аксиоматической основе составляют большое направление в современной А., наз. *общей алгеброй*.

Развиваются также разделы, изучающие отдельные типы универсальных алгебр, снабжённых дополнительными структурами. Таким образом возникли: *топологическая алгебра* (в том числе теория *топологических групп*), теория *Ли групп* (т. е. групп, снабжённых структурой дифференцируемого многообразия), теории различных упорядоченных систем. Теория *полей*, возникшая из алгебраич. теории чисел, и изучение ассоциативно-коммутативных колец относятся к *коммутативной алгебре*, к-рая, в свою очередь, служит основой *алгебраической геометрии*. Алгебраич. методы дали мощный толчок развитию топологии, в к-рой возник специальный раздел — т. н. алгебраич. топология. На стыке этих наук появился и новый раздел А.— *гомологическая алгебра*. С идеями гомологич. алгебры тесно связана теория *категорий*, давшая новый универсальный язык для описания понятий не только А., но и практически всех областей математики. На границе между А. и математич. логикой возникла теория *алгебраических систем*, являющихся обобщением универсальных алгебр.

Классич. разделом А. является *линейная алгебра*, т. е. теория векторных пространств и модулей, частью к-рой являются сформировавшиеся ещё в 19 в. теория линейных уравнений и теория матриц. Идеи и методы линейной алгебры применяются во многих разделах математики. Так, основным предметом изучения функционального анализа являются бесконечномерные векторные пространства.

Наряду с фундаментальной ролью внутри математики, А. имеет большое прикладное значение — следует отметить её выходы в физику (конечные группы, группы Ли, супералгебры Ли в теории поля, фёдоровские группы в кристаллографии), в кибернетику (теория автоматов, алгебраич. теория кодирования), в математич. экономику (линейные неравенства) и т. д.

● **История алгебры.** История математики, т. 1—3, М., 1970—72; Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятности, М., 1978; Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966; Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, пер. с нем., 4 изд., М., 1983.

Классики науки. Диофант Александрийский, Арифметика и книга о многоугольных числах, пер. с др.-греч., М., 1974; Декарт Р., Геометрия, пер. с лат. и франц., М.— Л., 1938; Ньютон И., Всеобщая арифметика, или Книга об арифметических синтезе и анализе, пер. с лат., М., 1948; Эйлер Л., Универсальная арифметика, пер. с нем., т. 1—2, СПБ, 1768—69; Галуа Э., Сочинения, пер. с франц., М.— Л., 1936.

Учебная и справочная литература. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; Мишина А. П., Проскуряков И. В., Высшая алгебра, 2 изд., М., 1965; Калужнин Л. А., Введение в общую алгебру, М., 1973; Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; Фрид Э., Элементарное введение в абстрактную алгебру, пер. с венг., М., 1979; Скорняков Л. А., Элементы алгебры, М., 1980.

Монографии. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; Бурбаки Н., Алгебра, пер. с франц., гл. 1—9, М., 1962—66; Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; Биркгоф Г., Барти Т., Современная прикладная алгебра, пер. с англ., М., 1976.

А. Г. Курош, О. Ю. Шмидт.

АЛГЕБРА ЛО́ГИКИ — раздел математической логики, изучающий логические операции над высказываниями. Основоположником А. л. является Дж. Буль, впервые применивший алгебраич. методы для решения традиционных логич. задач.

Логич. операции позволяют из нескольких высказываний образовывать новые высказывания. В А. л., где интересуются лишь *истинностным значением* (истинностью или ложностью) высказываний, исследуется вопрос об истинностном значении сложного высказывания в зависимости от истинностных значений составляющих его простых высказываний. В А. л. истинностные значения принято обозначать числами 1 (истина) и 0 (ложь).

Истинностное значение высказывания, полученного при помощи логич. операций из более простых высказываний, полностью определяется истинностными значениями этих исходных высказываний. Поэтому каждой логич. операции соответствует функция, принимающая значения 1, 0, аргументы к-рой также принимают значения 1, 0. Такие функции наз. *логическими функциями*, или булевыми функциями, или функциями алгебры логики. Таким логич. операциям, как *конъюнкция*, *дизъюнкция*, *импликация*, *эквивалентность*, *отрицание*, соответствуют логич. функции, к-рые обычно обозначаются соответственно знаками $\&$, $\vee$, $\to$, $\sim$, $\bar{}$ и могут быть изображены посредством истинностной таблицы, как в табл. 1.

Табл. 1.

x	y	$\bar{x}$	$x\&y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \sim y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Это т. н. табличный способ задания функций А. л. Наряду с ним применяется задание функций с помощью формул в языке, содержащем переменные $x, y, z, \ldots$ (возможно, с индексами) и символы нек-рых конкретных функций. Наиболее употребительным является язык, содержащий логич. символы $\&$, $\vee$, $\to$, $\sim$, $\bar{}$. Формулы этого языка определяются следующим образом: 1) все переменные суть формулы; 2) если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B})$, $\bar{\mathfrak{A}}$ — формулы. Напр., выражение $((x\&y)\sim\bar{z})$ является формулой.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — нек-рый фиксированный список переменных. Каждой формуле $\mathfrak{A}$, содержащей переменные только из этого списка, соответствует n-местная функция f (к-рая обозначается также $f(x_1, \ldots, x_n)$), определяемая следующим образом. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ — нек-рый двоичный набор, т. е. набор чисел 0 и 1. Если переменным $x_1, \ldots, x_n$ придать соответственно значения $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ и произвести вычисления в соответствии с операциями, указанными в формуле $\mathfrak{A}$, то получится значение 1 или 0, к-рое и считается значением функции f на наборе $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Говорят, что формула $\mathfrak{A}$ реализует функцию f. Напр., формула $((x\&y)\sim\bar{z})$ реализует функцию $h(x, y, z)$, изображённую в табл. 2.

Табл. 2.

x	y	z	$h(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — две формулы, содержащие лишь переменные из списка $x_1, \ldots, x_n$, и пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ — функции, реализуемые формулами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно. Формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ наз. равными, если функции f и g совпадают, т. е. совпадают их истинностные таблицы. Равенство формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ обозначается так: $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$.

В А. л. важную роль играют следующие равенства:

$$x \& x = x; \quad (1)$$

$$x \vee x = x; \quad (2)$$

$$(x \& y) \& z = x \& (y \& z); \quad (3)$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z); \quad (4)$$

$$x \& y = y \& x; \quad (5)$$

$$x \vee y = y \vee x; \quad (6)$$

$$x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z); \quad (7)$$

$$x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z); \quad (8)$$

$$\overline{\overline{x}} = x; \quad (9)$$

$$\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y}; \quad (10)$$

$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}; \quad (11)$$

$$x \& (y \vee \overline{y}) = x; \quad (12)$$

$$x \vee (y \& \overline{y}) = x; \quad (13)$$

$$x \longrightarrow y = \overline{x} \vee y; \quad (14)$$

$$x \sim y = (x \& y) \vee (\overline{x} \& \overline{y}). \quad (15)$$

Равенства (3) — (6) означают ассоциативность и коммутативность конъюнкции и дизъюнкции. Равенства (7), (8) — это законы дистрибутивности конъюнкции и дизъюнкции. Равенства (10), (11) (т. н. з а к о н ы д е М о р г а н а) позволяют выразить конъюнкцию через дизъюнкцию и отрицание, а дизъюнкцию — через конъюнкцию и отрицание.

Из определения равенства формул можно извлечь следующие правила, позволяющие из имеющихся уже равенств получать новые.

S1. Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$; пусть $x_1, \ldots, x_n$ — все переменные, фигурирующие в формулах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, и пусть $\mathfrak{A}'$ получается из $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{B}'$ — из $\mathfrak{B}$ путём подстановки формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}'$.

S2. Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, а формула $\mathfrak{C}$ содержит $\mathfrak{A}$ в качестве составной части. Пусть $\mathfrak{C}'$ получается из $\mathfrak{C}$ подстановкой формулы $\mathfrak{B}$ вместо $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}$.

Пример применения этих правил. Отправляясь от равенства (14), т. е. $x \to y = \overline{x} \vee y$, применим правило S1, подставив в это равенство x вместо x и $y \to z$ вместо y. Получим равенство $x \to (y \to z) = \overline{x} \vee (y \to z)$. На основании (14) и правил S1, S2 можно в правой части этого равенства заменить $y \to z$ на $\overline{y} \vee z$, так что $x \to (y \to z) = \overline{x} \vee (\overline{y} \vee z)$, и вследствие ассоциативности дизъюнкции (8) и правила S1 формула $x \to (y \to z)$ равна $(\overline{x} \vee \overline{y}) \vee z$. Согласно (10), мы можем в последней формуле заменить $\overline{x} \vee \overline{y}$ на $\overline{x \& y}$. Тогда мы получим $\overline{x \& y} \vee z$, а эта формула вследствие (14) и правила S1 равна $(x \& y) \to z$. Значит, $x \to (y \to z) = (x \& y) \to z$.

Законы коммутативности и ассоциативности (3) — (6) позволяют опускать скобки в формулах вида

$$(\ldots(\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2) \& \ldots \& \mathfrak{A}_s)$$

и

$$(\ldots(\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2) \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_s)$$

и использовать более компактную запись:

$$\mathfrak{A}_1 \& \mathfrak{A}_2 \& \ldots \& \mathfrak{A}_s$$

и

$$\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_s,$$

а также расставлять в произвольном порядке члены в этих конъюнкциях и дизъюнкциях, наз. соответственно с о м н о ж и т е л я м и и с л а г а е м ы м и.

Всякая функция А. л. может быть реализована некрой формулой языка с символами $\&$, $\vee$, $\to$, $\sim$, $^-$. Особую роль в А. л. и её приложениях играют т. н. дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы, определяемые следующим образом. Введём обозначение:

$$x^\sigma = \begin{cases} x \text{ при } \sigma = 1, \\ \overline{x} \text{ при } \sigma = 0. \end{cases}$$

Формула $x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — к.-л. двоичный набор, а среди переменных могут быть одинаковые, наз. э л е м е н т а р н о й к о н ъ ю н к ц и е й. Всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций наз. д и з ъ ю н к т и в н о й н о р м а л ь н о й ф о р м о й (ДНФ). Формула вида $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$ наз. э л е м е н т а р н о й д и з ъ ю н к ц и е й, а конъюнкция элементарных дизъюнкций наз. к о н ъ ю н к т и в н о й н о р м а л ь н о й ф о р м о й (КНФ). С помощью равенств (1) — (15) для всякой формулы можно построить равные ей ДНФ и КНФ. Это делается следующим образом. Прежде всего, равенства (14) и (15) позволяют удалить знаки $\to$ и $\sim$. Затем применением равенств (9) — (11) можно добиться того, чтобы знак отрицания стоял только над переменными и чтобы не было повторяющихся отрицаний. Теперь с помощью законов дистрибутивности (7) и (8) можно получить КНФ или ДНФ. Напр., в процессе приведения формулы $(x \to y) \sim z$ к нормальной форме получается такая цепочка равных друг другу формул: $(x \longrightarrow \overline{y}) \sim z = ((\overline{x} \vee \overline{y}) \& z) \vee (\overline{\overline{x} \vee \overline{y} \& z}) = ((\overline{x} \vee \overline{y}) \& z) \vee (x \& y \& \overline{z})$. Применив к последней формуле закон дистрибутивности (7), получают ДНФ

$$(\overline{x} \& z) \vee (\overline{y} \& z) \vee (x \& y \& \overline{z}),$$

а применив к ней же закон дистрибутивности (8), получают КНФ

$$(\overline{x} \vee \overline{y} \vee x) \& (\overline{x} \vee \overline{y} \vee y) \& (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \& (z \vee x) \& (z \vee y) \& (z \vee \overline{z}).$$

С о в е р ш е н н о й ДНФ наз. ДНФ, в к-рой нет равных элементарных конъюнкций и все элементарные конъюнкции содержат одни и те же переменные, причём каждую переменную — только один раз (включая вхождения под знаком отрицания). Аналогично определяется с о в е р ш е н н а я К Н Ф, как такая КНФ, в к-рой нет одинаковых сомножителей; все сомножители содержат одни и те же переменные, причём каждую — только один раз.

Для каждой функции А. л. $f(x_1, \ldots, x_n)$, не равной тождественно 0, можно построить реализующую её совершенную ДНФ:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \vee_{f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n},$$

где дизъюнкция берётся по тем двоичным наборам, на к-рых функция f равна 1. Напр., функция $h(x, y, z)$ (табл. 2) имеет такую совершенную ДНФ:

$$(\overline{x} \& \overline{y} \& z) \vee (\overline{x} \& y \& z) \vee (x \& \overline{y} \& z) \vee (x \& y \& \overline{z}).$$

Каждая функция А. л. $f(x_1, \ldots, x_n)$, не равная тождественно 1, реализуется следующей совершенной КНФ:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \&_{f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n) = 0} x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n},$$

где конъюнкция берётся по тем двоичным наборам, к-рые указаны под знаком $\&$. Так, совершенная КНФ для той же функции $h(x, y, z)$ имеет вид

$$(x \vee y \vee z) \& (x \vee \overline{y} \vee z) \& (\overline{x} \vee y \vee z) \& (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}).$$

Одним из вопросов А. л., имеющих важное прикладное значение (в связи с задачей синтеза управляющих систем), является з а д а ч а м и н и м и з а ц и и функций А. л., состоящая в построении такой ДНФ для заданной функции, к-рая имеет наименьшее суммарное число сомножителей в своих слагаемых. Такие ДНФ наз. м и н и м а л ь н ы м и. Для упрощения ДНФ или КНФ удобно пользоваться следующими равенствами:

$$x \vee (x \& y) = x; \quad (16)$$

$$x \& (x \vee y) = x; \quad (17)$$

$$x \vee (\overline{x} \& y) = x \vee y; \quad (18)$$

$$x \& (\overline{x} \vee y) = x \& y. \quad (19)$$

Равенства (16) и (17) наз. законами поглощения.

Функция А. л. f^* наз. двойственной для функции f, если истинностную таблицу для f^* можно получить из таблицы для f, заменив всюду в значениях аргументов и функции 0 на 1 и 1 на 0, т. е. функция $f^*(x_1, \ldots, x_n)$, двойственная к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяет равенству $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}$.

Напр., конъюнкция и дизъюнкция двойственны друг другу, отрицание двойственно самому себе. Функция, совпадающая со своей двойственной, наз. самодвойственной. Самодвойственная функция на противоположных наборах $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ и $\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n$ принимает противоположные значения.

Если в формуле А. л. $\mathfrak{A}$ заменить знаки всех логич. функций на знаки двойственных функций, то получится двойственная формула $\mathfrak{A}^*$, реализующая функцию, двойственную той, к-рая реализуется формулой $\mathfrak{A}$. При этом если $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, то верно и равенство $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{B}^*$, наз. двойственным предыдущему; это т. н. принцип двойственности. Напр., двойственны друг другу равенства (1) и (2), (3) и (4), (5) и (6), (10) и (11), (16) и (17). Каждая КНФ двойственна нек-рой ДНФ.

Табл. 3.

x	y	$x+y$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Конъюнкция & совпадает с операцией умножения над числами 0, 1. Обычное сложение выводит за пределы множества $\{0, 1\}$, однако можно рассмотреть сложение по модулю 2 и получить функцию $+$, задаваемую табл. 3.

Для сложения по модулю 2 имеют место все основные арифметич. законы: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность умножения относительно сложения.

В языке с символами &, $\vee$, $\sim$, $\to$, $+$, 1 выполняются следующие равенства:

$$x \vee y = ((x\&y) + x) + y;$$

$$x \to y = \bar{x}\&y; \quad x \sim y = (x+y) + 1;$$

$$x + y = (x\&\bar{y}) \vee (\bar{x}\&y); \quad 1 = x \vee \bar{x}.$$

Они позволяют переводить формулы этого языка в равные им формулы, содержащие лишь знаки &, $+$, 1. Такие формулы наз. полиномами. Полином вида $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_s$, где каждая из формул $\mathfrak{A}_i$ есть либо 1, либо переменная, либо конъюнкция различных переменных, $\mathfrak{A}_i \neq \mathfrak{A}_j$ при $i \neq j$, наз. полиномом Жегалкина. Каждый полином может быть преобразован в полином Жегалкина.

Функции вида $x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_n} + a$, где a есть 0 или 1, наз. линейными.

Упорядочим множество $\{0, 1\}$, полагая $0 < 1$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — двоичные наборы. Будем говорить, что α предшествует β ($\alpha < \beta$), если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех i, причём, по крайней мере, для одного i имеет место строгое неравенство. Функция А. л. $f(x_1, \ldots, x_n)$ наз. монотонной, если для всяких наборов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ таких, что $\alpha < \beta$, выполняется $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leqslant f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Монотонные функции и только они реализуются формулами, использующими только знаки конъюнкции и дизъюнкции.

Система функций А. л. Ф наз. функционально полной, если всякая функция А. л. может быть реализована формулой, содержащей лишь символы функций из Ф. Напр., системы функций $\{x\&y, x \vee y, \bar{x}\}$, $\{\overline{x \vee y}\}$, $\{x \vee y, \bar{x}\}$, $\{x+y, 1, x\&y\}$ являются функционально полными. Пусть P_0 — класс функций, сохраняющих 0, т. е. таких функций f, что $f(0, \ldots, 0) = 0$; P_1 — класс функций, сохраняющих 1, т. е. таких функций f, что $f(1, \ldots, 1) = 1$; L — класс линейных функций; M — класс монотонных функций; S — класс самодвойственных функций. Критерий функциональной полноты даёт теорема Поста: для полноты системы функций $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого из классов P_0, P_1, L, M, S в Ф нашлась функция φ_i, не принадлежащая этому классу. Эта теорема даёт алгоритм для установления полноты или неполноты произвольной конечной системы функций А. л.

А. л. тесно связана с другими разделами математич. логики, в частности с *логикой предикатов*. Многие задачи А. л. возникают из области её приложений, самыми важными из к-рых являются приложения в теории электрич. схем. Для описания последних иногда приходится рассматривать многозначные обобщения обычной двузначной А. л. (см. *Многозначная логика*).

● Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., Функции алгебры логики и классы Поста. М., 1964; Гиндикин С. Г., Алгебра логики в задачах, М., 1972; Гильберт Д., Аккерман Б., Основы теоретической логики, пер. с нем., М., 1947; Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, пер. с нем., 2 изд., М., 1982.

АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ — непустая совокупность подмножеств некоторого множества Ω, замкнутая относительно теоретико-множественных операций (объединения, пересечения, образования дополнения), производимых в конечном числе. Для того чтобы нек-рый класс подмножеств множества Ω был А. м., достаточно (и необходимо), чтобы он был замкнут относительно образования объединений и дополнений. А. м., замкнутая относительно образования счётных объединений, наз. σ-алгеброй множеств (σ-А. м.). Всякая σ-А. м. замкнута относительно теоретико-множественных операций, производимых в счётном числе.

Примеры. 1) Совокупность конечных подмножеств произвольного множества Ω и дополнений к ним есть А. м.; совокупность не более чем счётных подмножеств Ω и дополнений к ним есть σ-А. м.

2) Совокупность конечных объединений интервалов вида

$$\{x \in R' : a \leqslant x < b\}, \quad -\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty,$$

образует А. м.

3) Совокупность событий (подмножеств пространства элементарных событий) есть σ-А. м., это — основное понятие в аксиоматич. построении теории вероятностей.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ — раздел математики, изучающий геометрические объекты, связанные с алгебраическими уравнениями: *алгебраические многообразия* (*алгебраические кривые*, *алгебраические поверхности*, *абелевы многообразия*), и их различные обобщения (схемы, алгебраические пространства). В «наивной» формулировке предмет А. г. составляет изучение решений алгебраич. уравнений. Если число неизвестных равно двум или трём и изучаются решения в области действительных чисел, то всё множество решений отождествляется с множеством точек в координатной плоскости или пространстве и допускает наглядную геометрич. интерпретацию. Однако геометрич. язык используется и при более общих обстоятельствах.

Возникновение А. г. относится к 17 в., когда в геометрию было введено понятие координат, позволившее рассматривать геометрич. места точек, координаты к-рых удовлетворяют алгебраич. соотношениям. Так, в геометрии на плоскости основным объектом А. г. является плоская аффинная алгебраическая кривая — множество, заданное уравнением

$$f(x, y) = 0, \qquad (1)$$

где f — многочлен от координат x и y (не являющийся константой). Прямая, окружность, эллипс, гипербола, парабола, декартов лист, локон Аньези и лемниската являются примерами алгебраич. кривых, в то время как синусоида, напр., трансцендентная кривая (т. е. алгебраич. кривой не является). Чёткое разделение кривых на алгебраические и трансцендентные было впервые проведено Р. Декартом (17 в.), назвавшим их «геометрическими» и «механическими» кривыми соответственно. Кривые (1) классифицируются в соответствии со своей степенью d (наз. также порядком кривой), определяемой как степень многочлена f (из всех f, задающих данную кривую, выбирается многочлен наименьшей степени).

Степень d кривой инвариантна относительно линейной замены координат, а также относительно проективных преобразований плоскости вида

$$x \longrightarrow \frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c},$$

$$y \longrightarrow \frac{a_2x+b_2y+c_2}{ax+by+c}.$$

Кривые первой степени суть в точности прямые, а кривые второй степени — конич. сечения (включая окружности и вырожденные конич. сечения, состоящие из пары прямых); факт, известный уже П. Ферма. Кривые третьей степени были классифицированы И. Ньютоном (см. *Ньютона классификация*), любая такая кривая с помощью проективного преобразования плоскости приводится к одному из следующих видов:

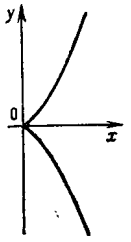


Рис. 1.

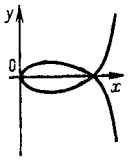


Рис. 2.

1. Приводимая кривая, состоящая из конич. сечения и прямой, заданная уравнением $xf_2(x, y)=0$, где f_2 — многочлен второй степени от координат.

2. Полукубич. парабола, заданная уравнением

$$y^2-x^3=0 \text{ (рис. 1).}$$

3. Декартов лист, заданный уравнением

$$y^2-x(x-1)^2=0 \text{ (рис. 2).}$$

4. Эллиптич. кривая, заданная уравнением в нормальной форме Вейерштрасса: $y^2-(x^3+ax+b)=0$, где $\Delta=4a^3+27b^2\neq 0$. Коэффициенты a и b определены с точностью до замены вида $a\to a\lambda^2$, $b\to b\lambda^3$, где $\lambda\neq 0$ (рис. 3).

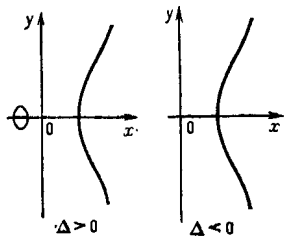


Рис. 3.

Кривая (1) наз. неприводимой, если задающий её многочлен f неприводим, т. е. непредставим в виде произведения $f(x, y)=f_1(x, y)f_2(x, y)$ многочленов f_1 и f_2 (вообще говоря, с комплексными коэффициентами), степень каждого из к-рых меньше, чем степень f. Неприводимая кривая наз. рациональной, если она может быть параметризована *рациональными функциями*

$$x=R(t),\ y=S(t) \qquad (2)$$

нек-рого параметра t, т. е. существуют рациональные функции $R(t)$ и $S(t)$, одновременно не являющиеся константами, такие, что выражение $f(R(t), S(t))$ тождественно равно нулю как функция от t. Прямая линия, заданная уравнением $ax+by+c=0$, допускает параметризацию

$$x=t,\ y=-\frac{at+c}{b}$$

и, следовательно, рациональна. То же верно и для любой коники. Напр., для единичной окружности $x^2+y^2-1=0$ имеется параметризация

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ y=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Для полукубич. параболы и декартова листа рациональность устанавливается с помощью параметризаций

$$x=t^2,\ y=t^3 \text{ и } x=t^2,\ y=t(t^2-1)$$

соответственно. С другой стороны, эллиптич. кривая не рациональна. Для рациональной кривой всегда существует параметризация (2), при к-рой параметр t является рациональной функцией от координат x и y. Таковы все приведённые выше примеры параметризаций. В частности, для полукубич. параболы $t=y/x$, а для декартова листа $t=y/(x-1)$.

Понятие рациональности, возникшее почти одновременно с интегральным исчислением, играет важную роль при классификации интегралов вида

$$\int G(x, y)\,dx, \qquad (3)$$

где G — рациональная функция от x и y, а y — алгебраич. функция от x, заданная уравнением $f(x, y)=0$. Если кривая $f=0$ рациональна, то с помощью (2) интеграл (3) сводится к интегралу от рациональной функции от t и берётся в элементарных функциях. Например, это так для $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, поскольку $y^2=ax^2+bx+c$ — уравнение коники, и неверно для интеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3+ax+b}},$$

наз. эллиптич. интегралом. Этот интеграл тесно связан с эллиптич. кривой

$$y^2=x^3+ax+b \quad (4a^3+27b^2\neq 0).$$

Другой пример связи между понятием рациональности и интегральным исчислением доставляет интегрирование тригонометрич. функций

$$\int G(\cos\varphi, \sin\varphi)\,d\varphi$$

с помощью подстановки Эйлера $t=\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, использующее параметризацию единичной окружности

$$\cos\varphi=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin\varphi=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Здесь G — рациональная функция от $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ и подстановка Эйлера сводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции (от t).

В трёхмерной геометрии под алгебраической поверхностью понимается множество, заданное уравнением $g(x, y, z)=0$, где g — многочлен от координат x, y, z. Для задания пространственной алгебраич. кривой требуется, по крайней мере, два алгебраич. уравнения

$$g_1(x, y, z)=g_2(x, y, z)=0.$$

Изучение алгебраич. кривых и поверхностей с неизбежностью привело к точкам с «комплексными координатами». С нач. 18 в. (а систематически — с работ Г. Монжа и Ж. Понселе) алгебраич. уравнениям с действительными коэффициентами сопоставляют множество их комплексных решений, отождествляемое с множеством точек в комплексном координатном пространстве соответствующей размерности (равной числу неизвестных). Эта идея оказалась весьма плодотворной, поскольку при таком расширении свойства множества решений значительно упрощаются, позволяя в то же время получать информацию о действительных решениях. При этом естественно не ограничиваться «действительными» уравнениями, а изучать алгебраич. уравнения с произвольными комплексными коэффициентами. При таком подходе центральным объектом «плоской» А. г. становится плоская аффинная комплексная алгебраическая кривая — подмножество X комплексного двумерного координатного пространства $\mathbb{C}^2$, заданное уравнением

$$f(x, y)=0, \qquad (4)$$

где f — многочлен от координат x и y с коэффициентами, принадлежащими полю комплексных чисел $\mathbb{C}$. Если многочлен f имеет действительные коэффициенты, X наз. плоской аффинной действительной алгебраической кривой. Кривая наз. неприводимой, если задающий её многочлен f неприводим. Любая кривая (4) является объединением конечного числа неприводимых кривых $f_i=0$, отвечающим разложению $f=\Pi f_i^{n_i}$ многочлена f в произведение степеней неприводимых многочленов f_i. Если $g(x, y)$ — многочлен, обращающийся в нуль на X, то нек-рая его степень g^k делится на f.

Если X — неприводимая кривая и многочлен $g(x, y)$ не делится на f, то множество $\{(a, b)\in X,\ g(a, b)=0\}$ конечно и число его элементов не превосходит произведения степеней многочленов f и g (теорема Безу).

Пусть X — кривая, заданная уравнением (4) с неприводимым f. Рациональная функция $\varphi=\frac{u(x, y)}{v(x, y)}$, для к-рой многочлен $v(x, y)$ не делится на f, определена во всех точках X, кроме, быть может, конечного числа точек. Такие функции наз. рациональными функциями на X. Две такие функции $\frac{u}{v}$ и $\frac{p}{q}$ считаются одинаковыми (отождествляются) тогда и только тогда, когда многочлены uq и vp совпадают на X, т. е. $uq-vp$ делится на f. Две одинаковые рациональные функции, определённые в одной и той же точке, принимают в ней одинаковые значения. Для рациональных функций на X, как и для обычных дробей, определены операции сложения, вычитания, умножения и деления, превращающие множество рациональных функций на X в поле, наз. полем рациональных функций на алгебраической кривой X и обозначаемое $\mathbb{C}(X)$. Напр., если X — прямая, заданная уравнением $y=0$, то $\mathbb{C}(X)$ — поле $\mathbb{C}(x)$ рациональных функций от переменной x. То же самое верно, если X задана уравнением $ax+by+c=0$, $a\neq 0$. Любой элемент поля $\mathbb{C}(X)$ выражается в качестве рациональных функций от x и y; при этом x и y алгебраически зависимы — они связаны соотношением $f(x, y)=0$. Это означает, что $\mathbb{C}(X)$ — конечное расширение поля $\mathbb{C}$ степени трансцендентности 1.

Понятие рациональности естественным образом переносится на комплексный случай. Кривая X рациональна тогда и только тогда, когда поле $\mathbb{C}(X)$ является полем рациональных функций от нек-рой переменной t (к-рую можно взять в качестве параметра). Иначе говоря, алгебраич. кривая рациональна тогда и только тогда, когда поле рациональных функций на ней изоморфно полю рациональных функций на кривой.

Пусть X и Y — алгебраич. кривые, заданные уравнениями $f(x, y)=0$ и $g(x, y)=0$ соответственно. Рациональным отображением кривой X в кривую Y наз. пара рациональных функций $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, определённых на X, таких, что $g(\varphi(x, y), \psi(x, y))=0$ как рациональная функция на X. Для всех точек (a, b) кривой X, кроме конечного числа, определены значения $\varphi(a, b)$, $\psi(a, b)$ и $(\varphi(a, b), \psi(a, b))$. Алгебраич. кривые X и Y наз. бирационально изоморфными, если изоморфны их поля рациональных функций. Напр., алгебраическая кривая бирационально изоморфна прямой тогда и только тогда, когда она рациональна. Кривые X и Y бирационально изоморфны тогда и только тогда, когда существуют рациональные отображения из X в Y и из Y в X, обратные друг другу. Важным бирациональным инвариантом является род кривой; степень кривой, однако, не является бирациональным инвариантом.

Важная идея, принадлежащая Г. Монжу и Ж. Понселе, состоит в рассмотрении «бесконечно удалённых точек» («бесконечно удалённых решений»), присоединяемых к множеству решений, т. е. в переходе от обычного аффинного пространства к проективному. Вначале определяется комплексная проективная плоскость P^2, точка к-рой $P\in P^2$ задаётся тремя комплексными числами $(a : b : c)$, причём хотя бы одно из чисел a, b, c не равно нулю. Точки $(a : b : c)$ и $(a' : b' : c')$ тогда и только тогда считаются совпадающими, когда существует такое комплексное число $\lambda=0$, что $a=\lambda a'$, $b=\lambda b'$, $c=\lambda c'$. Любой набор $(a : b : c)$, задающий точку P, наз. однородными координатами этой точки. Аффинное пространство $\mathbb{C}^2$ вкладывается в P^2 с помощью отображения $(a, b)\to(a : b : 1)$. При этом проективные преобразования превращаются в линейные преобразования (однородных координат) проективной плоскости. Аффинной алгебраич. кривой X, заданной уравнением (4), сопоставляется её проективное замыкание $\overline{X}$ — проективная алгебраич. кривая, являющаяся множеством точек проективной плоскости, задаваемым уравнением

$$F(X, Y, Z)=0. \qquad (5)$$

Здесь F — однородный многочлен от однородных координат X, Y, Z, степень к-рого равна степени многочлена f, и такой, что $F(X, Y, 1)=f(X, Y)$. При этом точкам (a, b) из X отвечают точки $(a : b : 1)$ из $\overline{X}$.

Вышеуказанные идеи привели к возникновению понятия комплексного проективного алгебраич. многообразия. Примером такого многообразия является n-мерное проективное комплексное пространство P^n, совпадающее для $n=2$ с проективной плоскостью. Точка $P\in P^n$ задаётся набором комплексных чисел $(a_0 : \ldots : a_n)$, причём не все a_i равны нулю. Точки $(a_0 : \ldots : a_n)$ и $(b_0 : \ldots : b_n)$ тогда и только тогда считаются совпадающими, когда существует такое комплексное число $\lambda\neq 0$, что $a_i=\lambda b_i$ для всех i. Любой набор чисел, задающий точку P, наз. её однородными координатами. При $n=1$ проективное пространство наз. проективной прямой.

Подмножество Y проективного пространства P^n наз. проективным алгебраическим многообразием (п. а. м.), если оно совпадает с множеством общих нулей системы однородных алгебраич. уравнений

$$\left.\begin{aligned} F_1(X_0, \ldots, X_n)&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\\ F_r(X_0, \ldots, X_n)&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где F_i — однородные многочлены от однородных координат $X_0, \ldots, X_n$. Любой однородный многочлен F, являющийся комбинацией $\sum c_i(X_0, \ldots, X_n)\,F_i$ уравнений (6) (где c_i — однородные многочлены), также обращается в нуль на X. Обратно, если однородный многочлен F обращается в нуль на X, то нек-рая его степень F^k представима в виде комбинации уравнений (6) (теорема Гильберта о нулях). Любое п. а. м. X может быть задано конечной системой уравнений (6) такой, что любой однородный многочлен, обращающийся в нуль на X, является комбинацией уравнений (6). Для любой бесконечной системы однородных алгебраич. уравнений $F_\alpha(X_0, \ldots, X_n)=0$ множество их общих нулей совпадает с множеством общих нулей конечной системы вида (6), т. е. с нек-рым п. а. м.

Если Y и Z — п. а. м. в P^n, то их объединение $Y\cup Z$ и пересечение $Y\cap Z$ также являются п. а. м. Более общо, объединение конечного числа и пересечение любого числа п. а. м. также является п. а. м. Если п. а. м. Y нельзя представить в виде объединения $Y_1\cup Y_2$ п. а. м. Y_1 и Y_2, не совпадающих с Y, то Y наз. неприводимым. Любое непустое п. а. м. Y однозначно представимо в виде конечного объединения непустых неприводимых п. а. м. Y_i, не лежащих друг в друге и наз. неприводимыми компонентами Y.

Важный пример п. а. м. доставляют гиперповерхности, заданные одним уравнением

$$F(X_0, \ldots, X_n)=0, \qquad (7)$$

где F — однородный многочлен, не являющийся константой. Гиперповерхность неприводима тогда и только тогда, когда многочлен F — степень неприводимого многочлена. В общем случае она представима в виде объединения конечного числа гиперповерхностей $F_i=0$, являющихся её неприводимыми компонентами. Здесь $F=\Pi F_i^{n_i}$ — разложение многочлена F в произведение степеней неприводимых многочленов F_i. Степень неприводимой гиперповерхности определяется как степень многочлена F. Гиперповерхность степени 1 наз. гиперплоскостью и с помощью линейных преобразований однородных координат может быть отождествлена с $(n-1)$-мерным проективным пространством. Гиперповерхность степени 2 наз. квадрикой, степени 3 — кубикой, степени 4 — квартикой и т. д.

Важным инвариантом п. а. м. X является его размерность $\dim X$, определяемая для неприводимого X как наибольшее неотрицательное целое число m, для к-рого существует цепочка непустых неприводимых п. а. м. $Y=Y_0\supset Y_1\supset\ldots\supset Y_m$, $Y_i\neq Y_{i+1}$. Для п. а. м. размерность определяется как максимум размерностей его неприводимых компонент. Напр., проективное пространство P^n — неприводимое п. а. м. размерности n; в частности, размерность проективной плоскости равна 2, а прямой равна 1. Размерность гиперповерхности (7) равна $n-1$. Размерность п. а. м. X равна нулю тогда и только тогда, когда X — конечное множество. П. а. м. размерности 1 и 2 наз. проективными алгебраическими кривыми и поверхностями соответственно. Если Y — п. а. м. в P^n, то $\dim Y\leqslant n$. Более общо, пусть Y — подмножество п. а. м. Z. Тогда $\dim Y\leqslant\dim Z$; если же $\dim Y=\dim Z$ и Z неприводимо, то $Y=Z$. Если неприводимое п. а. м. Y в P^n задано r уравнениями, то $\dim Y\geqslant n-r$. В настоящее время (1987) неизвестно, всякая ли неприводимая проективная алгебраич. кривая в P^3 может быть задана двумя уравнениями. Неприводимое п. а. м. в P^4 имеет размерность $n-1$ тогда и только тогда, когда это — гиперповерхность.

Подмножество W проективного пространства P^n наз. квазипроективным алгебраическим многообразием (к. а. м.), если оно представимо в виде $Y\setminus Z$, где Y и Z — п. а. м. в P^n. Замыканием к. а. м. W наз. пересечение $\overline{W}$ всех п. а. м. в P^n, содержащих W Замыкание $\overline{W}$ — п. а. м., содержащее W. Дополнение $\overline{W}\setminus W$ также является п. а. м. Если Y — неприводимое п. а. м. и Z — п. а. м., лежащее в Y, но не совпадающее с ним, то $\overline{W}=Y$, где $W=Y-Z$. Размерностью к. а. м. наз. размерность его замыкания. Любое п. а. м. является к. а. м. и совпадает со своим замыканием.

Пусть Y — неприводимое п. а. м. в P^n. Рациональная функция

$$\varphi(X_0,\ \ldots,\ X_n)=\frac{u(X_0,\ \ldots,\ X_n)}{v(X_0,\ \ldots,\ X_n)},$$

где u и v — однородные многочлены одной и той же степени, наз. определённой на Y, если многочлен v тождественно не равен нулю на Y. Две такие функции $\frac{u}{v}$ и $\frac{p}{q}$ считаются одинаковыми тогда и только тогда, когда многочлен $uq-vp$ обращается в нуль на Y. Значения $\varphi(a_0,\ldots,a_n)$ рациональной функции φ определены для всех точек $P=(a_0:\ldots:a_n)$ нек-рого к. а. м., замыкание к-рого совпадает с Y. Напр., если $Y=P^n$, то рациональная функция φ представима в виде $\frac{u}{v}$, где многочлены u и v не имеют нетривиальных общих делителей. Тогда φ определена на дополнении проективного пространства к гиперповерхности $v=0$. Как и для аффинных кривых, рациональные функции на Y образуют поле, наз. полем рациональных функций на Y и обозначаемое через $\mathbb{C}(Y)$. Напр., для проективного пространства $\mathbb{C}(P^n)$— поле рациональных функций $\mathbb{C}(t_1,\ \ldots,\ t_n)$ от n переменных $t_i=\frac{X_i}{X_0}$, $i=1,\ldots,n$. (Для кривой X, заданной уравнением (4), и её проективного замыкания $\overline{X}$, заданного уравнением (5), поля рациональных функций $\mathbb{C}(X)$ и $\mathbb{C}(\overline{X})$ совпадают.) В общем случае $\mathbb{C}(Y)$—конечное алгебраич. расширение поля рациональных функций $\mathbb{C}(t_1,\ \ldots,\ t_m)$ от m переменных, где $m=\dim X$. Два неприводимых п. а. м. $Y\subset P^r$ и $Z\subset P^n$ наз. бирационально изоморфными, если их поля рациональных функций изоморфны. Размерности бирационально изоморфных п. а. м. совпадают. Любое неприводимое п. а. м. размерности n бирационально изоморфно нек-рой гиперповерхности в P^{n+1}. П. а. м. наз. рациональным, если оно бирационально изоморфно проективному пространству. Любая квадрика рациональна. То же самое верно и для кубик в P^3.

Пусть $Y\subset P^n$, $Z\subset P^m$ — неприводимые п. а. м. Рациональным отображением из Y в Z наз. набор из $m+1$ рациональной функции $\varphi_0,\ \ldots,\ \varphi_m$ на Y такой, что, по крайней мере, одна из них не равна нулю, и для любого однородного многочлена $F(X_0,\ \ldots,\ X_m)$, обращающегося в нуль на Z, выражение $F(\varphi_0,\ \ldots,\ \varphi_m)$ равно нулю как рациональная функция на Y. Для всех точек P из Y, принадлежащих нек-рому к. а. м., замыкание к-рого совпадает с Y, верно следующее: определены значения $\varphi_i(P)$, по крайней мере, одно из них не равно нулю и $(\varphi_0(P):\ldots:\varphi_m(P))\in Z$. Неприводимое п. а. м. Y размерности r рационально тогда и только тогда, когда существуют рациональные отображения из Y в P^r и из P^r в Y, обратные друг другу. Более общо, п. а. м. Y и Z бирационально изоморфны, если существуют рациональные отображения из Y в Z и из Z в Y, обратные друг другу.

Неприводимая гиперповерхность (7) наз. гладкой, если для любой её точки P, по крайней мере, одна из частных производных $\frac{\partial F}{\partial X_j}$ не обращается в нуль (в точке P). Пример гладкой гиперповерхности доставляет гиперповерхность Ферма, заданная уравнением $X_0^k+X_1^k+\ldots+X_n^k=0$. Все гладкие гиперповерхности в P^3 степени $\geqslant 3$ не рациональны. То же самое верно и для гладких гиперповерхностей степени $\geqslant 3$ в P^4.

Неприводимое п. а. м. Y наз. унирациональным, если поле $\mathbb{C}(Y)$ вкладывается в поле рациональных функций $\mathbb{C}(t_1,\ \ldots,\ t_m)$, где $m=\dim Y$. Унирациональность означает существование рационального отображения из P^m в Y, образ к-рого не лежит ни в каком меньшем п. а. м. $Y'\subset Y$, т. е. это рациональное отображение нельзя рассматривать как отображение в Y' ни для какого $Y'\neq Y$. Любое рациональное многообразие унирационально; вопрос о справедливости обратного утверждения допускает положительный ответ при $m=1$, 2. Однако гиперповерхности Ферма степени 3 и 4 в P^4 унирациональны, но не рациональны.

Пусть $Y\subset P^n$ — неприводимое п. а. м., заданное системой уравнений (6) такой, что любой однородный многочлен, обращающийся в нуль на Y, является комбинацией этих уравнений. Говорят, что точка $P\in Y$ с однородными координатами $(a_0:\ldots:a_n)$ проста или что Y неособо в точке P, если ранг матрицы $\left\|\frac{\partial F_j}{\partial X_i}\right\|$, составленной из значений частных производных многочленов F_j в точке P, равен $n-\dim Y$. Точки в Y, не являющиеся простыми, наз. кратными, или особыми, точками. Множество всех простых точек является непустым квазипроективным алгебраич. многообразием, проективное замыкание к-рого совпадает с Y. П. а. м. Y наз. гладким, или неособым, если все его точки простые, для гиперповерхностей это определение совпадает с данным выше. Любое неприводимое п. а. м. бирационально изоморфно гладкому п. а. м.

Комплексное проективное пространство P^n является компактным топологич. хаусдорфовым пространством в естественной топологии, индуцированной обычной топологией на поле комплексных чисел (точки в P^n — наборы комплексных чисел). Более того, оно является комплексным аналитич. многообразием. Любое гладкое п. а. м. в P^n также является комплексным аналитич. многообразием. Обратно, любое гладкое компактное комплексное аналитич. подмногообразие в P^n является п. а. м. Эти обстоятельства позволяют ввести целый ряд структур, доставляющих такие инварианты алгебраич. многообразий, к-рые лишь с большим трудом или вовсе не удаётся получить чисто алгебраич. средствами.

С другой стороны, большая часть приведённых выше свойств алгебраич. многообразий не использует топологию

поля комплексных чисел и выполнена для алгебраич. многообразий, связанных с алгебраич. уравнениями, коэффициенты к-рых лежат в произвольном поле и даже в произвольном коммутативном кольце. Это обстоятельство даёт возможность применения алгебро-геометрич. методов в теории чисел (см. *Диофантова геометрия*). Другими областями применения А. г. являются теория групп, теория дифференциальных уравнений, функциональный анализ, теоретич. физика и теория кодирования. В свою очередь, А. г. использует идеи и методы названных дисциплин.

● Шафаревич И. Р., Основы алгебраической геометрии, М., 1972; Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия, пер. с англ., М., 1981; Гриффитс Ф., Харрис Дж., Принципы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1—2, М., 1982; Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, пер. с англ., М., 1973.

Ю. Г. Зархин.

АЛГЕБРАЙЧЕСКАЯ ГРУ́ППА — группа G, являющаяся одновременно *алгебраическим многообразием*, в к-рой умножение $G\times G\to G$ и переход к обратному элементу $G\to G$ являются *морфизмами* алгебраич. многообразий. Подгруппа H группы G наз. алгебраической подгруппой, если она — замкнутое подмногообразие алгебраич. многообразия G.

Примеры А. г.: полная линейная группа, т. е. группа всех обратимых матриц порядка n с коэффициентами из фиксированного алгебраич. поля, группа треугольных матриц, эллиптич. кривая.

Два основных типа А. г.— это *абелевы многообразия* и линейные алгебраические группы (т. е. подгруппы нек-рой полной *линейной группы*). Эти два класса имеют тривиальное пересечение: А. г., являющаяся одновременно абелевым многообразием и линейной А. г.,— единичная группа. Изучение А. г. в нек-ром смысле сводится к изучению групп этих двух классов. Именно, в произвольной А. г. существует единственная нормальная линейная алгебраич. подгруппа, факторгруппа по к-рой есть абелево многообразие.

АЛГЕБРАЙЧЕСКАЯ ЕДИНИ́ЦА — см. *Алгебраическая теория чисел.*

АЛГЕБРАЙЧЕСКАЯ КРА́ТНОСТЬ собственного значения — см. *Собственное значение.*

АЛГЕБРАЙЧЕСКАЯ КРИВА́Я — *алгебраическое многообразие* размерности 1. А. к. является наиболее изученным объектом *алгебраической геометрии.*

Первым, кто выделил действительные А. к. из класса всех кривых, был Р. Декарт; в дальнейшем их изучением для малых степеней занимались П. Ферма и И. Ньютон.

Плоская действительная алгебраич. кривая (п. д. а. к.) есть множество точек действительной аффинной плоскости, координаты к-рых удовлетворяют уравнению

$$f(x, y)=0,$$

где $f(x, y)$ — многочлен степени n. Если многочлен разлагается на множители, то такому уравнению будет соответствовать система кривых. В этом случае А. к. наз. распадающейся или приводимой. В частности, если левая часть уравнения — однородная функция $f(x,y)$, А. к. вырождается в систему прямых.

В нек-рых точках п. д. а. к. может существовать более одной касательной. Такие точки наз. особыми; число касательных (корней уравнения касательной) наз. кратностью точки. Точкам, не лежащим на кривой, приписывается кратность 0. Точки кратности $\geqslant 2$ — особые точки. Точка является r-кратной точкой кривой $f(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда в этой точке все производные от f порядка до $r-1$ обращаются в нуль, но существует производная порядка r, отличная от нуля.

Среди неособых точек выделяют т. н. точки перегиба, в к-рых

$$H(x, y)\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}=0. \qquad (*)$$

Другими словами, точки перегиба — это пересечения кривой $f(x, y)=0$ и кривой, задаваемой уравнением (*) и наз. гессианой кривой $f(x, y)=0$.

Основными характеристиками п. д. а. к. являются порядок, класс и род (жанр).

Порядком (или степенью) п. д. а. к. наз. порядок определяющего её уравнения. Порядок не зависит от положения кривой относительно системы координат. Две неприводимые п. д. а. к., одна из к-рых имеет порядок m, а другая n, пересекаются не более чем в mn точках. Кривая порядка n определяется $\frac{n(n+3)}{2}$ точками. Каждая кривая n-го порядка, проходящая через $\frac{n(n+3)}{2}-1$ точек, проходит также ещё через $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ определённых точек плоскости, положение к-рых зависит от положения заданных точек.

Классом п. д. а. к. наз. порядок её уравнения в т. н. тангенциальных координатах (коэффициенты u и v в уравнениях прямых $ux+vy+1=0$, касающихся данной кривой). Класс может быть также определён числом касательных, действительных и мнимых, к-рые можно провести к кривой из произвольной точки, не лежащей на этой кривой. Порядок и класс кривой, вообще говоря, не совпадают, за исключением кривых 2-го порядка. В общем случае при определении класса кривой принимают во внимание не только её порядок, но и ряд её особенностей: число двойных точек, точек перегиба, двойных касательных и др. Именно, если n — порядок кривой, k — класс, d — число двойных точек (угловых и изолированных), r — число точек возврата, t — число двойных касательных (т. е. прямых, касающихся кривой в двух точках), w — число точек перегиба, то между этими величинами существуют следующие зависимости:

$$k=n(n-1)-2d-3r,\quad k=k(k-1)-2t-3w,$$
$$w=3n(n-2)-6d-8r,\quad r=3k(k-2)-6t-8w.$$

Эти формулы оперируют как с действительными, так и с мнимыми точками. Формула для определения числа только действительных точек перегиба кривой n-го порядка:

$$w_1=k+r_1+2d_1-2t_1-n,$$

где n — порядок кривой, k — класс, r_1 — число действительных точек возврата, d_1 — число действительных двойных точек, t_1 — число изолированных двойных касательных, а w_1 — число действительных точек перегиба.

Родом п. д. а. к. наз. целое неотрицательное число p, являющееся разностью между наибольшим числом двойных точек, к-рые может иметь А. к., и их фактич. числом.

Первая классификация кривых 3-го порядка была предложена И. Ньютоном (1704) (см. *Ньютона классификация*), к-рый положил тем самым начало систематич. исследованию п. д. а. к. Ю. Плюккером (1835) была предложена классификация кривых 3-го порядка (219 типов) в зависимости от положений асимптот и прямой, соединяющей точки пересечения кривой с асимптотами. А. Кэли (1866) делил кривые 3-го порядка на семь классов в зависимости от характера точек пересечения кривой с бесконечно удалённой прямой.

Классификация кривых 4-го порядка впервые была проведена Э. Варингом (1792), к-рый подразделил их на 12 классов (84 551 кривая частного вида). Л. Эйлер и Г. Крамер классифицировали кривые 4-го порядка по количеству и виду их бесконечно удалённых точек (9 категорий кривых).

Классификация п. д. а. к. 5-го порядка была проведена Г. Крамером (1750), к-рый положил в основу природу бесконечно удалённых точек. Классификация кривых 6-го порядка найдена во 2-й пол. 20 в. Полной классификации кривых порядка >6 пока (1987) нет.

Развитие алгебраич. геометрии привело к изучению комплексных алгебраич. кривых, теория к-рых, по существу, совпадает с теорией (компактных) римановых поверхностей. В дальнейшем под А. к. понимается неприводимая гладкая проективная А. к. над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. В этом случае А. к. естественным образом снабжается структурой компактной римановой поверхности. Обратное тоже верно, т. е. всякая компактная риманова поверхность может быть получена из нек-рой А. к. Каждая риманова поверхность топологически устроена, как сфера или как сфера, к к-рой приклеено нек-рое число ручек. Это число (равное 0 для сферы) наз. р о д о м кривой. Любая А. к. рода 0 бирационально изоморфна (комплексной) проективной прямой. А. к. рода 1 (топологически устроенные как тор) наз. э л л и п т и ч е с к и м и к р и в ы м и; они бирационально изоморфны кубикам в проективной плоскости P^2. Обратно, любая кубика, гладкая в P^2 является эллиптич. кривой и в подходящей (неоднородной аффинной) системе координат может быть задана уравнением в нормальной форме Вейерштрасса (см. *Алгебраическая геометрия*). А. к. наз. г и п е р э л л и п т и ч е с к о й, если она бирационально изоморфна плоской кривой, заданной в подходящей аффинной системе координат уравнением $y^2-f(x)=0$, где $f(x)$ — многочлен без кратных корней. Если степень n многочлена f нечётна, то род гиперэллиптич. кривой равен $\frac{n-1}{2}$, а если чётна, то $\frac{n-2}{2}$. Все А. к. рода 2 являются гиперэллиптическими. Любая А. к. рода 3 либо гиперэллиптическая, либо бирационально изоморфна гладкой квартике на плоскости. Обратно, любая гладкая квартика в P^2 имеет род 3. А. к. рода 4 либо является гиперэллиптич. кривой, либо бирационально изоморфна кривой степени 6 в трёхмерном проективном пространстве P^3, заданной системой уравнений $f_2=f_3=0$, где f_2 и f_3 — однородные многочлены (от однородных координат) степени 2 и 3 соответственно. Обратно, любая гладкая кривая степени 6 в P^3, заданная подобной системой уравнений, имеет род 4.

Кривые рода 1 (т. е. эллиптич. кривые) суть в точности абелевы многообразия размерности 1. Каждой А. к. рода $g>0$ канонически сопоставляется нек-рое абелево многообразие размерности g, наз. я к о б и е в ы м м н о г о о б р а з и е м или я к о б и а н о м А. к. При $g=1$ якобиан совпадает с самой кривой. Якобиево многообразие играет важную роль при изучении различных вопросов, связанных с геометрией А. к.

● С а в е л о в А. А., Плоские кривые, М., 1960; К л е м е н с Г., Мозаика теории комплексных кривых, пер. с англ., М., 1984; У о к е р Р., Алгебраические кривые, пер. с англ., М., 1952; С м о г о р ж е в с к и й А. С., С т о л о в а Е. С., Справочник по теории плоских кривых третьего порядка, М., 1961.

АЛГЕБРАЙЧЕСКАЯ ОПЕРА́ЦИЯ на м н о ж е с т в е A — отображение ω некоторой прямой степени множества A в множество A

$$\omega\colon A^n \longrightarrow A;$$

здесь $A^n=A\times\ldots\times A$ есть n-я прямая (декартова) степень множества A, т. е. множество всевозможных последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i\in A$. Число n наз. а р н о с т ь ю операции ω. Таким образом, n-а р н а я а л г е б р а и ч е с к а я о п е р а ц и я ω всякой упорядоченной последовательности из элементов множества A ставит в соответствие однозначно определённый элемент множества A, к-рый в общем случае обозначается $\omega(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ или $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\omega$.

Исторически первыми были понятия б и н а р н о й ($n=2$) и у н а р н о й ($n=1$) о п е р а ц и й. Таковы сложение и умножение, вычитание и, соответственно, взятие противоположного элемента во многих числовых системах. Однако деление, напр. во множестве всех действительных чисел, А. о. не является (т. к. нельзя разделить на нуль). Взятие обратного элемента также, разумеется не будет А. о. на множестве всех действительных чисел, но является унарной А. о. на подмножестве положительных чисел. Н у л ь а р н ы е о п е р а ц и и — это фиксированные элементы множества (они наз. часто просто н у л я м и).

Множество с системой определённых на нём А. о. наз. *универсальной алгеброй*. Изучение как свойств универсальных алгебр в целом, так и отдельных их подклассов (выделяемых, как правило, фиксированием арностей операций и нек-рых свойств этих операций, но без фиксирования постоянного множества, на к-ром они рассматриваются) типично для т. н. а б с т р а к т н о й, или *общей алгебры*.

АЛГЕБРАЙЧЕСКАЯ ПОВЕ́РХНОСТЬ — *алгебраическое многообразие* размерности 2. Вместе с *алгебраическими кривыми* А. п. представляют собой наиболее изученный класс алгебраич. многообразий. В отличие от кривых, единственным целочисленным инвариантом к-рых является род, А. п. обладают различными численными инвариантами и так просто не классифицируются. В результате теория А. п. не обладает естественной стройностью теории кривых; она занимается в основном изучением специальных типов поверхностей. В отличие от случая алгебраич. кривых, бирациональная эквивалентность не влечёт за собой топологич. эквивалентности гладких проективных А. п.

АЛГЕБРАЙЧЕСКАЯ ПОДГРУ́ППА — см. *Алгебраическая группа*.

АЛГЕБРАЙЧЕСКАЯ СИСТЕ́МА — множество с определёнными на нём операциями и отношениями. А. с. принадлежат к числу наиболее общих математич. структур. Их теория сформировалась в нач. 50-х гг. 20 в. на грани между общей алгеброй и математич. логикой, хотя основные направления её развития были намечены ещё в 30-х гг. Одно из главных направлений этой теории — изучение связей между общими свойствами классов А. с. и синтаксич. особенностями языка, на к-ром определяются указанные классы.

А. с. есть объект $\boldsymbol{A}=\langle A, O, R\rangle$, где A — непустое множество, O — семейство *алгебраических операций*, а R — семейство *отношений*, заданных на множестве A. Множество A наз. н о с и т е л е м, или о с н о в н ы м м н о ж е с т в о м, А. с., а его элементы — элементами системы. А. с. наз. к о н е ч н о й, если множество A конечно. В отличие от других операций и отношений, к-рые могут быть определены на A, операции из O и отношения из R наз. г л а в н ы м и, или о с н о в н ы м и. Множество $\Omega=O\cup R$ всех главных операций и отношений в $\boldsymbol{A}$ наз. с и г н а т у р о й $\boldsymbol{A}$. А. с. наз. у н и в е р с а л ь н о й а л г е б р о й (иногда просто а л г е б р о й), если множество основных отношений её пусто, и наз. р е л я ц и о н н о й с и с т е м о й, или м о д е л ь ю, если пусто множество основных операций.

Пусть $\boldsymbol{A}=\langle A, O, R\rangle$ — А. с., где $O=\{o_i,\ i\in I\}$, $R=\{r_j,\ j\in J\}$, причём o_i есть m_i-арная операция, а r_j есть n_j-местное отношение. Тогда последовательность целых чисел $\langle m_i; n_j\rangle$ наз. типом А. с. $\boldsymbol{A}$. Если сигнатура Ω А. с. $\boldsymbol{A}$ конечна, то $\boldsymbol{A}$ наз. А. с. к о н е ч н о г о т и п а.

П р и м е р ы А. с. 1) Пусть $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, $+$ — операция сложения чисел; тогда $\langle\mathbb{Z}, +\rangle$ — алгебра типа $\langle 2\rangle$.

2) Пусть $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $S(x)=x+1$, $\times$ — операция умножения чисел и выделены числа 0 и 1; тогда $\langle\mathbb{N}, S, \times, 0, 1\rangle$ — алгебра типа $\langle 1, 2, 0, 0\rangle$, имеющая два главных элемента 0 и 1.

3) Пусть V — совокупность замкнутых многоугольников на плоскости, $\cap$ — операция пересечения множеств, $\subseteq$ — отношение включения; тогда $\langle V, \cap, \subseteq\rangle$ — А. с. типа $\langle 2; 2\rangle$.

Классич. примерами А. с. являются группы, кольца, векторные пространства, линейные алгебры (пространства и алгебры — А. с. бесконечного типа), линейно упорядоченные группы, решётки и т. д.

Пусть $\boldsymbol{A}=\langle A, O, R\rangle$ и $\boldsymbol{B}=\langle B, O', R'\rangle$ — две А. с. одного и того же типа. $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ наз. и з о м о р ф н ы м и, если существует взаимно однозначное отображение φ множества A на множество B, сохраняющее главные операции и главные отношения, т. е. удовлетворяющее усло-

виям

$$\varphi\left(o_i\left(x_1, \ldots, x_{m_i}\right)\right)=o_i'\left(\varphi\left(x_1\right), \ldots, \varphi\left(x_{m_i}\right)\right), \quad (1)$$

$$r_j\left(x_1, \ldots, x_{n_j}\right) \Leftrightarrow r_j'\left(\varphi\left(x_1\right), \ldots, \varphi\left(x_{n_j}\right)\right) \quad (2)$$

для всех $o_i \in O$ и всех $r_j \in R$. Отображение φ с этими свойствами наз. изоморфизмом. Напр., отображение $\varphi(a)=\lg a$ множества всех положительных чисел $\mathbb{R}^+$ в множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел есть изоморфизм А. с. $\langle \mathbb{R}^+, \cdot, \leqslant\rangle$ и $\langle \mathbb{R}, +, \leqslant\rangle$.

Гомоморфизмом А. с. $\boldsymbol{A}$ в А. с. $\boldsymbol{B}$ наз. отображение φ, удовлетворяющее условию (1) и условию

$$r_j\left(x_1, \ldots, x_{n_j}\right) \Rightarrow r_j'\left(\varphi\left(x_1\right), \ldots, \varphi\left(x_{n_j}\right)\right) \quad (3)$$

для всех $r_j \in R$.

Непустое подмножество A_1 основного множества A А. с. $\boldsymbol{A}$ наз. замкнутым в $\boldsymbol{A}$, если A_1 замкнуто относительно любой операции $o_i \in O$, т. е. для любых $a_1, \ldots, a_{m_i} \in A_1$ элемент $o_i(a_1, \ldots, a_{m_i})$ также принадлежит A_1. В случае алгебр понятие замкнутого подмножества совпадает с понятием подалгебры, в случае моделей — любое непустое подмножество является замкнутым. Рассматривая операции из O и отношения из R на замкнутом подмножестве A_1 А. с. $\boldsymbol{A}$ получают А. с., однотипную данной и наз. подсистемой А. с. $\boldsymbol{A}$. Если φ — гомоморфизм А. с. $\boldsymbol{A}$ в А. с. $\boldsymbol{B}$, то совокупность таких элементов b из B, что $b=\varphi(a)$ для нек-рого $a \in A$ (образ множества A), замкнута в $\boldsymbol{B}$ и соответствующая подсистема наз. гомоморфным образом А. с. $\boldsymbol{A}$.

Прямым произведением А. с. $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ одного типа наз. А. с. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ той же сигнатуры, где основное множество есть *декартово произведение* множеств A и B, а операции o_i'' и отношения r_i'' определяются следующим образом:

$$o_i''\left(\left(a_1, b_1\right), \ldots, \left(a_{m_i}, b_{m_i}\right)\right)=$$

$$=\left(o_i\left(a_1, \ldots, a_{m_i}\right), o_i'\left(b_1, \ldots, b_{m_i}\right)\right),$$

$$r_j''\left(\left(a_1, b_1\right), \ldots, \left(a_{n_j}, b_{n_j}\right)\right) \Leftrightarrow r_j\left(a_1, \ldots, a_{n_j}\right)$$

$$\text{и } r_j'\left(b_1, \ldots, b_{n_j}\right).$$

Аналогично определяется прямое произведение любого конечного или бесконечного числа А. с.

С каждой А. с. $\boldsymbol{A}$ естественным образом связан *формализованный язык* 1-го порядка L_Ω, в к-ром в качестве функциональных и предикатных символов выступают обозначения для главных операций и отношений А. с. $\boldsymbol{A}$. При этом каждому терму языка L_Ω с n различными переменными соответствует нек-рая n-местная операция на A, а каждой формуле с n свободными переменными — нек-рое n-местное отношение. В частности, всякое предложение (т. е. замкнутая формула) языка L_Ω превращается в высказывание об объектах А. с. $\boldsymbol{A}$, к-рое может быть истинным или ложным.

Напр., пусть дана А. с. $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, ', 0, =\rangle$, где $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $'$ — операция прибавления единицы, а остальные символы интерпретируются обычным образом. Этой А. с. соответствует язык *формальной арифметики*. Терм $(o''\cdot x)$ задаёт на множестве $\mathbb{N}$ одноместную операцию, к-рая каждое число n переводит в $2n$. Формула $\exists x((x_1\cdot x)=x_2)$ задаёт двухместный предикат «x_2 делится на x_1». Замкнутая формула $\forall x\,((x+x)=x')$ представляет собой ложное высказывание («для всех x число $x+x$ равно $x+1$»), а формула

$$\forall x\,(o''\cdot x)=x' \supset (o''\cdot x)+x=x''$$

— истинное высказывание (если $2x=x+1$, то $2x+x=x+2$).

Пусть Σ — нек-рое множество предложений языка L_Ω. Моделью множества Σ наз. такая А. с. $\boldsymbol{A}$, что каждое предложение из Σ истинно в $\boldsymbol{A}$. Связь между предложениями формализованных языков и их моделями является предметом изучения *моделей теории*.

● Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970.

В. Е. Плиско.

АЛГЕБРАИ́ЧЕСКАЯ СПИРА́ЛЬ — см. *Спираль*.

АЛГЕБРАИ́ЧЕСКАЯ СТЕ́ПЕНЬ ТО́ЧНОСТИ квадратурной формулы — максимальная степень многочленов, для которых точна данная формула. См. *Квадратурная формула*.

АЛГЕБРАИ́ЧЕСКАЯ ТЕО́РИЯ ЧИ́СЕЛ — раздел теории чисел, основной задачей к-рого является изучение свойств целых чисел полей *алгебраических чисел*. Переход от целых рациональных чисел к целым алгебраическим не сопровождается ожидаемыми аналогиями. Целые алгебраич. числа обладают рядом свойств, отличных от свойств целых рациональных чисел.

Первое нарушение аналогии относится к единицам. Единицей (точнее алгебраической единицей) наз. целое алгебраич. число, являющееся делителем числа 1 в кольце целых алгебраич. чисел. (Говорят, что целое алгебраич. число α делит целое алгебраич. число β, если существует целое алгебраич. число γ такое, что $\beta=\alpha\gamma$.) В то время как поле рациональных чисел имеет только две единицы $+1$ и -1, в общих полях алгебраич. чисел может быть даже бесконечно много единиц, причём единицы образуют бесконечную мультипликативную группу. Строение группы единиц поля было выяснено П. Дирихле.

Второе нарушение аналогии при переходе от поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ к полю алгебраич. чисел связано с потерей однозначности разложения целых рациональных чисел на простые множители. Напр., число 6 в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ можно разложить в произведение двумя различными способами: $6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})\,(1-\sqrt{-5})$.

Третье нарушение аналогии доставляют простые числа. При переходе к полям алгебраич. чисел они, вообще говоря, перестают быть простыми, так, в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ простое число $5=(2+\sqrt{-1})\,(2-\sqrt{-1})$, однако число 7 остаётся простым. Естественно возникает вопрос: можно ли найти правила, к-рые давали бы однозначный ответ на вопрос — остаётся ли данное простое число простым при переходе к нек-рому расширению поля $\mathbb{Q}$ или распадается, и тогда на сколько множителей? Проблема неоднозначного разложения целых чисел в алгебраич. полях была решена Э. Куммером введением т. н. *идеальных чисел*. А именно, если в поле k нет простых чисел, на к-рые однозначно распадалось бы любое целое число из k, то найдётся такое расширение K/k конечной степени над k, в к-ром существует необходимое количество чисел, играющих роль простых для поля k. Эти числа Э. Куммер назвал идеальными (т. к. они не принадлежат исходному полю k). С привлечением идеальных чисел теорема об однозначности разложения восстанавливается (с точностью до множителя, являющегося алгебраич. единицей). В дальнейшем понятие идеального числа было заменено эквивалентным понятием *идеала*. Вопрос о распадении простых чисел при переходе к полям алгебраич. чисел переформулируется на языке простых идеалов. Этот вопрос привёл к возникновению теории полей классов — центральной части современной А. т. ч. Первое решение этого вопроса также принадлежит Э. Куммеру.

И наконец, последний вопрос касается общей структуры полей алгебраич. чисел. Поле $\mathbb{Q}$ является минимальным полем нулевой характеристики, оно содержится в любом другом поле алгебраич. чисел. Сколько же подполей содержит данное поле K — конечное или бесконечное — и как они устроены? Соответствующая задача была решена Э. Галуа. Конечность числа подполей расширения K степени n над $\mathbb{Q}$ следует из существования взаимно однозначного соответствия (соответствия Галуа) между всеми подполями поля K и всеми подгруппами его группы Галуа

(см. *Галуа теория*). Число элементов этой группы конечно и не превосходит n.

Эти четыре вопроса являются главными в А. т. ч. и ответы на них составляют её содержание. В вопросах количественных оценок и методов их получения А. т. ч. тесно переплетается с *аналитической теорией чисел*.

● Борсевич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 3 изд., М., 1985; Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952; Постников М. М., Введение в теорию алгебраических чисел, М., 1982.

АЛГЕБРАЙЧЕСКАЯ ТОПОЛО́ГИЯ — область математики, возникшая для изучения таких свойств геометрических фигур (в широком смысле — любых объектов, где можно говорить о непрерывности) и их отображений друг в друга, которые не меняются при непрерывных деформациях (гомотопиях). В принципе, целью А. т. является полное перечисление таких свойств. Само название «А. т.» происходит от определяющей роли алгебраич. понятий и методов в решении задач этой области. Наиболее фундаментальными классами объектов, свойства к-рых изучаются в А. т., являются: *комплексы* (многогранники, полиэдры) — симплициальные, клеточные и др.; *многообразия* — замкнутые, открытые, с краем (границей), подразделяющиеся в свою очередь на гладкие (дифференцируемые), аналитические, комплексно аналитические, кусочно линейные и, наконец, чисто непрерывные (топологические); косые произведения и их сечения. Основные типы отображений, рассматриваемые в А. т.,— это произвольные непрерывные, кусочно линейные, гладкие отображения или их важнейшие подклассы: *гомеоморфизмы*, в частности непрерывные, кусочно линейные или гладкие; вложение одного объекта в другой, а также погружение (локальное вложение).

Важнейшим понятием А. т. является понятие *деформации*. Деформации подвергается отображение нек-рого класса одного объекта в другой. Основными типами деформаций являются гомотопия — произвольная непрерывная (гладкая, кусочно линейная) деформация непрерывного отображения, её частный случай — изотопия (непрерывная, гладкая, кусочно линейная) — деформация гомеоморфизма, вложения или погружения, где в процессе деформации в каждый момент времени отображение остаётся гомеоморфизмом, вложением или погружением.

● Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд., М., 1976; Хилтон П.-Дж., Уайли С., Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию, пер. с англ., М., 1966; Косневски Ч., Начальный курс алгебраической топологии, пер. с англ., М., 1983.

АЛГЕБРАЙЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция $y=f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных, удовлетворяющая алгебраическому уравнению

$$P(y, x_1, \ldots, x_n)=0,$$

где P — неприводимый многочлен от y, x_1, ..., x_n, часто записываемый по степеням переменного y в виде

$$P_k(x_1, \ldots, x_n)\,y^k + P_{k-1}(x_1, \ldots, x_n)\,y^{k-1} + \ldots \\ \ldots + P_0(x_1, \ldots, x_n)=0,$$

где $P_k(x_1, \ldots, x_n)$, ..., $P_0(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлены от x_1, ..., x_n, причём $P_k(x_1, \ldots, x_n)\not\equiv 0$. Число k — степень многочлена P относительно y, наз. степенью А. ф. При $k=1$ А. ф. может быть выражена через переменные с помощью сложения, вычитания, умножения, деления и представлена в виде отношения многочленов

$$y=-\frac{P_0(x_1, \ldots, x_n)}{P_1(x_1, \ldots, x_n)};$$

такая А. ф. наз. рациональной функцией от $x_1, \ldots, x_n$. При $k=2, 3, 4$ А. ф. всегда может быть выражена через переменные с помощью арифметич. действий и извлечения корня (квадратного или кубического); при $k\geqslant 5$ такое представление даже с привлечением корней степени выше трёх в общем случае невозможно. Если такое представление оказывается возможным, то получающаяся А. ф. наз. иррациональной. Общая теория А. ф. представляет обширную математич. дисциплину, имеющую важные связи с теорией аналитич. функций (А. ф. составляют специальный класс аналитич. функций), алгеброй и алгебраич. геометрией.

АЛГЕБРАЙЧЕСКИ ЗА́МКНУТОЕ ПО́ЛЕ — поле K, в котором всякий многочлен ненулевой степени n над K имеет хотя бы один корень. Из алгебраич. замкнутости поля следует, что каждый многочлен степени n над K имеет в K ровно n корней.

АЛГЕБРАЙЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕ́НИЕ — выражение, составленное из конечного числа букв и цифр, соединённых знаками действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения корня (показатели степени и корня должны быть постоянными числами). А. в. наз. рациональным относительно нек-рых букв, в него входящих, если оно не содержит их под знаком извлечения корня, напр. $\frac{3a}{4}+\frac{bc\sqrt{2}}{2a+b}$ рационально относительно a, b и c. А. в. наз. целым относительно нек-рых букв, если оно не содержит деления на выражения, содержащие эти буквы, напр. $\frac{3a}{c}+bc^2-\frac{3ac}{4}$ является целым относительно a и b. Если нек-рые из букв (или все) считать переменными, то А. в. есть *алгебраическая функция*.

АЛГЕБРАЙЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕ́НИЕ, адъюнкта, минора M в квадратной матрице A — число (элемент поля)

$$(-1)^{s+t}N,$$

где N — дополнительный минор к минору M в A, а числа s и t равны сумме номеров строк и столбцов матрицы A, в которых расположен минор M. В частности, А. д. элемента a_{ij} будет равно

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

где M_{ij} — дополнительный минор к элементу a_{ij}. Справедлива *Лапласа теорема* о разложении определителя по строкам (столбцам).

АЛГЕБРАЙЧЕСКОЕ ЗНАЧЕ́НИЕ корня — см. *Арифметический корень*.

АЛГЕБРАЙЧЕ́СКОЕ ИНТЕРПОЛИ́РОВАНИЕ — см. *Интерполирование*.

АЛГЕБРАЙЧЕСКОЕ МНОГООБРА́ЗИЕ — один из основных объектов изучения алгебраической геометрии. Классич. определение А. м. ограничивалось квазипроективными А. м. над полями действительных или комплексных чисел. Начиная с кон. 20-х гг. 20 в. в работах Б. Л. ван дер Вардена, Э. Нётер и др. понятие А. м. было обобщено на случай произвольного поля. А. Вейль перенёс на А. м. идею конструкции дифференцируемых многообразий с помощью «склейки», позволившую определить абстрактное А. м. При этом вместо открытых множеств в евклидовом пространстве (используемых при конструировании дифференцируемых многообразий) «склеиваются» аффинные А. м., определяемые следующим образом.

Пусть K — поле, $\overline{K}$ — его алгебраич. замыкание. Подмножество X декартова произведения $\overline{K}^n$ наз. аффинным алгебраическим многообразием над K, если оно совпадает с множеством общих нулей некоторого семейства многочленов (которое всегда можно выбрать конечным) из кольца многочленов $K[T]=K[T_1, \ldots, T_n]$. Так, напр., если K — поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, то комплексное аффинное А. м. есть множество комплексных решений системы алгебраич. уравнений с комплексными коэффициентами, а если K — поле действительных чисел, то действительное аффинное А. м. есть множество комплексных решений системы алгебраич. уравнений с действительными коэффициентами. Множество U_X всех многочленов из $K[T]$, обращающихся в нуль на X, образует идеал в кольце многочленов, к-рый наз. идеалом аффинного А. м. Факторкольцо $K[X]=K[T]/U_X$ наз. координатным кольцом аффинного А. м. Оно отождествляется с

кольцом K-регулярных функций на X, т. е. с кольцом $\bar{K}$-значных функций $f: X \to \bar{K}$, для к-рых существует такой многочлен $F \in K[T]$, что $f(x)=F(x)$ для всех $x \in X$. Любой точке $x \in X$ отвечает максимальный идеал $I(x)$ координатного кольца, состоящий из функций, обращающихся в нуль в x, причём, если K алгебраически замкнуто, то разным точкам отвечают разные идеалы. Обратно, любой максимальный идеал в $K[X]$ совпадает с $I(x)$ для нек-рой $x \in X$. Тем самым для алгебраически замкнутых полей (и, в частности, для поля $\mathbb{C}$) аффинное А. м. X отождествляется с множеством максимальных идеалов своего координатного кольца.

Простейший пример аффинного А. м. доставляет n-мерное аффинное алгебраическое пространство $\mathbf{A}^n = \bar{K}^n$, отвечающее множеству S, состоящему из нулевого многочлена. Его координатное кольцо совпадает с кольцом многочленов $K[T]$.

Объединение конечного числа и пересечение любого числа аффинных А. м. в $\mathbf{A}^n$ также является А. м. Это обстоятельство позволяет наделить пространство $\mathbf{A}^n$ структурой топологич. пространства (с топологией, наз. топологией Зарисского: её замкнутыми множествами являются в точности аффинные А. м.). Напр., для аффинной прямой $\mathbf{A}^1 = \bar{K}$ над алгебраически замкнутым полем замкнутые множества суть конечные множества, пустое множество и само $\mathbf{A}^1$.

АЛГЕБРАЙЧЕСКОЕ МНО́ЖЕСТВО — см. *Исключения теория*.

АЛГЕБРАЙЧЕСКОЕ РАСШИРЕ́НИЕ поля — см. *Поле*.

АЛГЕБРАЙЧЕСКОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение вида

$$P_n = 0,$$

где P_n — многочлен n-й степени от одного или нескольких переменных ($n \geqslant 0$). А. у. с одним неизвестным наз. уравнение вида

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \qquad (1)$$

Здесь n — целое неотрицательное число, a_0, a_1, ..., a_n наз. коэффициентами уравнения и являются данными, x наз. неизвестным и является искомым. Коэффициенты А. у. (1) предполагаются не все равными нулю. Если $a_0 \neq 0$, то n наз. степенью уравнения.

Значения неизвестного x, к-рые удовлетворяют уравнению (1), т. е. при подстановке вместо x обращают уравнение в тождество, наз. корнями уравнения (1), а также корнями многочлена

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n. \qquad (2)$$

Корни многочлена связаны с его коэффициентами по формулам Виета (см. *Виета теорема*). Решить уравнение — значит найти все его корни, лежащие в рассматриваемой области значений неизвестного.

Для приложений наиболее важен случай, когда коэффициенты и корни уравнения — числа той или иной природы (напр., рациональные, действительные или комплексные). Рассматривается также и случай, когда коэффициенты и корни — элементы произвольного поля.

Если данное число (или элемент поля) c — корень многочлена $P_n(x)$, то, согласно *Безу теореме*, $P_n(x)$ делится на $x-c$ без остатка. Деление можно выполнять по *Горнера схеме*.

Число (или элемент поля) c наз. k-кратным корнем многочлена $P_n(x)$ (k — натуральное число), если $P_n(x)$ делится на $(x-c)^k$, но не делится на $(x-c)^{k+1}$. Корни кратности 1 наз. простыми корнями многочлена.

Каждый многочлен $P_n(x)$ степени $n>0$ с коэффициентами из поля K имеет в поле K не более n корней, считая каждый корень столько раз, какова его кратность (и, значит, не более n различных корней).

В *алгебраически замкнутом поле* каждый многочлен степени n имеет ровно n корней (считая их кратность). В частности, это справедливо для поля комплексных чисел.

Уравнение (1) степени n с коэффициентами из поля K наз. неприводимым над полем K, если многочлен (2) неприводим над этим полем, т. е. не может быть представлен в виде произведения двух других многочленов над полем K, степени к-рых меньше n. В противном случае многочлен и соответствующее уравнение наз. приводимыми. Многочлены нулевой степени и сам нуль не причисляются ни к приводимым, ни к неприводимым. Свойство данного многочлена быть приводимым или неприводимым над полем K зависит от рассматриваемого поля. Так, многочлен $x^2 - 2$ неприводим над полем рациональных чисел, т. к. иначе он имел бы рациональные корни, но приводим над полем действительных чисел: $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$. Аналогично, многочлен x^2+1 неприводим над полем действительных чисел, но приводим над полем комплексных чисел. Вообще, над полем комплексных чисел неприводимы только многочлены 1-й степени и всякий многочлен может быть разложен на линейные множители. Над полем действительных чисел неприводимы только многочлены 1-й степени и многочлены 2-й степени, не имеющие действительных корней (и всякий многочлен разлагается в произведение линейных и неприводимых квадратных многочленов). Над полем рациональных чисел существуют неприводимые многочлены любых степеней, таковы, напр., многочлены вида x^n+2. Неприводимость многочлена над полем рациональных чисел устанавливается критерием Эйзенштейна: если для многочлена (2) степени $n>0$ с целыми коэффициентами существует простое число p такое, что старший коэффициент a_0 не делится на p, все остальные коэффициенты делятся на p, а свободный член a_n не делится на p^2, то этот многочлен неприводим над полем рациональных чисел.

Пусть P — произвольное поле. Для любого многочлена $f(x)$ степени $n>1$, неприводимого над полем P, существует такое расширение поля P, в к-ром содержится хотя бы один корень многочлена $f(x)$; более того, существует поле разложения многочлена $f(x)$, т. е. расширение поля P, в к-ром этот многочлен может быть разложен на линейные множители. Любое поле имеет алгебраически замкнутое расширение.

Разрешимость алгебраических уравнений в радикалах. Всякое А. у. степени, не превосходящей 4, решается в радикалах. Решение задач, приводящихся к частным видам уравнений 2-й и 3-й степеней, встречается в клинописных текстах древней Вавилонии (2000 лет до н. э.) (см. *Квадратное уравнение*, *Кубическое уравнение*). Первое изложение теории решения квадратных уравнений дано в книге Диофанта «Арифметика» (3 в.). Решение в радикалах уравнений 3-й и 4-й степеней с буквенными коэффициентами было получено итальянскими математиками в 16 в. (см. *Кардано формула*, *Феррари метод*). В течение почти 300 лет после этого делались безуспешные попытки решить в радикалах уравнение с буквенными коэффициентами 5-й и более высоких степеней. Наконец, Н. Абель (1826) доказал, что такое решение невозможно.

Теорема Абеля не исключает, однако, того, что каждое А. у. с данными числовыми коэффициентами (или коэффициентами из данного поля) решается в радикалах. Уравнения любой степени n нек-рых частных видов решаются в радикалах (напр., *двучленные уравнения*). Полное решение вопроса о том, при каких условиях А. у. разрешимо в радикалах, было получено Э. Галуа (ок. 1830) (см. *Галуа теория*).

Разрешимость уравнений в радикалах тесно связана с вопросом о геометрич. построениях с помощью циркуля и линейки, в частности с задачей о делении окружности на n равных частей (см. *Деление круга*).

Алгебраические уравнения с одним неизвестным с числовыми коэффициентами. Для отыскания корней А. у. с коэффициентами из поля действительных или комплек-

сных чисел степени выше 2-й, как правило, используются методы вычислительной математики.

Часто возникают задачи определения границ и числа корней. За верхнюю границу модулей всех корней (как действительных, так и комплексных) А. у. (1) с любыми комплексными коэффициентами можно взять число

$$1+\frac{\max\limits_{i\geq 0}|a_i|}{|a_0|}.$$

В случае действительных коэффициентов более точную границу обычно даёт *Ньютона метод*. К определению верхней границы положительных корней сводится определение нижней границы положительных, а также верхней и нижней границ отрицательных корней.

Для определения числа действительных корней проще всего применить правило знаков Декарта (см. *Декарта теорема*). Это правило является частным случаем *Будана — Фурье теоремы*. Точное число действительных корней, лежащих на данном интервале (в частности, число всех действительных корней), многочлена с действительными коэффициентами, не имеющего кратных корней, можно найти по *Штурма теореме*.

Системы алгебраических уравнений. О системах А. у. 1-й степени см. в ст. *Линейное уравнение*.

Систему двух А. у. любых степеней с двумя неизвестными x и y можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} P_n(x,\ y)=a_0(x)\,y^n+a_1(x)\,y^{n-1}+\ldots+a_n(x)=0,\\ Q_s(x,\ y)=b_0(x)\,y^s+b_1(x)\,y^{s-1}+\ldots+b_s(x)=0,\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

где $a_i(x)$ и $b_j(x)$ — многочлены от одного неизвестного x; если ему придать нек-рое числовое значение, получится система двух уравнений с одним неизвестным y с постоянными коэффициентами a_i и b_j, решение к-рой находится при помощи результанта этой системы. О нахождении решений системы (3) см. в ст. *Исключения теория*.

● Курош А. Г., Алгебраические уравнения произвольных степеней, 2 изд., М., 1975 (Популярные лекции по математике); его же, Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; Кострикина А. И., Введение в алгебру, М., 1977; Мишина А. П., Проскуряков И. В., Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра, 2 изд., М., 1965 (Справочная математическая библиотека).

И. В. Проскуряков.

АЛГЕБРАЙЧЕСКОЕ ЧИСЛО́ — комплексное (в частности, действительное) число, являющееся корнем многочлена

$$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$$

с рациональными коэффициентами, из к-рых не все равны нулю. Если α — А. ч., то среди всех многочленов с рациональными коэффициентами, имеющих α корнем, существует единственный многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным 1. Он является неприводимым многочленом и наз. каноническим многочленом А. ч. α. Степень n канонич. многочлена наз. степенью А. ч. α. Остальные корни этого многочлена наз. числами, сопряжёнными с А. ч. α. Они также являются А. ч. степени n.

Г. Кантор (1872) доказал, что множество всех А. ч. счётно, откуда следовало существование неалгебраических — *трансцендентных чисел*. Множество всех А. ч. образует поле. Это поле алгебраически замкнуто, т. е. корень многочлена с алгебраич. коэффициентами есть А. ч.; целым А. ч. наз. число, у к-рого все коэффициенты его канонич. многочлена — целые рациональные числа. Целые А. ч. образуют кольцо. Более того, корень многочлена с целыми алгебраич. коэффициентами и старшим коэффициентом 1 есть целое А. ч.

С понятием А. ч. тесно связаны два больших направления в теории чисел. Это арифметика А. ч., изучающая, в частности, свойства делимости и вопросы разложения на простые множители в кольце целых А. ч., и теория приближения А. ч., изучающая степень приближения А. ч. рациональными числами.

● См. лит. при ст. *Алгебраическая теория чисел*.

АЛГЕБРЫ ЛО́ГИКИ ФУ́НКЦИЙ — см. *Алгебра логики*.

АЛГЕБРЫ ОСНОВНА́Я ТЕОРЕ́МА: любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет корень в поле комплексных чисел. А. о. т. была высказана впервые П. Роте (1608), А. Жираром (1629) и Р. Декартом (1637) в формулировках, отличных от современной. Л. Эйлер (1743) уточнил формулировку А. о. т., придав ей форму, эквивалентную современной: всякий многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами. Ж. Д'Аламбер (1748) опубликовал доказательство А. о. т.; затем появляются доказательства Л. Эйлера (1751) и др. Во всех этих доказательствах предполагается заранее, что какие-то «идеальные» корни многочлена существуют, а затем доказывается, что, по крайней мере, один из них является комплексным числом. К. Гаусс (1799) первый доказал А. о. т. без предположения, что корни существуют; он дал четыре доказательства А. о. т., одно из к-рых, по существу, содержит построение поля разложения многочлена.

АЛГО́Л, алгол-60 (ALGOL — сокращение от слов ALGOrithmic Language, англ. algorithmic—алгоритмический, language — язык),— алгоритмический процедурно-ориентированный *программирования язык*, используемый при решении научно-технических задач. Разработан в нач. 60-х гг. (в 1962 принят технич. комитетом Международной федерации по обработке информации). В А. простые величины — целые и действительные числа, логические значения; составные величины — многомерные массивы индексируемых простых компонент. К простым операторам языка относятся присваивание, передача управления по метке или по её номеру в заданном списке меток, вызов процедуры. Выражения языка могут содержать вызов процедуры, вычисляющей значения функции. В А. существует несколько операторов цикла, а также условный оператор, к-рый позволяет осуществлять выбор одного из двух операторов в зависимости от значения логич. уровня. Последовательность операторов в языке может объединяться в один составной оператор, к-рый содержит описания используемых в нём имён и таким образом образует блок — основную конструкцию А.

А. лежит в основе создания семейства т. н. алголоподобных языков (напр., алгола-68 и паскаля).

● Алгоритмический язык АЛГОЛ-60. Модифицированное сообщение, М., 1982.

АЛГО́Л-68 — универсальный алгоритмический *программирования язык*. Разработан в кон. 60-х гг. коллективом учёных под руководством Международной федерации по обработке информации. В А.-68 величины — целые и действительные числа, логические значения (аналогично *алголу*-60), а также литерные (для текстовой информации), форматные (для описаний форматов обрабатываемой внешней информации), имена (для организации прямого доступа к данным) и процедуры. Из этих величин в языке можно создавать массивы произвольной размерности с динамически изменяемыми границами и иерархические структуры именованных данных произвольной глубины. Основные типы операторов в А.-68 те же, что и в алголе-60. А.-68 имеет дополнительную конструкцию — совместное предложение, позволяющее указывать в программе параллельно исполняемые ветви вычислений. Особенностью А.-68 является синтаксич. взаимозаменяемость операторов и выражений: каждое выражение может выполнять нек-рое дополнительное действие и каждый оператор может вырабатывать значение.

● Пересмотренное сообщение об АЛГОЛе-68, пер. с англ., М., 1979.

АЛГОРИ́ТМ, алгорифм,— точное предписание, которое задаёт вычислительный процесс (называемый в этом случае алгоритмическим), начинающийся с произвольного исходного данного (из некоторой совокупности возможных для данного А. исходных данных) и направленный на получение полностью определяемого этим исходным данным результата. А. являются, напр., известные из начальной школы правила сложения, вычитания, умножения и деления столбиком; в этих

А. возможными результатами служат натуральные числа, записанные в десятичной системе, а возможными исходными данными — упорядоченные пары таких чисел. Вообще говоря, не предполагается, что результат будет обязательно получен: процесс применения А. к конкретному возможному исходному данному (т. е. алгоритмич. процесс, развёртывающийся начиная с этого данного) может также оборваться безрезультатно (в этом случае говорят, что произошла безрезультатная остановка) или не закончиться вовсе. В случае, если процесс заканчивается (соответственно не заканчивается) получением результата, говорят, что А. применим (соответственно неприменим) к рассматриваемому возможному исходному данному.

Само слово А. происходит от algorithmi — латинского написания арабского имени среднеазиатского математика 9 в. аль-Хорезми. В средневековой Европе А. назывались десятичная позиционная система счисления и искусство счёта в ней, поскольку именно благодаря латинскому переводу (12 в.) трактата аль-Хорезми Европа познакомилась с позиционной системой.

Понятие А. занимает одно из центральных мест в современной математике, прежде всего вычислительной. Так, проблема численного решения уравнений данного типа заключается в отыскании А., к-рый всякую пару, составленную из произвольного уравнения этого типа и произвольного положительного рационального числа ε, перерабатывает в число (или набор чисел), отличающееся (отличающихся) от корня (корней) этого уравнения меньше, чем на ε. Усовершенствование цифровых вычислительных машин даёт возможность реализовать на них всё более сложные А. Однако встретившийся в описывающей понятие А. формулировке термин «вычислительный процесс» не следует понимать в узком смысле только цифровых вычислений; уже в школьном курсе алгебры говорят о буквенных вычислениях, да и в арифметич. вычислениях появляются отличные от цифр символы (скобки, знак равенства, знаки арифметич. действий). Целесообразно, таким образом, рассматривать А., оперирующие с произвольными символами и их комбинациями. Простейшим случаем такой комбинации является линейная последовательность символов, образующая *слово*, однако можно рассматривать и «нелинейные» комбинации, напр. алгебраич. матрицы.

Наиболее общее интуитивное понимание состоит в том, что исходными данными и результатами А. могут служить самые разнообразные конструктивные объекты. Это открывает возможность широкого применения понятия А. Можно говорить об А. перевода с одного языка на другой, об А. работы поездного диспетчера (перерабатывающего информацию о движении поездов в приказы) и др. применениях алгоритмич. описания процессов управления; именно поэтому понятие А. является одним из центральных понятий *кибернетики*.

А. встречаются в науке на каждом шагу: умение решить задачу «в общем виде» всегда означает по существу владение нек-рым А. Говоря, напр., об умении человека складывать числа, имеют в виду не то, что он для любых чисел рано или поздно сумеет найти их сумму, а то, что он владеет нек-рым единообразным приёмом сложения, применимым к любым двум конкретным записям чисел, т. е., иными словами, А. сложения (примером такого А. и является известное правило сложения чисел столбиком).

Понятие задачи «в общем виде» уточняется при помощи понятия массовой проблемы, к-рая состоит в требовании найти единый А. решения серии отдельных, единичных задач (когда такого А. не существует, говорят, что рассматриваемая массовая проблема неразрешима). Так, численное решение уравнений данного типа и автоматич. перевод — массовые проблемы; соответствующие им единичные задачи — численное решение отдельных уравнений данного типа и перевод отдельных фраз. Ролью массовых проблем в математике и определяется как значение, так и сфера приложения понятия А.; напр., в алгебре возникают массовые проблемы проверки алгебраич. равенств различных типов, в математич. логике — распознавания выводимости предложений из заданных аксиом. Установление неразрешимости к.-л. массовой проблемы (напр., проблемы распознавания истинности или доказуемости для к.-л. логико-математич. языка) является важным познавательным актом, показывающим, что для решения конкретных единичных задач данной серии принципиально необходимы специфические для каждой отдельной задачи методы. Для математич. логики понятие А. существенно ещё и потому, что на него опирается понятие *исчисления*, служащее обобщением и уточнением интуитивных понятий «вывода» и «доказательства». См. также *Алгоритмическая проблема*.

Строение алгоритмического процесса. Алгоритмич. процесс есть процесс последовательного преобразования конструктивных объектов, происходящий дискретными «шагами»; каждый шаг состоит в смене одного конструктивного объекта другим. Так, при применении А. вычитания столбиком к паре (307, 49) последовательно возникнут такие конструктивные объекты:

$$\begin{array}{r} 307 \\ -\ 49 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 307 \\ -\ 49 \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 307 \\ -\ 49 \\ \hline 58 \end{array} \quad \begin{array}{r} 307 \\ -\ 49 \\ \hline 258 \end{array}.$$

В ряду сменяющих друг друга конструктивных объектов каждый последующий полностью определяется (в рамках данного А.) непосредственно предшествующим. При более строгом подходе предполагается также, что переход от каждого конструктивного объекта к непосредственно следующему достаточно «элементарен» — в том смысле, что происходящее за один шаг преобразование предыдущего конструктивного объекта в следующий носит локальный характер (преобразованию подвергается не весь конструктивный объект, а лишь нек-рая, заранее ограниченная для данного А. его часть, и само это преобразование определяется не всем предыдущим конструктивным объектом, а лишь этой ограниченной частью).

Таким образом, наряду с совокупностями возможных исходных данных и возможных результатов для каждого А. имеется ещё совокупность возможных промежуточных результатов, представляющая собой ту рабочую среду, в к-рой развивается алгоритмич. процесс. Для А. вычитания столбиком возможными исходными данными служат пары чисел, возможными результатами — числа (в десятичной системе), а возможные промежуточные результаты суть «трёхэтажные» записи вида $\begin{array}{r} \bar{p} \\ q \\ \hline r \end{array}$, где q — запись в десятичной системе, r — такая же запись или пустое слово, а p — запись числа в десятичной системе с допущением точек над нек-рыми цифрами.

Рассмотрим А., для к-рого возможными исходными данными, возможными результатами и возможными промежуточными результатами служат всевозможные слова в *алфавите* $\{a, b\}$. Условимся называть переход от слова X к слову Y «допустимым» в следующих двух случаях: 1) X имеет вид aP, а Y имеет вид Pb; 2) X имеет вид baP, а Y имеет вид $Paba$ (P — произвольное слово). Формулируется предписание: «если в качестве исходного дано к.-л. слово, не имеющее вида aaP, то делай допустимые переходы до тех пор, пока не получится слово вида aaP; тогда остановись, слово P и есть результат». Это предписание образует А., к-рый обозначим $\mathfrak{A}$. Возьмём в качестве исходного данного слово $babaa$. Оно имеет вид baP, где P — слово baa; поэтому допустим переход к слову $Paba$, т. е. к $baaaba$, имеющему опять вид baP, где P — $aaba$. После второго перехода получим слово $aabaaba$. В силу предписания мы должны остановиться, результат есть $baaba$. Возьмём в качестве исходного данного слово $baaba$. Получим последовательно $abaaba$, $baabab$, $abababa$, $bababab$, $babababa$,... Можно доказать, что процесс никогда не кончится: для каждого из промежуточных слов можно совер-

шить допустимый переход, но слово, начинающееся с *aa*, никогда не возникнет. Возьмём теперь в качестве исходного данного слово *abaab*. Получим *baabb*, *abbaba*, *bbabab*. Далее мы не можем совершить допустимый переход, т. к. слово *bbabab* не начинается ни с *a*, ни с *ba*, в то же время сигнала остановки нет. Произошла безрезультатная остановка. Итак, $\mathfrak{A}$ применим к слову *babaa* и неприменим к словам *baaba* и *abaab*.

«Уточнения» понятия алгоритма. Как правило, для данного А. можно выделить 7 характеризующих его параметров: 1) совокупность возможных исходных данных, 2) совокупность возможных результатов, 3) совокупность возможных промежуточных результатов, 4) правило начала, 5) правило непосредственной переработки, 6) правило окончания, 7) правило извлечения результата.

Понятие А. в его общем виде принадлежит к числу основных первоначальных понятий математики, не допускающих определения в терминах более простых понятий. Возможные уточнения понятия А. приводят, строго говоря, к известному сужению этого понятия. Каждое такое уточнение состоит в том, что для каждого из указанных 7 параметров А. точно описывается нек-рый класс, в пределах к-рого этот параметр может меняться. Выбор таких классов и отличает одно уточнение от другого. Поскольку 7 параметров однозначно определяют нек-рый А., то выбор 7 классов изменения этих параметров определяет нек-рый класс А. Однако такой выбор может претендовать на название «уточнения», лишь если имеется убеждение, что для произвольного А., имеющего допускаемые данным выбором совокупность возможных исходных данных и совокупность возможных результатов, может быть указан равносильный ему А. из определённого данным выбором класса А. Это убеждение формулируется для каждого уточнения в виде основной гипотезы, к-рая (при современном уровне наших представлений) не может быть предметом математич. доказательства.

Первые уточнения описанного типа предложили в 1936 Э. Пост и А. Тьюринг, их конструкции во многом предвосхитили идеи, заложенные в основу современных цифровых вычислительных машин (см. *Тьюринга машина*). Известны также уточнения, сформулированные А. А. Марковым (см. *Нормальный алгорифм*) и А. Н. Колмогоровым, к-рый предложил трактовать конструктивные объекты как топологич. комплексы определённого вида, что дало возможность уточнить свойство «локальности» преобразования. Для каждого из предложенных уточнений соответствующая основная гипотеза хорошо согласуется с практикой. В пользу этой гипотезы говорит и то, что (как можно доказать) все предложенные уточнения в нек-ром естественном смысле эквивалентны друг другу. *В. А. Успенский.*

АЛГОРИТМИ́ЧЕСКАЯ ЛО́ГИКА — то же, что *динамическая логика*.

АЛГОРИТМИ́ЧЕСКАЯ НЕРАЗРЕШИ́МОСТЬ — см. *Неразрешимость*.

АЛГОРИТМИ́ЧЕСКАЯ ПРОБЛЕ́МА — проблема, в которой требуется найти единый метод (*алгоритм*) для решения бесконечной серии однотипных единичных задач. Такие проблемы иногда наз. также массовыми проблемами. А. п. возникали и решались в различных областях математики на протяжении всей её истории; однако нек-рые из них долгое время не поддавались решению. Причина этого выяснилась лишь после того, как в 30-е гг. 20 в. в математич. логике было выработано точное определение понятия алгоритма. Оказалось, что А. п. могут быть неразрешимыми, т. е. искомые в них алгоритмы могут не существовать. Таким образом, представление об А. п. значительно изменилось: теперь уже новые А. п. стали формулировать как проблемы решения вопроса о существовании алгоритма для решения данной бесконечной серии однотипных задач и нахождения такого алгоритма в случае, если он существует.

Много А. п. возникает в алгебре и теории чисел, напр. такая: найти алгоритм для выяснения, имеются ли целые корни у данного алгебраич. уравнения:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с целыми коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Искомый алгоритм существует и основан на факте, что если такое уравнение имеет целый корень p, то p должно быть делителем числа a_n, и для данного уравнения можно найти все делители числа a_n и все по очереди проверить. Аналогичная проблема для уравнений $P(x_1, \ldots, x_m)=0$, где $P(x_1, \ldots, x_m)$—произвольный многочлен с целыми коэффициентами от любого числа m неизвестных, известная как 10-я проблема Гильберта, долгое время не поддавалась решению. Оказалось, что для этой и многих других А. п. требующееся в них построение алгоритма невозможно. Такие А. п. неразрешимы (при нек-ром точном понимании слова «алгоритм»).

Первые примеры неразрешимых А. п. были обнаружены в *алгоритмов теории*. Ниже рассмотрен один из них. Пусть выбрано нек-рое уточнение понятия алгоритма (машина Тьюринга, нормальный алгорифм и т. п.). Тогда все алгоритмы, предназначенные для вычисления числовых функций, можно закодировать натуральными числами. Пусть $\mathfrak{A}_i$ обозначает алгоритм с номером i, а φ_i — функцию, вычисляемую алгоритмом $\mathfrak{A}_i$. Требуется построить алгоритм, вычисляющий функцию f:

$$f(n)=\begin{cases}\varphi_n(n)+1, & \text{если алгоритм } \mathfrak{A}_n \text{ применим к числу } n;\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Эта проблема неразрешима. Действительно, если нек-рый алгоритм $\mathfrak{A}_m$ вычисляет функцию f, то есть $f=\varphi_m$, то $\varphi_m(m)=\varphi_m(m)+1$ (по определению функции f), что является противоречием. Приведённое здесь рассуждение может быть оформлено в виде строгого математич. доказательства для любого конкретного уточнения понятия алгоритма. Использованный здесь метод доказательства неразрешимости наз. диагональным методом. Это один из прямых методов установления неразрешимости А. п. Другой распространённый способ доказательства неразрешимости — *алгоритмическая сводимость*, с помощью к-рой доказана неразрешимость многих А. п., в том числе и 10-й проблемы Гильберта.

Доказательство того, что данная А. п. разрешима, т. е. что существует алгоритм с заданными свойствами, обычно состоит в явном построении такого алгоритма. Практич. интерес представляет поиск наиболее простого алгоритма, решающего данную А. п. Эта задача уточняется в терминах *сложности алгоритма*. В теории сложности алгоритмов и вычислений получены оценки сложности алгоритмов, решающих конкретные А. п.

● Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; Матиясевич Ю. В., «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 5, с. 185—222.

АЛГОРИТМИ́ЧЕСКАЯ СВОДИМОСТЬ — отношение между двумя *алгоритмическими проблемами*, состоящее в возможности получить решение одной проблемы по любому решению другой. Понятие А. с. возникло в связи с тем, что неразрешимость многих алгоритмич. проблем устанавливается путём сведения к ним известных неразрешимых алгоритмич. проблем. Сведение обычно состоит в следующем. С помощью нек-рого рассуждения показывают, что из любого алгоритма, требующегося в данной алгоритмич. проблеме, можно извлечь алгоритм, требующийся в другой проблеме. Если известно, что эта другая проблема неразрешима, то делают вывод о неразрешимости данной проблемы.

В теории алгоритмов интуитивное представление об А. с. получило уточнение в виде понятия тьюринговой сводимости, или T-сводимости. Применительно к проблемам разрешения T-сводимость, грубо говоря, состоит в следующем. Вводится понятие алгоритма с оракулом X, где X — нек-рое множество натуральных чисел. В отличие от обычного алгоритма, алгоритм с оракулом X на нек-рых шагах своей работы может задавать вопрос о принадлежности множеству X

натурального числа, алгоритмически определяемого предыдущими шагами процесса, задаваемого данным алгоритмом. От полученного ответа зависит очередной шаг алгоритмич. процесса. Множество A T-сводимо к множеству B, если существует алгоритм с оракулом B, к-рый всякое натуральное число из A перерабатывает в ответ «да», а всякое число из его дополнения — в ответ «нет». Отношение «A T-сводится к B» обозначается $A \leqslant_T B$. Это отношение рефлексивно и транзитивно. Всякое разрешимое множество T-сводится к любому другому множеству.

Пусть $A \equiv_T B$ означает, что $A \leqslant_T B$ и $B \leqslant_T A$. Отношение $\equiv_T$ является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности относительно $\equiv_T$ наз. степенями неразрешимости или T-степенями. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — две T-степени, то $\boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{b}$ означает, что $A \leqslant_T B$ для любых множеств $A \in \boldsymbol{a}$, $B \in \boldsymbol{b}$. Все разрешимые множества образуют одну T-степень, к-рая обозначается $\mathbf{0}$. Это — минимальная степень в упорядочении $\leqslant$. Степень неразрешимости наз. перечислимой, если она содержит хотя бы одно перечислимое множество. Среди перечислимых T-степеней существует максимальная — такая T-степень $\mathbf{0}'$, что $\boldsymbol{a} \leqslant \mathbf{0}'$ для любой перечислимой T-степени $\boldsymbol{a}$.

Неразрешимость многих алгоритмич. проблем, возникающих в математич. практике, удалось установить путём сведения к ним «эталонных» проблем разрешимости для множеств из $\mathbf{0}'$. В связи с этим возникает т. н. проблема сводимости Поста: все ли неразрешимые перечислимые множества T-сводимы друг к другу? Эта проблема получила отрицательное решение: были построены неразрешимые перечислимые множества, принадлежащие различным T-степеням. Вообще, множество всех перечислимых T-степеней бесконечно (счётно).

В теории алгоритмов рассматриваются отношения сводимости для проблем вычисления функций, перечисления множеств и др. Изучаются соответствующие степени вычислимости, перечислимости и т. д.

Установление А. с. алгоритмич. проблемы I к алгоритмич. проблеме II в случае, когда проблема II разрешима, позволяет получить алгоритм, требующийся в проблеме I. При этом в связи с вопросами сложности алгоритмов оказывается существенным понятие А. с. с ограниченной сложностью вычисления, определяемое заданием тех или иных ограничений на сложностные характеристики работы алгоритма с оракулом. Так, сводимость за полиномиальное время определяется путём задания полиномиального (от длины входа) ограничения на время работы алгоритма с оракулом. Многие множества из класса NP, возникшие из математич. практики, сводятся друг к другу за полиномиальное время, и к ним за полиномиальное время сводятся все множества из класса NP.

● Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж., Построение и анализ вычислительных алгоритмов, пер. с англ., М., 1979.

АЛГОРИТМИ́ЧЕСКАЯ ТЕО́РИЯ МНО́ЖЕСТВ — раздел теории *рекурсивных функций*, в котором рассматриваются и классифицируются подмножества натуральных чисел с алгоритмической точки зрения, а также исследуются структуры, возникающие в результате такой классификации. См. также *Алгоритмов теория*.

АЛГОРИТМИ́ЧЕСКИЙ ПРОЦЕ́СС — см. *Алгоритм*.

АЛГОРИТМИ́ЧЕСКИЙ ЯЗЫК — 1) синоним *программирования языка* в применении к языкам, в к-рых программа записывается в виде предписаний (команд, инструкций, операторов) выполнять последовательность элементарных действий (операций), однозначно определяемую перерабатываемой информацией. 2) Совокупность обозначений и правил записи, расширяющая общепринятую арифметико-алгебраич. символику и употребляемая в информатике и вычислительной технике для записи алгоритмов. Эта символика близка к изобразительным средствам таких языков, как *алгол*-60 и *паскаль*, и содержит средства для оформления заголовка алгоритма, указания его аргументов и результатов, описания используемых в нём величин, для записи простых команд (присваивание, вызов вспомогательного алгоритма) и составных команд (цикл, ветвление, выбор).

АЛГОРИ́ТМОВ АНА́ЛИЗ — раздел математической теории программирования, изучающий характеристики исполнения *алгоритмов*. Наиболее важные из этих характеристик — время и объём памяти, используемые алгоритмом. Пусть A — алгоритм решения задачи P для любых данных x из области D. Пусть $t_A(x)$ — время работы алгоритма A (количество элементарных тактов, выполняемых на нек-рой модели вычислительного устройства) на входных данных $x \in D$, $s_A(x)$ — объём памяти (количество ячеек), используемой алгоритмом A при обработке x, а $|x|$ — размер входных данных x, т. е. число, характеризующее их объём. Тогда функции от размера данных n

$$T_A(n) = \sup \{t_A(x):\ x \in D,\ |x| \leqslant n\},$$

$$S_A(n) = \sup \{s_A(x):\ x \in D,\ |x| \leqslant n\}$$

наз. соответственно временно́й и ёмкостной сложностями алгоритма A. Таким образом, временна́я и ёмкостная сложности оценивают время и объём памяти алгоритма в «худшем» случае. Если известно распределение вероятности $p(x)$ на входе x алгоритма A,

$$\sum\nolimits_{x \in D,\ |x| \leqslant n} p(x) = 1,$$

то функции

$$\sum\nolimits_{x \in D,\ |x| \leqslant n} p(x)\, t_A(x)$$

(средняя временна́я сложность) и

$$\sum\nolimits_{x \in D,\ |x| \leqslant n} p(x)\, s_A(x)$$

(средняя ёмкостная сложность) характеризуют (как функции от размера входа n) средние потребности алгоритма A во времени и памяти. Это — четыре наиболее важные из характеристик исполнения алгоритма, исследование к-рых является предметом А. а.

Главное применение А. а.— это выработка количественных критериев для сравнения алгоритмов, претендующих на решение одной и той же задачи.

Пусть для задачи P и функции натурального аргумента $f(n)$ выполнены следующие условия:

1) существует алгоритм A, решающий задачу P, с $T_A(n) = O(f(n))$;

2) для всякого алгоритма B, решающего задачу P, $T_B(n) = O(f(n))$. В таком случае порядок роста $f(n)$ как функции от n естественно назвать сложностью задачи P, а алгоритм A — оптимальным (по времени) алгоритмом решения задачи P. Аналогичные построения можно выполнить и для других характеристик алгоритмов. Выяснение сложности задачи и построение оптимального по заданной характеристике исполнения алгоритма решения задачи — это важная и, как правило, трудная математич. проблема, представляющая собой кульминацию А. а. решения этой задачи. В настоящее время (1987) такой полный анализ проведён только для небольшого числа задач. Наиболее трудным оказывается получение нетривиальных нижних оценок для сложности алгоритмов и задач.

При детальном А. а. необходимо использовать разнообразный математич. аппарат — от метода математич. индукции, результатов из теории графов и комбинаторики, теории вероятности и статистики до тонких теорем из математич. анализа.

● Кнут Д., Искусство программирования для ЭВМ, пер. с англ., т. 1—3, М., 1976—78; Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж., Построение и анализ вычислительных алгоритмов, пер. с англ., М., 1979.

АЛГОРИ́ТМОВ ТЕО́РИЯ — раздел математики, изучающий общие свойства *алгоритмов*. Алгоритмы прослеживаются в математике в течение всего времени её существования. Общее понятие алгоритма сформировалось однако

лишь в 20 в. и впервые появилось в трудах Э. Бореля (1912) и Г. Вейля (1921). Началом систематич. разработки А. т. можно считать 1936, когда А. Чёрч опубликовал первое уточнение понятия вычислимой функции и привёл первый пример функции, не являющейся вычислимой, а А. Тьюринг и Э. Пост дали первые уточнения понятия алгоритма (в терминах идеализированных вычислительных машин; см. *Тьюринга машина*). В дальнейшем А. т. получила развитие в трудах С. Клини, Э. Поста, А. А. Маркова, А. Н. Колмогорова и др. В частности, А. А. Марков предложил уточнять понятие алгоритма с помощью введённого им понятия *нормального алгорифма*. Наиболее общий подход к уточнению понятия алгоритма предложил А. Н. Колмогоров.

Основные понятия теории алгоритмов. Областью применимости алгоритма наз. совокупность тех объектов, к к-рым он применим, т. е. в применении к к-рым даёт результат. Про алгоритм $\mathfrak{A}$ говорят, что он: 1) «вычисляет функцию f», коль скоро его область применимости совпадает с областью определения f, и $\mathfrak{A}$ перерабатывает всякий x из своей области применимости в $f(x)$; 2) «разрешает множество A относительно множества X», коль скоро он применим ко всякому x из X, и перерабатывает всякий x из $X \cap A$ в слово «да», а всякий x из $X \setminus A$ — в слово «нет»; 3) «перечисляет множество B», коль скоро его область применимости есть натуральный ряд, а совокупность результатов есть B. Функция наз. вычислимой, если существует вычисляющий её алгоритм. Множество наз. разрешимым относительно X, если существует разрешающий его относительно X алгоритм. Множество наз. перечислимым, если либо оно пусто, либо существует перечисляющий его алгоритм.

Детальный анализ понятия «алгоритм» обнаруживает, что (I) область возможных исходных данных и область применимости любого алгоритма суть перечислимые множества. В свою очередь, (II) для любой пары вложенных одно в другое перечислимых множеств можно подобрать алгоритм, у к-рого большее множество служит областью возможных исходных данных, а меньшее — областью применимости. Имеют место следующие основные теоремы: (III) функция f вычислима тогда и только тогда, когда перечислим её график, т. е. множество всех пар вида $\langle x, f(x)\rangle$. (IV) Подмножество A перечислимого множества X тогда и только тогда разрешимо относительно X, когда A и $X \setminus A$ перечислимы. (V) Если A и B перечислимы, то $A \cup B$ и $A \cap B$ также перечислимы. (VI) В каждом бесконечном перечислимом множестве X существует перечислимое подмножество с неперечислимым дополнением [в силу (IV) это перечислимое подмножество будет неразрешимым относительно X]. (VII) Для каждого бесконечного перечислимого множества X существует вычислимая функция, определённая на подмножестве этого множества и не продолжаемая до вычислимой функции, определённой на всём X. Утверждения (VI) и (II) в совокупности дают пример алгоритма с неразрешимой областью применимости.

Разрешимые и перечислимые множества составляют простейшие (и наиболее важные) примеры множеств, строение к-рых задаётся с помощью тех или иных алгоритмич. процедур. Систематич. изучение множеств конструктивных объектов с точки зрения таких свойств этих множеств, к-рые связаны с наличием тех или иных алгоритмов, образует т. н. алгоритмическую теорию множеств.

А. т. можно разделить на дескриптивную (качественную) и метрическую (количественную). Первая исследует алгоритмы с точки зрения устанавливаемого ими соответствия между исходными данными и результатами; к ней относятся, в частности, проблемы построения алгоритма, обладающего теми или иными свойствами,— *алгоритмические проблемы*. Вторая исследует алгоритмы с точки зрения сложности как самих алгоритмов, так и задаваемых ими вычислений, т. е. процессов последовательного преобразования конструктивных объектов (см. *Сложность алгоритма*). Важно подчеркнуть, что как сложность алгоритмов, так и сложность вычислений могут определяться различными способами. Разработка методов оценки сложности алгоритмов и вычислений имеет важное теоретич. и практич. значение.

Приложения теории алгоритмов имеются во всех областях математики, в к-рых встречаются алгоритмич. проблемы. Такие проблемы возникают практически во всех разделах математики. В математич. логике для каждой теории формулируется проблема разрешения множества всех истинных или доказуемых предложений этой теории относительно множества всех её предложений (теории подразделяются на разрешимые и неразрешимые в зависимости от разрешимости или неразрешимости указанной проблемы); в 1936 А. Чёрч установил неразрешимость проблемы разрешения для множества всех истинных предложений логики предикатов, дальнейшие важные результаты в этом направлении принадлежат А. Тарскому, А. И. Мальцеву и др. Неразрешимые алгоритмич. проблемы встречаются в алгебре (проблема тождества для полугрупп и, в частности, для групп; первые примеры полугрупп с неразрешимой проблемой тождества были найдены в 1947 независимо А. А. Марковым и Э. Постом, а пример группы с неразрешимой проблемой тождества — в 1952 П. С. Новиковым); в топологии (проблема гомеоморфии, неразрешимость к-рой для важного класса случаев была доказана в 1958 А. А. Марковым); в теории чисел (проблема разрешимости диофантовых уравнений, неразрешимость к-рой была установлена в 1970 Ю. В. Матиясевичем) и в др. разделах математики.

А. т. тесно связана: 1) с математич. логикой, поскольку в терминах алгоритмов может быть изложено одно из центральных понятий математич. логики — понятие *исчисления* (и потому, напр., *Гёделя теорема о неполноте* формальных систем может быть получена как следствие теорем А. т.); 2) с основаниями математики, в к-рых одно из центральных мест занимает проблема соотношения конструктивного и неконструктивного (в частности, А. т. даёт аппарат, необходимый для разработки конструктивного направления в математике); в 1965 А. Н. Колмогоров предложил использовать А. т. для обоснования теории информации; 3) с кибернетикой, в к-рой важное место занимает изучение алгоритмов управления. А. т. образует теоретич. фундамент для ряда вопросов вычислительной математики.

● Вейль Г., О философии математики, пер. с нем., М.— Л., 1934; Марков А. А., Нагорный Н. М., Теория алгорифмов, М., 1984; Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972; Успенский В. А., Машина Поста, М., 1979; его же, Теорема Гедела о неполноте, М., 1982; Проблемы математической логики. Сложность алгоритмов и классы вычислимых функций. Сб. переводов, М., 1970; Колмогоров А. Н., «Проблемы передачи информации», 1965, т. 1, № 1, с. 3—11; Алгоритмы в современной математике и её приложениях, ч. 1—2, Новосиб., 1982; Успенский В. А., Семенов А. Л., «Квант», 1985, № 7, с. 9—15.

В. А. Успенский.

АЛГОРИ́ФМ — то же, что *алгоритм*.

АЛЕКСА́НДРОВА ТЕОРЕ́МА о компактификации — доказанная П. С. Александровым (1924) теорема о том, что локально компактное пространство может быть дополнено единственной («бесконечно удалённой») точкой до *компактного пространства*.

АЛЕКСА́НДРОВА ТЕОРЕ́МА о многогранниках — доказанная А. Д. Александровым (1939) теорема существования и единственности выпуклого *многогранника* с заданной развёрткой.

А́ЛЕФ-НУЛЬ — *кардинальное число*, являющееся мощностью счётного множества; обозначается $\aleph_0$.

А́ЛЕФЫ, $\aleph$ (первая буква древнееврейского алфавита),— символы, введённые Г. Кантором для обозначения *кардинальных чисел* (мощностей) бесконечных вполне упорядоченных множеств. Каждое кардинальное число есть нек-рый А. Для каждого порядкового числа α через $\aleph_\alpha = w(\omega_\alpha)$ обозначается мощность множества всех порядковых

чисел, меньших ω_α. В частности, $\aleph_0$ есть мощность множества всех натуральных чисел, $\aleph_1$ — мощность множества всех счётных порядковых чисел и т. д. Если $\alpha<\beta$, то $\aleph_\alpha<\aleph_\beta$. Кардинальное число $\aleph_{\alpha+1}$ является наименьшим, следующим за $\aleph_\alpha$.

АЛИКВО́ТНАЯ ДРО́БЬ [лат. aliquot — несколько, от alius — другой (из многих) и позднелат. quota — доля, часть] — дробь вида $1/n$, где n — натуральное число. Для решения ряда математич. и физич. задач существенно, что каждое положительное рациональное число представимо в виде суммы конечного числа А. д. с различными знаменателями. Так, $\frac{3}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{66}$. А. д. широко использовались в Древнем Египте и получили впоследствии назв. египетских дробей.

АЛФАВИ́Т [греч. ἀλφάβητος, от назв. двух первых букв греч. А.— ἄλφα (альфа) и βῆτα (бета, новогреч. вита) — 1) список (конечное множество) символов, называемых буквами. Обычно в А. объединяются буквы, необходимые для развития той или иной символики (или, как иногда говорят, языка). Для двух А. A и B естественным образом определяются их объединение $A\cup B$, пересечение $A\cap B$ и разность $A\setminus B$, а также отношение включения $A\subset B$. В целях удобства иногда допускают к рассмотрению и пустой А., то есть А., не содержащий ни одной буквы.

2) А.— понятие теории информации; см. *Код*.

3) А. состояний — состояния *автомата* в каждый из моментов дискретного времени.

АЛЬТЕРНАТИ́ВА (франц. alternative, от лат. alter — один из двух) в теории игр — одна из позиций, в которую, согласно правилам игры, можно перейти из данной позиции за один ход. А. наз. также соответствующий ход или приписанный ему индекс. См. также *Многокритериальная оптимизация*.

АЛЬТЕРНАТИ́ВНАЯ А́ЛГЕБРА — см. *Альтернативное кольцо*.

АЛЬТЕРНАТИ́ВНОЕ КОЛЬЦО́ — кольцо, в котором каждые два элемента порождают ассоциативное подкольцо. Аналогично определяется альтернативная алгебра. Все А. к. образуют многообразие, задаваемое системой тождеств: $(xy)y=x(yy)$ — правая альтернативность, $(xx)y=x(xy)$ — левая альтернативность. Термин «А. к.» оправдан тем, что в любом таком кольце ассоциатор

$$(x,\ y,\ z)=(xy)\,z-x\,(yz)$$

является кососимметрической (альтернативной) функцией своих аргументов.

Первым примером неассоциативного А. к. явились *Кэли числа*, дающие пример альтернативного тела, то есть А. к. с единицей, в к-ром однозначно разрешимы уравнения $ax=b$ и $ya=b$ для всех b и всех $a\neq0$. Альтернативные тела играют существенную роль в теории проективных плоскостей.

АЛЬТЕРНАТИ́ВНОЕ ТЕ́ЛО — см. *Альтернативное кольцо*.

А́ЛЬФА — *программирования язык*, представляющий собой расширение языка *алгол*-60 и позволяющий, напр., обрабатывать многомерные и комплексные величины. Разработан в сер. 60-х гг. (в СССР). Использует русскую лексику. Позволяет осуществить стандартные операции над векторами и матрицами. А. содержит класс процедур-функций, способ вычисления к-рых задаётся выражением. В языке допускается принятая в математике символика: указывать перечисление целых чисел многоточием, употреблять знаки суммирования и произведения, а также цепочки неравенств.

● Транслятор АЛЬФА-6 в системе Дубна, М., 1979.

АНА́ЛИЗА ЗАДА́ЧА (от греч. ἀνάλυσις — разложение, расчленение) в теории автоматов — задача описания поведения заданного автомата или его свойств. См. *Автоматов теория*.

АНАЛИТИ́ЧЕСКАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ — раздел геометрии, в котором простейшие геометрические образы (прямые, плоскости, линии и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры на основе метода *координат*.

Возникновение метода координат связано с развитием астрономии, механики и техники в 17 в. Отчётливое и исчерпывающее изложение этого метода и основ А. г. было сделано Р. Декартом в его «Геометрии» (1637). Основные идеи метода были известны также его современнику П. Ферма (1629). Дальнейшая разработка А. г. связана с трудами Г. Лейбница и И. Ньютона и особенно Л. Эйлера. Средствами А. г. пользовался Ж. Лагранж при построении аналитич. механики и Г. Монж в дифференциальной геометрии. Долгое время для А. г. было принято назв. «декартова геометрия», к-рое ввёл И. Бернулли (1692). Термин «аналитический» исходит от Ф. Виета (1591), применительно к геометрии он впервые употреблён И. Ньютоном (1671, опубл. 1736).

Сущность метода координат заключается в следующем. Пусть на плоскости π заданы две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy (рис. 1). Эти прямые с указанием на них направления, начала координат O и масштабной единицы e образуют т. н. декартову систему координат Oxy на плоскости. Прямые Ox и Oy наз. соответственно осью абсцисс и осью ординат. Положение любой точки M на плоскости по отношению к этой системе Oxy можно определить следующим образом. Пусть M_x и M_y — проекции M на Ox и Oy, а числа x и y — величины отрезков OM_x и OM_y (величина x отрезка OM_x, напр., равна длине этого отрезка, взятой со знаком плюс, если направление от O к M_x совпадает с направлением на прямой Ox, и со знаком минус в противоположном случае). Числа x и y наз. декартовыми прямоугольными координатами (или, короче, прямоугольными координатами) точки M в системе Oxy. Обычно они наз. соответственно абсциссой и ординатой точки M. Для обозначения точки M с абсциссой x и ординатой y пользуются символом $M(x, y)$. Координаты точки M определяют её положение относительно системы Oxy.

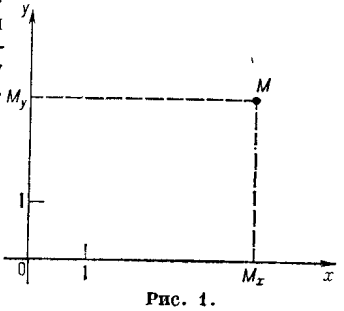


Рис. 1.

Пусть на плоскости π с данной прямоугольной системой координат Oxy задана нек-рая линия L. Используя понятие координат точек, можно ввести понятие уравнения линии L относительно системы Oxy как соотношения вида $F(x, y)=0$, к-рому удовлетворяют координаты x и y любой точки M, расположенной на L, и не удовлетворяют координаты каждой точки, не лежащей на L. Если, напр., линия L является окружностью радиуса R с центром в начале координат O, то уравнение $x^2+y^2-R^2=0$ будет уравнением рассматриваемой окружности (рис. 2). Если точка M лежит на окружности, то по теореме Пифагора для треугольника OMM_x получается $x^2+y^2-R^2=0$. Если же точка не лежит на окружности, то, очевидно, $x^2+y^2-R^2\neq0$. Итак, линии L на плоскости можно сопоставить её уравнение $F(x, y)=0$ относительно системы координат Oxy.

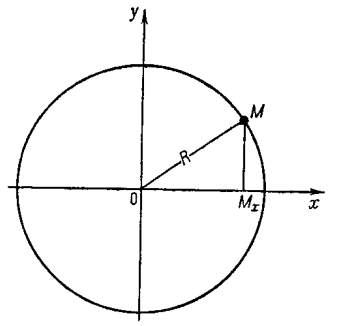


Рис. 2.

Основная идея метода координат на плоскости состоит в том, что геометрич. свойства линии L выясняются путём изучения аналитич. и алгебраич. средствами свойств урав-

нения $F(x, y)=0$ этой линии. Напр., для выяснения числа точек пересечения окружности c радиуса R и данной прямой линии b (рис. 3) метод координат применяется следующим образом. Пусть начало системы координат Oxy находится в центре окружности, а ось Ox направлена перпендикулярно прямой b. Так как прямая b перпендикулярна оси Ox, то абсцисса любой точки этой прямой равна нек-рой постоянной a. Таким образом, уравнение прямой имеет вид $x-a=0$. Координаты (x, y) — точки пересечения окружности c (уравнение к-рой имеет вид $x^2+y^2-R^2=0$) и прямой b удовлетворяют одновременно уравнениям

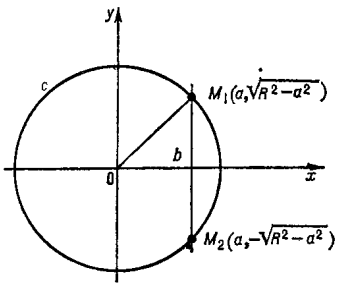


Рис. 3.

$$x^2+y^2-R^2=0,\ x-a=0, \qquad (*)$$

т. е. являются решениями системы. Следовательно, геометрич. вопрос о числе точек пересечения прямой и окружности сводится к аналитич. вопросу о числе решений алгебраич. системы (*). Решая эту систему, получают $x=a$, $y=\pm\sqrt{R^2-a^2}$. Итак, окружность и прямая могут пересекаться в двух точках (при $R^2>a^2$) (этот случай изображён на рис. 3), могут иметь одну общую точку (при $R^2=a^2$) (в этом случае прямая b касается окружности c) и не иметь общих точек (при $R^2<a^2$) (в этом случае прямая b лежит вне окружности c).

В А. г. на плоскости систематически исследуются т. н. алгебраич. линии первого и второго порядков; эти линии в прямоугольных координатах определяются соответственно алгебраич. уравнениями 1-й и 2-й степеней. Линии первого порядка суть прямые, и обратно, каждая прямая определяется алгебраич. уравнением 1-й степени

$$Ax+By+C=0$$

(см. *Прямая линия*). *Линии второго порядка* определяются уравнениями вида

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

Основной метод исследования и классификации этих линий заключается в подборе такой прямоугольной системы координат, в к-рой уравнение линии имеет наиболее простой вид, и в последующем исследовании этого уравнения. См. также *Гипербола*, *Парабола*, *Эллипс*, *Коническое сечение*.

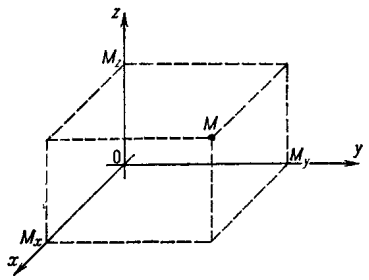


Рис. 4.

В пространстве прямоугольные координаты x, y и z (абсцисса, ордината и аппликата) точки M вводятся в полной аналогии с плоским случаем (рис. 4). Каждой поверхности S в пространстве можно сопоставить её уравнение $F(x, y, z)=0$ относительно системы координат $Oxyz$ (так, напр., уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат имеет вид $x^2+y^2+z^2-R^2=0$). При этом геометрич. свойства поверхности S выясняются путём изучения аналитич. и алгебраич. средствами свойств уравнения этой поверхности. Линию L в пространстве задают как линию пересечения двух поверхностей S_1 и S_2. Если $F_1(x, y, z)=0$ и $F_2(x, y, z)=0$ — уравнения S_1 и S_2, то пара этих уравнений, рассматриваемая совместно, представляет собой уравнение линии L. Напр., прямую L в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей. Так как плоскость в пространстве определяется уравнением вида

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

то пара уравнений такого вида, рассматриваемая совместно, представляет собой уравнения прямой L. Таким образом, метод координат может применяться и для исследования линий в пространстве. В А. г. в пространстве систематически исследуются т. н. алгебраич. поверхности первого и второго порядков. Алгебраич. поверхностями первого порядка являются лишь *плоскости*. *Поверхности второго порядка* определяются уравнениями вида

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Mz+N=0.$$

Основной метод исследования и классификации этих поверхностей заключается в подборе такой прямоугольной системы координат, в к-рой уравнение поверхности имеет наиболее простой вид, и последующем исследовании этого уравнения. См. также *Гиперболоид*, *Параболоид*, *Эллипсоид*.

А. г. эффективно использует векторную алгебру. Естественное обобщение А. г. на случай n-мерных *векторных пространств* составляет особый раздел математики — *линейную алгебру*.

● Александров П. С., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., 1979; Ефимов Н. В., Краткий курс аналитической геометрии, 9 изд., М., 1967; Ильин В. А., Позняк Э. Г., Аналитическая геометрия, 3 изд., М., 1981; Погорелов А. В., Аналитическая геометрия, 4 изд., М., 1978; Постников М. М., Аналитическая геометрия, М., 1979.

АНАЛИТИ́ЧЕСКАЯ МОДЕ́ЛЬ ЯЗЫКА́ — см. *Математическая лингвистика*.

АНАЛИТИ́ЧЕСКАЯ ТЕО́РИЯ ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНЫХ УРАВНЕ́НИЙ — раздел теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в котором решения исследуются с точки зрения теории аналитических функций.

АНАЛИТИ́ЧЕСКАЯ ТЕО́РИЯ ЧИ́СЕЛ — раздел теории чисел. В А. т. ч. включают вопросы распределения *простых чисел*, аддитивные проблемы (см. *Аддитивная теория чисел*), теорию *алгебраических чисел* и *трансцендентных чисел*.

● Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2 изд., М., 1980; Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952; Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, 2 изд., М., 1983.

АНАЛИТИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ, голоморфная функция,— функция, которая может быть представлена степенным рядом. Исключительная важность класса А. ф. определяется следующим. Во-первых, этот класс достаточно широк: он охватывает большинство функций, встречающихся в основных вопросах математики и её приложений к естествознанию и технике. Во-вторых, класс А. ф. замкнут относительно основных операций арифметики, алгебры и анализа: применение арифметич. действий к функциям этого класса, решение алгебраич. уравнений с аналитич. коэффициентами, дифференцирование и интегрирование А. ф. приводят снова к А. ф. Наконец, А. ф. обладают важным свойством единственности: каждая А. ф. образует одно «органически связанное целое», представляет собой «единую» функцию во всей своей естественной области существования. Это свойство, к-рое в 18 в. считалось неотделимым от самого понятия функции, приобрело принципиальное значение после установления (в 1-й пол. 19 в.) общей точки зрения на функцию как на произвольное соответствие.

Теория А. ф. была создана в 19 в. в первую очередь благодаря работам О. Коши, Б. Римана и К. Вейерштрасса. Решающее значение в построении этой теории сыграл «выход в комплексную область» — переход от действительного переменного x к комплексному переменному z. Теория А. ф. возникла как теория функций комплексного переменного; и в настоящее время (80-е гг. 20 в.) теория А. ф. составляет основное содержание общей теории функций комплексного переменного.

Существуют различные подходы к понятию аналитичности. В основе одного из них, впервые развитого О. Коши и далеко продвинутого Б. Риманом, лежит структур-

ное свойство функции — существование производной по комплексному переменному. Этот подход тесно связан с геометрическими представлениями. Другой подход, систематически развивавшийся К. Вейерштрассом, основывается на возможности представления функций степенными рядами; он связан, тем самым, с аналитическим аппаратом, к-рым может быть изображена функция. Основной факт теории А. ф. заключается в тождественности соответствующих классов функций, рассматриваемых в произвольной области комплексной плоскости.

Дифференцируемость. Комплексное число $z=x+iy$, где x и y — действительные числа, изображается точкой комплексной плоскости с координатами x и y. Пусть D — область (открытое связное множество) комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Если каждой точке $z\in D$ поставлено в соответствие нек-рое комплексное число w, то говорят, что в области D определена (однозначная) функция f комплексного переменного z, и пишут $w=f(z)$, $z\in D$. Функция $w=f(z)=f(x+iy)$ может рассматриваться как комплексная функция двух действительных переменных x и y, определённая в области $D\subset\mathbb{R}^2$. Задание такой функции равносильно заданию двух действительных функций

$$u=u(x,\ y),\ v=v(x,\ y),\ (x,\ y)\in D\quad (w=u+iv).$$

Зафиксировав точку $z\in D$, придают z приращение $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ (так, что $z+\Delta z\in D$) и рассматривают соответствующее приращение функции f:

$$\Delta f(z)=f(z+\Delta z)-f(z).$$

Если $\Delta f(z)=A\Delta z+o(\Delta z)$ при $\Delta z\to 0$ или, что то же самое, если существует предел

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=A,$$

то функция f наз. дифференцируемой (в смысле комплексного анализа, или в смысле $\mathbb{C}$) в точке z; $A=f'(z)$ — производная функции f в точке z, а

$$A\Delta z=f'(z)\,dz=df(z)$$

— её дифференциал в этой точке. Функция f, дифференцируемая в каждой точке области D, наз. дифференцируемой в области D.

Сравним понятия дифференцируемости функции f как функции двух действительных переменных (в смысле $\mathbb{R}^2$) и в смысле $\mathbb{C}$. В первом случае дифференциал df имеет вид

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy,$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+i\,\frac{\partial v}{\partial y}$$

— частные производные функции f по действительным переменным x и y. Переходя от действительных переменных x, y к сопряжённым комплексным переменным z, $\bar z$, к-рые формально можно считать новыми независимыми переменными, связанными со старыми соотношениями $z=x+iy$, $\bar z=x-iy$ (функцию f иногда записывают в виде $f(z,\bar z)$, и выражая dx и dy через dz и $d\bar z$ по обычным правилам вычисления дифференциалов, получают запись df в комплексной форме:

$$df=\frac{\partial f}{\partial z}\,dz+\frac{\partial f}{\partial \bar z}\,d\bar z,$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

— (формальные) производные функции f по z и $\bar z$ соответственно. Дифференцируемость функции f в смысле $\mathbb{C}$ имеет место в том и только в том случае, когда она дифференцируема в смысле $\mathbb{R}^2$ и справедливо равенство $\partial f/\partial\bar z=0$, к-рое в развёрнутой форме можно переписать так:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если функция f дифференцируема в смысле $\mathbb{C}$ в области D, то последние соотношения справедливы в каждой точке этой области; они наз. уравнениями Коши — Римана.

Равенство $\partial f/\partial\bar z=0$, иногда наз. условием (комплексной) дифференцируемости, показывает, что дифференцируемыми в смысле $\mathbb{C}$ являются те и только те функции f, к-рые (рассматриваемые формально как функции независимых переменных z и $\bar z$) «зависят только от z», т. е. являются «функциями комплексного переменного z».

Аналитичность. Определение А. ф., данное в начале статьи, уточняется так:

1) функция f, определённая в области D, наз. голоморфной (аналитической) в точке $z_0\in D$, если существует окрестность этой точки, в к-рой функция f представляется степенным рядом

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots.$$

Если это свойство имеет место в каждой точке z_0 области D, то функция f наз. голоморфной (аналитической) в области D.

Функция f, голоморфная в точке $z_0\in D$, дифференцируема в этой точке. Более того, сумма сходящегося степенного ряда имеет производные всех порядков (бесконечно дифференцируема) по комплексному переменному z; коэффициенты ряда могут быть выражены через производные функции f в точке z_0 по формулам

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Степенной ряд, записанный в форме

$$f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\ldots,$$

наз. рядом Тейлора функции f в точке z_0. Тем самым голоморфность функции f в области D означает, что в каждой точке области D функция f бесконечно дифференцируема и её ряд Тейлора сходится к ней в нек-рой окрестности этой точки.

2) С другой стороны, в теории А. ф. устанавливается следующий замечательный факт: функция f, дифференцируемая в области D, голоморфна в этой области (в отдельной точке это утверждение неверно: $f(z)=|z|^2=z\bar z$ дифференцируема в точке $z_0=0$, но нигде не голоморфна). Следовательно, понятия комплексной дифференцируемости и голоморфности функции в области тождественны; каждое из следующих свойств функции f в области D — дифференцируемость в смысле $\mathbb{C}$, дифференцируемость в смысле $\mathbb{R}^2$ вместе с выполнением уравнений Коши — Римана, голоморфность — может служить определением аналитичности f в этой области.

Приведённые определения отражают две концепции в построении теории А. ф. Функция, удовлетворяющая условию 1), наз. голоморфной в смысле Вейерштрасса, условию 2) — в смысле Коши — Римана.

Если E — произвольное множество (в комплексной плоскости и, в частности, на действительной прямой), то функция $f(z)$ наз. аналитической в точке $z_0\in E$, если существует окрестность этой точки, на пересечении к-рой с множеством E функция f представляется сходящимся степенным рядом. Функция f наз. аналитической на множестве E, если она аналитична на нек-ром открытом множестве, содержащем E (точнее, если существуют открытое множество, содержащее E, и аналитическая на нём функция F, совпадающая с f на

множестве E). Для открытых множеств понятие аналитичности совпадает с понятием дифференцируемости по множеству. Однако в общем случае это не так; в частности, на действительной прямой существуют функции, не только имеющие производную, но и бесконечно дифференцируемые в каждой точке, к-рые не являются аналитическими ни в какой точке прямой.

Интеграл от функции $f=u+iv$ вдоль (ориентированной спрямляемой) кривой Γ: $z=z(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, может быть определён формулой

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f[z(t)]\,z'(t)\,dt$$

или при помощи криволинейного интеграла

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=\int_\Gamma f\,dx+if\,dy=$$
$$=\int_\Gamma u\,dx-v\,dy+i\int_\Gamma v\,dx+u\,dy.$$

Центральное место в теории А. ф. занимает следующая интегральная теорема Коши: если f — А. ф. в области D, то $\int_\gamma f(z)dz=0$ для любой замкнутой кривой $\gamma\subset D$, ограничивающей область, принадлежащую D. Верно и обратное заключение (теорема Мореры): если f непрерывна в области D и $\int_\gamma f(z)dz=0$ для любой такой кривой γ, то f — А. ф. в области D. В частности, в односвязной области аналитическими являются те и только те непрерывные функции f, для к-рых интеграл по любой замкнутой кривой $\gamma\subset D$ равен нулю (или, что то же самое, интеграл по любой кривой Γ, соединяющей произвольные точки z_1, $z_2\in D$, зависит только от точек z_1 и z_2 и не зависит от формы этой кривой). Эта характеристика А. ф. лежит в основе многих их приложений.

Интегральная теорема Коши позволяет получить интегральную формулу Коши, выражающую значения А. ф. внутри области через её значения на границе этой области:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z},\quad z\in D;$$

здесь D — область, граница к-рой γ — простая замкнутая спрямляемая кривая (ориентация γ предполагается положительной относительно области D), f — функция, аналитическая в замкнутой области $D\cup\gamma$. Эта формула позволяет, в частности, свести изучение многих вопросов, связанных с А. ф., к соответствующим вопросам для простейшей функции — ядра Коши $\frac{1}{\zeta-z}$, $\zeta\in\gamma$.

Теорема единственности: две функции, аналитические в области D и совпадающие на к.-л. множестве, имеющем предельную точку в D, совпадают и во всей области D (тождественны). В частности, А. ф. $f(z)$, $z\in D$, отличная от тождественного нуля, может иметь в области D лишь изолированные нули. Если при этом z_0 — нуль функции f, то $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$ в нек-рой окрестности $U(z_0)$ точки z_0, где $m\geqslant 1$ — натуральное число (наз. порядком или кратностью нуля функции f в z_0), а $g(z)$ — А. ф. в $U(z_0)$, отличная от нуля.

Особые точки А. ф.— точки, в к-рых нарушается свойство аналитичности; они играют важную роль в изучении А. ф. Здесь рассматриваются изолированные *особые точки* (однозначных) А. ф. Если f — А. ф. в кольце вида $0<|z-z_0|<R$, то она разлагается в этой области в ряд Лорана:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

содержащий, вообще говоря, не только положительные, но и отрицательные степени $z-z_0$. Если в этом разложении члены с отрицательными степенями отсутствуют ($a_n=0$ для $n=-1, -2, \ldots$), то z_0 наз. правильной точкой f (устранимой особой точкой). В правильной точке существует и конечен предел

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=a_0;$$

полагая $f(z_0)=a_0$, получают А. ф. во всём круге $|z-z_0|<R$.

Сумма членов ряда Лорана функции f в точке z_0, соответствующая отрицательным индексам n:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n,$$

наз. главной частью ряда Лорана (или функции f) в точке z_0. Именно главная часть определяет характер особенности функции f в точке z_0. Если ряд Лорана функции f содержит лишь конечное число членов с отрицательными степенями $z-z_0$:

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\quad m>0,\ a_m\neq 0,$$

то точка z_0 наз. полюсом функции f порядка или кратности m; полюс z_0 характеризуется тем, что

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty.$$

Функция f имеет в точке z_0 полюс порядка m тогда и только тогда, когда функция $1/f$ имеет в этой точке нуль порядка m. В случае когда ряд Лорана содержит бесконечное число отрицательных степеней $z-z_0$ ($a_n\neq 0$ для бесконечного множества отрицательных индексов n), точка z_0 наз. существенно особой точкой; в таких точках не существует ни конечного, ни бесконечного предела функции f. Коэффициент a_{-1} разложения функции f в ряд Лорана с центром в изолированной особой точке z_0 наз. *вычетом* функции f в точке z_0:

$$a_{-1}=\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z).$$

Целые функции. Мероморфные функции. Простейший класс А. ф. составляют функции, голоморфные во всей плоскости, т. е. не имеющие конечных особых точек; такие функции наз. *целыми функциями*. Целые функции представимы рядами

$$a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

сходящимися во всей плоскости. К ним относятся многочлены от z, функции

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots,$$
$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,$$
$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

Теорема Вейерштрасса утверждает, что какова бы ни была последовательность комплексных чисел α_n, $n=1, 2, \ldots$, не имеющая предельных точек в $\mathbb{C}$, существует целая функция F, обращающаяся в нуль в точках α_n и только в этих точках (среди точек α_n могут быть совпадающие; им отвечает нуль функции F соответствующей кратности). При этом функция F может быть представлена в виде (вообще говоря, бесконечного) произведения целых функций, каждая из к-рых имеет только по одному нулю.

Функции, представимые в виде отношения двух функций, голоморфных в области D, наз. *мероморфными функциями* в области D. Мероморфная в области D функция голоморфна в этой области за исключением, быть может, конечного или счётного множества полюсов; в полюсах значения мероморфной функции считаются равными бесконечности. Если допустить такие значения, то мероморфные в области D функции могут быть определены как функции, к-рые в окрестности каждой точки $z_0\in D$ представимы рядом по степеням $z-z_0$, содержащим конечное

(зависящее от z_0) число членов с отрицательными степенями $z - z_0$.

Часто аналитическими в области D наз. как голоморфные, так и мероморфные в этой области функции. В этом случае голоморфные функции наз. также регулярными аналитическими или просто регулярными.

Функции, мероморфные по всей плоскости (т. е. представимые в виде отношения целых функций), наз. мероморфными функциями. Таковыми являются рациональные функции, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, эллиптические функции и др.

Согласно теореме Миттаг-Леффлера, для любой последовательности $\beta_n \in \mathbb{C}$, $n=1, 2, \ldots$, не имеющей предельных точек в $\mathbb{C}$, существует мероморфная функция G с полюсами в точках β_n (и только в этих точках), главные части к-рой в точках β_n совпадают с заранее заданными многочленами от $\frac{1}{z-\beta_n}$. При этом функция G может быть представлена в виде (вообще говоря, бесконечной) суммы мероморфных функций, каждая из к-рых имеет полюс только в одной точке.

Теоремы о существовании голоморфной функции с заданными нулями и мероморфных функций с заданными полюсами и главными частями справедливы и для произвольной области $D \subset \mathbb{C}$.

Конформное отображение. Гармонические функции. Важное значение для изучения А. ф. имеют связанные с ними геометрич. представления. Функцию $w=f(z)$, $z \in D$, можно рассматривать как отображение области D комплексной плоскости z в комплексную плоскость w. Если f есть А. ф., то образ $f(D)$ области D также является областью (принцип сохранения области). Из условия комплексной дифференцируемости функции f в точке $z_0 \in D$ следует, что при $f'(z_0) \neq 0$ отображение f сохраняет углы в z_0 как по абсолютному значению, так и по знаку, т. е. является конформным. Таким образом, существует тесная связь между аналитичностью и важным геометрич. понятием *конформного отображения*. Если f — А. ф. в D и $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$ (такие функции наз. однолистными), то $f'(z) \neq 0$ в D и f определяет взаимно однозначное и конформное отображение области D на область $f(D)$. Теорема Римана (основная теорема теории конформных отображений) утверждает, что в любой односвязной области, граница к-рой содержит более одной точки, существуют однолистные А. ф., конформно отображающие эту область на круг или полуплоскость.

Действительная и мнимая части функции $f=u+iv$, голоморфной в области D, удовлетворяют в этой области уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

т. е. являются *гармоническими функциями*. Две гармонич. функции, связанные между собой уравнениями Коши — Римана, наз. сопряжёнными. В односвязной области любая гармонич. функция u имеет сопряжённую функцию v и является тем самым действительной частью нек-рой голоморфной в D функции f.

Связи с конформными отображениями и гармонич. функциями лежат в основе многих приложений теории А. ф.

Аналитическое продолжение. Всё сказанное выше относилось к однозначным А. ф. f, рассматриваемым в данной области D (или на данном множестве E) комплексной плоскости. Задаваясь вопросом о возможности продолжения функции f (как А. ф.) в бо́льшую область, приходят к понятию А. ф., рассматриваемой в целом, т. е. во всей своей естественной области существования. При таком продолжении данной функции область её аналитичности, расширяясь, может налагаться на себя, доставляя новые значения функции в точках плоскости, где она уже была определена. Поэтому А. ф., рассматриваемая в целом, вообще говоря, оказывается многозначной. К необходимости изучения многозначных А. ф. приводят многие вопросы анализа (обращение функций, нахождение первообразных и построение А. ф. с заданной действительной частью в многосвязных областях, решение алгебраич. уравнений с аналитич. коэффициентами и др.). Многозначными являются такие функции, как $\sqrt[n]{z}$, z^a, $\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Arc\,sin} z$, $\operatorname{Arc\,tg} z$, алгебраич. функции и т. д.

Регулярный процесс, приводящий к полной А. ф., рассматриваемой в своей естественной области существования, был указан К. Вейерштрассом; он носит название *аналитического продолжения* по Вейерштрассу.

Исходным является понятие элемента А. ф.— степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости. Совокупность всех элементов, которые могут быть получены аналитич. продолжением элемента W_0, образует полную А. ф. (в смысле Вейерштрасса), порождённую элементом W_0; объединение их кругов сходимости представляет собой (вейерштрассову) область существования этой функции. Из теоремы единственности А. ф. следует, что А. ф. в смысле Вейерштрасса полностью определяется заданием элемента W_0. При этом в качестве исходного может быть взят любой другой элемент, принадлежащий этой функции; полная А. ф. от этого не изменится.

Риманова поверхность. Полная А. ф. f, рассматриваемая как функция точек плоскости, принадлежащих её области существования D, вообще говоря, является многозначной. Чтобы избавиться от многозначности, функцию f рассматривают не как функцию точек плоской области D, а как функцию точек нек-рой (лежащей над областью D) многолистной поверхности R такой, что каждой точке области D соответствует столько (проектирующихся в неё) точек поверхности R, сколько различных элементов с центром в этой точке имеет полная А. ф. f; на поверхности R функция f становится однозначной функцией. Идея перехода к таким поверхностям принадлежит Б. Риману, а сами они носят название римановых поверхностей. Абстрактное определение понятия римановой поверхности позволило заменить теорию многозначных А. ф. теорией однозначных А. ф. на римановых поверхностях.

Пусть зафиксированы область Δ, принадлежащая области существования D полной А. ф. f, и к.-л. элемент W функции f с центром в точке области Δ. Совокупность всех элементов, к-рые могут быть получены аналитич. продолжением элемента W посредством цепочек с центрами, принадлежащими Δ, наз. ветвью А. ф. f. Ветвь многозначной А. ф. может оказаться однозначной А. ф. в области Δ. Так, напр., произвольные ветви функций $\sqrt[n]{z}$ и $\operatorname{Ln} z$, соответствующие любой односвязной области, не содержащей точку O, являются однозначными функциями; при этом $\sqrt[n]{z}$ имеет ровно n, а $\operatorname{Ln} z$ — бесконечное множество различных ветвей в каждой такой области. Выделение однозначных ветвей (при помощи тех или иных разрезов области существования) и их изучение средствами теории однозначных А. ф. являются одним из основных приёмов исследования конкретных многозначных А. ф.

● Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 12 изд., М., 1977; Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 1—2, М., 1967—68; Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; Евграфов М. А., Аналитические функции, 2 изд., М., 1968; Свешников А. Г., Тихонов А. Н., Теория функций комплексной переменной, 4 изд., М., 1979; Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, 2 изд., ч. 1—2, М., 1976; Бицадзе А. В., Основы теории аналитических функций комплексного переменного, М., 1969.

А. А. Гончар.

АНАЛИТИ́ЧЕСКИЙ ЛАНДША́ФТ — то же, что *рельеф функции*.

АНАЛИТИ́ЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕ́НТ — см. *Аналитическое продолжение*.

АНАЛИТИ́ЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕ́НИЕ, формула,— выражение, определяющее совокупность действий, которые нужно проделать в определённом порядке над значением

аргумента и константами, чтобы получить значение функции.

АНАЛИТИ́ЧЕСКОЕ МНО́ЖЕСТВО — понятие *дескриптивной теории множеств.*

АНАЛИТИ́ЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕ́НИЕ функции — доопределение функции $f_0(z)$, голоморфной в области D_0 плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z, т. е. однозначной и аналитической в D_0, до функции $f(z)$, голоморфной в более обширной области D, содержащей D_0, причём в исходной области D_0 функция $f(z)$ совпадает с $f_0(z)$. Отправным понятием в теории А. п. является понятие аналитического элемента, или просто элемента (D_0, f_0), состоящего из области D_0 и голоморфной в D_0 функции f_0. При этом теоретически всегда возможно ограничиться рассмотрением простейших канонических элементов (K_0, f_0), состоящих из степенного ряда

$$f_0 = f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

и его круга сходимости $K_0 = \{z : |z - z_0| < R_0\}$ с центром $z_0 \in \mathbb{C}$ и радиусом $R_0 > 0$. Приняв за центр ряда другую точку $z_1 \neq z_0$ этого круга и пересчитав коэффициенты, напр., по формулам Тейлора $b_n = f^{(n)}(z_1)/n!$, получают новый элемент (K_1, f_1), состоящий из степенного ряда

$$f_1 = f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n$$

и его круга сходимости $K_1 = \{z : |z - z_1| < R_1\}$. Может оказаться (рис. 1), что $R_1 > R_0 - |z_1 - z_0|$, т. е. круг K_1 выходит за пределы круга K_0. Тогда говорят, что канонич. элементы (K_1, f_1) и (K_0, f_0) составляют непосредственное А. п. друг друга через общую (заштрихованную) часть кругов K_0 и K_1. Элемент (K_0, f_0) допускает А. п. в граничную точку ζ его круга сходимости, $|\zeta - z_0| = R_0$, если для нек-рого непосредственного А. п. (K_1, f_1) эта точка ζ попадает в круг K_1; граничная точка ζ наз. особой точкой, если А. п. в неё невозможно. На границе круга сходимости любого степенного ряда имеется, по крайней мере, одна особая точка.

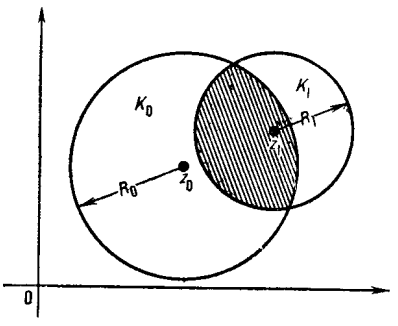


Рис. 1. Непосредственное аналитическое продолжение.

Выбрав на плоскости $\mathbb{C}$ к.-л. кривую L, соединяющую центр исходного элемента z_0 с нек-рой точкой z_N (рис. 2), и

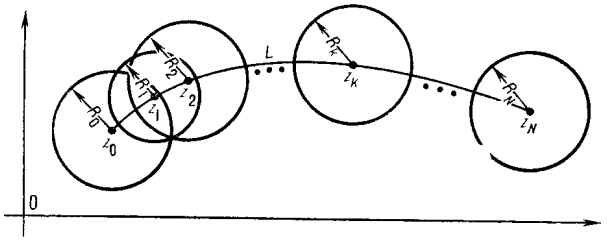


Рис. 2. Аналитическое продолжение вдоль кривой L.

постепенно осуществляя процесс непосредственного А. п. вдоль кривой L, получают цепочку канонич. элементов (K_0, f_0), (K_1, f_1), . . ., (K_N, f_N), осуществляющую А. п. исходного элемента (K_0, f_0) в общую часть всех кругов цепочки $K_0, K_1, \ldots, K_N$ и позволяющую, в частности, вычислить значение функции f в точке z_N. Следует иметь, однако, в виду, что этот процесс А. п. осуществим не всегда (не для всех кривых L и не для всех точек z_N). Во-первых, все граничные точки исходного круга сходимости K_0 могут оказаться особыми; в этом случае говорят, что окружность $|z - z_0| = R_0$ круга сходимости K_0 есть естественная граница функции f_0. Во-вторых, при А. п. вдоль кривой L точка z_N может оказаться особой, т. е. радиусы сходимости R_k при приближении к z_N будут настолько быстро уменьшаться, что z_N не попадает ни в один из кругов R_k. В-третьих, при А. п. вдоль различных кривых L в одну и ту же точку z_N могут получаться различные канонич. элементы (K_N, f_N) с центром z_N, т. е. при А. п. исходной однозначной функции f_0 может возникнуть многозначная аналитич. функция f.

Несмотря на свою теоретич. простоту, процесс А. п. с помощью канонич. элементов малоэффективен. Поэтому с давних пор в вопросах А. п. прибегают к самым разнообразным иным методам А. п. Сущность этих методов сводится к тому, что используются различные аналитич. представления исходной функции, позволяющие так или иначе расширить её область определения (в виде рациональных дробей; интегралов, зависящих от параметра; различных функциональных рядов), или же используются функциональные и дифференциальные уравнения, характерные для данной функции, свойства периодичности, чётности и т. п.

Напр., степенной ряд

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

определяет аналитич. функцию $f_0(z)$ в его круге сходимости $K_0 = \{z : |z| < 1\}$. Пользуясь формулой суммы бесконечной геометрич. прогрессии, получают выражение для f_0 в виде рациональной дроби

$$f_0(z) = 1/(1 - z),$$

к-рое в данном простейшем примере и даёт А. п. функции f_0 на всю плоскость $\mathbb{C}$ с выброшенной одной особой точкой $z = 1$. Несколько более сложный пример доставляет гамма-функция $\Gamma(z)$, обобщающая понятие факториала $n!$ на комплексные числа z и первоначально определяемая эйлеровым интегралом второго рода:

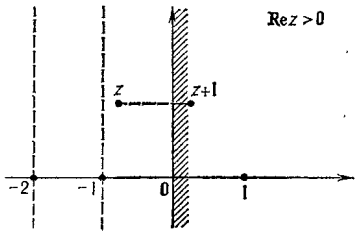


Рис. 3. Аналитическое продолжение гамма-функции.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x}\, dx$$

всюду в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 0$ (заштрихована на рис. 3). А. п. гамма-функции можно постепенно осуществить, используя характерное для неё функциональное уравнение

$$\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$$

для вычисления значений $\Gamma(z)$ сначала в точках полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > -1$, затем $\mathrm{Re}\, z > -2$ и т. д. При этом гамма-функция оказывается уже определённой всюду на плоскости $\mathbb{C}$, кроме точек $z = 0, -1, -2, \ldots$, к-рые для неё являются особыми.

Вообще, вопрос об определении положения особых точек при А. п. является одним из основных в этой теории.

● Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; Бибербах Л., Аналитическое продолжение, пер. с нем., М., 1967.

Е. Д. Соломенцев.

АНГЕРА ФУ́НКЦИИ — специальные функции, являющиеся решениями неоднородного уравнения Бесселя:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = \frac{1}{\pi} (x - \nu) \sin \nu\pi,$$

где ν — произвольный, вообще говоря, параметр. При целом $\nu = n$ А. ф. $J_n(x)$ [применяется также обозначение $A_n(x)$] совпадает с *цилиндрической функцией* первого рода (бесселевой функцией) $J_n(x)$. При нецелых ν А. ф. $J_\nu(x)$

выражается рядом

$$J_\nu(x)=\frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi}\left[1-\frac{x^2}{2^2-\nu^2}+\frac{x^4}{(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)}-\right.$$
$$\left.-\frac{x^6}{(2^2-\nu^2)(4^2-\nu^2)(6^2-\nu^2)}+\dots\right]+$$
$$+\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\left[\frac{x}{1^2-\nu^2}-\frac{x^3}{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^5}{(1^2-\nu^2)(3^2-\nu^2)(5^2-\nu^2)}-\dots\right].$$

Функция названа по имени К. Ангера (1855), к-рый изучал функции этого типа.

АННУЛЯ́ТОР (от лат. annullo — уничтожаю) м о д у л я — идеал Ann A кольца R (над которым рассматривается модуль A), состоящий из всех элементов, действующих на A как нулевые эндоморфизмы:

$$\mathrm{Ann}\,A=\{\lambda\mid\lambda\in R,\ \ \lambda a=0,\ \text{для любого } a\in A\}.$$

АНТАГОНИСТИ́ЧЕСКАЯ ИГРА (от греч. ἀνταγωνιστής — противник, соперник) — модель конфликтной ситуации двух участников с прямо противоположными интересами (см. *Игр теория*). Если исход конфликта может быть оценён численными выигрышами (проигрышами) каждым из участников, то противоположность интересов означает, что при любом исходе конфликта сумма численных оценок участников постоянна. При надлежащей нормировке можно считать, что эта сумма равна нулю, т. е. что выигрыш одного участника равен проигрышу другого. Поэтому А. и. наз. также и г р а м и д в у х л и ц с н у л е в о й с у м м о й.

Формально А. и. задаётся тройкой $\Gamma=\langle A, B, H\rangle$, где A, B — множества стратегий соответственно игроков 1 и 2, H — функция выигрыша игрока 1, заданная на множестве ситуаций (исходов) $A\times B$. Функция выигрыша игрока 2, по определению А. и., равна $-H$. Процесс разыгрывания А. и. состоит в выборе игроками нек-рых своих стратегий $a\in A$, $b\in B$, после чего игрок 2 платит игроку 1 величину $H(a, b)$.

Оптимальный выбор игроками своих стратегий в А. и. осуществляется на основании принципа минимакса. Именно, стремление игроков к максимизации своих выигрышей при неполном контроле над образующимися ситуациями в А. и. трактуется как стремление игроков получить наибольший гарантированный выигрыш, т. е. не зависящий от выбора стратегий другим игроком. Для игрока 1 таким выигрышем является «максиминная» величина $\max\limits_a\inf\limits_b H(a, b)$, а для игрока 2 — «минимаксная» величина $\min\limits_b\sup\limits_a H(a, b)$. Стратегии игроков, реализующие внешние экстремумы этих выражений, наз. соответственно максиминными и минимаксными. Если

$$\max_a\inf_b H(a, b)=\min_b\sup_a H(a, b),$$

то пара (a_0, b_0) максиминных и минимаксных стратегий является с е д л о в о й т о ч к о й функции H, т. е. выполняются неравенства

$$H(a, b_0)\leqslant H(a_0, b_0)\leqslant H(a_0, b)$$

для всех $a\in A$, $b\in B$. Величина $H(a_0, b_0)$ в этом случае наз. з н а ч е н и е м А. и., а стратегии a_0, b_0 — о п т и м а л ь н ы м и с т р а т е г и я м и игроков. Пара оптимальных стратегий игроков наз. также р е ш е н и е м А. и. Если А. и. рассматривать как частный класс бескоалиционных игр, то пара оптимальных стратегий игроков образует с и т у а ц и ю р а в н о в е с и я.

Если максиминные и минимаксные стратегии не существуют, но выполняется равенство

$$\sup_a\inf_b H(a, b)=\inf_b\sup_a H(a, b)=v,$$

то для любого $\varepsilon>0$ существуют такие стратегии игроков a_ε, b_ε, что выполняются неравенства

$$H(a, b_\varepsilon)-\varepsilon\leqslant H(a_\varepsilon, b_\varepsilon)\leqslant H(a_\varepsilon, b)+\varepsilon$$

для всех $a\in A$, $b\in B$. Стратегии a_ε, b_ε наз. ε-о п т и м а л ь н ы м и, а величина v также наз. з н а ч е н и е м игры.

Основными задачами теории А. и. являются доказательства существования оптимальных (ε-оптимальных) стратегий и значения игры, а также их нахождение. Известно, что даже в самых простых случаях значение А. и. может не существовать. В этом случае

$$\sup_a\inf_b H(a, b)<\inf_b\sup_a H(a, b).$$

Содержательно это неравенство означает существенность информации у игроков о выборе противником своей стратегии. Эта информация уменьшается (и для довольно широких классов А. и. становится несущественной) при случайном выборе игроками своих стратегий, т. е. при использовании смешанных стратегий — вероятностных мер на множествах первоначальных (чистых) стратегий. Действительно, если (случайные) выигрыши игроков в условиях применения ими смешанных стратегий оценивать математич. ожиданиями, то в случае конечных множеств A и B оптимальные смешанные стратегии существуют у обоих игроков (см. *Матричная игра*). Это — центральная теорема теории игр, наз. т е о р е м о й Н е й м а н а о м и н и м а к с а х. В дальнейшем она обобщалась на случаи бесконечных множеств A и B.

Разрабатывается также теория А. и., в к-рых игроки могут не иметь численной оценки ситуаций — функции выигрыша, а их отношения к исходам игры определяются только путём попарных сравнений ситуаций по предпочтительности (см. *Бескоалиционная игра*).

А. и. достаточно адекватно моделируют многие конфликтные ситуации из области экономики, политики, военного дела. А. и. нередко моделируют ситуации, возникающие при принятии решений в условиях неопределённости. Называемая «Природой» совокупность внешних обстоятельств, неизвестных принимающему решения лицу (игроку 1), принимается в качестве игрока 2, к-рый действует прямо противоположно интересам игрока 1.

АНТИИНВЕ́РСИЯ (от греч. ἀντί — против и *инверсия*) — см. *Инверсия*.

АНТИКОММУТАТИ́ВНОСТЬ (от греч. ἀντί — против и *коммутативность*) — см. *Ли алгебра*.

АНТИКОНФО́РМНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ (от греч. ἀντί — против и лат. conformis — подобный) — см. *Инверсия*.

АНТИЛОГА́РИФМ (от греч. ἀντί — против и *логарифм*) ч и с л а n — число N, логарифм которого при данном основании a равен числу n:

$$\mathrm{ant}\log_a n=N=a^n$$

или

$$\log_a N=n.$$

Обычно рассматриваются А. для десятичного логарифма.

АНТИНО́МИЯ (греч. ἀντινομία, букв.— противоречие в законе), п а р а д о к с,— ситуация, когда в теории доказаны два взаимно исключающие друг друга суждения, причём каждое из этих суждений выведено убедительными с точки зрения данной теории средствами.

В отличие от с о ф и з м а, умышленно ложного умозаключения с замаскированной ошибкой, А., как правило, свидетельствует о более глубоких недостатках рассматриваемой теории. Часто обнаружение А. приводит к существенной перестройке всей теории в целом, привлекает внимание к новым явлениям и в конечном счёте служит стимулом дальнейших исследований. Эта особенность А. со времён античности привлекала к ним внимание философов. Можно отметить, напр., существенную роль, к-рую играет исследование А. в философии Канта. Уже в античной философии обсуждалось несколько А., известных под названием а п о р и й.

Приведём одну из знаменитых апорий Зенона Элейского (5 в. до н. э.).

«Ахиллес и черепаха». Апория описывает противоречивость нек-рых свойств движения и может быть сформулирована следующим образом. Пусть в пункте A находится бегун (Ахиллес), а в пункте B на расстоянии 100 м от A — черепаха. В один и тот же момент Ахиллес отправляется бегом из A в направлении к B, стремясь догнать черепаху, а черепаха устремляется из B прочь от A со скоростью, скажем, в сто раз меньшей скорости бегуна. Опыт свидетельствует, что в подобной ситуации Ахиллес довольно быстро догонит черепаху. С другой стороны, можно, как будто, установить, что Ахиллес никогда не догонит черепаху (и даже не достигнет пункта B). В самом деле, к моменту, когда Ахиллес достигнет середины C_1 маршрута AB, черепаха пусть на небольшое расстояние, но всё же удалится от B. Далее, Ахиллес добежит до середины C_1B, затем до середины C_3 отрезка C_2B и т. д. Всё это время черепаха будет удаляться от B. Чтобы достигнуть B, Ахиллесу, таким образом, необходимо побывать в каждом из бесконечной последовательности пунктов $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ Однако представляется верным, что невозможно за конечное время побывать в бесконечном количестве различных пунктов. Следовательно, Ахиллес никогда не достигнет пункта B и не догонит черепаху.

Парадоксы приведённого типа легко преодолеваются в современной математич. модели непрерывного движения. Как показывает подробный анализ, существенную роль в их преодолении играет выполнение в поле действительных чисел т. н. аксиомы Архимеда: для всяких действительных чисел a, $b>0$ найдётся натуральное число n такое, что $an>b$. И всё же ситуация, отражённая в парадоксе, достаточно глубока. Можно оспаривать удобство или адекватность реальному движению общеупотребительной математич. модели. Для исследования концепции физических бесконечно малых и бесконечно больших величин неоднократно предпринимались попытки построения теории действительных чисел, в к-рой аксиома Архимеда не имеет места. Во всяком случае, теория неархимедовых упорядоченных полей является весьма содержательной частью современной алгебры.

Парадокс «Куча» состоит в следующем. Одна песчинка не есть куча песка. Если n песчинок не есть куча песка, то и $n+1$ песчинка — тоже не куча. Следовательно, никакое число песчинок не образует кучи.

В современной терминологии к этому парадоксу можно сделать следующий комментарий: метод полной математич. индукции нельзя применять, как показывает парадокс, к объёмно неопределённым понятиям, каковым является понятие «куча песка». В последнее время (2-я пол. 20 в.) объёмно неопределённые понятия используются в основаниях математики для установления непротиворечивости классич. теорий, и свойства таких понятий исследуются точными методами. Методами математич. логики можно реализовать ситуацию, когда математич. индукция неприменима в общей форме ко всему натуральному ряду, хотя весьма многие обычные свойства натуральных чисел при этом выполняются.

Для математики наибольший интерес представляют, несомненно, А., связанные с необычными способами образования понятий: логические и семантические А.

Логические антиномии. Антиномия Рассела (1902). Рассмотрим следующее свойство D множеств. Именно, будем считать, что для множества X выполняется свойство D тогда и только тогда, когда $X\notin X$, то есть X не является элементом самого себя. Для подавляющего большинства конкретных множеств, употребляемых в математич. рассуждениях, свойство D выполняется. Так, ни множество всех натуральных чисел, ни множество всех действительных чисел не являются элементами самих себя. Рассмотрим теперь множество T такое, что его элементы суть в точности те множества X, для которых выполняется D. Попробуем теперь выяснить, что верно: $T\in T$ или $T\notin T$. Пусть $T\in T$, тогда, по определению, для T выполняется свойство D, то есть $T\notin T$. Таким образом, необходимо $T\notin T$. Но это вновь приводит к противоречию, т. к. ввиду $T\notin T$ для T выполняется D и, следовательно, $T\in T$.

Можно попытаться избежать парадокса, утверждая, что вышеприведённое рассуждение свидетельствует лишь о том, что указанного множества T не существует, т. е. что свойство D не определяет никакого множества. Но такой выход отнюдь не упрощает ситуацию. Действительно, с позиций «наивной» теории множеств естественно считать, что всякое точно описанное свойство B объектов определяет множество C тех объектов, к-рые удовлетворяют свойству B. Парадокс Рассела наносит сильный удар по этой естественной концепции. Приходится согласиться, что нек-рые на первый взгляд весьма простые свойства, вроде описанного выше свойства D, следует считать не точно описанными или же считать, что имеются точно описанные свойства, к-рые не определяют множеств. Такая точка зрения, в свою очередь, выдвигает ряд трудных проблем. Какие свойства считать точно описанными, а какие нет? Какие свойства определяют множества, а какие нет? Может быть и те свойства, к-рые широко употребляются в практике теоретико-множественной математики, также ведут к парадоксам и должны быть забракованы? Можно ли описать, по крайней мере, нек-рую надёжную область, в к-рой можно считать себя достаточно застрахованным от парадоксов и к-рая всё же достаточно обширна, чтобы включать в себя привычную практику математики?

Проблему точного описания свойств можно считать удовлетворительно решённой с созданием точных логико-математич. языков. Что же касается описания критериев для выделения класса свойств, определяющих множества, то эта проблема весьма далека от своего решения. Более того, современные результаты аксиоматич. теории множеств свидетельствуют, по-видимому, в пользу того, что окончательного решения этой проблемы не существует. Антиномия Рассела произвела очень большое впечатление на современников именно потому, что эта А. возникает на самой начальной стадии изучения теории множеств. Тем не менее имеются различные пути избежания парадоксов, к-рые (хотя их и нельзя признать окончательными или наиболее естественными) обеспечивают большие практич. удобства и проливают свет как на природу парадоксов, так и на логич. связи других теоретико-множественных принципов. Особенно успешным оказался аксиоматич. подход к основаниям теории множеств (см. *Аксиоматическая теория множеств*). Так, формальная аксиоматич. система Цермело — Френкеля является в настоящее время (80-е гг. 20 в.) самой употребительной аксиоматич. теорией, наиболее адекватно отражающей «непарадоксальную» часть классической теоретико-множественной практики.

Антиномия «Деревенский парикмахер» (вариант парадокса Рассела, сформулированный им применительно к житейской ситуации; несколько иная форма этой А. известна под назв. парадокса Гонсета). Рассмотрим деревенского парикмахера, к-рый бреет всех тех и только тех жителей своей деревни, к-рые не бреются сами. Бреет ли он сам себя? Рассуждая, как в антиномии Рассела, мы установим, что он и бреет себя и не бреет себя. Можно легко выйти из затруднения, заметив, что парадокс свидетельствует только о том, что такого парикмахера не может существовать. Рассматриваемая А. показывает, что условие, к-рому должен удовлетворять деревенский парикмахер, является внутренне противоречивым и, следовательно, невыполнимым. Правда, такая точка зрения естественно вызывает к жизни проблему описания критериев для внутренне непротиворечивых свойств, однако, в отличие от ситуации с антиномией Рассела, здесь эта проблема отнюдь не является столь актуальной. Она относится к житейской ситуации, а такого рода ситуации вообще далеко не всегда бывают точно сформулированными или надёжно установленными. Кро-

ме того, внутренняя непротиворечивость — вовсе не единственный и, по-видимому, не главный критерий приемлемости житейского суждения. Иное дело математич. рассуждение, от к-рого мы вправе ожидать значительно бо́льшей окончательности и убедительности. Внутренняя непротиворечивость — важнейшая сторона такого рассуждения.

Антиномия Кантора (1899). Пусть M — множество всех множеств и $P(M)$ — множество всех его подмножеств. Из определения M очевидно, что $P(M)$ включено в M. С другой стороны, по известной теореме Кантора $P(M)$ имеет мощность бо́льшую, чем M, и поэтому $P(M)$ не может быть подмножеством M. Из антиномии Кантора можно сделать примерно те же выводы, что и из антиномии Рассела. В частности, можно считать, что антиномия Кантора представляет собой доказательство несуществования множества M всех множеств. Интересно в связи с этим отметить, что существуют аксиоматич. системы теории множеств, напр. система New Foundations У. Куайна, в к-рых существование множества M можно установить. Парадокс Кантора в New Foundations избегается благодаря тому, что в этой системе теорему Кантора о мощности удаётся доказать лишь в нек-рой специальной форме, недостаточной для проведения парадокса. Вообще, для проведения антиномии Кантора нужны существенно более сложные понятия теории множеств, чем для проведения антиномии Рассела (такие, как понятия подмножества, мощности множества и т. п.).

Семантические антиномии. В отличие от логич. А. семантич. А. включают такие семантич. термины, как «истина», «ложь», «обозначает», «определяет» и др. Однако это различие в значительной степени условно. Многие семантич. А. могут быть сформулированы в логич. форме и наоборот. Семантич. А. не могут быть проведены в обычных логико-математич. теориях уже потому, что эти теории не содержат семантич. понятий, нужных для формулировки семантич. А. В этом смысле семантич. А. «безопаснее» логических. Но здесь следует иметь в виду также то, что в настоящее время исследуются и теории, содержащие понятия, нужные для формулировки нек-рых семантич. парадоксов, в особенности парадокса Ришара (но в к-рых парадоксы всё же избегаются специальными средствами).

Антиномия Ришара (1906). Рассмотрим множество натуральных чисел, каждое из к-рых может быть однозначно определено с помощью осмысленного текста, содержащего не более тысячи слогов. Очевидно, таких чисел — конечное количество, т. к. совокупность всех текстов с не более чем тысячью слогами конечна. Рассмотрим наименьшее натуральное число, не входящее в упомянутое выше множество.

Приведённый выше абзац представляет собой осмысленный текст объёмом не более чем в тысячу слогов, однозначно определяющий нек-рое натуральное число, к-рое по самому своему определению не может быть охарактеризовано такого рода текстом. Конечно, парадокса можно избежать, если объявить указанный текст неосмысленным (или не определяющим натурального числа), но тогда, как и в ранее рассмотренных случаях, естественно поставить трудные проблемы, касающиеся описания критериев осмысленности текстов, и т. п.

Антиномия Евбулида из Милета. Допустим, что нек-рый субъект произносит следующую фразу: «Высказывание, к-рое я сейчас произношу, ложно». Ложно само это высказывание или нет? Из допущения, что высказывание истинно, и из его смысла следует, что оно должно быть ложно. С другой стороны, из его ложности немедленно следует, что оно не может быть ложно. Известно много вариантов этого парадокса — парадокс лжеца, парадокс Эпименида и др. Идея этого парадокса лежит в основе доказательства знаменитой *Гёделя теоремы о неполноте* формальных аксиоматич. теорий.

В целом анализ парадоксов способствовал радикальному пересмотру взглядов на проблему обоснования математики и развитию многих современных идей и методов математич. логики.

● Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957. *А. Г. Драгалин.*

АНТИПОДЁРА (от греч. ἀντί — против и *подера*) линии l относительно точки O — линия, подера которой относительно точки O есть линия l.

АНТИПРИ́ЗМА (от греч. ἀντί — против и *призма*) — см. *Многогранник*.

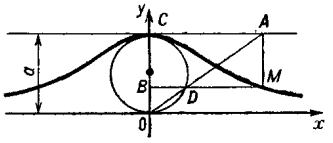
АНТИСИММЕТРИ́ЧНОСТЬ (от греч. ἀντί — против и *симметрия*) — антисимметричное отношение; см. *Соответствие*.

АНТЬЁ (франц. entier — целый) — то же, что целая часть числа. См. *Целая и дробная части числа*.

АНЬЁЗИ ЛО́КОН, версиера,— плоская алгебраическая кривая 3-го порядка (рис.). Уравнение в прямоугольных координатах:

$$y=\frac{a^3}{x^2+a^2}.$$

Если a—диаметр окружности с центром в точке $(0, a/2)$, OD — секущая, BM — параллельна оси Ox, AM — параллельна оси Oy, то А. л. есть множество точек M. Симметрична относительно оси Oy. Максимум $C(0, a)$, радиус кривизны в нём $R=a/2$ (радиус производящей окружности). Две точки перегиба $(\pm a\sqrt{3}, 3a/4)$. Асимптота — ось Ox. Площадь между кривой и асимптотой $S=\pi a^2$.



Названа по имени М. Аньези, изучавшей эту кривую (1748).

АПОЛЛО́НИЯ ТЕОРЕ́МА — установленная Аполлонием Пергским (3 в. до н. э.) теорема о сопряжённых диаметрах *эллипса*.

АПОРИ́Я (греч. ἀπορία — трудность, безвыходное положение) — см. *Антиномия*.

АПОСТЕРИО́РНАЯ ВЕРОЯ́ТНОСТЬ, вероятность a posteriori (лат., букв. — из последующего), — см. *Бейеса теорема*.

АПОФЕ́МА (от греч. ἀποτίθημι — откладываю в сторону) — 1) отрезок перпендикуляра, опущенного из центра правильного многоугольника на любую из его сторон (a на рис. 1), а также его длина.

2) В правильной пирамиде А.— высота a её боковой грани (рис. 2).

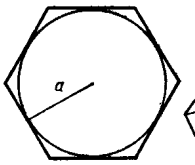


Рис. 1.

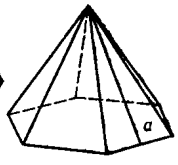


Рис. 2.

АППЕ́ЛЯ МНОГОЧЛЕ́НЫ— весьма общий класс многочленов, содержащий многие классические, практически важные системы многочленов, такие, напр., как *Бернулли многочлены*, *Лагерра многочлены*, *Эрмита многочлены*.

Пусть

$$A(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

— нек-рый степенной ряд. А. м. $\{A_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, соответствующий ряду $A(z)$, определяется из тождества

$$A(t)e^{zt}=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(z)t^n.$$

При $A(z)=\frac{z}{e^z-1}$, $A(z)=(1-z)^{\alpha}$ и $A(z)=e^{-z^2/2}$ здесь получаются соответственно указанные выше многочлены Бернулли, Лагерра и Эрмита. В явном виде через коэффициенты a_k А. м. выражаются формулой

$$A_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{(n-k)!}z^{n-k},\quad n=0,\ 1,\ \ldots.$$

В простейшем частном случае А. м. получаются из рекуррентных соотношений

$$A_n'(z) = A_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

А. м. от двух переменных введены П. Аппелем (1880).

АППЛИКА́ТА (от лат. applicata, букв. — приложенная) — одна из декартовых координат точки в пространстве, обычно третья, обозначаемая буквой z.

АППРОКСИМАТИ́ВНАЯ ПРОИЗВО́ДНАЯ, асимптотическая производная,— см. *Производная*.

АППРОКСИМА́ЦИЯ (от лат. approximo — приближаюсь) — замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным. А. позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (напр., таких, характеристики к-рых легко вычисляются или свойства к-рых уже известны). В теории чисел изучаются *диофантовы приближения*, в частности приближения иррациональных чисел рациональными. В геометрии и топологии рассматриваются А. кривых, поверхностей, пространств и отображений. Нек-рые разделы математики целиком посвящены А., напр. *приближение функций*.

АППРОКСИМА́ЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНОЙ КРАЕВО́Й ЗАДА́ЧИ РА́ЗНОСТНОЙ — приближение дифференциального уравнения и краевых условий системой конечных (обычно алгебраических) уравнений относительно значений искомой функции на некоторой сетке, которое уточняется при стремлении параметра разностной задачи (шага h сетки) к нулю.

Простейшим и основным способом построения разностной краевой задачи, аппроксимирующей исходную дифференциальную краевую задачу, является замена производных, входящих в дифференциальное уравнение, и краевых условий соответствующими разностными отношениями функции на сетке. Напр., для замены производных $f'(x)$ и $f''(x)$ часто используют формулы

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{и} \quad f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}.$$

А. д. к. з. р. ещё не обеспечивает сходимости при $h \to 0$ решения разностной задачи к точному решению ни в каком разумном смысле. Дополнительным условием, обеспечивающим сходимость, является свойство устойчивости, к-рым должна обладать разностная краевая задача.

● Самарский А. А., Теория разностных схем, М., 1977.

АПРИО́РНАЯ ВЕРОЯ́ТНОСТЬ, вероятность a priori (лат., букв.— из предшествующего),— см. *Бейеса теорема*.

АПРИО́РНАЯ ОЦЕ́НКА — см. *Разностных схем теория*.

АРА́БСКИЕ ЦИ́ФРЫ — традиционное название десяти математических знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, с помощью которых в десятичной системе счисления записываются любые числа. Эти цифры возникли в Индии (не позднее 5 в.), в Европе стали известны в 10—13 вв. по арабским сочинениям (отсюда название).

АРБИТРА́ЖНАЯ СХЕ́МА (франц. arbitrage, от лат. arbiter— судья) — *игра без побочных платежей*, в которой допустимыми коалициями являются только одноэлементные коалиции и коалиция, состоящая из всего множества игроков. Формально А. с. определяется парой (q, X), где $X \subset \mathbb{R}^n$, $q \in X$, n — число игроков; координаты вектора q определяют значения характеристич. функции игры на одноэлементных коалициях, а X — значение характеристич. функции на коалиции, состоящей из множества всех игроков.

А. с. интерпретируются как задачи торга, в к-рых в начальном состоянии i-й игрок имеет в своём распоряжении величину q_i, вектор $q = (q_1, \ldots, q_n)$ поэтому наз. точкой status quo. Игроки могут, договорившись, выбрать любой вектор выигрышей из множества X. Принципы оптимальности в А. с. формализуют процесс переговоров о «справедливом» выборе вектора выигрышей. Реализации принципов оптимальности в А. с. наз. арбитражными решениями. Наиболее известным арбитражным решением является решение Нэша (для выпуклых X), на к-ром достигается максимум произведения $\prod_{i=1}^{n}(x_i - q_i)$. Решение Нэша и только оно удовлетворяет следующим аксиомам:

1) оптимальность по Парето: если x^* — решение, то из $x \geqslant x^*$, $x \in X$, следует $x = x^*$; 2) инвариантность относительно неубывающих линейных преобразований: пусть f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что $(fx)_i = a_i x_i + b_i$, $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$; тогда если x^* — решение А. с. (q, X), то fx^* — решение А. с. (fq, fX); 3) независимость от несущественных альтернатив: если x^* — решение А. с. (q, X) и $x^* \in X' \subset X$, $q \in X'$, то x^* — решение А. с. (q, X'); 4) симметрия: если $q_i = q_j$, $i, j = 1, \ldots, n$, и X симметрично относительно перестановок координат, то $x_i^* = x_j^*$.

Если множество X не является выпуклым, то арбитражное решение, удовлетворяющее нек-рым модификациям приведённых аксиом, является множественным.

А. с. можно рассматривать и как класс задач *многокритериальной оптимизации*, в к-рых к условиям задач многокритериальной оптимизации добавляется нек-рая точка q_0; решение x^* такой задачи должно удовлетворять дополнительному условию рациональности $x_i^* \geqslant q_{0i}$, $i = 1, \ldots, n$.

АРГУМЕ́НТ (лат. argumentum, здесь — предмет, знак) — 1) А. функции — независимая переменная величина, от значений которой зависят значения функции. Напр., x — А. функции x^2, t — А. функции $\sin t$, z — А. функции e^z.

2) А. комплексного числа

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

изображаемого на плоскости точкой с координатами x и y, —угол φ радиус-вектора r этой точки с осью абсцисс.

АРЕАФУ́НКЦИЯ (от лат. area — площадь и *функция*) — то же, что *обратная гиперболическая функция*, т. е. одна из функций: ареасинус гиперболический (Ar sh x), ареакосинус гиперболический (Ar ch x), ареатангенс гиперболический (Ar th x) и ареакотангенс гиперболический (Ar cth x).

АРИФМЕТИЗА́ЦИЯ — метод, применяемый в математической логике для замены рассуждений о выражениях какого-либо логико-математического языка рассуждениями о натуральных числах. С целью такой замены устанавливается к.-л. достаточно простое взаимно однозначное отображение множества всех слов (в алфавите рассматриваемого языка) в натуральный ряд; образ слова наз. его номером. Отношения и операции, определённые на словах, переходят при этом отображении в отношения и операции, определённые на номерах. Требования «достаточной простоты» отображения сводятся к тому, чтобы нек-рые основные отношения и операции переходили в отношения и операции, имеющие простую алгоритмич. природу. В частности, если среди выражений рассматриваемого языка содержатся программы для нек-рого семейства вычислимых функций, А. естественно приводит к нумерации этого семейства (при к-рой номером функции считается номер всякой её программы).

Впервые А. была применена К. Гёделем для доказательства неполноты формальной арифметики (см. *Гёделя теорема о неполноте*). Именно К. Гёдель поставил в соответствие буквам алфавита нек-рые попарно различные натуральные числа и затем занумеровал слово $\tau_1\tau_2\ldots\tau_n$ номером $2^{t_1} \cdot 3^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{t_n}$, где t_i — число, поставленное в соответствие букве τ_i, а p_i есть i-е по порядку простое число. Так описанная нумерация слов наз. гёделевой; в широком смысле слова гёделевой наз. всякая нумерация слов, возникающая при А., при этом номера слов наз. их гёделевыми номерами.

А. Чёрч (1936) с помощью арифметизации получил первый пример неразрешимой алгоритмической проблемы арифметики.

Термин «А.» (в сочетании «А. анализа») употребляется также в литературе по основаниям математики для обоз-

начения осуществлённого в 19 в. построения теории действительных чисел с помощью теоретико-множественных конструкций, отправляющихся от натуральных чисел.

● Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957.

АРИФМЕ́ТИКА (греч. ἀριθμητική, от ἀριθμός — число) — часть математики, наука о числах, в первую очередь о неотрицательных рациональных числах (целых и дробных), и действиях над ними.

С помощью натуральных чисел конструируются многие математич. понятия (напр., основное понятие математич. анализа — действительное число). Когда делается упор на логич. анализ понятия числа, то иногда употребляют термин теоретическая арифметика. А. тесно связана с *алгеброй*, в к-рой, в частности, изучаются действия над числами без учёта их индивидуальных свойств. Индивидуальные свойства целых чисел составляют предмет *чисел теории*.

Историческая справка. Возникнув в глубокой древности из практич. потребностей счёта и простейших измерений, А. развивалась в связи с хозяйственной деятельностью, денежными расчётами, задачами измерений расстояний, времени, площадей и требованиями, к-рые предъявляли к ней другие науки.

О возникновении счёта и о начальных стадиях образования арифметич. понятий судят обычно по наблюдениям, относящимся к процессу счёта у первобытных народов, и, косвенным образом, путём изучения следов аналогичных стадий, сохранившихся в языках культурных народов и наблюдающихся при усвоении этих понятий детьми. Эти данные говорят о том, что развитие тех элементов мыслительной деятельности, к-рые лежат в основе процесса счёта, проходит ряд промежуточных этапов. К ним относятся: умение узнавать один и тот же предмет и различать предметы в подлежащей счёту их совокупности; умение устанавливать исчерпывающее разложение этой совокупности на элементы, отличимые друг от друга и вместе с тем равноправные при счёте (пользование именованной «единицей» счёта); умение устанавливать соответствие между элементами двух множеств вначале непосредственно, а затем сопоставлением их с элементами раз и навсегда упорядоченной совокупности объектов, т. е. совокупности объектов, расположенных в определённой последовательности. Элементами такой стандартной упорядоченной совокупности становятся слова (числительные), применяемые при счёте предметов любой качественной природы и отвечающие образованию отвлечённого понятия числа. При самых различных условиях можно наблюдать сходные особенности постепенного возникновения и усовершенствования перечисленных навыков и отвечающих им арифметич. понятий.

Сначала счёт оказывается возможным лишь для совокупностей из сравнительно небольшого числа предметов, за пределами к-рого количественные различия осознаются смутно и характеризуются словами, являющимися синонимами слова «много»; при этом орудием счёта служат зарубки на дереве («бирочный» счёт), счётные камешки, чётки, пальцы рук и т. п., а также множества, заключающие постоянное число элементов, напр.: «глаза» — как синоним числительного «два», кисть руки («пясть») — как синоним и фактич. основа числительного «пять» и т. п.

Словесный порядковый счёт (раз, два, три и т. д.), прямую зависимость к-рого от пальцевого счёта (последовательное произнесение названий пальцев, частей рук) в нек-рых случаях можно проследить непосредственно, связывается в дальнейшем со счётом групп, содержащих определённое число предметов. Это число образует основание соответствующей системы счисления (обычно в результате счёта по пальцам двух рук), равное 10; встречаются, однако, и группировки по 5, по 20 (французское 80 —«quatre-vingt» $=4\times20$), по 40, по 12 («дюжина»), по 60 и даже по 11 (Новая Зеландия). В эпоху развитых торговых сношений способы нумерации (как устной, так и письменной) естественно обнаруживали тенденцию к единообразию у общавшихся между собой племён и народностей; это обстоятельство сыграло решающую роль в установлении и распространении применяемой в настоящее время системы нумерации (*счисления*), принципа поместного (поразрядного) значения цифр и способов выполнения арифметич. действий. По-видимому, аналогичными причинами объясняется и общеизвестное сходство имён числительных в различных языках, напр.: два — dva (санскр.), δύο (греч.), duo (лат.), two (англ.).

Источником первых достоверных сведений о состоянии арифметич. знаний в эпоху древних цивилизаций являются письменные документы Древнего Египта (*папирусы* математические), написанные приблизительно за 2 тыс. лет до н. э. Это — сборники задач с указаниями их решений, правил действий над целыми числами и дробями со вспомогательными таблицами без каких бы то ни было пояснений теоретич. характера. Решение нек-рых задач в этом сборнике производится по существу с помощью составления и решения уравнений; встречаются также арифметич. и геометрич. прогрессии.

О довольно высоком уровне арифметич. культуры вавилонян за 2—3 тыс. лет до н. э. позволяют судить *клинописные математические тексты*. Письменная нумерация вавилонян в клинописных текстах представляет собой своеобразное соединение десятичной системы (для чисел, меньших 60) с шестидесятеричной, с разрядными единицами 60, 60^2 и т. д. Наиболее существенным показателем высокого уровня А. является употребление шестидесятеричных дробей с распространением на них той же системы нумерации, аналогично современным десятичным дробям. Техника выполнения арифметич. действий у вавилонян, в теоретич. отношении аналогичная обычным приёмам в десятичной системе, осложнялась необходимостью прибегать к обширным таблицам умножения (для чисел от 1 до 59). В сохранившихся клинописных материалах, представлявших собой, по-видимому, учебные пособия, находятся, кроме того, и соответствующие таблицы обратных чисел (двузначные и трёхзначные, т. е. с точностью до $1/60^2$ и $1/60^3$), применявшиеся при делении.

У древних греков практич. сторона А. не получила дальнейшего развития; применявшаяся ими система письменной нумерации с помощью букв алфавита была значительно менее приспособлена для выполнения сложных вычислений, нежели вавилонская (показательно, в частности, что древнегреч. астрономы предпочитали пользоваться шестидесятеричной системой). С другой стороны, древнегреч. математики положили начало теоретич. разработке А. в части, касавшейся учения о натуральных числах, теории пропорций, измерения величин и — в неявной форме — также и теории иррациональных чисел. В «Началах» Евклида (3 в. до н. э.) имеются сохранившие своё значение и до сих пор доказательство бесконечности числа простых чисел, основные теоремы о делимости, алгоритмы для нахождения общей меры двух отрезков и общего наибольшего делителя двух чисел (см. *Евклида алгоритм*), доказательство несуществования рационального числа, квадрат к-рого равен 2 (иррациональность числа $\sqrt{2}$), и изложенная в геометрич. форме теория пропорций. К рассматривавшимся теоретико-числовым задачам относятся задачи о совершенных числах (Евклид), пифагоровых числах, а также — уже в более позднюю эпоху — алгоритмы для выделения простых чисел (*Эратосфена решето*) и решения ряда неопределённых уравнений 2-й и более высоких степеней (Диофант).

Существенную роль в образовании понятия бесконечного натурального ряда чисел сыграл «Псаммит» Архимеда (3 в. до н. э.), в к-ром показывается возможность именовать и обозначать сколь угодно большие числа. Труды Архимеда свидетельствуют о довольно высоком искусстве в получении приближённых значений искомых величин; так, им описано извлечение корня из многозначных чисел,

нахождение рациональных приближений для иррациональных чисел, напр.:

$$\sqrt{3} \approx \frac{265}{153}, \quad 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Римляне не продвинули вперёд технику вычислений, оставив, однако, дошедшую до нашего времени систему нумерации (*римские цифры*), мало приспособленную для производства действий и применяемую в настоящее время почти исключительно для обозначения порядковых чисел.

Трудно проследить преемственность в развитии математики в отношении предыдущих, более древних культур; однако чрезвычайно важные этапы в развитии А. связываются с культурой Индии, оказавшей влияние как на страны Передней Азии и Европы, так и на страны Дальнего Востока (Китай, Япония). Помимо применения алгебры к решению задач арифметич. содержания, наиболее существенная заслуга индийцев — введение позиционной системы счисления (с применением десяти цифр, включая нуль для обозначения отсутствия единиц в к.-л. из разрядов), сделавшей возможной разработку сравнительно простых правил выполнения основных арифметич. действий.

Учёные средневекового Востока не только сохранили в переводах наследие древнегреч. математиков, но и содействовали распространению и дальнейшему развитию достижений индийцев. Методы выполнения арифметич. действий, в значительной мере ещё далёкие от современных, но уже использующие преимущества позиционной системы счисления, с 10 в. стали постепенно проникать в Европу, раньше всего в Италию и Испанию.

Сравнительно медленный прогресс А. в средние века сменяется к нач. 17 в. быстрым усовершенствованием приёмов вычисления в связи с возросшими практич. запросами к технике вычислений (задачи мореходной астрономии, механики, усложнившиеся коммерческие расчёты и т. п.). Дроби со знаменателем 10, употреблявшиеся ещё индийцами (при извлечении квадратных корней) и неоднократно обращавшие на себя внимание и европейских учёных, применялись сначала в неявной форме в тригонометрич. таблицах (в форме целых чисел, выражающих длины линий синуса, тангенса и т. д. при радиусе, принятом за 10^5). Впервые (1427) подробно описал систему десятичных дробей и правила действий над ними аль-Каши. Запись десятичных дробей, по существу совпадающая с современной, встречается в соч. С. Стевина (1585) и с этого времени получает повсеместное распространение. К той же эпохе относится изобретение логарифмов в нач. 17 в. Дж. Непером. В нач. 18 в. приёмы выполнения и записи вычислений приобретают современную форму.

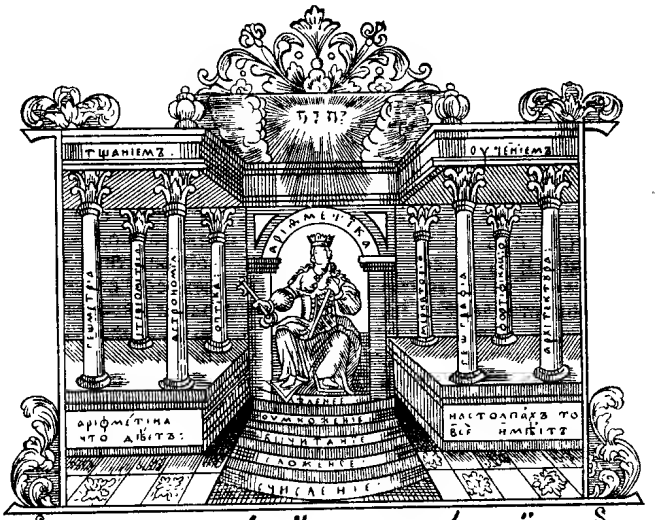
В России до нач. 17 в. применялась нумерация, сходная с греческой; хорошо и своеобразно была разработана система устной нумерации, доходившая до 50-го разряда. Из русских арифметич. руководств нач. 18 в. наибольшее значение имела «Арифметика» Л. Ф. Магницкого (1703). В ней содержится следующее определение А.: «Арифметика или численница, есть художество честное, независтное, и всем удобопонятное, многополезнейшее, и многохвальнейшее, от древнейших же и новейших, в разные времена живших изряднейших арифметиков, изобретенное и изложенное». Наряду с вопросами нумерации, изложением техники вычисления с целыми числами и дробями (в том числе десятичными) и соответствующими задачами в этом руководстве содержатся и элементы алгебры, геометрии и тригонометрии, а также ряд практич. сведений, относящихся к коммерческим расчётам и задачам навигации. Изложение А. приобретает уже более или менее современный вид у Л. Эйлера и его учеников.

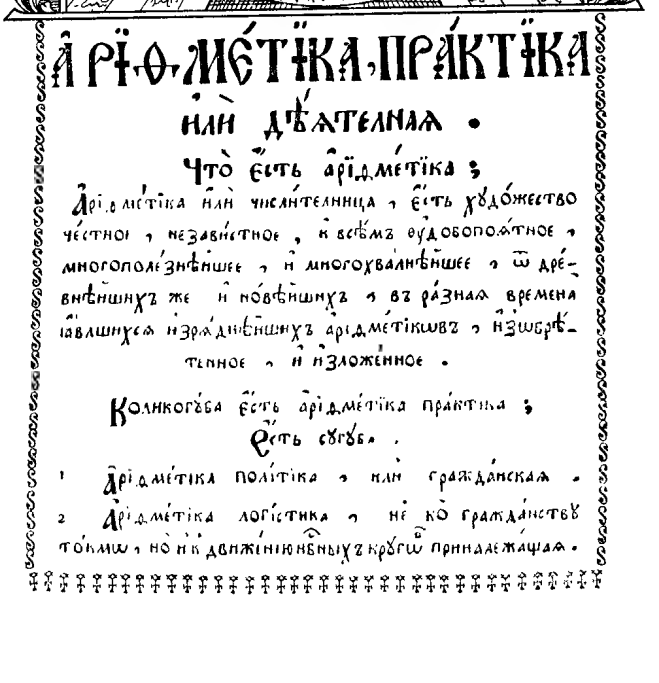
Теоретич. разработка вопросов, касающихся учения о числе и учения об измерении величин, не может быть оторвана от развития математики в целом: решающие этапы её связаны с моментами, определявшими в равной мере и развитие алгебры, геометрии и анализа. Наиболее важным надо считать создание общего учения о *величинах*, соответствующего абстрактного учения о *числе* (целом, рациональном и иррациональном) и буквенного аппарата алгебры.

Фундаментальное значение А. как науки, достаточной для изучения непрерывных величин различного рода, было осознано лишь к кон. 17 в. в связи со включением в А. понятия иррационального числа. Немаловажную роль при этом сыграли аппарат десятичных дробей и применение логарифмов, расширивших область осуществляемых с требуемой точностью операций над действительными числами (иррациональными наравне с рациональными).

Аксиоматическое построение арифметики. Начало следующего этапа — аксиоматич. построение А.— относится уже к 19 в. и связано с общим процессом критич. пересмотра логич. основ математики. Самая простота и очевидная бесспорность начальных положений А. затрудняли выделение основных положений, аксиом и определений, к-рые могли бы служить исходным пунктом построения теории. Первые намёки на возможность такого построения имеются уже в доказательстве соотношения $2 \cdot 2 = 4$, данном Г. Лейбницем (см. ниже).

Лишь в сер. 19 в. Г. Грассману удалось выбрать систему основных аксиом, определяющих действия сложения и умножения так, чтобы остальные положения А. вытекали из неё как логич. следствие. Если иметь в виду натуральный ряд чисел, начиная от 1, и определить число 2 как





1+1, число 3 как 2+1, число 4 как 3+1 и т. д., то одного общего положения $a+(b+1)=(a+b)+1$, принимаемого в качестве аксиомы или определения сложения, оказывается достаточно для того, чтобы не только вывести формулы частного типа, как, напр., $3+2=5$, но, пользуясь методом математич. индукции, доказать и общие свойства сложения, верные для любых натуральных чисел,— переместительный и сочетательный законы. Подобную же роль для умножения играют формулы $a\cdot 1=a$ и $a(b+1)=ab+a$. Так, упомянутое выше доказательство соотношения $2\cdot 2=4$ можно представить в виде цепочки равенств, вытекающей из приведённых здесь формул и определения чисел 2, 3 и 4, а именно:

$$2\cdot 2=2\cdot(1+1)=2\cdot 1+2\cdot 1=2+2=2+(1+1)=(2+1)+1=$$
$$=3+1=4.$$

После доказательства переместительного (см. *Коммутативность*), сочетательного (см. *Ассоциативность*) и распределительного (см. *Дистрибутивность*) (по отношению к сложению) законов действия умножения дальнейшее построение теории арифметич. действий над натуральными числами не представляет уже принципиальных затруднений. Если оставаться на том же уровне абстракции, то дробные числа приходится вводить как пары целых чисел (числитель и знаменатель), подчинённые определённым законам сравнения и действий (см. *Дробь*).

Построение Г. Грассмана было завершено в дальнейшем работами Дж. Пеано, в к-рых отчётливо выделена система основных (не определяемых через другие понятия) понятий, именно: понятие натурального числа, понятие следования одного числа непосредственно за другим в натуральном ряду и понятие начального члена натурального ряда (за к-рый можно принять 0 или 1). Эти понятия связаны между собой пятью аксиомами, к-рые можно рассматривать как аксиоматич. определение указанных основных понятий.

Аксиомы Пеано: 1) 1 есть натуральное число; 2) следующее за натуральным числом есть натуральное число; 3) 1 не следует ни за каким натуральным числом; 4) если натуральное число a следует за натуральным числом b и за натуральным числом c, то b и c тождественны; 5) если к.-л. предложение доказано для 1 и если из допущения, что оно верно для натурального числа n, вытекает, что оно верно для следующего за n натурального числа, то это предложение верно для всех натуральных чисел. Эта аксиома 5) — аксиома полной индукции — даёт возможность в дальнейшем пользоваться грассмановскими определениями действий и доказывать общие свойства натуральных чисел.

Эти построения, дающие решение задачи обоснования формальных положений А., оставляют в стороне вопрос о логич. структуре А. натуральных чисел в более широком смысле слова, с включением тех операций, к-рые определяют собой приложения А. как в рамках самой математики, так и в практич. жизни. Анализ этой стороны вопроса, выяснив содержание понятия количественного числа, вместе с тем показал, что вопрос об обосновании А. тесно связан с более общими принципиальными проблемами методологич. анализа математич. дисциплин. Если простейшие предложения А., относящиеся к элементарному счёту объектов и являющиеся обобщением многовекового опыта человечества, естественно укладываются в простейшие логич. схемы, то А. как математич. дисциплина, изучающая бесконечную совокупность натуральных чисел, требует исследования непротиворечивости соответствующей системы аксиом и более детального анализа смысла вытекающих из неё общих предложений. См. *Аксиоматический метод*.

● История математики, т. 1—3, М., 1970—72; Депман И. Я., История арифметики, 2 изд., М., 1965; Нечаев В. И., Числовые системы, М., 1975.

И. В. Арнольд.

АРИФМЕ́ТИКО-ГЕОМЕТРИ́ЧЕСКОЕ СРЕ́ДНЕЕ — общий предел последовательностей $\bar{x}_n$ и g_n, полученных следующим образом. Для пары положительных чисел a и b составляются арифметич. среднее $\bar{x}_1$ и геометрич. среднее g_1. Затем для пары $\bar{x}_1$, g_1 снова находят арифметич. среднее $\bar{x}_2$ и геометрич. среднее g_2 и т. д. В результате получают последовательности чисел $\bar{x}_n$ и g_n, $n=1, 2, \ldots$

АРИФМЕ́ТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕ́ССИЯ, арифметический ряд 1-го порядка,— последовательность чисел, в которой каждый член (начиная со второго) получается из предыдущего путём прибавления к нему одного и того же числа d, называемого разностью этой А. п. Таким образом, каждая А. п. имеет вид

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots;$$

общий член

$$a_n=a+(n-1)\,d.$$

Характеристич. свойство А. п.:

$$a_n=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}.$$

Если $d>0$, то А. п. наз. возрастающей, если $d<0$ — убывающей. Простейший пример А. п.— натуральный ряд чисел 1, 2, 3, ..., n, ... Число членов А. п. может быть ограниченным или неограниченным. Если А. п. содержит n членов, то её сумму можно вычислить по формуле

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\,n}{2}.$$

АРИФМЕ́ТИЧЕСКАЯ ПРОПО́РЦИЯ, разностная пропорция,— равенство вида

$$a-b=c-d,$$

где a, b, c, d — числа.

АРИФМЕ́ТИЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция, аргументы и значения которой — натуральные числа.

АРИФМЕ́ТИЧЕСКИЙ КО́РЕНЬ, арифметическое значение корня n-й степени из действительного числа $a\geqslant 0$, — неотрицательное число, n-я степень которого равна a. Если рассматриваются два действительных значения корня чётной степени из неотрицательного числа, то говорят об алгебраическом значении корня в области действительных чисел; если же рассматриваются все n значений корня n-й степени, то говорят о значении корня в области комплексных чисел.

АРИФМЕ́ТИЧЕСКИЙ РЯД порядка m — последовательность значений многочлена степени m:

$$p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m,$$

принимаемых им при последовательных целых неотрицательных значениях переменной x ($x=0, 1, 2, \ldots$). При $m=1$, то есть $p(x)=a_0+a_1x$, получается арифметич. прогрессия с начальным членом a_0 и разностью a_1. При $p(x)=x^2$

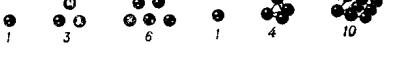


Рис. 1. Рис. 2.

или $p(x)=x^3$ получаются последовательности квадратов или кубов целых чисел. Если составить ряд из разностей соседних членов А. р., затем для полученной последовательности разностей также образовать их разности (вторые разности) и т. д., то на m-м этапе окажется, что все (m-е) разности равны между собой. Обратно, если для нек-рой последовательности чисел её m-е разности равны между собой, то эта последовательность есть А. р. порядка m. Пользуясь этим свойством, можно строить А. р. различных порядков, отправляясь от их разностей. Напр., последовательность 1, 1, 1, ... можно рассматривать как первые разности последовательности натуральных чисел: 1, 2, 3, ...— как вторые разности последовательности треугольных чисел: 1, 3, 6, 10, ...— как третьи разности последовательности тетраэдрических чисел: 1, 4, 10, 20, ..., и т. д. Названия этих чисел объясняются тем, что треугольные числа выражают числа

шаров, уложенных в виде треугольника (рис. 1), а тетраэдрические — в виде тетраэдра (пирамиды) (рис. 2). Треугольные числа выражаются формулой

$$\frac{n(n+1)}{2},$$

а тетраэдрические — формулой

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \quad n=1, 2, 3\ldots$$

Обобщением треугольных чисел являются многоугольные числа; см. о них в ст. *Фигурные числа.*

АРИФМЕТИ́ЧЕСКИЙ ТРЕУГО́ЛЬНИК — то же, что *Паскаля треугольник.*

АРИФМЕТИ́ЧЕСКОЕ ЗНАЧЕ́НИЕ корня — то же, что *арифметический корень.*

АРИФМЕТИ́ЧЕСКОЕ СРЕ́ДНЕЕ n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — число $\bar{x}$, получаемое делением их суммы на их число n:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

АРКСИ́НУСА ЗАКО́Н — см. *Бернулли блуждание.*

АРКФУ́НКЦИЯ (от лат. arcus — дуга и *функция*) — то же, что *обратная тригонометрическая функция*, т. е. одна из функций: арксинус (Arc sin x), арккосинус (Arc cos x), арктангенс (Arc tg x) и арккотангенс (Arc ctg x).

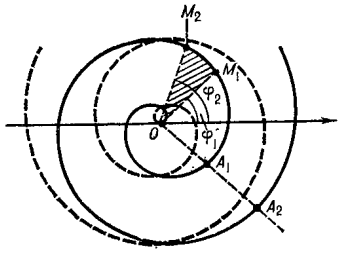
А́РНОСТЬ [от лат. -ar(ius) — суффикс прилагательных типа binarius — двоичный, unarius — имеющий одну форму] операции — см. *Алгебраическая операция.*

А́РТИНОВО КОЛЬЦО́ — понятие, двойственное *нётерову кольцу*, т. е. кольцо с условием минимальности для идеалов. Введены в рассмотрение Э. Нётер, названы в честь Э. Артина, к-рому принадлежит ряд первых важных результатов об этих кольцах (напр., *Веддербёрна — Артина теорема*).

АРХИМЕ́ДА АКСИО́МА — аксиома, первоначально сформулированная для отрезков; заключается в том, что, отложив достаточное число раз меньший из двух заданных отрезков, всегда можно получить отрезок, превосходящий больший из них. Аналогично А. а. формулируется для площадей, объёмов, положительных чисел и т. д. Вообще, для данной величины имеет место А. а., если для любых двух значений A и B этой величины, таких, что $A<B$, всегда можно найти целое число m, что $Am>B$; на этом основан процесс последовательного деления в арифметике и геометрии (см. *Евклида алгоритм*). Значение А. а. выяснилось с полной отчётливостью после того, как в 19 в. было обнаружено существование величин, по отношению к к-рым эта аксиома несправедлива,— т. н. неархимедовых величин.

А. а. отчётливо сформулирована Архимедом (3 в. до н. э.) в соч. «Шар и цилиндр»; ранее её применял Евдокс Книдский, поэтому иногда А. а. наз. аксиомой Евдокса. См. также *Величина.*

АРХИМЕ́ДА ТЕЛА́ — то же, что полуправильные *многогранники.* Названы по имени Архимеда, к-рый в не дошедшем до нас сочинении доказал существование 13 типов полуправильных многогранников. Полная теория полуправильных многогранников была восстановлена И. Кеплером (1619).



АРХИМЕ́ДОВА СПИРА́ЛЬ — плоская трансцендентная кривая, траектория точки M, движущейся из точки O с постоянной скоростью v по лучу, вращающемуся около полюса O с постоянной угловой скоростью w (рис.). Уравнение в полярных координатах:

$$\rho=a\varphi,$$

где $a=v/w$. Кривая состоит из двух ветвей (соответствующих положительным и отрицательным значениям φ). Расстояние между двумя последовательными витками постоянно: $OA_1=A_1A_2=2\pi a$. Площадь сектора M_1OM_2:

$$S=\frac{a^2}{6}(\varphi_2^3-\varphi_1^3).$$

Радиус кривизны:

$$R=a\frac{(\varphi^2+1)^{3/2}}{\varphi^2+2}.$$

А. с. относится к алгебраич. *спиралям.*

Кривая названа по имени Архимеда (3 в. до н. э.), к-рый изучал её свойства в связи с задачами трисекции угла и квадратуры круга и нашёл площадь её сектора (один из первых примеров квадратуры криволинейной области).

АСИММЕТРИ́Й КОЭ́ФФИЦИЕ́НТ — наиболее употребительная мера *асимметрии распределения*, определяемая отношением

$$\gamma=\frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}},$$

где μ_2 и μ_3 — 2-й и 3-й центральные моменты распределения соответственно.

АСИММЕТРИ́ЧНОСТЬ (от греч. ἀσυμμετρία — несоразмерность, беспорядочность) — асимметричное отношение; см. *Соответствие.*

АСИММЕТРИ́Я РАСПРЕДЕЛЕ́НИЯ — качественное свойство кривой распределения, указывающее на отличие симметричного распределения. А. р. положительна (отрицательна), если *асимметрии коэффициент* положителен (отрицателен). При положительной (отрицательной) А. р. более «длинная» часть кривой плотности распределения лежит правее (левее) *моды.*

АСИ́МПТОТА (от греч. ἀσύμπτωτος — несовпадающий, не касающийся) кривой с бесконечной ветвью — прямая, к которой эта ветвь неограниченно приближается. Напр., у гиперболы $y=1/x$ (рис. 1) асимптотами являются оси координат Ox и Oy. Кривая может пересекать

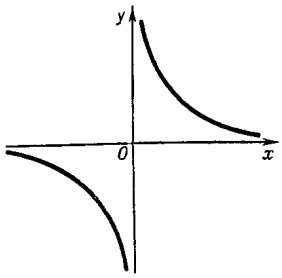


Рис. 1.

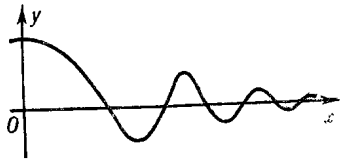


Рис. 2.

свою А. (напр., график затухающих колебаний, рис. 2). Кривые с бесконечными ветвями могут не иметь А. (напр., у параболы нет А.). Если график функции $y=f(x)$ имеет А., определяемую уравнением $y=ax+b$, то эта функция может быть представлена в виде $f(x)=ax+b\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

Термин «А.» (применительно к гиперболе) приписывают Аполлонию Пергскому (3 в. до н. э.).

АСИМПТОТИ́ЧЕСКАЯ ЛИ́НИЯ — линия на поверхности, *нормальная кривизна* которой равна нулю.

АСИМПТОТИ́ЧЕСКАЯ ПРОИЗВО́ДНАЯ, аппроксимативная производная,— см. *Производная.*

АСИМПТОТИ́ЧЕСКАЯ ТО́ЧКА кривой — один из типов *особых точек* кривой.

АСИМПТОТИ́ЧЕСКАЯ ФО́РМУЛА — то же, что *асимптотическое соотношение.*

АСИМПТОТИ́ЧЕСКИЙ КО́НУС — см. *Гиперболоид.*

АСИМПТОТИ́ЧЕСКИЙ РЯД — см. *Асимптотическое разложение.*

АСИМПТОТИ́ЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕ́НИЕ функции — приближённое представление функции при помощи другой более простой функции на основе их *асимптотического равенства.* Точнее, функция $g(x)$ служит А. в. для функции $f(x)$ при $x\to x_0$, если $f(x)\sim g(x)$ или, что то же самое, $f(x)=g(x)[1+o(1)]$ при $x\to x_0$. А. в. функций используется

при изучении поведения функций при стремлении аргумента к нек-рому пределу (обычно к нулю или бесконечности). А. в. имеет практич. смысл, если $g(x)$ является легко вычислимой функцией. Напр., при $x\to 0$

$$\sin x \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \ln(1+x) \sim x,$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \quad (a > 0,\ a \neq 1).$$

Более сложные примеры А. в. при $x\to\infty$:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x},$$

где $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x;

$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x,$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция; см. также *Стирлинга формулу*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

при $n\to\infty$. А. в. рассматриваются также и в комплексной плоскости. А. в. можно сделать более точным за счёт дополнительных членов, используя асимптотич. разложения функций. Распространённым методом нахождения А. в. нек-рых интегралов служит *перевала метод*.

АСИМПТОТИ́ЧЕСКОЕ НАПРАВЛЕ́НИЕ — направление на поверхности, вдоль к-рого нормальная кривизна равна нулю.

АСИМПТОТИ́ЧЕСКОЕ РА́ВЕНСТВО двух функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to x_0$ — приближённое равенство, определяемое соотношением

$$f(x) = g(x)[1+\alpha(x)],$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$, то есть $\alpha(x) = o(1)$. Таким образом, А. р. функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to x_0$ означает, что относительная погрешность $\frac{|f(x)-g(x)|}{g(x)}$ при $g(x)\neq 0$ является бесконечно малой величиной $o(1)$ при $x\to x_0$. А. р. записывается $f(x)\sim g(x)$ при $x\to x_0$, а сами функции $f(x)$ и $g(x)$ в этом случае наз. эквивалентными при $x\to x_0$. См. *Асимптотическое выражение*, *Асимптотическое разложение*.

АСИМПТОТИ́ЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕ́НИЕ функции $f(x)$ — ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$

такой, что при любом целом $N\geqslant 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \varphi_n(x) + o(\varphi_N(x))$$

при $x\to x_0$, где каждый следующий член ряда бесконечно мал по сравнению с предыдущими. В этом случае пишется

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$

при $x\to x_0$.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$

наз. асимптотическим рядом. Наиболее употребительны и удобны асимптотич. степенные ряды. Примерами таких рядов могут служить ряды Тейлора. Напр., при $x\to 0$

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

Но, как правило, асимптотич. ряды расходятся. Однако, ограничиваясь конечным числом членов А. р. можно получить полезные формулы, используемые на практике для приближённого вычисления функций, оценок интегралов, решений уравнений. Напр., *Стирлинга формула* получается из А. р. для $\ln(n!)$ при $n\to\infty$ — ряда Стирлинга:

$$\ln(n!) \sim \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \frac{B_2}{1\cdot 2n} - \frac{B_4}{3\cdot 4n^3} + \frac{B_6}{5\cdot 6n^5} - \dots,$$

где B_2, B_4, B_6, ... — числа Бернулли, к-рый расходится.

Частные случаи А. р. были открыты и использованы ещё в 18 в. Точное понятие А. р. и асимптотич. ряда были введены А. Пуанкаре (1886) в связи с задачами небесной механики. Метод А. р. является эффективным методом изучения функций в численных задачах математики, механики, физики.

● Эрдейи А., Асимптотические разложения, пер. с англ., М., 1962; Брейн Н. Г., Асимптотические методы в анализе, пер. с англ., М., 1961; Олвер Ф., Введение в асимптотические методы и специальные функции, пер. с англ., М., 1978.

АСИМПТОТИ́ЧЕСКОЕ СООТНОШЕ́НИЕ, асимптотическая формула, — соотношение, описывающее поведение при $x\to x_0$ данной функции $f(x)$ в терминах известной функции $g(x)$. Чтобы описать его, используются символы o-малое и O-большое, введённые П. Бахманом (1894) и Э. Ландау (1909), и знак $\sim$ эквивалентности, введённый П. Дюбуа-Реймоном (1870):

а) $f(x) = o(g(x))$ при $x\to x_0$, если

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

б) $f(x) = O(g(x))$ при $x\to x_0$, если отношение $f(x)/g(x)$ ограничено при $x\neq x_0$ в нек-рой окрестности x_0. В частности, если

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

существует и отличен от нуля, то $f(x)\sim Kg(x)$ (см. *Асимптотическое равенство*).

Примеры:

$$\sin x = x + o(x^2), \quad x \to 0;$$

$$\cos x = 1 + O(x^2), \quad x \to 0;$$

$$x^2 + x + 1 \sim x^2, \quad x \to \infty.$$

АССЕ́МБЛЕР (англ. Assembler, букв. — собиратель, от assemble — собирать, монтировать) — см. *Машинно-ориентированный язык*.

АССОЦИАТИ́ВНАЯ АЛГЕБРА — алгебра A над полем (или кольцом) P с ассоциативным умножением, причём умножение на элементы из P связано с умножением в алгебре условиями

$$\alpha(ab) = (\alpha a)\, b = a\,(\alpha b)$$

для всех $\alpha\in P$, a, $b\in A$.

АССОЦИАТИ́ВНОЕ КО́ЛЬЦО — кольцо, умножение в котором удовлетворяет закону ассоциативности.

АССОЦИАТИ́ВНОСТЬ (от позднелат. associatio — соединение), сочетательность, сочетательный закон, — свойство сложения и умножения чисел, выражаемое тождествами $(a+b)+c = a+(b+c)$ и $(ab)c = a(bc)$. В общем смысле операция $*$ наз. ассоциативной, если $(a*b)*c = a*(b*c)$. Свойством А. обладает умножение матриц, подстановок, преобразований; векторное умножение не ассоциативно.

Термин «ассоциативный» ввёл (1843) У. Гамильтон.

АССОЦИА́ТОР элементов a, b, c кольца — элемент, равный разности $(ab)c - a(bc)$ произведений этих элементов при различной расстановке скобок. А. отличен от нуля только в неассоциативном кольце. Обозначается (a, b, c).

АССОЦИИ́РОВАННЫЕ УРАВНЕ́НИЯ — то же, что *транспонированные уравнения*.

АСТРО́ИДА (от греч. ἀστρον — звезда и εἶδος — вид) — плоская алгебраическая кривая 6-го порядка, которая описывается точкой M окружности радиуса r, катящейся по внутренней стороне окружности радиуса $R = 4r$; гипоциклоида с модулем $m = \frac{1}{4}$. Уравнение в прямоугольных координатах:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3},$$

параметрич. уравнения:

$$x = R\cos^3\frac{t}{4}, \quad y = R\sin^3\frac{t}{4}.$$

Имеются четыре точки возврата (рис.). Длина дуги от точки A:

$$l=\frac{3}{2}R\sin^2\frac{t}{4}.$$

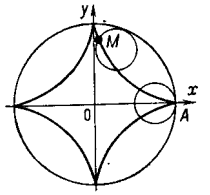
Длина всей кривой $6R$. Радиус кривизны:

$$r_k=\frac{3}{2}R\sin\frac{t}{2}.$$

Площадь, ограниченная кривой:

$$S=\frac{3}{8}\pi R^2.$$

А. является огибающей семейства отрезков постоянной длины, концы к-рых расположены на двух взаимно перпендикулярных прямых. С этим свойством А. связано одно из её обобщений, т. н. косая астроида — огибающая отрезков постоянной длины, концы к-рых расположены на двух прямых, пересекающихся под произвольным углом.



АФФИ́ННАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ (от лат. affinis— родственный)— раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур на плоскости (или в пространстве), сохраняющиеся при любых *аффинных преобразованиях* плоскости (или пространства), т. е. инвариантные относительно таких преобразований. Основной аффинный инвариант — простое отношение трёх точек M_1, M_2, M_3, лежащих на одной прямой: $(x_2-x_1)/(x_3-x_2)$, где x_i — абсциссы этих точек. Аффинные инварианты любой системы, состоящей из n точек ($n\geqslant 4$), могут быть выражены через простые отношения. Отсюда, в частности, вытекает, что центр тяжести геометрич. фигуры сохраняется при аффинных преобразованиях.

Свойства геометрич. образов, переходящих друг в друга при афинных преобразованиях, впервые изучались А. Мёбиусом в 1-й пол. 19 в.; однако понятие «А. г.» возникло лишь после появления в 1872 *эрлангенской программы*, согласно к-рой каждой группе преобразований отвечает своя геометрия, изучающая свойства фигур, инвариантные относительно преобразований этой группы.

● Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии..., М., 1968; Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978.

АФФИ́ННАЯ КОНЕ́ЧНАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ — см. *Блок-схема.*

АФФИ́ННАЯ КРИВИЗНА́ — см. *Дифференциальная геометрия.*

АФФИ́ННАЯ СВЯ́ЗНОСТЬ — см. *Дифференциальная геометрия.*

АФФИ́ННАЯ СИСТЕ́МА КООРДИНА́Т — см. *Декартова система координат.*

АФФИ́ННАЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Линейная функция.*

АФФИ́ННОЕ АЛГЕБРАИ́ЧЕСКОЕ МНОГООБРА́ЗИЕ — см. *Алгебраическое многообразие.*

АФФИ́ННОЕ АЛГЕБРАИ́ЧЕСКОЕ ПРОСТРА́НСТВО — см. *Алгебраическое многообразие.*

АФФИ́ННОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — точечное взаимно однозначное отображение плоскости или пространства на себя, при котором трём точкам, лежащим на одной прямой, соответствуют три точки, также лежащие на одной прямой. А. п. переводит пересекающиеся прямые в пересекающиеся, параллельные прямые — в параллельные. При А. п. пространства каждая плоскость аффинно отображается на нек-рую плоскость; при этом пересекающиеся плоскости переходят в пересекающиеся, параллельные плоскости — в параллельные; скрещивающиеся прямые переходят в скрещивающиеся.

При А. п. отношение направленных отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, равно отношению их образов. Сохраняется также отношение площадей двух квадрируемых фигур на евклидовой плоскости и отношение двух кубируемых тел в евклидовом пространстве. При А. п. множество векторов плоскости (пространства) взаимно однозначно отображается на множество векторов плоскости (пространства), и это отображение является линейным. А. п. на плоскость задаётся формулами

$$x'=c_{11}x+c_{12}y+c_{13},$$
$$y'=c_{21}x+c_{22}y+c_{23},$$

где

$$\mathcal{D}=\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Аналогично задаётся А. п. в пространстве.

При А. п. алгебраич. линия переходит в алгебраическую; при этом порядок линии сохраняется. В частности, эллипсы переходят в эллипсы, гиперболы — в гиперболы, параболы — в параболы.

А. п. образуют группу. Подгруппами этой группы являются множества всех преобразований *подобия*, всех *сдвигов*, всех *сжатий* к прямой, всех *ортогональных преобразований*, всех эквиаффинных (т. е. преобразований, сохраняющих площадь параллелограмма, при этом $D=1$) или унимодулярных преобразований. А. п., сохраняющие неподвижную точку, наз. центроаффинными преобразованиями ($c_{13}=c_{23}=0$).

АФФИ́ННЫЕ КООРДИНА́ТЫ — см. *Координаты.*

АФФИ́НОР — см. *Тензорное исчисление.*

«АХИЛЛЕ́С И ЧЕРЕПА́ХА» — одна из апорий Зенона; см. *Антиномия.*

А́ХМЕСА ПАПИ́РУС, папирус Ринда,— древнеегипетская математическая рукопись, хранящаяся в Британском музее в Лондоне; названа по имени её составителя писца Ахмеса (ок. 2000 до н. э.). См. *Папирусы* математические.

Б

БА́ЗА (от греч. βάσις — основание) — 1) Б. топологического пространства X, база топологии, базис топологии, открытая база,— семейство B открытых подмножеств пространства X такое, что каждое открытое множество $G\subset X$ является объединением некоторых элементов из B. Понятие Б.— одно из основных в топологии: во многих вопросах, относящихся к открытым множествам нек-рого пространства, достаточно ограничиться рассмотрением элементов его Б. Пространство может иметь много Б., наибольшую из к-рых образует семейство всех открытых множеств. Минимум мощностей всех Б. наз. весом топологич. пространства X.

2) Б. векторного пространства — то же, что базис *векторного пространства.*

3) Б. свободной универсальной алгебры — см. *Универсальная алгебра.*

БА́ЗА ДА́ННЫХ — организованная совокупность данных, предназначенная для их эффективного хранения, накопления и обработки с помощью ЭВМ.

Для создания и ведения Б. д. используются программные системы, наз. системами управления Б. д. (СУБД). Построенная на основе СУБД конкретная про-

граммная система вместе с конкретной Б. д., для ведения к-рой она построена, наз. информационной системой. Б. д., или информационная система, наз. также банком данных. В эти понятия иногда включают персонал (администрацию Б. д. и др.) и технологич. средства, рассматривая всё вместе как человеко-машинную систему.

Организация СУБД может включать в себя несколько уровней. На высоких уровнях, наз. концептуальными, логическими или внешними, данные представляются в форме, более ориентированной на человека, а низкие уровни, наз. физическими или внутренними, ориентированы на машинное представление. Средства описания данных и манипулирования данными в СУБД образуют модель данных, в рамках к-рой выделяют язык описания данных и язык манипулирования данными (в него входит язык запросов к Б. д.). Модель данных может включать в себя понятие схемы Б. д., под к-рой понимается система типов объектов и типов связей между объектами в Б. д.

Наиболее распространёнными моделями данных на логич. уровне являются иерархическая, сетевая и реляционная модели. Основное понятие реляционной модели — конечное отношение, представляемое в виде таблицы, столбцам к-рой присвоены имена, наз. атрибутами (признаками). Строки таблиц интерпретируются либо как описания объектов с данными атрибутами, либо как описания связей между объектами (для этого используются атрибуты, наз. ключевыми, к-рые однозначно идентифицируют объекты).

В иерархической модели связи между объектами описываются деревьями, а в сетевой модели — более сложными графообразными структурами, в к-рых каждая бинарная связь представляет функциональное отношение. Более простые способы представления данных в виде последовательностей записей определённого формата характерны для т. н. файловых систем. Языки манипулирования данными содержат средства ввода, вывода и обновления данных, средства перехода по связям и поиска объектов, удовлетворяющих заданным условиям. Причём в них могут использоваться менее процедурные средства, чем в типичных языках программирования, таких, как алгебра отношений и логика предикатов.

Модели данных логического уровня предназначены для такого моделирования реальных ситуаций, к-рое было бы по возможности независимым от машинного представления и облегчило бы разработчикам и пользователям информационных систем представление и обработку реальных данных. С другой стороны, они должны обеспечивать достаточно эффективное машинное представление и обработку данных. При проектировании Б. д. на более высоком концептуальном уровне соображения эффективности отходят на второй план, и поэтому могут быть использованы средства описания, характерные для специфики программ (см. *Программы спецификация*). Модели данных имеют тенденцию обогащаться и включать в себя новые и разнообразные математич. структуры. СУБД могут быть относительно универсальными (общего назначения) или специализированными. Большой и широко применяемый класс специализированных СУБД образуют программные системы, предназначенные для ведения документальных (библиографических) Б. д., в к-рых хранится библиографич. информация и информация о тематич. содержании документов (книг, статей, отчётов и т. д.). Такие системы наз. информационно-поисковыми системами, а языки для описания тематич. содержания документов и запросов — информационно-поисковыми языками или языками индексирования.

БА́ЗИС (от греч. βάσις — основание) множества X — минимальное порождающее его подмножество B. Порождение означает, что применением операций нек-рого класса к элементам $b \in B$ получается любой элемент $x \in X$. Минимальность означает, что никакое собственное подмножество из B не порождает X, что обусловливает в нек-ром смысле независимость элементов Б.

Примеры. 1) Множество всех натуральных чисел имеет Б. единственный элемент 1 и порождается из него операцией непосредственного следования и её итерациями; это же множество за исключением единицы порождается операцией умножения из Б., состоящего из всех простых чисел.

2) Б. векторного пространства — см. *Векторное пространство.*

3) Б. топологического пространства — его *база.*

БА́ЗИСНЫЙ ВЕ́КТОР системы координат — см. *Декартова система координат, Координаты.*

БА́ЗИСНЫЙ МИНО́Р — см. *Минор.*

БАЛА́НСА МЕ́ТОД (франц. balance, букв.— весы, от лат. bilanx — имеющий две весовые чаши) — см. *Разностных схем теория.*

БА́НАХОВА А́ЛГЕБРА — полная *нормированная алгебра.* Примеры. 1) Совокупность непрерывных на компактном пространстве функций. 2) Совокупность ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве. 3) Совокупность почти периодич. функций на прямой. 4) Совокупность абсолютно интегрируемых на прямой функций со свёрткой в качестве умножения.

БА́НАХОВО ПРОСТРА́НСТВО — полное нормированное пространство. Исходным для создания теории Б. п. послужили введённые (1904—18) Д. Гильбертом, М. Фреше и Ф. Риссом функциональные пространства. Именно в них были первоначально исследованы фундаментальные понятия сильной и слабой сходимости, компактности и т. п. С. Банах (1922) начал систематич. изучение этих пространств на основе введённой им аксиоматики и получил глубокие результаты.

Теория Б. п. развивалась параллельно с общей теорией топологических векторных пространств. Эти теории взаимно обогащались идеями и фактами. Теория Б. п. представляет собой хорошо разработанную область функционального анализа, имеющую многочисленные применения в различных разделах математики.

Примеры.

1) l_p, $p \geqslant 1$,— пространство числовых последовательностей $x = \{x_n\}$, для к-рых

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \subset \infty,$$

с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x|^p\right)^{1/p}.$$

2) c — пространство сходящихся числовых последовательностей с нормой

$$\|x\| = \sup_n |x_n|.$$

3) $C[a, b]$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций $x = x(t)$ с нормой

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

4) $L_p[a, b]$, $p \geqslant 1$,— пространство функций $x = x(t)$, определённых на $[a, b]$, для к-рых

$$\int_a^b |x(t)|^p \, dt < \infty,$$

с нормой

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p}.$$

БАНК ДА́ННЫХ — см. *База данных.*

БАРИЦЕ́НТР (от греч. βάρος — тяжесть и *центр*) — см. *Барицентрические координаты.*

БАРИЦЕНТРИ́ЧЕСКИЕ КООРДИНА́ТЫ — координаты точки n-мерного пространства E^n, отнесённые к некоторой фиксированной системе $p_0, p_1, \ldots, p_n$ точек, не лежащих в $(n-1)$-мерном подпространстве. Каждая точка $x \in E^n$

может быть единственным образом представлена в виде

$$x = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_n p_n,$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — действительные числа, удовлетворяющие условию

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

Точка x, по определению, есть центр тяжести масс $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, помещённых в точках $p_0, p_1, \ldots, p_n$. Числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ наз. барицентрическими координатами точки x; точка с Б. к. $\lambda_i = 1/(i+1)$ наз. барицентром.

Б. к. введены А. Мёбиусом (1827) при решении задачи о том, какие массы следует поместить в вершинах заданного треугольника, чтобы данная точка была центром тяжести этих масс.

БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ — распределение вероятностей, которое при любом $n = 2, 3, 4, \ldots$ может быть представлено как композиция (свёртка) n одинаковых распределений вероятностей. Определение Б. д. р. в равной степени применимо к распределениям на прямой, в конечномерных евклидовых пространствах и в нек-рых ещё более общих случаях. Ниже рассматривается одномерный случай.

Характеристич. функции $f(t)$ Б. д. р. наз. безгранично делимыми. Каждая такая функция при любом n может быть представлена как n-я степень нек-рой другой характеристич. функции:

$$f(t) = (f_n(t))^n.$$

Примерами Б. д. р. могут служить *нормальное распределение*, *Пуассона распределение*, *Коши распределение*, *хи-квадрат распределение*. Проверить свойство безграничной делимости проще всего с помощью характеристич. функций. Композиция Б. д. р. и предел слабо сходящейся последовательности Б. д. р. суть снова Б. д. р.

Случайную величину, определённую на нек-ром вероятностном пространстве, наз. безгранично делимой, если при любом n она может быть представлена в виде суммы n независимых одинаково распределённых случайных величин, определённых на том же пространстве. Распределение каждой такой величины — Б. д. р. Обратное не всегда верно. Так, если взять дискретное вероятностное пространство, образованное неотрицательными целыми числами $m = 0, 1, 2, \ldots$ с приписанными им пуассоновскими вероятностями

$$\mathsf{P}(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

то случайная величина $X(m) = m$ не будет безгранично делимой, хотя её распределение вероятностей (распределение Пуассона) есть Б. д. р.

Б. д. р. впервые появились в связи с изучением стохастически непрерывных однородных случайных процессов с независимыми приращениями. Так называют процессы $X(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, удовлетворяющие требованиям: 1) $X(0) = 0$; 2) распределение вероятностей приращения $X(\tau_2) - X(\tau_1)$, $\tau_2 > \tau_1$, зависит только от $\tau_2 - \tau_1$; 3) при $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_k$ ($k = 3, 4, 5, \ldots$) разности

$$X(\tau_2) - X(\tau_1),\ X(\tau_3) - X(\tau_2),\ \ldots,\ X(\tau_k) - X(\tau_{k-1})$$

являются взаимно независимыми случайными величинами; 4) для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}(|X(\tau)| > \varepsilon) \longrightarrow 0$$

при $\tau \to 0$. Для такого процесса значение $X(\tau)$ при любом τ будет иметь Б. д. р. и соответствующая характеристич. функция удовлетворяет соотношению

$$f_\tau(t) = (f_1(t))^\tau.$$

Общий вид $f_\tau(t)$ для таких процессов в предположении конечности дисперсий $\mathsf{D}X(\tau)$ был найден А. Н. Колмогоровым (частный случай приводимого ниже общего канонич. представления Б. д. р.).

Характеристич. функция Б. д. р. нигде не обращается в нуль, и её логарифм (в смысле главного значения) допускает представление вида

$$\ln f(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{+\infty} L(u, t) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) \qquad (*)$$

(т. н. каноническое представление Леви — Хинчина), где

$$L(u, t) = e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2},$$

γ — нек-рая действительная постоянная, $G(u)$ — неубывающая функция ограниченной вариации с $G(-\infty) = 0$. Подинтегральное выражение при $u = 0$ принимают равным $-t^2/2$. При любом выборе постоянной γ и функции $G(x)$ с указанными выше свойствами формула (*) определяет логарифм характеристич. функции нек-рого Б. д. р. Соответствие между Б. д. р. и парами (γ, G) взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Последнее означает, что Б. д. р. слабо сходятся к предельному Б. д. р. тогда и только тогда, когда $\gamma_n \to \gamma$ и $G_n(x)$ слабо сходятся к $G(x)$ при $n \to \infty$.

Примеры. Пусть $U(x) = 0$, $x \leqslant 0$, $U(x) = 1$, $x > 0$. Тогда для нормального распределения с математич. ожиданием a и дисперсией σ^2 в формуле (*) следует положить

$$\gamma = a, \quad G(x) = \sigma^2 U(x);$$

для распределения Пуассона с параметром λ —

$$\gamma = \frac{\lambda}{2}, \quad G(x) = \frac{\lambda}{2} U(x-1);$$

для распределения Коши с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} —$$

$$\gamma = 0, \quad G(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

Канонич. представление (*) удобно с чисто «технической» точки зрения (благодаря тому, что G имеет ограниченную вариацию), однако функция G не имеет прямого вероятностного истолкования. Поэтому используют и другую форму представления Б. д. р., допускающую непосредственную вероятностную интерпретацию. Пусть функции $M(u)$ и $N(u)$ определены при $u < 0$ и $u > 0$ соответственно формулами:

$$dM(u) = \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u),$$

$$dN(u) = \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u),$$

$$M(-\infty) = N(\infty) = 0.$$

Эти функции неубывающие, $M(u) \geqslant 0$ при $u < 0$ и $N(u) \leqslant 0$ при $u > 0$; в окрестности нуля функции могут неограниченно возрастать. Обозначая дополнительно через σ^2 скачок функции G в нуле, формулу (*) можно переписать в виде

$$\ln f(t) = i\gamma t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{-\infty}^{-0} L(u, t)\, dM(u) + \int_{+0}^{\infty} L(u, t)\, dN(u)$$

(каноническое представление Леви). Функции M и N описывают, грубо говоря, частоту скачков различного размера в однородном процессе $X(\tau)$ с независимыми приращениями, для к-рого

$$\ln f_\tau(t) = \tau \ln f(t).$$

Важная роль Б. д. р. в предельных теоремах теории вероятностей связана с тем, что эти и только эти распределения могут быть предельными для сумм независимых случайных величин, подчинённых требованию т. н. асимптотической пренебрегаемости. При этом рассматривают последовательность серий $X_{n1}, \ldots, X_{nk_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, взаимно независимых случайных величин и затем подбирают взаимно независимые случайные величины $Y_{n1}, \ldots, Y_{nk_n}$, имеющие Б. д. р. (т. н. сопровождающие Б. д. р.); характеристич. функция $g_{nk}(t)$ величины Y_{nk} определяется по характеристич. функции $f_{nk}(t)$ величины X_{nk} так, чтобы

выполнялось следующее основное свойство: распределения сумм

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} - A_n$$

сходятся к предельному распределению (при нек-ром выборе констант A_n) тогда и только тогда, когда сходятся к (к тому же самому) предельному распределения сумм

$$\sum_{k=1}^{k_n} Y_{nk} - A_n.$$

Для симметричного распределения X_{nk} полагают

$$g_{nk}(t) = \exp(f_{nk}(t) - 1).$$

В других случаях выражение g_{nk} сложнее и содержит т. н. урезанные математич. ожидания X_{nk}. Свойства Б. д. р. описывают в терминах функций, входящих в канонич. представления. Так, напр., безгранично делимая функция распределения $F(x)$ непрерывна тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{+} \frac{1}{u^2}\, dG(u) = \infty.$$

Важным частным случаем Б. д. р. являются т. н. *устойчивые распределения*.

● Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М. – Л., 1938; Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987.

Ю. В. Прохоров.

БЕЗОТКАЗНОСТЬ — понятие *надёжности теории*.

БЕЗУ ТЕОРЕМА — 1) Б. т. о делении многочлена на линейный двучлен: остаток от деления многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

на двучлен $x-c$ равен $P_n(c)$. Предполагается, что коэффициенты многочленов содержатся в нек-ром коммутативном кольце с единицей (напр., в поле действительных или комплексных чисел). Следствие Б. т.: число α является корнем многочлена $P_n(x)$ тогда и только тогда, когда $P_n(x)$ делится без остатка на $x-\alpha$. Теорема носит имя Э. Безу (1779), изучавшего системы алгебраич. уравнений высших степеней.

2) Б. т. о системах однородных алгебраических уравнений — см. *Алгебраическая геометрия*.

БЕЙЕСА ТЕОРЕМА — одна из основных теорем элементарной теории вероятностей. Названа по имени установившего её Т. Бейеса (1763). Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — некрые попарно несовместные события, из к-рых хотя бы одно наступает, и B — нек-рое событие с $P(B)>0$. Тогда условная вероятность A_k при условии, что наступило B, может быть определена по формуле Бейеса:

$$P(A_k \mid B) = P(B \mid A_k)\,P(A_k) \Big/ \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)\,P(A_i).$$

Б. т. есть следствие теоремы умножения вероятностей. В применениях Б. т. события A_k называют обычно гипотезами, вероятности $P(A_k)$ — априорными вероятностями (вероятностями a priori) гипотез, а вероятности $P(A_k \mid B)$ — апостериорными вероятностями (вероятностями a posteriori) этих гипотез (при условии, что событие B наступило). Непосредственное использование Б. т. в качестве основы для статистич. выводов из результатов наблюдений затрудняется тем, что в применениях, как правило, отсутствуют достаточно обоснованные данные об априорных вероятностях гипотез. По этой причине отношение к Б. т. неоднократно пересматривалось. В настоящее время Б. т. используется в рамках т. н. *бейесовского подхода* к решению статистич. задач.

БЕЙЕСА ФОРМУЛА — см. *Бейеса теорема*.

БЕЙЕСОВСКИЙ ПОДХОД — подход к решению статистических задач, основанный на предположении, что параметр в статистической модели является случайной величиной с заданным распределением вероятностей. Пусть множество результатов наблюдения описывается значениями $x \in \mathbb{R}^k$ случайной величины X, распределение к-рой принадлежит семейству P_θ, $\theta \in \Theta$, где Θ — множество значений параметра θ, тогда в соответствии с общими принципами *статистических решений теории* можно определить: пространство решений D, функцию потерь $L(\theta, d)$, характеризующую потери от принятия решения d, когда истинное значение параметра есть θ; и наконец решающее правило (решающую функцию) $\delta = \delta(x)$, сопоставляющее каждому результату наблюдений x решение $\delta(x) \in D$. Поскольку параметр θ предполагается случайной величиной с заданным (априорным) распределением, то при дополнительном допущении, что это распределение обладает плотностью $\pi(\theta)$ и $\Theta \subseteq \mathbb{R}^1$, полная средняя потеря от применения решающего правила δ равна

$$\rho(\pi, \delta) = \int \mathsf{E}_\theta L(\theta, \delta(X))\,\pi(\theta)\,d\theta.$$

Решение δ^*, минимизирующее $\rho(\pi, \delta)$, наз. бейесовским решением (бейесовской решающей функцией), соответствующим априорному распределению с плотностью $\pi(\theta)$. Минимум $\rho(\pi, \delta^*)$ наз. бейесовским риском для $\pi(\theta)$. В случае если $p_\theta(x)$ — условная плотность X при данном θ, то решение δ — бейесовское, если $\delta(x)$ при каждом x выбирается так, чтобы минимизировать

$$\int L(\theta, \delta(x))\,\pi(\theta \mid x)\,d\theta,$$

где $\pi(\theta|x)$ — условная (априорная) плотность θ при данном x, определённая по формуле Бейеса

$$\pi(\theta \mid x) = \pi(\theta)\,p_\theta(x)/p(x),$$

где

$$p(x) = \int \pi(\theta)\,p_\theta(x)\,d\theta.$$

Бейесовский риск записывается в виде

$$\int \left[\int L(\theta, \delta(x))\,\pi(\theta \mid x)\,d\theta \right] p(x)\,dx.$$

Напр., при Б. п. к задаче точечного статистич. оценивания параметра θ при квадратичной функции потерь $L(\theta, \alpha) = (\theta-\alpha)^2$ бейесовским решением (бейесовской оценкой) служит $\delta^*(x) = \mathsf{E}(\theta \mid x)$, а бейесовский риск равен $\rho(\pi, \delta^*) = \mathsf{E}[\mathsf{D}(\theta \mid x)]$ ($\mathsf{E}(\theta|x)$ и $\mathsf{D}(\theta|x)$ — математич. ожидание и дисперсия апостериорного распределения).

Б. п. облегчает поиск наилучшего решающего правила, так как бейесовские решения существуют при весьма общих условиях. Однако главным препятствием к использованию Б. п. является его основное предположение, что априорное распределение не только существует, но и известно. Последнее из этих допущений практически не оправдывается. В приложениях априорное распределение, если это возможно, выбирают так, чтобы полнее учесть информацию о параметре, к-рая известна до эксперимента. Осложнение, возникающее при неизвестном априорном распределении, в нек-рых случаях преодолевается в рамках т. н. эмпирического Б. п.

● Кокс Д., Хинкли Д., Теоретическая статистика, пер. с англ., М., 1978; Уилкс С., Математическая статистика, пер. с англ., М., 1967.

БЕЙЕСОВСКИЙ РИСК — см. *Бейесовский подход*.

БЕЙЕСОВСКОЕ РЕШЕНИЕ — см. *Бейесовский подход*.

БЕЙСИК — (BASIC — сокращение от слов Beginners All-purpose Symbolic Instruction Code, англ. beginners — для начинающих, all-purpose — универсальный, symbolic — символический, instruction — учебный, code — код) — *программирования язык*, ориентированный на обучение основам программирования. Разработан в 60-х гг. (в США). Благодаря своей простоте и приспособленности к диалоговому взаимодействию с ЭВМ, Б. стал стандартным языком, реализованным для всех типов персональных ЭВМ. Программа на языке Б. записывается в виде последователь-

ности занумерованных строк, каждая из к-рых вмещает одну или несколько команд. Основные команды Б.— присваивание, безусловная и условная передачи управления по номеру команды, вызов подпрограммы, ввод и вывод данных. Основные типы данных — целые, действительные и литерные (строки символов) переменные, а также индексируемые элементы векторов и матриц.

● Кетков Ю. Л., Программирование на БЕЙСИКе, М., 1978; Уорт Т., Программирование на языке БЕЙСИК, пер. с англ., М., 1981.

БЕ́ЛЛМАНА УРАВНЕ́НИЕ — 1) дифференциальное уравнение с частными производными специального типа для решения задач *оптимального управления*.

2) Рекуррентное соотношение для решения задачи оптимального управления. Метод получения оптимального решения с помощью Б. у. носит название *динамического программирования*. Уравнения названы по имени Р. Беллмана, сформулировавшего основные принципы динамич. программирования.

БЕЛЬТРА́МИ ИНТЕРПРЕТА́ЦИЯ — реализация части плоскости Лобачевского на псевдосфере. Предложена Э. Бельтрами (1868). См. *Лобачевского геометрия*.

БЕРНУ́ЛЛИ БЛУЖДА́НИЕ — *случайное блуждание*, порождаемое *Бернулли испытаниями*. На примере Б. б. можно пояснить нек-рые основные черты более общих случайных блужданий. В частности, уже в этой простейшей схеме проявляются свойства «случайности», парадоксальные с точки зрения интуиции.

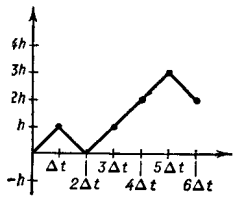


Рис. 1. Начальный участок графика движения частицы, совершающей блуждание Бернулли.

Б. б. можно описать, напр., в следующих терминах. Частица движется по оси x («блуждает») по решётке точек вида kh (k — целое, $h>0$). Движение начинается в момент $t=0$, и положение частицы отмечается только в дискретные моменты времени 0, Δt, $2\Delta t$, $3\Delta t$,. . .. На каждом шаге координата частицы увеличивается или уменьшается на величину h с вероятностями p и $q=1-p$ соответственно, независимо от предшествующего движения. Таким образом, перемещения в положительном и отрицательном направлениях («удачи» и «неудачи») описываются схемой испытаний Бернулли с вероятностью удачи, равной p. Б. б. изображают геометрически, беря ось t за ось абсцисс, а ось x — за ось ординат (см. рис. 1, где показан начальный участок графика движения частицы, начинающей блуждание из нуля). Пусть X_j — случайная величина, равная перемещению частицы на j-м шаге. Тогда, X_1, X_2, . . ., X_n, . . . образуют последовательность независимых случайных величин. Координата блуждающей частицы в момент $n\Delta t$ равна сумме $S_n=X_1+\ldots+X_n$. Поэтому график Б. б. даёт также наглядное представление о поведении харастающих сумм случайных величин, причём многие наратерные черты флуктуаций сохраняются и для сумм значительно более общих случайных величин. Этот график показывает также изменения капитала одного из игроков в классич. задаче о разорении (именно в связи с этой задачей были найдены формулы для вероятностей многих событий в Б. б.).

В физике Б. б. используют для грубого описания одномерных процессов диффузии (см. *Диффузионный процесс*) и броуновского движения материальных частиц под действием ударов молекул.

Из важнейших фактов, связанных с Б. б., можно отметить следующие (при этом ниже, если не оговорено противное, принято допущение $\Delta t=1$, $h=1$).

Вероятности возвращения. Пусть блуждание начинается из нуля. Тогда вероятность хотя бы одного возвращения в нуль равна $1-|p-q|$, т. е. равна единице в симметричном случае $p=q=1/2$ и меньше единицы при $p\neq q$. В симметричном случае величины τ_1 (время до первого возвращения в нуль) и τ_2 (время между первым и вторым возвращениями) и т. д. суть независимые случайные величины с бесконечным математич. ожиданием. Время до N-го возвращения, т. е. сумма $\tau_1+\ldots+\tau_N$ растёт как N^2, а среднее число N_{2n} возвращений за $2n$ шагов задаётся формулой

$$\mathsf{E}(N_{2n})=\frac{2n+1}{2^{2n}}C_{2n}^{n}-1$$

и растёт как $\sqrt{n}$:

$$\mathsf{E}(N_{2n})\sim 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}.$$

Отсюда вытекает парадоксальное следствие: в симметричном Б. б. «волны» на графике между последовательными возвращениями в нуль оказываются поразительно длинными (рис. 2). С этим связано и другое обстоятельство, а

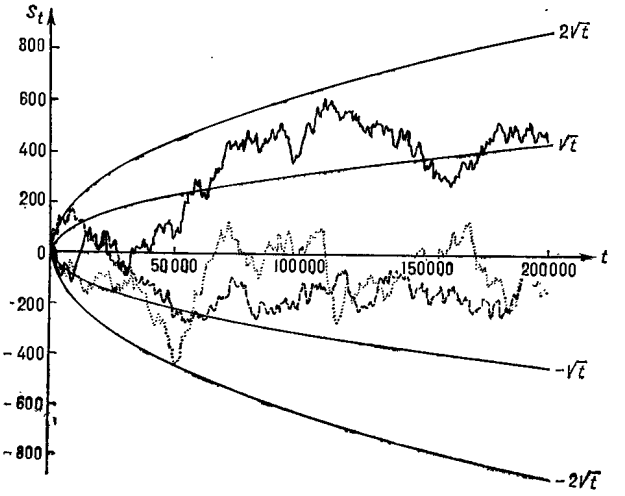


Рис. 2. Графики трёх блужданий Бернулли; каждое наблюдалось на протяжении 200 000 единиц времени.

именно, что для T_n/n (доли времени, когда график находится выше оси абсцисс) наименее вероятными оказываются значения, близкие к $^1/_2$. Точнее, справедливо следующее утверждение: при $k\to\infty$, $n-k\to\infty$ для вероятности $p_{2n,\,2k}$ равенства $T_{2n}=2k$ имеет место формула

$$p_{2n,\,2k}\sim\frac{1}{\pi n\sqrt{x(1-x)}},$$

где $x=x_{nk}=k/n$. Следствием является т. н. закон арксинуса: при каждом $0<\alpha<1$ вероятность неравенства $T_n/n<\alpha$ стремится к

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\alpha}.$$

Опираясь на этот факт, можно показать, что при 10 000 шагов частица остаётся на положительной стороне более чем 9930 моментов времени с вероятностью $\geqslant 0{,}1$, т. е., грубо говоря, подобное положение будет наблюдаться не реже чем в одном случае из десяти (хотя на первый взгляд оно кажется абсурдным).

Максимальное отклонение. При $p>q$ или $p<q$ блуждающая частица уходит с вероятностью единица в $+\infty$ или $-\infty$. Поэтому, напр., при $p<q$ определена случайная величина

$$M^{+}=\max_{0\leqslant j<\infty}S_j,$$

и вероятность того, что $M^{+}=x$, равна

$$\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{x},\ x=0,1,2,\ldots$$

Бернулли блуждание с границами. Часто рассматривают Б. б. при наличии поглощающих или отражающих экранов. Пусть, напр., блуждание начи-

нается из нуля. Наличие в точке a поглощающего экрана проявляется в том, что по достижении этой точки частица перестаёт двигаться. При наличии в точке $a=(k+1/2)$ ($k\geqslant 0$ целое) отражающего экрана частица с вероятностью q переходит из k в $(k-1)$ и с вероятностью p остаётся на месте. Основным средством вычисления вероятностей поглощения и вероятностей достижения тех или иных точек служат разностные уравнения. Пусть, напр., поглощающий экран стоит в точке $-a$ ($a>0$). Если $z_{t,x}$ есть вероятность того, что частица, находящаяся в точке x в момент времени t, поглотится до момента n (включительно), то имеет место уравнение

$$z_{t,x}=qz_{t+1,\,x-1}+pz_{t+1,\,x+1},\quad x>-a,$$

со следующими очевидными граничными условиями:

$$z_{t,-a}=1,\quad 0\leqslant t\leqslant n,$$
$$z_{n,x}=0,\quad x>-a.$$

Решение этой задачи при $p=q=1/2$ было известно А. Муавру и П. Лапласу. Формула Лапласа имеет вид

$$z_{t,x}=1-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(a+x)\varphi}{\sin\varphi}(\cos\varphi)^{\gamma}\,d\varphi,\qquad (*)$$

где

$$\gamma=a+x+2\left[\frac{n-t-x-a}{2}\right]+1.$$

Переход к процессам диффузии. Пусть, напр., $p=q=1/2$, $\Delta t=1/N$, $h=1/\sqrt{N}$. Тогда при $N\to\infty$ многие вероятности, вычисленные для схемы Б. б., стремятся к пределам, равным аналогичным вероятностям для броуновского движения. Пусть речь идёт о вероятности того, что частица, вышедшая из нуля, поглотится экраном, стоящим в точке α, до момента T. Предельным переходом из формулы (*) при $n/N=T$, $t=0$, $x=0$, $a/\sqrt{N}=\alpha$ получается после нек-рого преобразования величина

$$1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha/\sqrt{T}}e^{-z^2/2}\,dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha/\sqrt{T}}^{\infty}e^{-z^2/2}\,dz,$$

равная вероятности того, что координата $X(v)$ частицы, совершающей броуновское движение, удовлетворяет неравенству

$$\min_{0\leqslant v\leqslant T}X(v)\leqslant-\alpha,$$

т. е. вероятности того, что частица поглотится на барьере — α. Для более или менее полного описания всех подобных предельных соотношений уместно встать на общую точку врения и рассмотреть переход от дискретного процесса «нарастающих сумм» к непрерывному случайному процессу (см. *Предельные теоремы*).

На схеме Б. б. можно весьма наглядно пояснить такие закономерности поведения сумм случайных величин, как *больших чисел усиленный закон* и *повторного логарифма закон*.

● Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.
Ю. В. Прохоров.

БЕРНУ́ЛЛИ ИСПЫТА́НИЯ — независимые испытания с двумя случайными исходами («удачей» и «неудачей»), вероятности которых не изменяются от испытания к испытанию. Пусть p — вероятность удачи и $q=1-p$ — вероятность неудачи, и пусть 1 обозначает наступление удачи, а 0 — наступление неудачи. Тогда вероятность определённого чередования удач и неудач, напр.,

10011010...1

равна

$$pqqppqpq\ldots p=p^mq^{n-m},$$

где m — число удач в рассматриваемом ряду n испытаний.

Б. и. представляют собой важнейшую схему, рассматриваемую в теории вероятностей. Схема названа в честь Я. Бернулли, доказавшего свою теорему — закон больших чисел — для такой последовательности испытаний.

Со схемой Б. и. связаны многие распространённые дискретные распределения вероятностей. Пусть S_n — случайная величина, равная числу удач в n Б. и. Тогда вероятность события $\{S_n=k\}$ равна

$$C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,\,1,\,\ldots,\,n,$$

т. е. S_n имеет биномиальное распределение. Последнее при $n\to\infty$ аппроксимируется нормальным распределением или распределением Пуассона. Пусть Y_1 — число испытаний до первой удачи. Тогда вероятность события $\{Y_1=k\}$ равна

$$q^kp,\quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots,$$

т. е. Y_1 имеет геометрическое распределение. Если Y_r — число неудач, предшествующих r-му появлению удачи, то Y_r имеет т. н. отрицательное биномиальное распределение. Число удач S_n в Б. и. можно представить в виде суммы $X_1+X_2+\ldots+X_n$ независимых случайных величин, где X_j равно 1, если j-е испытание закончилось удачей, и равно 0 в противном случае. Многие важные общие закономерности теории вероятностей, относящиеся к суммам независимых случайных величин, были первоначально установлены именно для схемы Б. и. (см. *Бернулли теорема*, *Больших чисел закон*, *Больших чисел усиленный закон*, *Лапласа теорема*, *Повторного логарифма закон*, *Пуассона теорема*).

Ряд вероятностей, связанных с Б. и., был вычислен на самой ранней ступени развития теории вероятностей в связи с задачей о разорении игроков. Геометрич. интерпретация Б. и. приводит к схеме простейшего случайного блуждания (см. *Бернулли блуждание*).

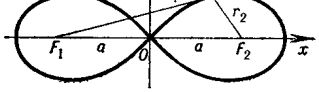
БЕРНУ́ЛЛИ ЛЕМНИСКА́ТА (от лат. lemniscatus, букв.— украшенный лентами) — плоская алгебраическая кривая 4-го порядка (рис.). Уравнение в прямоугольных координатах:

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0,$$

в полярных

$$\rho^2=2a^2\cos 2\varphi.$$

Произведение расстояний r_1 и r_2 каждой точки M Б. л. до двух данных точек $F_1(-a,\,0)$ и $F_2(a,\,0)$ равно квадрату половины расстояния между F_1 и F_2. Кривая симметрична относительно осей и начала координат, к-рое является узловой точкой (с касательными $y=\pm x$) и точкой перегиба.



Радиус кривизны: $R=2a^2/3\rho$. Площадь каждой петли: $S=a^2$. Б. л.— частный случай *Кассини овалов* и *синусоидальных спиралей*. Впервые рассмотрена Я. Бернулли (1694).

Б. л. используется в качестве переходной линии на закруглениях малого радиуса (напр., на трамвайных путях).

БЕРНУ́ЛЛИ МНОГОЧЛЕ́НЫ — многочлены вида

$$B_n(x)=\sum_{s=0}^{n}C_n^sB_sx^{n-s},\quad n=0,\,1,\,\ldots,$$

где B_s — числа Бернулли. Для $n=0,\,1,\,2,\,3$ Б. м. имеют вид

$$B_0(x)=1,\quad B_1(x)=x-\frac{1}{2},\quad B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6},$$
$$B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x.$$

Вычисление дальнейших Б. м. можно производить, пользуясь рекуррентной формулой

$$\sum_{s=0}^{n-1}C_n^sB_s(x)=nx^{n-1},\quad n=2,\,3,\,\ldots$$

Б. м. принадлежат к классу *Аппеля многочленов*. Для натурального x Б. м. впервые рассматривались Я. Бернулли (опубл. 1713).

БЕРНУ́ЛЛИ ОБЩЕСТВО (Bernoulli Society) — международная научная организация, целью которой является дальнейшее развитие (посредством международных контактов и международного сотрудничества) математической статистики, теории вероятностей и их практического при-

менения во всех аспектах человеческой деятельности. Создано в 1963 (до 1975 называлось Международной ассоциацией по статистике в физич. науках); является секцией Международного статистического института. Название «Б. о.» в честь швейц. учёных Бернулли. Членами Б. о. (1987) являются 1432 учёных из 61 страны. Для осуществления своих целей Б. о. проводит конференции, организует встречи с другими обществами. Первый Всемирный конгресс Б. о. был проведён в 1986 в Ташкенте; в его работе приняло участие ок. 1000 учёных из 50 стран; число советских участников ок. 600.

БЕРНУ́ЛЛИ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — одно из распределений вероятностей, то же, что *биномиальное распределение*.

БЕРНУ́ЛЛИ ТЕОРЕ́МА — первая из предельных теорем теории вероятностей; является простейшей формой закона больших чисел. Б. т. была впервые опубликована в книге Я. Бернулли «Искусство предположений» (1713, рус. пер. 1913, 1986). Б. т. утверждает, что в последовательности независимых испытаний, в к-рых вероятность наступления нек-рого случайного события постоянна, частота наступления этого события мало отличается от его вероятности. Формулировка Б. т. такова: если при каждом из n независимых испытаний вероятность нек-рого случайного события равна p, то вероятность того, что частота μ_n/n наступления μ_n этого события удовлетворяет неравенству

$$|\mu_n/n - p| < \varepsilon$$

($\varepsilon>0$ — произвольное), сколь угодно близка к единице при достаточно большом числе n испытаний. Первое доказательство Б. т., данное Я. Бернулли, было основано на изучении характера убывания вероятностей в биномиальном распределении и требовало сложных вычислений. Лишь в сер. 19 в. П. Л. Чебышев нашёл изящное и краткое её доказательство, основанное на простой оценке, частном случае *Чебышева неравенства*:

$$\mathrm{P}\{|\mu_n/n - p| < \varepsilon\} > 1 - p(1-p)/n\varepsilon^2.$$

БЕРНУ́ЛЛИ УРАВНЕ́НИЕ — дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^{\alpha},$$

где P, Q — заданные непрерывные функции от x, α — постоянное число. Введением новой функции $z=y^{-\alpha+1}$ Б. у. сводится к линейному дифференциальному уравнению относительно z. Б. у. было рассмотрено Я. Бернулли (1695).

БЕРНУ́ЛЛИ ЧИ́СЛА — последовательность рациональных чисел $B_0, B_1, B_2, \ldots$, впервые рассмотренная Я. Бернулли (1713) в связи с вычислением суммы одинаковых степеней натуральных чисел:

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^n \frac{1}{n+1} = \sum_{s=0}^{n} C_{n+1}^{s} B_s m^{n+1-s},$$

где C_{n+1}^{s} — биномиальные коэффициенты, $n=0, 1, \ldots$, $m=1, 2, \ldots$. Первые Б. ч. имеют следующие значения: $B_0=1$. $B_1=-1/2$, $B_2=1/6$, $B_3=0$, $B_4=-1/30$, $B_5=0$, $B_6=1/42$, $B_7=0$, $B_8=-1/30$, $B_9=0$. Все Б. ч. с нечётными номерами, кроме B_1, равны нулю, знаки Б. ч. с чётными номерами чередуются. Нередко для обозначения Б. ч. вместо B_m пишут B_{2m} ($m=1, 2, \ldots$), полагая $B_0=1$, $B_1=-1/2$, $B_3=B_5=\ldots=0$. Рекуррентное соотношение, позволяющее вычислять Б. ч., имеет вид

$$B_0=1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k = 0, \quad n \geqslant 2.$$

БЕРНШТЕ́ЙНА НЕРАВЕНСТВО — неравенство теории приближений, дающее оценку производной тригонометрического полинома или алгебраического многочлена через наибольшее значение самого полинома (многочлена). Установлено С. Н. Бернштейном (1912).

Если $T_n(x)$ — тригонометрич. полином порядка не выше n,

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |T_n(x)|,$$

то для любого x выполняются неравенства

$$|T_n^{(r)}(x)| \leqslant Mn^r, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Б. н. для алгебраич. многочленов имеет следующий смысл: если многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$$

удовлетворяет условию

$$|P_n(x)| \leqslant M, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

то для его производной $P_n'(x)$ выполняется соотношение

$$|P_n'(x)| \leqslant \frac{Mn}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a < x < b.$$

БЕРНШТЕ́ЙНА ТЕОРЕ́МА: регулярная поверхность неположительной кривизны, однозначно проектирующаяся на всю плоскость и расположенная вне полостей некоторого круглого конуса, является плоскостью. Установлена С. Н. Бернштейном (1927).

БЕРНШТЕ́ЙНА УСЛО́ВИЯ — условия применимости закона больших чисел к суммам зависимых случайных величин, установленные С. Н. Бернштейном (1946). См. *Больших чисел закон*.

БЕСКОАЛИЦИО́ННАЯ ИГРА́ (от позднелат. coalitio — союз) — модель конфликтной ситуации с произвольным числом участников (игроков), имеющих различные интересы на множестве исходов (реализаций) конфликта. При этом действия каждого участника, направленные на разрешение такой ситуации, осуществляются независимо от действия остальных участников.

Формально Б. и. определяется как система

$$\Gamma = \langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{\succ_i\}_{i \in I} \rangle,$$

где I — множество игроков, X_i — множество стратегий игрока $i \in I$, $\succ_i$ — бинарное отношение предпочтения игрока $i \in I$, заданное на множестве ситуаций $X = \Pi_{i \in I} X_i$. Процесс разыгрывания Б. и. протекает следующим образом: каждый игрок i независимо от остальных выбирает нек-рую стратегию $x \in X_i$, в результате чего образуется ситуация $x = (x_i)_{i \in I}$. Игроки стремятся к достижению наиболее предпочтительных для них по отношениям предпочтения ситуаций.

Если оценка игроками ситуаций происходит на основе численных функций полезности $H_i : X \Rightarrow \mathbb{R}^1$, $i \in I$, то Б. и., записанная в виде $\Gamma = \langle I, \{X_i\}_{i \in I}, \{H_i\}_{i \in I} \rangle$, наз. Б. и. с выигрышами. Функции H_i наз. ф у н к ц и я м и в ы и г р ы ш е й игроков.

Основной принцип оптимальности в Б. и. предписывает оптимальными ситуациями считать ситуации равновесия. Применительно к Б. и. с выигрышами ситуация $x^* \in X$ наз. с и т у а ц и е й р а в н о в е с и я, если для всех $i \in I$, $x_i \in X_i$ справедливы неравенства

$$H_i(x^*) \geqslant H_i(x^* \| x_i),$$

где $x^* \| x_i = \Pi_{j \in I \setminus i} x_j^* \times x_i$. Таким образом, в одностороннем отходе от ситуации равновесия не заинтересован ни один игрок.

● В о р о б ь е в Н. Н., Основы теории игр. Бескоалиционные игры, М., 1984.

БЕСКОНЕ́ЧНАЯ ДЕСЯТИ́ЧНАЯ ДРОБЬ — см. *Десятичная дробь*.

БЕСКОНЕ́ЧНО БОЛЬША́Я ФУ́НКЦИЯ — функция переменного x, к-рая в данном процессе изменения x становится и остаётся по абсолютной величине больше любого наперёд заданного числа. Точнее, функция $f(x)$, определённая в окрестности точки x_0, наз. б е с к о н е ч н о б о л ь ш о й ф у н к ц и е й при x, стремящемся к x_0, если для любого числа $M>0$ найдётся такое число $\delta=\delta(M)>0$, что для всех $x \neq x_0$ и таких, что $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$. Этот факт записывается так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Аналогичным образом определяются

$$\lim_{x\to x_0\pm 0} f(x) = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Напр.,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

означает, что для любого $M>0$ найдётся такое $\delta=\delta(M)>0$, что для всех $x<-\delta$ выполняется неравенство $f(x)>M$. Изучение Б. б. ф. может быть сведено к изучению *бесконечно малых функций*, т. е. если $f(x)$ есть Б. б. ф., то функция $\psi(x)=1/f(x)$ является бесконечно малой.

БЕСКОНЕ́ЧНО МА́ЛАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция переменного x, к-рая в данном процессе изменения x становится и остаётся по абсолютной величине меньше любого наперёд заданного числа. Точнее, функция $f(x)$, определённая в окрестности точки x_0, наз. б е с к о н е ч н о м а л о й ф у н к ц и е й при x, стремящемся к x_0, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдётся такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется $|f(x)|<\varepsilon$. Этот факт записывается так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Символ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

напр., означает, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $N=N(\varepsilon)>0$, что для всех $x>N$ выполняется неравенство $|f(x)|<\varepsilon$. Понятие Б. м. ф. может быть положено в основу общего определения *предела* функции. Именно предел функции $f(x)$ при $x\to x_0$ конечен и равен A тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)-A) = 0,$$

т. е. функция $f(x)$ — A есть Б. м. ф. См. также *Бесконечно малых исчисление*.

БЕСКОНЕ́ЧНО МА́ЛЫХ ИСЧИСЛЕ́НИЕ — термин, ранее объединявший различные разделы математич. анализа, связанные с понятием *бесконечно малой функции*. Хотя «метод бесконечно малых» (в той или иной форме) с успехом применялся учёными Др. Греции и средневековой Европы для решения задач геометрии и естествознания, точные определения основных понятий теории бесконечно малых (б. м.) функций сложились только в 19 в. Для понимания значений этого метода важно заметить, что практич. интерес представляют не б. м. сама по себе, а те случаи, в к-рых рассмотрение б. м. приводит к величинам конечным. В истории математики основное значение имели три типа такого рода задач.

1) Простейшие задачи древнегреч. математиков на *исчерпывания метод*, в к-рых б. м. используются лишь для доказательства равенства двух заранее заданных величин (или двух отношений заранее заданных величин).

2) Более сложные задачи на метод исчерпывания, в к-рых искомая конечная величина получается в виде предела суммы

$$\Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)} + \ldots + \Delta_n^{(n)}$$

неограниченно возрастающего числа б. м. величин. Эти задачи впоследствии привели к созданию *интегрального исчисления*.

3) Задачи, в к-рых конечная величина получается в виде предела отношений б. м. величин. Они послужили материалом для создания *дифференциального исчисления*.

Изобретение метода исчерпывания приписывается Евдоксу Книдскому (4 в. до н. э.). Во всяком случае, метод проходит в качестве основного приёма доказательства через всю 12-ю книгу «Начал» Евклида (3 в. до н. э.). В современной форме логич. схема рассуждений Евклида может быть записана так: если все отношения

$$\frac{a_1}{b_1} \quad \frac{a_2}{b_2} - \ldots - \frac{a_n}{b_n} \quad \ldots \quad k$$

равны между собой и имеют постоянное значение k и если при $n\to\infty$ обе разности $a-a_n$, $b-b_n$ бесконечно малы, то

$$\frac{a}{b} = k.$$

Напр., для сравнения площадей двух кругов с радиусами R и r Евклид вписывает в каждый из них по квадрату и доказывает, что площадь этого квадрата превосходит половину площади круга: остающиеся четыре сегмента (рис. 1) составляют вместе меньше половины площади круга; дополнив квадрат до правильного восьмиугольника, он обнаруживает, что остаток составляет уже меньше четверти круга, затем восьмиугольник дополняется до правильного шестнадцатиугольника, причём оставшиеся

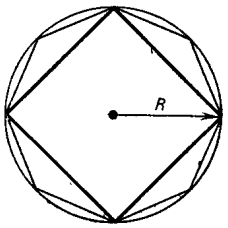


Рис. 1.

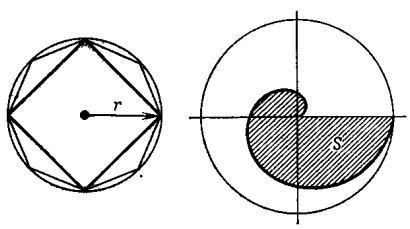


Рис. 2.

шестнадцать сегментов составляют в сумме уже меньше одной восьмой площади круга и т. д. Таким образом, площадь круга постепенно «исчерпывается» при переходе к вписанным многоугольникам со всё большим числом сторон. Так как в двух кругах площади соответствующих многоугольников относятся как квадраты радиусов R и r, то Евклид заключает отсюда (при помощи доказательства от противного), что то же самое отношение имеют и площади кругов.

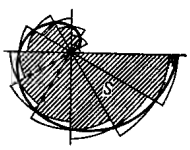


Рис. 3.

Более широкое и свободное употребление б. м. наблюдается и у Архимеда (3 в. до н. э.). В своих соч. «О коноидах и сфероидах» и «О спиралях» Архимед систематически пользуется при вычислении площадей и объёмов методом, к-рый по своей идее вполне аналогичен современному определению интеграла. Вот как, напр., Архимед определяет площадь первого витка спирали (рис. 2), к-рая наз. теперь «архимедовой» и к-рая в полярных координатах имеет уравнение

$$r = a\cdot\varphi.$$

В рассматриваемую фигуру S вписывается фигура, состоящая из $n-1$ круговых секторов с углом при вершине $2\pi/n$ (эти секторы для случая $n=12$ изображены на рис. 3 заштрихованными), а вокруг S описывается фигура, состоящая из n аналогичных круговых секторов (на рис. 3 изображены без штриховки). Легко видеть, что в обоих случаях площадь k-го сектора

$$\Delta_k^{(n)} = \frac{4\pi^3 a^2 k^2}{n^2}.$$

Из построения ясно, что площадь S заключена в пределах

$$S_n' < S < S_n'', \qquad (1)$$

где

$$S_n' = \Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)} + \ldots + \Delta_{n-1}^{(n)},$$

$$S_n'' = \Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)} + \ldots + \Delta_n^{(n)}.$$

Так как

$$S_n' = \frac{4\pi^3 a^2}{n^3}[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2] = \frac{2\pi^3 a^2 (n-1)(2n-1)}{3n^2},$$

$$S_n'' = \frac{4\pi^3 a^2}{n^3}[1^2+2^2+\ldots+n^2] = \frac{2\pi^3 a^2 (n+1)(2n+1)}{3n^2},$$

то при любом n

$$S'_n < \frac{4}{3}\pi^3 a^2 < S''_n.$$

Архимед выражает последнее соотношение в геометрич. форме: при любом n

$$S'_n < \frac{K}{3} < S''_n, \qquad (2)$$

где K — площадь круга, изображённого на рис. 2. Из сопоставления (1) и (2) и того обстоятельства, что разность

$$S''_n - S'_n = \Delta_n^{(n)}$$

при $n \to \infty$ является б. м., Архимед делает вывод, что

$$S = \frac{K}{3}.$$

Конец изложенного рассуждения показывает, каким образом Архимедом был развит и усовершенствован метод исчерпывания Евдокса. Начало же этого рассуждения показывает, что Архимед владел и приёмами, к-рые были отнесены выше ко второй группе и к-рые по своему идейному замыслу соответствуют современному интегральному исчислению.

При помощи интегрального исчисления рассматриваемая площадь вычисляется как

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{(a\varphi)^2}{2}\,d\varphi = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

Входящий в эту формулу интеграл, по определению, есть предел сумм вида

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k^2}{2}(\varphi_k - \varphi_{k-1}),$$

где

$$0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = 2\pi,$$

$$r_k = a v_k^2, \quad \varphi_{k-1} \leqslant v_k \leqslant \varphi_k.$$

В частном случае, когда

$$\varphi_k = \frac{2\pi k}{n}, \qquad (3)$$

при $v_k = \varphi_{k-1}$ получается архимедова сумма S'_n, а при $v_k = \varphi_k$ — архимедова сумма S''_n. Следует специально отметить, что при выборе (3) точек деления φ_k архимедовы суммы S'_n и S''_n совпадают с суммами Дарбу, для к-рых и в общем случае гарантировано выполнение неравенства (1). Таким образом, Архимед для своей частной задачи проделывает весь ряд рассуждений, свойственных интегральному исчислению, и притом в его логически законченной форме (точные оценки сверху и снизу при помощи сумм Дарбу), разработанной в качестве общей теории лишь во 2-й пол. 19 в. Аналогично Архимед поступает и в ряде других задач на вычисление площадей и объёмов.

Итак, к концу своего развития древнегреч. математика подошла и к решению задач второй из намеченных выше групп. Следует, однако, здесь же отметить и принципиальное отличие всего характера мышления математиков древности от стиля мышления математиков нового времени. В рассмотренной выше в виде примера задаче Архимед не вычисляет

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{K}{3},$$

а берёт, не указывая откуда, величину $K/3$ и доказывает равенство $S = K/3$ от противного, устанавливая, что в силу (1), (2) и бесконечной малости разности $S''_n - S'_n$ неравенство $S \neq K/3$ привело бы к противоречию. Греч. математики не только не разработали к.-л. общих правил вычисления пределов, но и вообще не сформулировали лежащего по существу в основе их приёмов понятия предела (даже общее название «метод исчерпывания» для их приёмов возникло лишь в новое время). Тем более, древняя наука не создала ничего подобного современному алгоритму интегрального исчисления, благодаря к-рому теперь совсем не обращаются при вычислении нового интеграла к определению интеграла в качестве предела сумм, а пользуются значительно более простыми в практич. употреблении правилами интегрирования функций различных специальных классов. Из соч. Архимеда (особенно из «Послания Эратосфену») можно усмотреть, что его логически отточенному методу оценки площадей и объёмов при помощи сумм возрастающего числа неограниченно убывающих (то есть б. м. в современном смысле слова) слагаемых предшествовал более примитивный, но более наглядный метод, восходящий, по утверждению Архимеда, к Демокриту (4 в. до н. э.). Архимед указывает, в частности, что Демокрит раньше Евдокса определил (хотя и без строгого обоснования своих результатов) объём пирамиды.

Для Евклида и Евдокса основную трудность при выводе объёма пирамиды представляло доказательство того факта, что объёмы двух пирамид с равными высотами и равновеликими основаниями равны. Трудность эта преодолевалась в «Началах» Евклида применением метода исчерпывания.

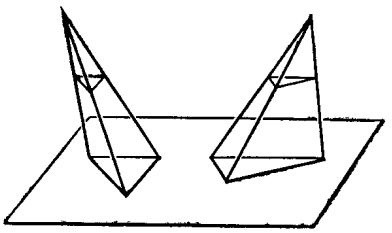


Рис. 4.

Судя по указаниям Архимеда, демокритов «атомистический» метод доказательства равенства объёмов двух пирамид с равными высотами и равновеликими основаниями (рис. 4) можно представить себе так: из соображений подобия вытекает, что площади сечений, проведённых на равной высоте в наших пирамидах, равны; объёмы пирамид воспринимаются просто как «суммы» этих площадей, что и позволяет сразу исходя из равенства соответствующих членов двух сумм заключить о равенстве самих сумм. В соч. Архимеда даётся много примеров применения этого метода к решению более сложных задач. Архимед считал такой метод нестрогим, но очень ценным с эвристич. стороны (т. е. для первоначального получения новых результатов, к-рые потом должны быть обоснованы более строго) и был в этом, с современной точки зрения, конечно, прав, так как метод Демокрита является лишь не выдерживающей строгой критики попыткой заменить процесс предельного перехода

$$S = \lim_{n\to\infty} \left(\Delta_1^{(n)} + \Delta_2^{(n)} + \ldots + \Delta_n^{(n)}\right)$$

несостоятельной метафизич. гипотезой о возможности получения объёмов суммированием площадей.

Послание Архимеда к Эратосфену, получившее краткое название «Эфодикон» (руководство), много комментировалось и цитировалось авторами эллинистич. эпохи, но не дошло до европейских математиков эпохи создания современной высшей математики, к-рые в отношении необычайно простого атомистич. метода рассуждений Демокрита в лучшем случае должны были довольствоваться довольно смутными литературными указаниями других источников (текст «Эфодикона» был вновь открыт лишь в 1906). Тем не менее этот метод получил в 17 в. блестящее развитие в работах И. Кеплера и Б. Кавальери. И. Кеплер в своей «Новой стереометрии винных бочек» (1615) определяет объём 92 тел вращения. Если бы он следовал педантично методу изложения Архимеда при каждом из этих определений, то его труд разросся бы до необъятных размеров. Метод И. Кеплера можно пояснить на простом примере. Определение площади круга И. Кеплер основывает на следующем рассуждении. Круг разбивается на секторы с общей вершиной в центре (рис. 5); чем меньше каждый сектор, тем ближе он подходит к треугольнику, основанием к-рого можно считать дугу сектора; его площадь, следовательно, равна длине его дуги, умноженной на

половину радиуса; если суммировать эти площади, то получится, что площадь круга равна длине его окружности, умноженной на половину радиуса. С такой же простотой И. Кеплер вычисляет объём шара и других тел вращения, но эта простота порождает сомнения (к-рых он не скрывает) и иногда приводит его к ошибкам. Чтобы устранить эти сомнения, И. Кеплер подтверждает своё рассуждение относительно площади круга такого рода соображениями: составляющие секторы можно сделать настолько малыми, что их основаниями становятся точки, и число секторов тогда становится бесконечным; каждый из этих б. м. секторов уже вовсе не отличается от такого же треугольника. Конечно, это рассуждение ничего не спасает, потому что при сведении основания к точке исчезает сектор и треугольник превращается просто в радиус. Его существенная особенность заключается в том, что здесь И. Кеплер более или менее сознательно склоняется к статич. расположению круга на бесконечно большое число актуально б. м. секторов — радиусов, а не к потенциальной бесконечности непрерывно возрастающего числа непрерывно убывающих

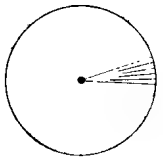


Рис. 5.

Рис. 6.

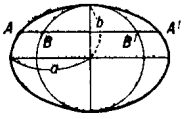


Рис. 7.

слагаемых; в этом виде неограниченно продолжающийся процесс исчезает. Было бы неправильно сказать, что И. Кеплер твёрдо стоял на точке зрения актуальной бесконечности: он слишком находился ещё под влиянием Архимеда, основные сочинения к-рого были ему хорошо известны; но его позиция не тверда, его воззрения в этой области эклектичны. Они представляют собой переходную ступень к взглядам Б. Кавальери.

В 1635 Б. Кавальери опубликовал трактат «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного». Задача сочинения та же, к-рую ставил себе Архимед: вычисление площадей и объёмов геометрич. фигур произвольной формы. С этой целью Б. Кавальери рассматривает плоскую фигуру как совокупность параллельных прямолинейных отрезков от одной крайней касательной до другой (рис. 6), тело — как совокупность параллельных плоских сечений. Эти отрезки и плоские сечения суть те «неделимые», по к-рым назван метод Б. Кавальери (см. *Неделимых метод*). Измерение площадей, объёмов совершается путём сравнения неделимых двух фигур. Напр., площадь эллипса Б. Кавальери вычисляет с помощью следующего рассуждения (рис. 7). На малой оси эллипса ($2b$) описывают окружность и проводят хорды (неделимые), параллельные большой оси ($2a$). Из определения эллипса нетрудно вывести, что каждый неделимый элемент эллипса относится к соответствующему неделимому круга, как a относится к b, т. е. $AA' : BB' = a : b$. Следовательно, совокупность всех неделимых эллипса (т. е. площадь эллипса) относится к совокупности неделимых круга (к площади круга πb^2), как $a : b$; поэтому площадь эллипса равна πab. Те же приёмы Б. Кавальери применяет к сравнению объёмов; доказательство равновеликости пирамид, имеющих равновеликие основания и равные высоты, у Б. Кавальери заканчивается там, где у Архимеда оно только начинается. Общность и простота применения приёмов привели Б. Кавальери к результатам, до к-рых не дошёл Архимед. Но упрощённость его методов не давала гарантии правильности всех полученных результатов; поэтому он каждое вычисление проводит несколькими различными путями.

Если в отношении строгости логич. обоснования своих результатов Б. Кавальери стоит несравненно ниже Архимеда, то зато он превзошёл Архимеда, а с ним и всех математиков Древнего мира не только в отношении числа решённых им специальных задач на определение площадей и объёмов, но и в отношении понимания дальнейших перспектив развития учения о б. м. Не ограничиваясь решением отдельных задач, он в геометрической и нестрогой форме получает, по существу, ряд общих формул интегрального исчисления. Напр., его утверждение, что сумма квадратов неделимых, на к-рые разбит параллелограмм на рис. 8, равна утроенной сумме квадратов неделимых, из к-рых состоит на том же рис. каждый из двух составляющих параллелограмм треугольников, есть, по существу, не что иное, как формула

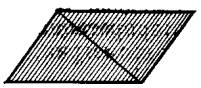


Рис. 8.

$$\int_0^a x^2\,dx = \frac{1}{3}\int_0^a a^2\,dx = \frac{a^3}{3}.$$

В аналогичной форме Б. Кавальери выражает равенство

$$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

для степеней n до девятой включительно.

В том же 17 в. внимание математиков привлекает и третья из перечисленных выше задач. После создания Р. Декартом аналитич. геометрии естественно возникла задача определения углового коэффициента касательной к кривой $y=f(x)$, т. е. определения производной. Приблизительно одновременно развитие механики привело к необходимости определять мгновенную скорость произвольного движения точки, т. е. к той же задаче определения производной. Так как теории пределов и даже отчётливого наглядного понимания предельного перехода ещё не было, то производную

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

пытались получить как отношение

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

статических актуально малых приращений dy и dx.

Современная концепция б. м. как переменных величин, стремящихся к нулю, а производной как предела отношения б. м. приращений была намечена (хотя и не вполне последовательно) И. Ньютоном (17 в.), однако укрепилась только после О. Коши (19 в.). Современное понимание дифференциала как главной части приращения, по существу, восходит к Ж. Лагранжу (18 в.) и было окончательно закреплено О. Коши, к-рый дал и точное определение интеграла как предела суммы.

Для развитого дифференциального или интегрального исчисления характерно, что после строгого обоснования своих основных понятий при помощи предельного перехода они дают возможность решать разнообразнейшие задачи при помощи простого алгоритма чисто алгебраич. характера (в том смысле, что сам этот алгоритм уже не содержит в явном виде предельных переходов). Благодаря этому современные способы вычисления с дифференциалами и интегралами успешно соединяют в себе строгую логич. обоснованность с простотой и наглядностью.

В. Ф. Каган, А. Н. Колмогоров.

БЕСКОНЕ́ЧНО УБЫВА́ЮЩАЯ ГЕОМЕТРИ́ЧЕСКАЯ ПРОГРЕ́ССИЯ — см. *Геометрическая прогрессия.*

БЕСКОНЕ́ЧНО УДАЛЁННАЯ ПРЯМАЯ — см. *Бесконечно удалённые элементы, Однородные координаты.*

БЕСКОНЕ́ЧНО УДАЛЁННАЯ ТО́ЧКА — 1) Б. у. т. — см. *Бесконечно удалённые элементы, Однородные координаты.*

2) Б. у. т. комплексной плоскости — воображаемая (или идеальная) точка $z=\infty$, к-рой дополняется комплексная плоскость $\mathbb{C}$. После присоединения Б. у. т. $z=\infty$ комплексная плоскость $\mathbb{C}$ превращается в расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$, взаимно однозначно и непрерывно отображающуюся на сферу (напр., с помощью стереографич. проекции). Точка $w \in \mathbb{C}$ стремится к Б. у. т. $z=\infty$ тогда и только тогда, когда её модуль $|w|$ неограниченно возрастает, $|w| \to \infty$.

БЕСКОНЕ́ЧНО УДАЛЁННЫЕ ЭЛЕМЕ́НТЫ, несобственные элементы,— элементы (называемые точками, прямыми, плоскостями), которыми пополняется евклидова плоскость или евклидово пространство для интерпретации некоторых разделов математики (проективная геометрия, теория функций комплексного переменного и др.).

Происхождение термина «Б. у. э.» легче всего проследить на следующем примере. Пусть a и a' — параллельные прямые в евклидовой плоскости, прямая b пересекает их в точках M и M'. Пусть прямая b поворачивается вокруг точки M' в направлении, указанном на рис. 1 стрелкой, до совпадения с прямой a'. Очевидно, по мере приближения прямой b к a' точка M пересечения прямых a и b будет удаляться в бесконечность. Этот процесс достаточно отчётливо поясняет часто употребляемое выражение: «параллельные прямые пересекаются в бесконечно удалённой точке».

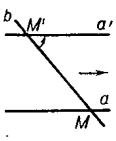


Рис. 1.

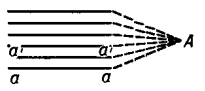


Рис. 2.

Указанные наглядные соображения лежат в основе интерпретации двумерной проективной геометрии на евклидовой плоскости. Для этой цели плоскость пополняется бесконечно удалёнными точками и одной бесконечно удалённой прямой следующим образом. Уславливаются рассматривать параллельные прямые как пересекающиеся в бесконечно удалённой точке. Тогда прямая a', параллельная прямой a (рис. 2), пересекается с ней в нек-рой точке, но только эта точка не является обыкновенной, а представляет собой новый объект — бесконечно удалённую (несобственную) точку прямой a. Уславливаются, что все прямые, параллельные прямой a, имеют одну общую бесконечно удалённую точку A, а бесконечно удалённые точки непараллельных прямых считаются различными. Таким образом, евклидова плоскость пополняется бесконечным числом бесконечно удалённых точек. Совокупность всех этих бесконечно удалённых точек плоскости наз. бесконечно удалённой (несобственной) прямой.

Плоскость, дополненная таким образом бесконечно удалёнными точками и бесконечно удалённой прямой, представляет собой т. н. *проективную плоскость*. Её свойства отличаются от свойств евклидовой плоскости (напр., на проективной плоскости пересекаются любые две прямые).

БЕСКОНЕ́ЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕ́НИЕ — произведение бесконечного числа числовых или функциональных сомножителей u_1, u_2, . . ., u_n, т. е. выражение вида

$$u_1u_2\ldots u_n\ldots=\prod_{n=1}^{\infty}u_n.$$

Б. п., в к-ром сомножителями являются числа, иногда наз. бесконечным числовым произведением. Если существует отличный от нуля предел последовательности частных произведений

$$P_n=u_1u_2\ldots u_n$$

при $n\to\infty$, то Б. п. наз. сходящимся, а $\lim p_n=P$ — его величиной и записывается

$$P=\prod_{n=1}^{\infty}u_n.$$

Б. п. впервые встретились в связи с задачей о вычислении числа π. Так, Ф. Виет (1593) получил формулу

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdots=\frac{2}{\pi},$$

а Дж. Валлис (1665) — формулу

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots=\frac{4}{\pi}.$$

Особое значение Б. п. приобрели после работ Л. Эйлера (1740—50), применившего Б. п. с функциональными сомножителями для изображения функций. Примером может служить разложение синуса:

$$\sin z=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Разложения функций в Б. п. аналогичны разложениям многочленов на линейные множители; они замечательны тем, что выявляют все значения независимого переменного, при к-рых функция обращается в нуль.

Для сходимости Б. п. необходимо и достаточно, чтобы $u_n\neq0$ для всех номеров n, чтобы $u_N>0$, начиная с нек-рого номера N, и чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=N}^{\infty}\ln u_n.$$

Таким образом, исследование сходимости Б. п. эквивалентно исследованию сходимости рядов.

БЕСКОНЕЧНОМЕ́РНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — см. *Векторное пространство, Функциональный анализ.*

БЕСКОНЕ́ЧНОСТИ АКСИО́МА — см. *Аксиоматическая теория множеств.*

БЕСКОНЕ́ЧНОСТЬ — понятие, возникающее в различных разделах математики в основном как противопоставление понятию конечного. Понятие Б. используется в аналитич. и геометрич. теориях для обозначения «несобственных», или «бесконечно удалённых», элементов, в теории множеств и математич. логике при изучении «бесконечных множеств» и в др. разделах математики.

1) Представление о бесконечно малых и бесконечно больших переменных величинах является одним из основных в математич. анализе. Предшествовавшая современному подходу к понятию бесконечно малой концепция, по к-рой конечные величины составлялись из бесконечно большого числа бесконечно малых «неделимых», трактовавшихся не как переменные, а как постоянные и меньшие любой конечной величины, может служить одним из примеров незаконного отрыва бесконечного от конечного: реальный смысл имеет только разложение конечных величин на неограниченно возрастающее число неограниченно убывающих слагаемых (см. *Бесконечно малых исчисление*).

2) Совсем в другой логич. обстановке Б. появляется в математике в виде «несобственных» бесконечно удалённых геометрич. образов (см. *Бесконечно удалённые элементы*). Здесь, напр., бесконечно удалённая точка на прямой a рассматривается как особый постоянный объект, «присоединённый» к обычным конечным точкам. Однако неразрывная связь бесконечного с конечным обнаруживается и здесь, хотя бы при проектировании из центра, лежащего вне прямой, при к-ром бесконечно удалённой точке соответствует прямая, проходящая через центр проектирования и параллельная основной прямой a.

Аналогичный характер имеет пополнение системы действительных чисел двумя «несобственными» числами $+\infty$ и $-\infty$, соответствующее многим запросам анализа и теории функций действительного переменного. Можно подойти с такой же точки зрения и к пополнению ряда натуральных чисел 1, 2, 3, . . . *трансфинитными числами* ω, $\omega+1$,. . ., 2ω, $2\omega+1$,. . . . В связи с различием между переменными бесконечно малыми и бесконечно большими величинами, с одной стороны, и «несобственными» бесконечно большими числами, рассматриваемыми как постоянные,— с другой, возникли термины «потенциальная» Б. (для первых) и «актуальная» Б. (для вторых). В этом первоначальном понимании (о другом, современном понимании, см. ниже) спор между сторонниками потенциальной и актуальной Б. можно считать законченным. Бесконечно малые и бесконечно большие, лежащие в основе определения производной (как отношения бесконечно малых) и интеграла (как суммы бесконечно большого числа бесконечно малых) и примыкающих сюда концепций математич. анализа, должны восприниматься как потенциальные. Наряду с этим в надлежащей логич. обстановке в математику вполне закономерно входят и актуальные бесконечно большие несобственные числа (и даже во мно-

гих различных аспектах: как количественные и порядковые трансфинитные числа в теории множеств, как несобственные элементы $+\infty$ и $-\infty$ системы действительных чисел и т. д.).

В математике приходится иметь дело с двумя способами присоединения к числовой системе бесконечных несобственных элементов.

а) С проективной точки зрения на прямой находится одна «бесконечно удалённая точка». В обычной метрич. системе координат этой точке естественно приписать абсциссу ∞. Такое же присоединение к числовой системе одной Б. без знака употребляется в теории функций комплексного переменного. В элементарном анализе при изучении рациональных функций $f(x)=P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, в тех точках, где $Q(x)$ имеет нуль более высокого порядка, чем $P(x)$, естественно положить $f(x)=\infty$.

Для несобственного элемента ∞ устанавливаются такие правила действий:

$\infty+a=\infty$, если a конечно;
$\infty+\infty$ не имеет смысла;
$\infty\cdot a=\infty$, если $a\neq 0$;
$\infty\cdot 0$ не имеет смысла.

Неравенства с участием ∞ не рассматриваются: бессмысленно спрашивать, больше или меньше ∞, чем конечное a.

б) При изучении действительных функций действительного переменного систему действительных чисел дополняют двумя несобственными элементами $+\infty$ и $-\infty$. Тогда можно положить, что $-\infty<a<+\infty$ для любого конечного a, и сохранить основные свойства неравенств в расширенной числовой системе. Для $+\infty$ и $-\infty$ устанавливаются такие правила действий:

$(+\infty)+a=+\infty$, если $a\neq-\infty$;
$(-\infty)+a=-\infty$, если $a\neq+\infty$;
$(+\infty)+(-\infty)$ лишено смысла;
$(+\infty)\cdot a=+\infty$, если $a>0$;
$(+\infty)\cdot a=-\infty$, если $a<0$;
$(-\infty)\cdot a=-\infty$, если $a>0$;
$(-\infty)\cdot a=+\infty$, если $a<0$;
$(+\infty)\cdot 0$ и $(-\infty)\cdot 0$ лишены смысла.

3) Основной интерес, но и основные трудности математич. учения о Б. сосредоточиваются на вопросе о природе б е с к о н е ч н ы х м н о ж е с т в математич. объектов. Следует, в частности, иметь в виду, что достигнутая ныне полная отвлечённость и законченность теории бесконечно больших и бесконечно малых переменных величин заключается лишь в сведении всех трудностей этой теории к вопросу обоснования учения о числе, в к-рое существенно входит представление о Б. системы чисел. Утверждение о том, что y бесконечно мало, имеет смысл только при указании характера изменения y в зависимости от к.-л. другого переменного x; напр., говорят, что y бесконечно мало при $x\to a$, если при любом $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из $|x-a|<\delta$ вытекает $|y|<\varepsilon$. В само это определение уже входит предположение, что функция $y=f(x)$ определена для б е с к о н е ч н о г о м н о ж е с т в а значений x (напр., для всех действительных x, достаточно близких к a).

В теории множеств терминам «актуальная» и «потенциальная» Б. придают обычно глубокий смысл, не имеющий ничего общего с наименованием каждой бесконечной мощности «актуально бесконечным числом». Дело в том, что бесконечные системы математич. объектов (напр., натуральных или действительных чисел) никогда не задаются простым перечислением, как это возможно для конечных систем объектов. Было бы очевидным абсурдом предполагать, что кто-либо «образовал» множество натуральных чисел, перечислив их фактически «все» одно за другим. На самом деле множество натуральных чисел изучают, исходя из процесса образования его элементов переходом от n к $n+1$. В случае континуума действительных чисел уже рассмотрение одного его элемента — действительного числа — приводит к изучению процесса образования его последовательных приближённых значений, а рассмотрение всего множества действительных чисел приводит к изучению общих свойств такого рода процессов образования его элементов. В этом именно смысле сама Б. натурального ряда, или системы всех действительных чисел (континуума), может характеризоваться как Б. лишь потенциальная. Точке зрения потенциальной Б. противополагается взгляд на бесконечные множества как актуально заданные, независимо от процесса их образования. Выяснение вопроса о том, в какой мере и при каких условиях при изучении бесконечных множеств законно такое абстрагирование от процесса их образования, ещё нельзя считать законченным. См. также *Актуальная бесконечность*, *Потенциальная бесконечность*. *А. Н. Колмогоров.*

БЕСКОНЕ́ЧНЫЙ АВТОМА́Т — *автомат*, у к-рого хотя бы один из трёх алфавитов бесконечен.

БЕСКОНЕ́ЧНЫЙ ИНТЕРВА́Л — см. *Интервал и сегмент*.

БЕСКОНТЕ́КСТНАЯ ГРАММА́ТИКА (от лат. contextus — соединение, связь) — см. *Математическая лингвистика*.

БЕ́ССЕЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИО́ННАЯ ФО́РМУЛА — полусумма *Гаусса интерполяционной формулы* для интерполирования вперёд по узлам x_0, x_0+h, x_0-h, . . ., x_0+nh, x_0-nh в точке $x=x_0+th$ и формулы Гаусса того же порядка для интерполирования назад по отношению к узлу $x_1=x_0+h$, т. е. по совокупности узлов x_0+h, x_0, x_0+2h, x_0-h, . . ., $x_0+(n+1)h$. С использованием обозначения

$$f_{1/2}^{2k}=\tfrac{1}{2}\left(f_0^{2k}+f_1^{2k}\right)$$

Б. и. ф. имеет вид:

$$B_{2n+1}(x_0+th)=f_{1/2}+f_{1/2}^{1}\left(t-\frac{1}{2}\right)+f_{1/2}^{2}\frac{t(t-1)}{2!}+$$

$$+\ldots+f_{1/2}^{2n}\frac{t(t^2-1)\cdot\ldots\cdot[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}.$$

Как правило, Б. и. ф. применяется при $0\leqslant t\leqslant 1$, $n=1$, когда она даёт результат примерно в 8 раз точнее, чем непосредственное интерполирование многочленом второй степени.

Формула названа по имени Ф. Бесселя, применявшего её в астрономич. вычислениях.

БЕ́ССЕЛЯ НЕРА́ВЕНСТВО — неравенство теории функций и функционального анализа, выражающее свойство коэффициентов ряда Фурье по произвольной ортогональной системе функций. Если функция $f(x)$ измерима, а функция $f^2(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и c_k, $k=1, 2, \ldots$, коэффициенты ряда Фурье $\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$ функции $f(x)$ по ортонормированной системе функций $\varphi_k(x)$, $k=1, 2, \ldots$, то Б. н. утверждает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k\leqslant\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Б. н. играет важную роль во всех исследованиях, относящихся к теории ортогональных рядов. В частности, оно показывает, что коэффициенты Фурье функции $f(x)$ стремятся к нулю при $n\to\infty$. Из Б. н. следует, что для того, чтобы c_1, c_2, . . . служили коэффициентами Фурье к.-л. функции f, необходимо, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2$ сходился. Б. н. было впервые получено Ф. Бесселем (1828) для тригонометрич. системы. Если для любой функции f Б. н. обращается в равенство, то говорят, что для системы функций φ_k, $k=1, 2, \ldots$, имеет место *Парсеваля равенство*.

БЕ́ССЕЛЯ УРАВНЕ́НИЕ — линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка вида

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)\,y=0,$$

где параметр (индекс) p может принимать произвольные (комплексные) значения. Первым систематич. изучение

решений этого уравнения предпринял Ф. Бессель (1824), но ещё раньше они встречались в работах Д. Бернулли, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа. К этому уравнению приводят многочисленные физич. задачи. Решения Б. у. наз. *цилиндрическими функциями.*

БЕ́ССЕЛЯ ФУ́НКЦИИ — встречающееся в математич. литературе название *цилиндрических функций* по имени Ф. Бесселя, подробно исследовавшего один тип этих функций (т. н. цилиндрич. функции 1-го рода). Название «Б.ф.», предложенное О. Шлёмильхом (1857), в связи с этим иногда относят лишь к этому типу цилиндрич. функций.

БЕ́ТА-ФУ́НКЦИЯ (B, β — бета, вторая буква греч. алфавита), В-функция, В-функция Эйлера, эйлеров интеграл 1-го рода,— функция двух переменных p и q, определяемая при $p>0$, $q>0$ равенством

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \qquad (*)$$

Значения Б.-ф. при различных значениях параметров p и q связаны между собой следующими соотношениями:

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\mathrm{B}(q,\ p),$$

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\frac{q-1}{p+q-1}\,\mathrm{B}(p,\ q-1),\ q>1.$$

Справедлива формула

$$\mathrm{B}(p,\ 1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi},\quad 0<p<1.$$

В случае комплексных p и q интеграл (*) сходится, когда $\mathrm{Re}\,p>0$ и $\mathrm{Re}\,q>0$. Б.-ф. выражается через гамма-функцию:

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Название «Б.-ф.» и обозначение B(p, q) ввёл Ж. Бине (1839).

БЕ́ТТИ ЧИСЛО́ — топологический инвариант b^r полиэдра, указывающий число попарно негомологичных циклов в нём. Здесь под гомологичными r-мерными циклами можно понимать (упрощённо) такие две совокупности r-мерных граней полиэдра, к-рые, не имея сами границы (т. е. являясь замкнутыми, или циклами), составляют в то же время границу нек-рого $(r+1)$-мерного полиэдра. Напр., для сферы $b^0=b^2=1$, $b^1=0$, для тора $b^0=b^1=b^2=1$, для проективной плоскости $b^0=0$, $b^1=b^2=0$. Для n-мерного полиэдра сумма $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r b^r$ равна его *эйлеровой характеристике.* Б. ч. введены Э. Бетти (1871).

БИВЕ́КТОР (от лат. bi-, в сложных словах — двойной, двоякий и *вектор*) — упорядоченная пара векторов. Частный случай *поливектора.*

БИГАРМОНИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ (от лат. bi-, в сложных словах — двойной, двоякий и греч. ἁρμονικός — соразмерный, гармоничный) — функция $u(x, y)$ двух действительных переменных, определённая в области D на плоскости (x, y), имеющая непрерывные частные производные до 4-го порядка включительно и удовлетворяющая в D бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 u=\Delta(\Delta u)=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0,$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа. Класс Б. ф. включает класс *гармонических функций* и является подклассом класса *полигармонических функций.* Каждая Б. ф. есть аналитич. функция от координат x, y. Б. ф. играют важную роль в плоских задачах теории упругости.

Б. ф. n действительных переменных $u(x)=u(x_1, \ldots, x_n)$ при $n\geqslant 2$ определяются аналогично как решения уравнения

$$\Delta^2 u=0,\ \Delta=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

БИГАРМОНИ́ЧЕСКОЕ УРАВНЕ́НИЕ — см. *Бигармоническая функция.*

БИЕКТИ́ВНОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ, биекция, множества A в множество B — отображение $f\colon A\to B$, при котором разные элементы из A имеют разные образы и $f(A)=B$. Другими словами, f — взаимно однозначное отображение A на B или отображение инъективное и сюръективное одновременно. Б. о. устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между элементами множеств A и B. Б. о. множества A на A наз. также подстановкой, или перестановкой, множества A.

БИЕ́КЦИЯ (от лат. bi-, в сложных словах — двойной, двоякий и jacio — бросаю) — то же, что *биективное отображение.*

БИКВАДРА́ТНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$. Подстановкой $x^2=y$ решение Б. у. сводится к решению квадратного уравнения.

БИКОМПА́КТНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — то же, что *компактное пространство.* Термин «Б. п.» введён П. С. Александровым (1923); понятие Б. п. явилось первоначально усилением введённого М. Фреше понятия компактного пространства, когда требовалась метризуемость топологич. пространства или наличие у него счётной базы. Дальнейшее развитие математики и её приложений показало, что понятие бикомпактности настолько важнее первоначального понятия компактности, что сейчас под компактностью понимают именно бикомпактность, а компактные в старом смысле пространства наз. счётнокомпактными.

БИКОМПА́КТНОСТЬ — см. *Бикомпактное пространство, Компактность.*

БИЛИНЕ́ЙНАЯ ФО́РМА — многочлен вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i y_j,\ a_{ij}=a_{ji},$$

такой, что в каждый его член входит в 1-й степени по одному переменному из двух систем переменных: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Б. ф.— частный случай *полилинейной формы.*

БИЛЛИО́Н (франц. billion), или миллиард (франц. milliard),— тысяча миллионов, число, изображаемое единицей с 9 нулями, т. е. число 10^9. В нек-рых странах Б. наз. число, равное 10^{12}.

БИМА́ТРИЧНАЯ ИГРА́ — см. *Игр теория.*

БИМОДА́ЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ (от лат. bi-, в сложных словах — двойной, двоякий и *мода*) — распределение вероятностей с двумя *модами.*

БИМОРФИ́ЗМ (от лат. bi-, в сложных словах — двойной, двоякий и греч. μορφή — форма, вид) — морфизм категории, на который можно сокращать как слева, так и справа, т. е. *мономорфизм* и *эпиморфизм* одновременно. В категории множеств Б.— это *биективные отображения.*

БИНА́РНАЯ ОПЕРА́ЦИЯ — двуместная *алгебраическая операция* (или операция арности 2).

БИНА́РНАЯ ФО́РМА (от лат. binarius — двойной) — форма (т. е. однородный многочлен) от двух переменных; напр., $ax^2+bxy+cy^2$ — бинарная квадратичная форма. См. также *Многочлен.*

БИНА́РНОЕ ОТНОШЕ́НИЕ — подмножество множества $A\times A$ упорядоченных пар (a, b) элементов заданного множества A. Б. о.— частный случай *отношения* (при $n=2$), а также частный случай *соответствия.* Пусть $R\subseteq A\times A$. Если $(a, b)\in R$, то говорят, что элемент a находится в бинарном отношении R к элементу b. Вместо $(a, b)\in R$ пишут также aRb.

Пустое подмножество $\varnothing$ и само множество $A\times A$ наз. соответственно нуль-отношением и универсальным отношением в множестве A. Диагональ множества $A\times A$, т. е. $\Delta=\{(a, a)\mid a\in R\}$, есть отношение равенства, или единичное Б. о. Как и для соответствий, для Б. о. определяются операции объединения, пересечения, дополнения, обращения и умножения.

Наиболее важными типами Б. о. являются *эквивалентности*, (линейного и частичного) *порядка отношения* и функциональные отношения.

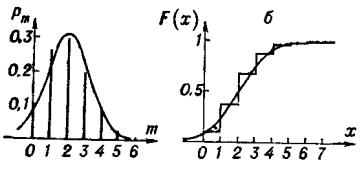
БИНА́РНОЕ ПО́ЛЕ — см. *Номография.*

БИНО́М (от лат. bi-, в сложных словах — двойной, двоякий и nomen — имя), двучлен,— сумма или разность двух алгебраических выражений, называемых членами Б.; напр., $a+b$, $5x-\frac{y^2}{1+x^3}$ и т. д. О степенях Б., то есть выражениях вида $(x+y)^n$, см. *Ньютона бином*.

БИНОМИА́ЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ, распределение Бернулли,— распределение вероятностей случайной величины X с целочисленными значениями $m=0, 1, \ldots, n$, заданное формулой (рис.)

$$p_m = \mathsf{P}\{X=m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \qquad (*)$$

где $n \geqslant 1$ и $0 \leqslant p \leqslant 1$ — параметры, а C_n^m — биномиальный коэффициент (отсюда название «Б. р.»). Б. р.— одно из основных распределений вероятностей, связанных с последовательностью независимых испытаний; это — распределение вероятностей числа наступлений нек-рого события («удачи») в n повторных независимых испытаниях, если при каждом испытании вероятность наступления этого события равна p (см. *Бернулли испытания*). В соответствии с этим каждую случайную величину X, имеющую Б. р. с параметрами n и p, можно представить в виде суммы n независимых случайных величин, имеющих Б. р. с параметрами $n=1$ и p. Математич. ожидание и дисперсия случайной величины X с Б. р. равны $\mathsf{E}X=np$ и $\mathsf{D}X=np(1-p)$. На практике для вычисления вероятностей (*) при небольших n пользуются таблицами Б. р., а при больших n — приближёнными формулами, основанными на предельных теоремах.



Биномиальное распределение: *а* — вероятности $p_m = C_n^m p^m q^{n-m}$; *б* — функция распределения ($n=10$, $p=0{,}2$). Гладкими кривыми изображено нормальное приближение биномиального распределения.

Многомерным обобщением Б. р. служит *полиномиальное распределение*.

БИНОМИА́ЛЬНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИА́Л — то же, что *дифференциальный бином*.

БИНОМИА́ЛЬНЫЙ КОЭ́ФФИЦИЕ́НТ — коэффициент при степенях z в разложении бинома Ньютона $(1+x)^n$. Обозначается C_n^k или $\binom{n}{k}$ и равен

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Б. к. обобщаются на случай любого действительного или комплексного α по формуле

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

БИНОМИА́ЛЬНЫЙ РЯД — степенной ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k, \qquad (1)$$

где α — произвольное фиксированное действительное число, x — действительная переменная, C_α^k — биномиальные коэффициенты. Для целых $\alpha=n \geqslant 0$ Б. р. сводится к конечной сумме $n+1$ слагаемых — биному Ньютона

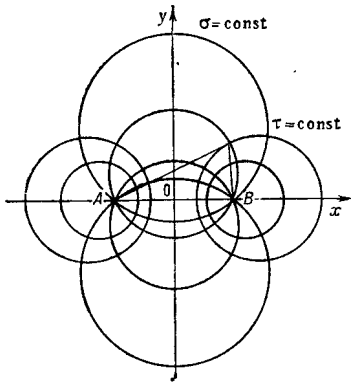
$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n. \qquad (2)$$

Б. р. (1) является обобщением на случай дробных и отрицательных показателей формулы (2). Он представляет собой разложение функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Тейлора (т. н. ряд Маклорена). При этом если α не есть целое неотрицательное число, то Б. р.: 1) абсолютно сходится при $\alpha>0$ и $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 2) абсолютно сходится при $\alpha \leqslant -1$ и $-1<x<1$ и расходится при других значениях x; 3) при $-1<\alpha\leqslant 0$ абсолютно сходится при $-1<x<1$, условно сходится при $x=1$ и расходится при $x=-1$; 4) всегда расходится при $|x|>1$. Б. р. обобщается на случай, когда α — произвольное фиксированное комплексное число, а x — комплексное переменное.

Б. р. появился впервые (по-видимому) у И. Ньютона (1664—65). Полное исследование сходимости Б. р. дано Н. Абелем (1826).

БИНОРМА́ЛЬ (от лат. bi-, в сложных словах — двойной, двоякий и франц. normal, от лат. normalis — прямой) — см. *Нормаль, Триэдр*. Термин введён А. Сен-Венаном (1846).

БИПОЛЯ́РНЫЕ КООРДИНА́ТЫ (от лат. bi-, в сложных словах — двойной, двоякий и греч. πόλος — ось, полюс) — числа τ и σ, связанные с прямоугольными координатами x и y формулами



$$x = \frac{a \operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \qquad y = \frac{a \sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma},$$

где $a>0$, $0 \leqslant \sigma < \pi$, $-\infty < \tau < \infty$. Координатные линии (рис.): два семейства окружностей ($\tau=$const) с полюсами A и B и семейство окружностей, ортогональных к ним ($\sigma=$const).

Коэффициенты Ламе:

$$L_\tau = L_\sigma = \frac{a^2}{(\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma)^2}.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta f = \frac{1}{a^2}(\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\tau^2}\right).$$

Б. к. используются для построения координатных систем в пространстве: бисферических координат вращением системы Б. к. вокруг оси Ox, бицилиндрических координат — переносом вдоль оси, перпендикулярной плоскости Oxy, тороидальных координат — вращением вокруг оси Oy.

БИРАЦИОНА́ЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — точечное преобразование плоскости, при котором любая точка P преобразуется в точку P', так, что координаты точки P рационально выражаются через координаты точки P', и наоборот, координаты точки P' рационально выражаются через координаты точки P. Напр., Б. п. является инверсия с центром в начале координат O и степенью k:

$$x' = \frac{kx}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{ky}{x^2+y^2}.$$

Б. п. проективной плоскости можно классифицировать по степеням функций, задающих Б. п. в однородных координатах

$$x_1' = \varphi(x_1, x_2, x_0), \; x_2' = \psi(x_1, x_2, x_0), \; x_0' = \chi(x_1, x_2, x_0).$$

Самыми простыми Б. п. являются линейные (где функции φ, ψ, χ линейны); затем идут квадратичные преобразования (функции φ, ψ, χ — второй степени), кубич. преобразования (функции φ, ψ, χ — третьей степени) и т. д.

БИРАЦИОНА́ЛЬНЫЙ ИЗОМОРФИ́ЗМ — см. *Алгебраическая геометрия*.

БИ́РКГОФА ТЕОРЕ́МА — 1) теорема о многообразиях *универсальных алгебр*, доказанная Г. Биркгофом (1935).

2) Теорема о существовании фундаментальной системы решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений с малым параметром (см. *Малого параметра метод*). Теорема доказана Дж. Биркгофом (1908).

БИССЕКТРИ́СА (от лат. bis — дважды и seco — рассекаю) угла — прямая, проходящая через вершину угла и делящая его пополам. Любая точка Б. равно удалена от сторон угла. Б. треугольника — отрезок Б. од-

ного из углов этого треугольника, заключённый между его вершиной и противоположной стороной. Б. трёх углов треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанного в треугольник круга.

БИСФЕРИ́ЧЕСКИЕ КООРДИНА́ТЫ (от лат. bi-, в сложных словах — двойной, двоякий и греч. σφαιρικός — шарообразный) — см. *Биполярные координаты.*

БИТ (англ. bit, от binary — двоичный и digit — знак, цифра) — то же, что *двоичная единица* измерения количества информации.

БИФУРКА́ЦИЯ (от лат. bifurcus — раздвоенный) — термин, употребляемый в некоторых разделах математики применительно к ситуациям, когда некоторый объект зависит от параметра λ (не обязательно скалярного) и в любой окрестности некоторого значения λ_0 последнего (бифуркационного значения, или точки Б.) исследуемые качественные свойства объекта не являются одинаковыми для всех λ.

БИЦИЛИНДРИ́ЧЕСКИЕ КООРДИНА́ТЫ (от лат. bi-, в сложных словах—двойной, двоякий и греч. κυλινδρικός— имеющий форму валика, цилиндрический) — см. *Биполярные координаты.*

БЛИЗНЕЦЫ — два простых числа с разностью, равной 2. См. *Простое число.*

БЛИЗОСТИ ПРОСТРА́НСТВО — см. *Топология.*

БЛОК-СХЕ́МА — система B подмножеств конечного множества V, удовлетворяющая нек-рым условиям, связанным с частотой появления пар элементов множества V в подмножествах системы B. Таким образом, Б.-с. можно задать парой множеств (V, B), где

$$V=\{a_1, a_2, \ldots, a_v\}, \quad B=\{B_1, B_2, \ldots, B_b\},$$
$$B_i \subseteq V, \ i=1, \ldots, b.$$

Элементы множества V наз. элементами Б.-с., а элементы множества B — её блоками. Элемент a_i и блок B_j инцидентны, если $a_i \in B_j$. Пусть k_j обозначает число $|B_j|$ элементов, инцидентных блоку B_j; пусть r_i есть число блоков, инцидентных элементу a_i, а через λ_{il} обозначено число $|\{B_j : a_i \in B_j, \ a_l \in B_j\}|$ блоков, содержащих пару элементов $\{a_i, a_l\}$. Числа v, b, r_i, k_j, λ_{il} ($i, l=1, \ldots, v$; $j=1, \ldots, b$) наз. параметрами Б.-с. Если $r_i=r$ для всех $i=1, \ldots, v$, $k_j=k$ для всех $j=1, \ldots, b$, а $\lambda_{il}=\lambda$ ($i, l=1, \ldots, v$), то (V, B) наз. уравновешенной неполной Б.-с. (сокращённо BIB-схемой) с параметрами v, b, r, k, λ. Если среди чисел λ_{il} ($i, l=1, \ldots, v$) встречается ровно m различных: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, то Б.-с. (V, B) наз. частично уравновешенной неполной Б.-с. с m типами связей (сокращённо PBIB(m)-схемой).

Всякой Б.-с. с v элементами и b блоками соответствует матрица инцидентности $A=\|c_{ij}\|$, где $c_{ij}=1$, если $a_i \in B_j$, и $c_{ij}=0$—в противном случае, $i=1, \ldots, v$, $j=1, \ldots, b$. В теории Б.-с. рассматриваются вопросы существования, классификации и построения Б.-с. с заданными параметрами.

Параметры BIB-схемы связаны соотношениями

$$vr=kb, \quad \lambda(v-1)=r(k-1).$$

Для PBIB (m)-схемы подобные соотношения несколько сложнее. Матрица инцидентности BIB-схемы удовлетворяет основному матричному соотношению

$$AA^{\top}=(r-\lambda)E+\lambda J, \qquad (*)$$

где E — единичная матрица порядка v, а J — матрица порядка v, составленная сплошь из единиц. Существование (0,1) - матрицы (т. е. матрицы, элементы к-рой суть 0 и 1), удовлетворяющей условию (*), является достаточным условием существования BIB-схемы с заданными параметрами. Из (*) вытекает неравенство $b \geqslant v$. BIB-схе́ма, для к-рой $b=v$ (и значит $r=k$), наз. симметричной Б.-с., или (v, k, λ)-конфигурацией.

Среди BIB-схем наиболее изучены следующие подклассы: системы Штейнера ($\lambda=1$), в частности системы троек Штейнера ($k=3$); адамаровы конфигурации ($v=b=4t-1$, $r=k=2t-1$, $\lambda=t-1$, $t \geqslant 2$); аффинные и проективные конечные геометрии (содержащие конечное число точек и прямых). Среди PBIB(m)-схем наиболее изучены PBIB(2)-схемы.

Б.-с. применяются в планировании экспериментов, теории игр, теории кодирования (при построении кодов).

БОЛЬЦА́НО — ВЕ́ЙЕРШТРА́ССА ТЕОРЕ́МА — теорема теории пределов, согласно которой каждая ограниченная числовая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность. Б.—В. т. можно доказать, используя метод последовательного деления пополам отрезка, содержащего все члены последовательности, и выбора на каждом этапе той половины отрезка, к-рая содержит бесконечное число членов. Это приводит к системе вложенных отрезков, длины к-рых стремятся к нулю, и позволяет использовать принцип вложенных отрезков Кантора. Б.—В. т. обобщается на последовательности комплексных чисел, элементов конечномерных евклидовых пространств. Б.—В. т. эквивалентна *Вейерштрасса теореме* о сходимости последовательности.

Б.— В. т. доказана Б. Больцано (1817); позже она независимо получена К. Вейерштрассом.

БОЛЬШИ́Х ЧИ́СЕЛ ЗАКО́Н — общий принцип, в силу которого совместное действие случайных факторов приводит при некоторых весьма общих условиях к результату, почти не зависящему от случая. Сближение частоты наступления случайного события с его вероятностью при возрастании числа испытаний (подмеченное сначала, повидимому, на азартных играх) может служить первым примером действия этого принципа.

На рубеже 17 и 18 вв. Я. Бернулли доказал теорему, утверждающую, что в последовательности независимых испытаний, в каждом из к-рых вероятность наступления нек-рого случайного события A имеет одно и то же значение p, $0<p<1$, верно соотношение

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\} \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

при любом $\varepsilon>0$ и $n \to \infty$, здесь μ_n — число появлений события A в первых n испытаниях, μ_n/n — частота появлений. Эта *Бернулли теорема* была распространена С. Пуассоном (1837) на случай последовательности независимых испытаний, где вероятность появления события A может зависеть от номера испытания. Пусть эта вероятность для k-го испытания равна p_k, $k=1, 2, \ldots$, и пусть

$$\bar{p}=\frac{p_1+p_2+\ldots+p_n}{n}.$$

Тогда *Пуассона теорема* утверждает, что

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-\bar{p}\right|>\varepsilon\right\} \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

при любом $\varepsilon>0$ и $n \to \infty$. Первое строгое доказательство этой теоремы было дано П. Л. Чебышевым (1846), метод к-рого полностью отличен от метода С. Пуассона и основан на нек-рых экстремальных соображениях; С. Пуассон выводил (2) из приближённой формулы для указанной вероятности, основанной на использовании закона Гаусса и в то время ещё строго не обоснованной. У С. Пуассона впервые встречается термин «закон больших чисел», к-рым он назвал своё обобщение теоремы Бернулли.

Естественное дальнейшее обобщение теорем Бернулли и Пуассона возникает, если заметить, что случайные величины μ_n можно представить в виде суммы

$$\mu_n=X_1+X_2+\ldots+X_n$$

независимых случайных величин, где $X_k=1$, если A появляется в k-м испытании, и $X_k=0$—в противном случае. При этом математич. ожидание $\mathrm{E}(\mu_n/n)$ (совпадающее со средним арифметическим математич. ожиданий $\mathrm{E}X_k$) равно p для случая Бернулли и $\bar{p}$ для случая Пуассона. Другими словами, в обоих случаях рассматривается отклонение среднего ариф-

метического величин X_k от среднего арифметического их математич. ожиданий.

В работе П. Л. Чебышева «О средних величинах» (1867) было установлено, что для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ соотношение

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-\frac{\mathsf{E}X_1+\ldots+\mathsf{E}X_n}{n}\right|>\varepsilon\right\}\longrightarrow 0 \qquad (3)$$

(при любом $\varepsilon>0$ и $n\to\infty$) верно при весьма общих предположениях. П. Л. Чебышев предполагал, что математич. ожидания $\mathsf{E}X_k^2$ все ограничены одной и той же постоянной, хотя из его доказательства видно, что достаточно требования ограниченности дисперсий $\mathsf{D}X_k=\mathsf{E}X_k^2-(\mathsf{E}X_k)^2$ случайных величин X_k или даже требования

$$B_n^2=\mathsf{D}X_1+\ldots+\mathsf{D}X_n=o(n^2)$$

при $n\to\infty$ (теорема Чебышева). Таким образом, П. Л. Чебышев показал возможность широкого обобщения теоремы Бернулли. А. А. Марков отметил возможность дальнейших обобщений и предложил применять название «Б. ч. з.» ко всей совокупности обобщений теоремы Бернулли [и в частности к (3)]. Метод Чебышева основан на точном установлении общих свойств математич. ожиданий и на использовании т. н. *Чебышева неравенства*; для вероятности (3) оно даёт оценку вида

$$n^{-2}\varepsilon^{-2}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{D}X_k;$$

эту границу можно заменить более точной, разумеется при более значительных ограничениях. Последующие доказательства различных форм Б. ч. з. в той или иной степени являются развитием метода Чебышева. Применяя надлежащее «урезание» случайных величин X_k (замену их вспомогательными величинами $X'_{n,k}$; именно $X'_{n,k}=X_k$, если $|X_k-\mathsf{E}X_k|\leqslant L_n$, и $X'_{n,k}=0$, если $|X_k-\mathsf{E}X_k|>L_n$, где L_n — нек-рые постоянные), А. А. Марков распространил Б. ч. з. на случаи, когда дисперсии слагаемых не существуют. Напр., он показал, что Б. ч. з. (3) имеет место, если

$$\mathsf{E}\,|X_n-\mathsf{E}X_n|^{1+\delta}<L$$

при нек-рых постоянных $\delta>0$ и $L>0$ и всех n. Аналогично доказывается теорема Хинчина (1929): если X_n имеет одинаковые законы распределения и $\mathsf{E}X_n$ существуют, то Б. ч. з. (3) выполняется.

Для сумм независимых случайных величин можно сформулировать более или менее окончательный вариант Б. ч. з. Для этого целесообразно перейти на более общую точку зрения, связанную с понятием предельного постоянства последовательности случайных величин. Случайные величины последовательности $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ наз. предельно постоянными, если существует такая последовательность постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, что

$$\mathsf{P}\{|Y_n-C_n|>\varepsilon\}\longrightarrow 0 \qquad (4)$$

при любом $\varepsilon>0$ и $n\to\infty$ (т. е. Y_n-C_n сходится к нулю «по вероятности»; если (4) выполняется с к.-л. C_n, то оно выполняется и с $C'_n=mY_n$, где mY — медиана случайной величины Y). Далее, вместо последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимых случайных величин можно взять т. н. схему серий

$$\begin{gathered}X_{1,1},\ \ldots,\ X_{1,k_1},\\ X_{2,1},\ \ldots,\ X_{2,k_2},\\ \ldots\ldots\ldots\\ X_{n,1},\ \ldots,\ X_{n,k_n}\end{gathered}$$

случайных величин (первый индекс — номер серии, второй — номер величины внутри серии). Случайные величины каждой отдельной серии предполагаются взаимно независимыми. Схему последовательности легко свести к схеме серий, полагая $k_1=1, k_2=2, \ldots, X_{n,k}=X_k/n$.

Пусть

$$Y_n=X_{n,1}+\ldots+X_{n,k_n};$$

тогда общая форма вопроса о применимости Б. ч. з. к суммам независимых случайных величин такова: при каких условиях суммы Y_n предельно постоянны?

Ответ на этот вопрос даёт теорема Колмогорова (1928): не ограничивая общности, можно предположить, что медианы величин $X_{n,k}$ равны нулю; пусть $\tilde{X}_{n,k}=X_{n,k}$ при $|X_{n,k}|\leqslant 1$ и $\tilde{X}_{n,k}=0$ при $|X_{n,k}|>1$, тогда одновременное выполнение двух условий

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathsf{P}\{|X_{n,k}|>1\}\longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n\longrightarrow\infty$$

и

$$\sum_{k=1}^{k_n}\mathsf{E}\tilde{X}_{n,k}^2\longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n\longrightarrow\infty$$

необходимо и достаточно для предельного постоянства сумм Y_n. В качестве C_n можно взять $\sum_{k=1}^{k_n}\mathsf{E}\tilde{X}_{n,k}$. Если математич. ожидания $\mathsf{E}X_{n,k}$ существуют, то легко указать дополнительные условия, при к-рых можно выбрать $C_n=\mathsf{E}Y_n$, что приводит к необходимым и достаточным условиям Б. ч. з. в классич. формулировке (3). Для последовательности независимых одинаково распределённых величин $\{X_n\}$ эти условия сводятся, в соответствии с указанной теоремой Хинчина, к существованию математич. ожидания. В то же время для предельного постоянства средних арифметических Y_n в этом случае необходимо и достаточно условие

$$n\mathsf{P}\{|X_1|>n\}\longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n\longrightarrow\infty. \qquad (5)$$

Легко привести примеры, когда условие (5) не выполняется. Так, оно не выполняется, если все X_n имеют распределение Коши с плотностью $1/\pi(1+x^2)$ (к-рой соответствует характеристич. функция $e^{-|t|}$). Здесь средние арифметические $Y_n=(X_1+\ldots+X_n)/n$ имеют характеристич. функцию $e^{-n|t/n|}=e^{-|t|}$ и, следовательно, имеют при любом n то же самое распределение, что и отдельные слагаемые.

В числе наиболее важных примеров, где Б. ч. з. не имеет места, следует отметить примеры, связанные с временами возвращения в случайных блужданиях. Напр., в симметричном *Бернулли блуждании* время T_n до n-го возвращения в исходную точку есть сумма n независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, где X_1 — время до 1-го возвращения, X_2 — время между 1-м и 2-м возвращениями и т. д. Распределение величины $2T_n/\pi n^2$ сходится при $n\to\infty$ к невырожденному предельному закону с плотностью

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2x}x^{-3/2} \quad \text{при} \quad x>0$$

и равной нулю при $x\leqslant 0$. Таким образом, в этом случае распределение среднего арифметического величин X_i, то есть T_n/n, размещается, грубо говоря, на отрезке длины порядка n [в то время как в случае применимости Б. ч. з. оно сосредоточивается на отрезках длины o (1)].

Применимость Б. ч. з. к суммам зависимых величин (и в его классич. формулировке, и в более общих) связана в первую очередь с неограниченным убыванием зависимости между случайными величинами X_i и X_j при увеличении разности их номеров, т. е. $|i-j|$. Впервые соответствующие теоремы были доказаны А. А. Марковым (1907) для величин, связанных в цепь. Именно, пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ принимают конечное число значений и связаны в однородную цепь Маркова, причём все вероятности перехода за один шаг положительны. Здесь неограниченное убывание зависимости между X_j и X_i при $j-i\to\infty$ проявляется в том, что условное распределение X_j при фиксированном значении X_i стремится при $n\to\infty$ к пределу, не зависящему от выбранного значения X_i (эргодическая теорема Маркова). Как следствие этого утверждения выводится Б. ч. з.: сначала устанавли-

вается, что при $n\to\infty$

$$\mathsf{E}\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-a\right)^2\longrightarrow 0,$$

где $a=\lim\limits_{k\to\infty}\mathsf{E}X_k$; отсюда же вытекает, что при $n\to\infty$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}-a\right|>\varepsilon\right\}\longrightarrow 0.$$

Более общий случай охватывается условиями Бернштейна (1946): если

$$\mathsf{D}X_j<L,\quad \rho(X_i,\ X_j)\leqslant\varphi(|\,i-j\,|),$$

где L — нек-рая постоянная, ρ — коэффициент корреляции, $\varphi(n)$ — функция, стремящаяся к нулю при $n\to\infty$, то к величинам $\{X_k\}$ применим Б. ч. з. (3). Для стационарных в широком смысле последовательностей $\{X_n\}$ условие на корреляцию можно несколько ослабить, заменив его условием

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_j=0,$$

где $\rho_j=\rho(X_j,\ X_{i+j})$.

Предыдущие результаты можно обобщить в различных направлениях. Во-первых, всюду выше рассматривалась сходимость «по вероятности». Рассматривают и другие типы сходимости: с вероятностью 1, в среднем квадратичном и т. п. (в действительности многие из указанных выше условий обеспечивают сходимость в среднем квадратичном, из к-рой вытекает сходимость по вероятности). Случай сходимости с вероятностью 1, ввиду его важности, выделяется под особым названием *больших чисел усиленного закона*.

Далее, многие теоремы переносятся с соответствующими изменениями на случайные векторы со значениями из евклидовых пространств любой размерности, из нек-рых банаховых пространств.

Рассматриваемый в наиболее общей форме Б. ч. з. оказывается тесно связанным с эргодич. теоремами. Многие теоремы переносятся и на случай средних

$$\frac{1}{T}\int_0^T X(t)\,dt,$$

где $X(t)$ — случайный процесс, зависящий от непрерывного параметра.

Наконец, вместо сумм случайных величин можно рассмотреть другие симметрич. функции от них. Это было сделано А. Я. Хинчиным (1951—55) в связи с обоснованием нек-рых выводов статистич. механики. Результат А. Я. Хинчина можно пояснить следующим частным примером. Пусть $X_{n,1},\ \ldots,\ X_{n,n}$ — координаты точки, равномерно распределённой на поверхности сферы

$$X_{n,1}^2+\ldots+X_{n,n}^2=n\mu,\quad \mu>0.$$

Тогда для широкого класса симметрич. функций $f(X_{n,1},\ \ldots,\ X_{n,n})$ имеет место Б. ч. з. в том смысле, что их значения при $n\to\infty$ оказываются предельно постоянными [это близко к замечанию П. Леви (1925) о том, что достаточно регулярные функции очень большого числа переменных почти постоянны в большей части области определения].

● Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986; Бернулли Я., О законе больших чисел, пер. с лат., М., 1986; Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.— Л., 1946; Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987.

Ю. В. Прохоров.

БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН — одна из форм закона больших чисел (в его общем понимании), утверждающая, что при определённых условиях с вероятностью 1 происходит неограниченное сближение средних арифметических последовательности случайных величин с нек-рыми постоянными величинами. Точнее, пусть

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n,\ \ldots \qquad (1)$$

— последовательность случайных величин и

$$S_n=X_1+X_2+\ldots+X_n.$$

Говорят, что последовательность (1) удовлетворяет усиленному закону больших чисел, если существует такая последовательность постоянных A_n, что вероятность соотношения

$$\frac{S_n}{n}-A_n\longrightarrow 0 \qquad (2)$$

равна 1 при $n\to\infty$. Другая формулировка, равносильная предыдущей, такова: последовательность (1) удовлетворяет Б. ч. у. з., если при любом $\varepsilon>0$ вероятность одновременного выполнения всех неравенств

$$\left|\frac{S_n}{n}-A_n\right|\leqslant\varepsilon,\quad \left|\frac{S_{n+1}}{n+1}-A_{n+1}\right|\leqslant\varepsilon,\ \ldots \qquad (3)$$

стремится к 1 при $n\to\infty$. Таким образом, здесь рассматривается поведение всей последовательности сумм в целом, в то время как в обычном законе больших чисел речь идёт лишь об отдельных суммах. Если последовательность (1) удовлетворяет Б. ч. у. з., то она удовлетворяет и обычному закону больших чисел с теми же самыми A_n, т. е.

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n}-A_n\right|\leqslant\varepsilon\right\}\longrightarrow 1 \qquad (4)$$

при любом $\varepsilon>0$ и $n\to\infty$. Обратное может быть неверно. Напр., если случайные величины (1) независимы и принимают при $n\geqslant 16$ два значения $\pm\sqrt{n/\ln\ln n}$ с вероятностью $1/2$ каждое, то для них выполняется закон больших чисел (4) с $A_n=0$, но ни при каких A_n не выполняется Б. ч. у. з. (2). Заранее существование таких примеров совсем не очевидно, т. к. хотя вообще сходимость по вероятности слабее сходимости с вероятностью 1, тем не менее, напр., для рядов из независимых случайных величин оба вида сходимости равносильны.

Б. ч. у. з. был впервые сформулирован и доказан (в теоретико-числовой интерпретации) Э. Борелем (1909) для схемы Бернулли (см. *Бернулли испытания*). Частные случаи схемы Бернулли возникают при разложении взятого наудачу (с равномерным распределением) действительного числа ω из промежутка (0, 1) в бесконечную дробь по к.-л. основанию. Так, в двоичном разложении

$$\omega=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(\omega)}{2^n}$$

последовательные знаки $X_n(\omega)$ принимают два значения 0 и 1 с вероятностью $1/2$ каждое и являются независимыми случайными величинами. Сумма

$$S_n(\omega)=\sum_{k=1}^{n}X_k(\omega)$$

равна числу единиц среди первых n знаков двоичного разложения, $S_n(\omega)/n$ — их доле. В то же время S_n может рассматриваться как число «удач» в схеме Бернулли с вероятностью «удачи» (появление 1), равной $1/2$. Э. Борель доказал, что доля единиц $S_n(\omega)/n$ стремится к $1/2$ для почти всех ω из промежутка (0,1). Аналогично, при разложении ω по основанию 10 можно назвать «удачей» появление к.-л. одной из цифр 0, 1, 2, . . ., 9 (напр., цифры 3). При этом получается схема Бернулли с вероятностью удачи $1/10$, и частота появления выбранной цифры среди первых n знаков десятичного разложения стремится к $1/10$ для почти всех ω из (0,1). Э. Борель отметил также, что частота появления любой фиксированной группы r цифр стремится для почти всех ω к $1/10^r$.

Ф. Кантелли (1917) дал достаточные условия Б. ч. у. з. для независимых случайных величин X_n в терминах вторых и четвёртых центральных моментов слагаемых (схема Бернулли охватывается этими условиями). Вводя обозначение

$$B_{n,k}=\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}\,|\,X_j-\mathsf{E}X_j\,|^k,$$

условию Кантелли можно придать вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{n,4}+B_{n,2}^2}{n^2}<\infty.$$

Доказательства Э. Бореля и Ф. Кантелли основаны на следующем соображении. Пусть для нек-рой последовательности положительных чисел $\varepsilon_n \to 0$ (при $n \to \infty$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - A_n\right| > \varepsilon_n\right\} < \infty. \qquad (5)$$

Тогда по лемме Бореля — Кантелли с вероятностью 1 осуществляется лишь конечное число событий, стоящих под знаком вероятности в (5). Поэтому с вероятностью 1 для всех достаточно больших n

$$\left|\frac{S_n}{n} - A_n\right| \leqslant \varepsilon_n,$$

т. е. имеет место (3). Э. Борель оценивал члены ряда (5) по теореме Муавра — Лапласа, а Ф. Кантелли — по неравенству Чебышева с четвёртыми моментами.

Дальнейшее расширение условий приложимости Б.ч.у.з. было осуществлено А. Я. Хинчиным и А. Н. Колмогоровым. А. Я. Хинчин (1927, 1928) ввёл самый термин «усиленный закон больших чисел» и дал достаточное условие Б. ч. у. з. с $A_n = \mathsf{E}(S_n/n)$ (применимое к зависимым величинам). Обозначая через ρ_{ik} коэффициент корреляции между X_i и X_k и полагая

$$c_n = \sup_{|i-k|=n} |\rho_{ik}|, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k,$$

можно записать условие Хинчина в форме

$$B_{n,2} C_n = O\left(n^{2-\delta}\right)$$

для нек-рого $\delta > 0$. В действительности из доказательства А. Я. Хинчина вытекает значительно более сильное утверждение.

В случае независимых слагаемых наиболее известными являются условия приложимости Б. ч. у. з., установленные А. Н. Колмогоровым: достаточное (1930) — для величин с конечными дисперсиями и необходимое и достаточное (1933) — для одинаково распределённых величин (заключающееся в существовании математич. ожидания величин X_i). Теорема Колмогорова для случайных величин (1) с конечными дисперсиями утверждает, что из условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{D}X_n}{n^2} < \infty \qquad (6)$$

вытекает приложимость к последовательности (1) Б. ч. у. з. с $A_n = \mathsf{E}(S_n/n)$. В терминах дисперсий условие (6) оказывается наилучшим в том смысле, что для любой последовательности положительных чисел b_n с расходящимся рядом $\sum b_n/n^2$ можно построить последовательность независимых случайных величин X_n с $\mathsf{D}X_n = b_n$, не удовлетворяющую Б. ч. у. з. Область применения условия (6) (как, впрочем, и ряда других условий Б. ч. у. з. для независимых величин) может быть расширена на основе следующего замечания. Пусть mX_n — медиана X_n. Сходимость ряда

$$\sum \mathsf{P}\{|X_m - mX_n| > n\}$$

необходима для Б. ч. у. з. Из леммы Бореля — Кантелли вытекает, что $|X_n - mX| \leqslant n$ с вероятностью 1, начиная с нек-рого номера. Поэтому при изучении условий приложимости Б. ч. у. з. можно сразу ограничиться случайными величинами, удовлетворяющими последнему условию.

В доказательствах А. Я. Хинчина и А. Н. Колмогорова вместо сходимости ряда (5) устанавливается сходимость ряда

$$\sum_k \mathsf{P}\left\{\max_{n_k < n \leqslant n_{k+1}} \left|\frac{S_n}{n} - A_n\right| > \varepsilon_n\right\},$$

где $n_k = 2^k$. При этом А. Я. Хинчин привлекал, по существу, нек-рые идеи из теории рядов по ортогональным системам функций, а А. Н. Колмогоров использовал носящее его имя неравенство для максимумов сумм случайных величин.

Для независимых случайных величин Ю. В. Прохоров (1950) дал необходимое и достаточное условие применимости Б. ч. у. з. Полагая

$$Z_k = 2^{-k} \sum_{(k)} X_n,$$

где сумма $\sum_{(k)}$ распространена на те n, для к-рых $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$, это условие можно записать в виде: при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_k \mathsf{P}\{|Z_k - mZ_k| > \varepsilon\} < \infty, \qquad (7)$$

где mZ_k — медиана Z_k. Из (7) при дополнительных ограничениях можно получить условия, выраженные через характеристики отдельных слагаемых. Если, напр., $X_n = O\left(\frac{n}{\ln \ln n}\right)$ или если все X_n распределены по нормальному закону, то условие (7) равносильно следующему: при любом $\varepsilon > 0$

$$\sum_k \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{\mathsf{D}Z_k}\right\} < \infty. \qquad (8)$$

Известны условия применимости Б. ч. у. з. к цепям Маркова и к марковским стационарным случайным процессам. Напр., метод Хинчина, применённый к стационарным в широком смысле последовательностям X_n с корреляционной функцией $R(n)$, приводит к следующему утверждению: если ряд

$$\sum \frac{\ln^2 n}{n} |R(n)|$$

сходится, то

$$\frac{X_0 + \ldots + X_n}{n+1} \longrightarrow \mathsf{E}X_0$$

с вероятностью 1. Для стационарных в узком смысле процессов Б. ч. у. з. иногда толкуют, понимая под этим утверждение, что с вероятностью 1 существует предел

$$Y = \lim_{n \to \infty} \frac{X_0 + \ldots + X_n}{n+1}$$

(случайная величина Y равна условному математическому ожиданию X_0 по отношению к σ-алгебре множеств, инвариантных относительно сдвига; с вероятностью 1 величина Y постоянна и равна $\mathsf{E}X_0$ только для метрически транзитивных процессов).

Существуют варианты Б. ч. у. з. для случайных векторов в нормированных линейных пространствах.

Представление об отклонениях S_n/n от A_n даёт *повторного логарифма закон*.

● Хинчин А. Я., Основные законы теории вероятностей, М., 1927; Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987.

Ю. В. Прохоров.

БОЛЬШОЙ КРУГ — круг, получающийся при сечении шара плоскостью, проходящей через его центр. Окружность этого круга часто также называют Б. к.

БОЛЬЯЙ — ГЕРВИНА ТЕОРЕМА: равновеликие многоугольники являются равносоставленными. Теорема доказана Ф. Больяй (1832) и П. Гервином (1833). См. также *Равновеликие и равносоставленные фигуры.*

БОННЕ ТЕОРЕМА — теорема о существовании и единственности поверхности с заданными двумя основными квадратичными формами; доказана О. Бонне (1867). См. *Поверхностей теория.*

БОННЕ ФОРМУЛА — обобщение *конечных приращений формулы.*

БОРЕЛЕВСКОЕ МНОЖЕСТВО, B-множество,— множество, которое может быть получено в результате не более чем счётной совокупности операций объединения и пересечения открытых и замкнутых множеств топологического пространства. Более точно, борелевским множеством наз. элемент наименьшего замкнутого относительно дополнений счётного аддитивного класса множеств, содержащего замкнутые множества. Другие названия Б. м.: множества, измеримые по Борелю, B-измеримые множества. От-

крытые и замкнутые множества наз. Б. м. нулевого порядка. Б. м. первого порядка наз. множества типа F_σ и G_δ, являющиеся соответственно счётными суммами замкнутых и счётными пересечениями открытых множеств. Б. м. второго порядка наз. множества типа $F_{\sigma\delta}$ (пересечение счётного числа множеств типа F_σ) и множества типа $G_{\delta\sigma}$ (сумма счётного числа множеств типа G_δ). Так, по индукции определяются Б. м. любого конечного порядка. Эта классификация может быть продолжена при помощи трансфинитных чисел второго класса, и ею исчерпываются все Б. м.

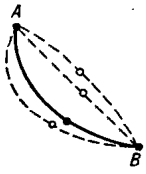
Б. м. введены Э. Борелем (1898).

БОРЕ́ЛЕВСКОЕ ПО́ЛЕ МНО́ЖЕСТВ, порождённое системой множеств M,— наименьшая система множеств, содержащая M и замкнутая относительно операций счётного объединения и перехода к дополнению.

БО́ХНЕРА ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — одно из *интегральных преобразований*. Предложено С. Бохнером (1934).

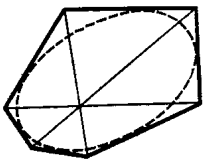
БО́ХНЕРА — ХИ́НЧИНА ТЕОРЕ́МА для характеристических функций — см. *Фурье преобразование*.

БРАХИСТОХРО́НА (от греч. βράχιστος — кратчайший и χρόνος — время) — кривая скорейшего спуска, т. е. та из всевозможных кривых, соединяющих две лежащие в вертикальной плоскости данные точки A и B (рис.) потенциального силового поля, двигаясь вдоль которой под действием только сил поля с начальной скоростью, равной нулю, материальная точка придёт из положения A в B за кратчайшее время. При движении в однородном поле силы тяжести Б.— циклоида с горизонтальным основанием и точкой возврата, совпадающей с точкой A.



Термин «Б.» ввёл И. Бернулли (1696).

БРИАНШО́НА ТЕОРЕ́МА — теорема проективной геометрии, утверждающая, что во всяком шестиугольнике, описанном около конического сечения — эллипса (в частности, окружности), гиперболы, параболы,— прямые, соединяющие три пары противоположных вершин, проходят через одну точку (рис.). Теорема доказана Ш. Брианшоном (1806). Б. т. находится в тесной связи с *Паскаля теоремой*. Эти две теоремы устанавливают основные проективные свойства линий второго порядка.



БРО́УНОВСКОГО ДВИЖЕ́НИЯ ПРОЦЕ́СС — процесс, описывающий хаотическое перемещение взвешенных в жидкости или газе мелких частиц, являющееся следствием соударений с молекулами среды. Существует несколько математич. моделей такого движения. Наиболее важная для теории случайных процессов — модель Б. д. п., известная под названием *винеровского процесса* (более того, часто ставится знак равенства между этими понятиями).

БУ́КВА — 1) элементарный знак какой-либо символики, рассматриваемый вне зависимости от выражаемого им смысла. Обычно Б. вводятся в рассмотрение путём соглашения и используются в качестве элементарных «кирпичиков», из к-рых по определённым правилам строятся выражения данной символики.

2) Б.— понятие теории информации; см. *Код*.

БУ́ЛЕВА А́ЛГЕБРА, булева решётка,— частично упорядоченное множество специального вида. Б. а. наз. дистрибутивная решётка, имеющая наибольший элемент 1 — единицу Б. а., наименьший элемент 0 — нуль Б. а. и содержащая вместе с каждым своим элементом x его дополнение — элемент Cx, удовлетворяющий соотношениям

$$\sup\{x, Cx\}=1, \quad \inf\{x, Cx\}=0.$$

Операции sup и inf обозначаются обычно знаками $\vee$ и $\wedge$, а иногда $\bigcup$ и $\bigcap$, чем подчёркивается их сходство с теоретико-множественными операциями объединения и пересечения. Вместо Cx иногда пишут $\bar{x}$, x', $-x$. Дополнение всякого элемента в Б. а. единственно.

Б. а. может определяться и как непустое множество с операциями C, $\vee$, $\wedge$, удовлетворяющими аксиомам:

1) $x\vee y=y\vee x, \quad x\wedge y=y\wedge x;$

2) $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z, \quad x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z;$

3) $(x\wedge y)\vee y=y, \quad (x\vee y)\wedge y=y;$

4) $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z),$
$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z);$

5) $(x\wedge Cx)\vee y=y, \quad (x\vee Cx)\wedge y=y.$

При таком подходе упорядочение не предполагается заранее заданным, а вводится условием: $x\leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x=x\wedge y$.

Возможны и другие аксиоматики. В аксиомах Б. а. отражена аналогия между понятиями «множества», «события», «высказывания». Отношение порядка в Б. а. может быть (в зависимости от выбора интерпретации) истолковано как теоретико-множественное включение, как причинное следование для событий, как логич. следование для высказываний и т. д.

Кроме основных операций C, $\vee$, $\wedge$, в Б. а. могут быть определены и другие, среди к-рых особенно важна операция симметрической разности:

$$x+_2y=(x\wedge Cy)\vee(y\wedge Cx)$$

(пишут также $x\Delta y$, $|x-y|$).

Всякая Б. а. есть булево кольцо с единицей относительно операций $+_2$ («сложение») и $\wedge$ («умножение»); любое булево кольцо с единицей можно рассматривать как Б. а.

Б. а. возникли в трудах Дж. Буля (1847, 1854) как аппарат символич. логики. В последующем они нашли широкое применение в различных разделах математики — в теории вероятностей, топологии, функциональном анализе и др. В основе приложений Б. а. к логике лежит интерпретация элементов Б. а. как *высказываний*, при этом дополнение Cx истолковывается как отрицание высказывания x, а операции $\wedge$ и $\vee$ — как конъюнкция и дизъюнкция. Б. а. используются и при обосновании теории вероятностей. Поле событий, изучаемое в теории вероятностей, есть Б. а.; при этом неравенство $x\leqslant y$ означает, что событие x влечёт событие y; соответственно с этим истолковываются нуль Б. а., единица Б. а. и булевы операции $\vee$, $\wedge$, C.

● Сикорский Р., Булевы алгебры, пер. с англ., М., 1969; Владимиров Д. А., Булевы алгебры, М., 1969; Расева Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972.

БУ́ЛЕВА ФУ́НКЦИЯ — то же, что функция *алгебры логики*.

БУ́ЛЕВО КОЛЬЦО́ — ассоциативное кольцо K, все элементы которого идемпотентны, т. е. $x^2=x$ для любого $x\in K$. Любое Б. к. коммутативно, и все его элементы имеют порядок 2, т. е. $x+x=0$. Б. к., отличное от кольца с нулевым умножением, есть подпрямая сумма полей $\mathbb{Z}_2$ из двух элементов (а в конечном случае — прямая сумма таких полей).

Б. к. — это кольцевой вариант *булевых алгебр*, а именно: любая булева алгебра является Б. к. с единицей относительно операций сложения и умножения, определяемых правилами

$$x+y=(x+Cy)\bigcup(y+Cx), \quad x\cdot y=x\bigcap y,$$

где Cx — дополнение элемента x. Нуль и единица кольца совпадают с нулём и единицей алгебры. Обратно, любое Б.к. с единицей есть булева алгебра относительно операций $x\bigcup y=x+y+xy$, $x\bigcap y=x\cdot y$, $Cx=1+x$.

БУ́ЛЕВО ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — см. *Исследование операций*.

БУ́ЛЕВЫ ОПЕРА́ЦИИ — операции $\vee$, $\wedge$ и C в *булевой алгебре*.

БУНЯКО́ВСКОГО НЕРА́ВЕНСТВО, Коши — Буняковского неравенство,— неравенство, утверждающее, что для функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых

с квадратом,

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Установлено В. Я. Буняковским (1859). Б. н. аналогично алгебраическому *Коши неравенству*. Обобщением Б. н. служит *Гёльдера неравенство*. Иногда Б. н. наз. неравенством Шварца, по имени Г. Шварца, хотя в его работах это неравенство появилось не ранее 1884 (без ссылок на В. Я. Буняковского).

БУТЫЛКА КЛЕЙНА — то же, что *Клейна поверхность*.

БЬЕНЕМЕ — ЧЕБЫШЁВА НЕРАВЕНСТВО — неравенство для вероятности отклонения случайной величины от её математического ожидания. Независимо открыто Ж. Бьенеме (1853) и П. Л. Чебышевым (1867). См. *Чебышева неравенство*.

БЭРА КЛАССИФИКАЦИЯ — классификация разрывных функций, введённая Р. Бэром (1899). К первому классу относится всякая разрывная функция, к-рая может быть представлена как предел сходящейся последовательности непрерывных функций — функций нулевого класса. Разрывная функция, не входящая в первый класс, к-рая может быть представлена как предел сходящейся последовательности функций первого класса, относится ко второму классу. Напр.,

$$f(x) = (\cos n!\,\pi x)^{2m},$$

где n и m — натуральные числа,— непрерывная функция, т. е. функция нулевого класса;

$$f_n(x) = \lim_{m\to\infty} (\cos n!\,\pi x)^{2m}$$

— разрывная функция первого класса; функция Дирихле

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \text{ иррациональном,} \\ 1 \text{ при } x \text{ рациональном} \end{cases}$$

— разрывная функция второго класса. Аналогично определяются функции третьего и дальнейших классов. Функции, входящие в Б. к., наз. функциями Бэра; их теория тесно связана с теорией измеримых боревских множеств. Функции Бэра подробно изучены Н. Н. Лузиным и его учениками. А. Лебег доказал существование функций любого класса и существование функций, не входящих в Б. к.

БЭРА ФУНКЦИЯ — функция, входящая в *Бэра классификацию*.

БЮДАНА — ФУРЬЕ ТЕОРЕМА — теорема, дающая оценку сверху числа действительных корней многочлена с действительными коэффициентами. А именно: число корней многочлена $P_n(x)$, заключённых в интервале (a, b), $a<b$, равно или на чётное число меньше, чем t_1-t_2, где t_1 — число перемен знака в ряду производных многочлена $P_n(x)$ в точке a, т. е. в ряду

$$P_n(a),\quad P_n'(a),\quad \ldots,\quad P_n^{(n)}(a),$$

а t_2 — число перемен знака в этом ряду в точке b. При этом каждый кратный корень считается за столько корней, какова его кратность.

Установлена Ф. Бюданом (1822) и Ж. Фурье (1820).

B

ВАЛЕНТНОСТЬ (от лат. valentia — сила) тензора — см. *Тензорное исчисление*.

ВАЛЛИСА ФОРМУЛА — формула, выражающая число π в виде бесконечного произведения

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\cdots \qquad (*)$$

Существуют другие варианты этой формулы, напр.:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m!)^2\cdot 2^{2m}}{(2m)!\,\sqrt{m}}.$$

Формула (*) впервые встречается у Дж. Валлиса (1655) в его вычислениях площади круга; В. ф.— один из первых примеров бесконечного произведения.

ВАНДЕРМОНДА ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ — определитель вида

$$\Delta(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

где a_i — элементы произвольного поля. В. о. равен произведению всевозможных разностей (a_i-a_j), $1\leqslant j<i\leqslant n$:

$$\Delta(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (a_i-a_j).$$

В. о. отличен от нуля тогда и только тогда, когда элементы $a_1, \ldots, a_n$ попарно различны.

Для случая $n=3$ В. о. ввёл А. Вандермонд (1774), а в общем случае — О. Коши (1815).

ВАРИАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТ — характеристика рассеяния распределения вероятностей случайной величины. Существуют разные способы определения В. к., но наиболее употребителен В. к. V, определённый для положительной случайной величины X с математич. ожиданием $a=\mathsf{E}X$ и дисперсией $\sigma^2=\mathsf{D}X$ формулой

$$V = \frac{\sigma}{a}.$$

В. к. подобного вида был предложен К. Пирсоном (1895) в несколько иной форме:

$$V' = 100\,\frac{\sigma}{a}.$$

По сравнению с обычной мерой рассеяния — квадратичным отклонением σ — В. к. является безразмерной характеристикой.

ВАРИАЦИОННАЯ КРИВАЯ — устаревшее название графика функции *эмпирического распределения*.

ВАРИАЦИОННАЯ СТАТИСТИКА — исчисление числовых и функциональных характеристик эмпирических распределений. Если в к.-л. группе объектов показатель изучаемого признака изменяется (варьирует) от объекта к объекту, то каждому значению такого показателя $x_1, \ldots, x_n$ (n — общее количество объектов) ставят в соответствие одну и ту же вероятность, равную $1/n$. Такое формально введённое «распределение вероятностей», наз. эмпирическим, можно истолковать как распределение вероятностей нек-рой искусственно введённой вспомогательной случайной величины, принимающей значение x_i с вероятностью $p_i=1/n$, $i=1, \ldots, n$. Это позволяет использовать для целей В. с. все понятия и результаты общей теории дискретных распределений, частным случаем к-рых являются эмпирич. распределения. Напр., используемые в В. с. соотношения между моментами эмпирич. распределения суть частные случаи аналогичных соотношений для моментов случайных величин. Наиболее содержательное и математически строгое истолкование В. с. осуществлено лишь для тех случаев, когда результаты наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ представляют собой случайные величины. При достаточно большом количестве наблюдений n эмпирич. распределение, в силу закона больших чисел, является хорошей статистич. оценкой для неизвестного теоретич.

распределения случайных величин x_i, и в этой ситуации В. с. становится полезным вспомогательным аппаратом математич. статистики. Попытки обоснования В. с. вне рамок теории вероятностей и математич. статистики не привели к серьёзным теоретич. результатам.

ВАРИАЦИО́ННОЕ ИСЧИСЛЕ́НИЕ — раздел математики, посвящённый исследованию методов отыскания экстремумов функционалов, зависящих от выбора одной или нескольких функций при разного рода ограничениях (фазовых, дифференциальных, интегральных и т. п.), накладываемых на эти функции. Этими рамками обозначен класс задач, наз. ещё задачами к л а с с и ч е с к о г о В. и. Иногда в термин «В. и.» вкладывают более широкий смысл, понимая под ним тот раздел теории экстремальных задач, где исследование экстремумов проводят т. н. методом *вариаций*; задачи, относящиеся к В. и. в этом широком смысле, противопоставляются д и с к р е т н ы м задачам оптимизации.

Весьма широкий круг задач классич. В. и. описывает следующая схема. Требуется минимизировать функционал

$$J(x)=\int_T f(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))\,dt, \qquad (1)$$

где $T\subset\mathbb{R}^m$, $t=(t_1,\ \ldots,\ t_m)$, $x=(x^1,\ \ldots,\ x^n)$, $\dot{x}=\left(\frac{\partial x^i}{\partial t_\alpha}\right)$, $f:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{mn}\longrightarrow\mathbb{R}$,

при ограничениях:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(t,\ x(t),\ \dot{x}(t))=0,\\ \varphi:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{mn}\longrightarrow\mathbb{R}^s\end{array}\right\} \qquad (2)$$

и нек-рых краевых условиях: $x|_{\partial T}\in\Gamma$. Задачи такого типа наз. з а д а ч а м и Л а г р а н ж а.

Наиболее элементарной среди задач классич. В. и. является п р о с т е й ш а я з а д а ч а в а р и а ц и о н н о г о и с ч и с л е н и я, когда в функционале (1) переменные t и x одномерны, ограничения (2) отсутствуют, а краевые условия — закреплённые:

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} L(t,\ x,\ \dot{x})\,dt\longrightarrow\inf; \qquad (3)$$
$$x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1.$$

К этому типу относится задача о *брахистохроне*; с ней обычно связывают начало истории классич. В. и.

Теоретич. основы классич. В. и. были заложены Л. Эйлером и Ж. Лагранжем в 18 в. Ими же были вскрыты важнейшие связи этой дисциплины с механикой и физикой. На первом же этапе развития В. и. усилиями в основном Г. Лейбница, Я. и И. Бернулли, Л. Эйлера и Ж. Лагранжа получили решение многие конкретные задачи (о геодезических, о поверхности вращения, ряд изопериметрич. задач и т. п.).

В В. и. изучаются алгоритмич. методы отыскания экстремумов, методы получения необходимых и достаточных условий, условия, гарантирующие существование экстремума, качественные вопросы и т. п. Среди алгоритмич. методов нахождения экстремумов важнейшее место занимают прямые методы.

Прямые методы. Л. Эйлер (1768) создал метод приближённого (численного) решения задач В. и., к-рый получил название *Эйлера метода ломаных*. С этого момента начались исследования путей численного решения экстремальных задач. Метод ломаных Эйлера был первым представителем большого класса методов, наз. п р я м ы м и м е т о д а м и В. и. Эти методы основаны на редукции задачи отыскания экстремума к задаче математич. анализа об отыскании экстремума функции многих переменных.

В 20 в. интерес к прямым методам значительно возрос. Прежде всего были предложены новые способы редукции к задаче об экстремуме функции конечного числа переменных. Эти идеи могут быть пояснены на примере минимизации функционала (3) при условии

$$x(t_0)=x(t_1)=0.$$

Пусть разыскивается решение задачи в форме

$$x(t)=\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_n(t),$$

где $\varphi_n(t)$ — нек-рая система функций, удовлетворяющих условиям $\varphi_i(t_0)=\varphi_i(t_1)=0$, $i=1,\ \ldots,\ N$. Тогда функционал $J(x)$ становится функцией коэффициентов: $J(x)\sim J(a_1,\ \ldots,\ a_n)$, и задача сводится к отысканию экстремума этой функции N переменных. При нек-рых условиях, наложенных на систему функций $\{\varphi_n\}$, решение задачи стремится при $N\to\infty$ к решению задачи (3) (см. *Галёркина метод*).

Метод вариаций. Второе направление исследований — изучение необходимых и достаточных условий, к-рым должна удовлетворять функция $x(t)$, реализующая экстремум функционала $J(x)$. Основным методом получения необходимых условий является метод вариаций. Пусть тем или иным способом построена нек-рая функция $x(t)$. Как проверить, является ли эта функция решением вариационной задачи (3)? Первый вариант ответа на этот вопрос был дан Л. Эйлером (1744). В приведённой ниже формулировке ответа употребляется введённое Ж. Лагранжем (1762) понятие вариации (отсюда назв. «в а р и а ц и о н н о е и с ч и с л е н и е») δJ функционала $J(x)$.

Для простейшей задачи В. и. вариация δJ функционала $J(x)$ выражается следующим образом:

$$\delta J(x,\ h)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)\Big|_{x(t)} h(t)\,dt,$$

где $h(t)$ — произвольная гладкая функция, удовлетворяющая условиям $h(t_0)=h(t_1)=0$. Условие $\delta J=0$ является необходимым. Для того чтобы функция $x(t)$ доставляла экстремум функционалу (3), необходимо, чтобы выполнялось условие $\delta J=0$, т. е. чтобы функция $x(t)$ удовлетворяла следующему дифференциальному уравнению 2-го порядка относительно функции $x(t)$:

$$\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=0. \qquad (4)$$

Это уравнение наз. у р а в н е н и е м Э й л е р а, а интегральные кривые этого семейства — э к с т р е м а л я м и рассматриваемой вариационной задачи. Функция $x(t)$, на к-рой $J(x)$ достигает экстремума, необходимо должна быть решением краевой задачи $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$ для уравнения (4). Таким образом, возникает второй путь решения экстремальной задачи: надо решить краевую задачу для уравнения Эйлера (в регулярных случаях при этом получится лишь конечное число решений) и затем надо каждую из полученных экстремалей подвергнуть дополнительному исследованию, чтобы определить, имеется ли среди них кривая, дающая решения задачи. Однако указанный метод обладает тем существенным недостатком, что не имеется универсальных способов решения краевых задач для обыкновенных (нелинейных) дифференциальных уравнений.

Весьма часто встречаются вариационные задачи с п о д в и ж н ы м и к о н ц а м и. Напр., в простейшей задаче В. и. точки $x(t_0)$ и $x(t_1)$ могут перемещаться вдоль заданных кривых. Для задач с подвижными концами из условия $\delta J=0$ выводятся дополнительные условия, к-рым должны удовлетворять подвижные концы,— т. н. у с л о в и я т р а н с в е р с а л ь н о с т и, приводящие в совокупности с граничными условиями к замкнутой системе условий для краевой задачи.

Основные результаты, относящиеся к простейшей задаче В. и., переносятся на общий случай функционалов вида

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1} F\left(x(t),\ \frac{dx}{dt},\ \frac{d^2x}{dt^2},\ \ldots,\ \frac{d^sx}{dt^s}\right)dt,$$

где $x(t)$ — вектор-функция произвольной размерности.

Задача Лагранжа. Л. Эйлер и Ж. Лагранж изучали и задачи на условный экстремум. Простейшим классом задач подобного рода является класс т. н. *изопериметрических задач*. Ж. Лагранж выделил (в случае когда t одномерно) класс задач (1), (2) и получил для них аналог уравнения

Эйлера с привлечением т. н. множителей Лагранжа. Такой аналог получается и для самого общего случая — задачи (1), (2). Особое значение задача Лагранжа приобрела в сер. 20 в. в связи с созданием математич. теории *оптимального управления*. Далее основные результаты, касающиеся задачи Лагранжа, даются на языке этой теории, возникшем после работ Л. С. Понтрягина и его учеников.

Пусть в задаче (1), (2) t одномерно и система $\varphi(t, x, \dot{x})$ может быть частично разрешена относительно последних переменных. Тогда получается задача о минимизации функционала

$$J(x, u)=\int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)\,dt \tag{5}$$

при дифференциальной связи

$$\dot{x}=f(t, x, u) \tag{6}$$

и граничных условиях

$$(x(t_0), \quad x(t_1))\in E. \tag{7}$$

В задаче (5) — (7) $x=(x^1, \ldots, x^n)$ — вектор-функция, наз. фазовым вектором, $u=(u^1, \ldots, u^m)$ — вектор-функция, наз. управлением, $F: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $E\subset\mathbb{R}^{2n}$.

Примером граничных условий типа (7) могут служить закреплённые условия, как в задаче (3). В задачах оптимального управления помимо условий (6) и (7) накладывают ещё и «неклассические» условия, напр.:

$$u(t)\in U\subset\mathbb{R}^m. \tag{8}$$

Слабый и сильный экстремумы. В В. и. обычно различают две топологии — сильную и слабую, и в соответствии с этим оперируют понятиями сильного и слабого экстремумов. Напр., в применении к задаче (3) говорят, что кривая $x_0(t)$ реализует слабый минимум, если можно указать такое $\varepsilon>0$, что $J(x)\geqslant J(x_0)$ для всех непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(t_0)=x_0(t_0)$, $x(t_1)=x_0(t_1)$ и

$$\max_{t\in[t_0, t_1]}|x(t)-x_0(t)|+\max_{t\in[t_0, t_1]}|\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)|<\varepsilon.$$

Иными словами, здесь фиксируется близость не только фазовых переменных, но и скоростей (управлений). Говорят, что функция доставляет сильный минимум, если можно указать такое $\varepsilon>0$, что $J(x)\geqslant J(x_0)$ для всех допустимых абсолютно непрерывных функций $x(t)$ [для к-рых $J(x)$ существует], удовлетворяющих условиям $x(t_0)=x_0(t_0)$, $x(t_1)=x_0(t_1)$ и

$$\max_{t\in[t_0, t_1]}|x(t)-x_0(t)|\leqslant\varepsilon.$$

Здесь фиксируется лишь близость фазовых переменных.

Если $x_0(t)$ реализует сильный экстремум, то эта функция реализует тем более и слабый экстремум, поэтому достаточные условия сильного экстремума являются достаточными условиями и слабого. С другой стороны, из отсутствия слабого экстремума следует отсутствие сильного экстремума, т. е. необходимые условия слабого экстремума являются необходимыми условиями сильного экстремума.

Необходимые и достаточные условия экстремума. Уравнение Эйлера (4) представляет собой необходимое условие слабого экстремума. В кон. 50-х гг. 20 в. Л. С. Понтрягиным был выдвинут принцип максимума для задачи (5)—(8), являющийся необходимым условием сильного экстремума. Принцип максимума Понтрягина гласит: если пара (x, u) доставляет сильный экстремум в задаче (5)—(8), то найдутся вектор-функция ψ и число λ_0 такие, что для функции Гамильтона $A(t, x, \psi, u, \lambda_0)=(\psi, f)-\lambda_0 F$ выполняются следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial\psi}, \quad -\dot{\psi}=\frac{\partial H}{\partial x},\\&\max_{u\in U}H(t, x(t), \psi(t), u, \lambda_0)=H(t, x(t), u(t), \lambda_0).\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Если приложить принцип максимума Понтрягина к задаче (3), то получится, что для того чтобы кривая доставляла сильный минимум в задаче (3), необходимо, чтобы она была экстремалью [т. е. удовлетворяла уравнению Эйлера (4)] и, кроме того, чтобы выполнялось необходимое условие Вейерштрасса:

$$\mathcal{E}(t, x(t), \dot{x}(t), \xi)\geqslant 0, \quad \forall t\in[t_0, t_1], \quad \xi\in R, \tag{10}$$

где

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, \xi)=L(t, x, \xi)-L(t, x, \dot{x})-(\xi-\dot{x})L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}).$$

Помимо условий типа (4) и (10), носящих локальный характер (т. е. проверяемых в каждой точке экстремали), имеется необходимое условие глобального характера (условие Якоби), связанное с поведением множества экстремалей, близких к заданной экстремали. Для задачи (3) условие Якоби состоит в следующем. Для того чтобы экстремаль $x(t)$ доставляла минимум в задаче (3), необходимо, чтобы решение уравнения (уравнение Якоби)

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^2}\Big|_{x(t)}\frac{d}{dt}h(t)\right)+\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial\dot{x}}\right)\Big|_{x(t)}h(t)=0 \tag{11}$$

с краевыми условиями $h(t_0)=0$, $\dot{h}(t_0)\neq 0$ не имело бы нулей в интервале (t_0, t_1). Нули решения $h(t)$ уравнения (11) наз. точками, сопряжёнными с точкой t_0. Таким образом, условие Якоби заключается в том, что интервал (t_0, t_1) не должен содержать точек, сопряжённых с t_0.

Необходимые условия слабого минимума $\delta J=0$, $\delta^2 J\geqslant 0$ (условия Лежандра) являются точными аналогами условий минимума $f'(x)=0$, $f''(x)\geqslant 0$ для функций одного переменного. Условие Якоби при выполнении условия Лежандра (усиленного) является необходимым условием неотрицательности второй вариации. Это приводит к следующему результату: для того чтобы функция $x(t)$ реализовывала слабый минимум функционала (3), необходимо, чтобы: а) функция $x(t)$ удовлетворяла уравнению Эйлера, б) выполнялось усиленное условие Лежандра $\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^2}\Big|_{x(t)}>0$, в) интервал (t_0, t_1) не содержал точек, сопряжённых с точкой t_0 (в случае если выполняется усиленное условие Лежандра).

Достаточные условия слабого минимума таковы: функция $x(t)$ должна быть экстремалью, на ней выполняется усиленное условие Лежандра и полуинтервал (t_0, t_1) не содержит точек, сопряжённых с точкой t_0. Для того чтобы кривая $x(t)$ доставляла сильный минимум, достаточно, чтобы, помимо сформулированных достаточных условий слабого минимума, выполнялось достаточное условие Вейерштрасса.

Задачи оптимального управления. Одним из основных направлений развития В. и. являются неклассич. задачи В. и., подобные сформулированной выше задаче (5)—(8). Задачи, укладывающиеся в эту схему, имеют огромное прикладное значение. Пусть, напр., уравнение (6) описывает движение нек-рого динамич. объекта, напр. космич. корабля. Управление (вектор u) — тяга его двигателя. Начальное положение корабля — это нек-рая орбита, конечное положение — это орбита другого радиуса. Функционал J описывает расход горючего на выполнение манёвра. Тогда задачу (5)—(7) можно применительно к данной ситуации сформулировать следующим образом: определить закон изменения тяги двигателя космич. аппарата, совершающего переход с одной орбиты на другую за фиксированное время так, чтобы расход топлива был минимальным. При этом необходимо учитывать ограничения на управление: тяга двигателя не может превосходить нек-рой величины и угол поворота тяги также ограничен. Таким образом, в данном примере получается, что компоненты u^i, $i=1, 2, 3$, вектора тяги подчинены ограничениям

$$a_i^-\leqslant u^i\leqslant a_i^+,$$

где a_i^- и a_i^+ — нек-рые заданные числа.

Имеется большое число задач, к-рые сводятся к задаче Лагранжа, но при дополнительном ограничении типа (8). Такие задачи получили название задач о п т и м а л ь н о г о у п р а в л е н и я. Для теории оптимального управления должен был быть разработан специальный аппарат. Им и явился принцип максимума Понтрягина.

Возможен и другой подход к тем же проблемам теории оптимального управления. Пусть $S(t, x)$ — значение функционала (5) вдоль оптимального решения от точки (t_1, x_0) до точки (t, x). Тогда для того чтобы функция $u(t)$ была оптимальным управлением, необходимо (а в нек-рых случаях и достаточно), чтобы удовлетворялось следующее дифференциальное уравнение с частными производными:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\min_{u\in U}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x},\ f(t, x(t), u, \psi(t))\right)-F(t, x(t), u)\right\},$$

наз. у р а в н е н и е м Б е л л м а н а. Для задач классич. В. и. S-функция $S(t, x)$ (или функция действия) должна удовлетворять у р а в н е н и ю Г а м и л ь т о н а — Я к о б и:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}\right)=0,$$

где H — функция Гамильтона. Теория Гамильтона—Якоби является мощным инструментом исследования многих важнейших задач вариационного типа, связанных с классич. механикой.

Связь В. и. с задачами теории уравнений с частными производными была обнаружена уже в 19 в. П. Дирихле показал, что решение краевых задач для уравнения Лапласа эквивалентно решению нек-рой вариационной задачи. Пусть, напр., имеется нек-рое линейное операторное уравнение

$$Ax=f, \tag{12}$$

где $x(\xi, \eta)$ — нек-рая функция двух независимых переменных, обращающаяся в нуль на замкнутой кривой Г. В предположениях, естественных для нек-рого класса задач физики, задача отыскания решения уравнения (8) эквивалентна отысканию минимума функционала

$$J(x)=\int\int_\Omega A_{xx}\,d\xi\,d\eta-2\int\int_\Omega fx\,d\xi\,d\eta, \tag{13}$$

где Ω — область, ограниченная кривой Г. Уравнение (12) в этом случае является уравнением Эйлера для функционала (13).

Редукция задачи (12) к (13) возможна, напр., если A — самосопряжённый и положительно определённый оператор. Связь между проблемами для уравнений с частными производными и вариационными задачами позволяет, в частности, устанавливать справедливость различных теорем существования и единственности; она сыграла важную роль в кристаллизации понятия обобщённого решения. Эта редукция очень важна и для вычислительной математики, поскольку она позволяет использовать прямые методы В. и. для решения краевых задач теории уравнений с частными производными.

Качественные методы исследования задач В. и. дают возможность ответить на вопросы о существовании решений, об их числе, о качественных особенностях экстремалей и их семейств. В 20 в. была установлена зависимость числа решений вариационных задач от свойств пространства, на к-ром определён функционал. Так, напр., если функционал J задан на всевозможных гладких кривых на торе, соединяющих две фиксированные точки, или если функционал J задан на всевозможных замкнутых кривых поверхности, топологически эквивалентной тору, то в обоих случаях число критич. элементов — линий, на к-рых вариация $\delta J=0$, бесконечно. Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман доказали, что на каждой поверхности, топологически эквивалентной сфере, существует, по крайней мере, три самонепересекающиеся замкнутые геодезические различной длины; если же длины хотя бы двух из этих геодезических совпадают, то существует бесконечное множество замкнутых геодезических равной длины. Проблемы подобного рода указывают на тесную связь В. и. с качественной теорией дифференциальных уравнений и топологией. При исследовании качественных методов сыграло большую роль развитие функционального анализа.

Связь В. и. с теорией конусов. Круг вопросов, к-рыми занимается В. и., непрерывно расширяется. В частности, всё большее и большее внимание уделяется изучению функционалов $J(x)$ весьма общего вида, задаваемых на множествах G_k элементов нормированных пространств. Для задач такого рода уже трудно ввести понятие вариации. Потребовалось привлечение нового аппарата исследования. Таким аппаратом оказалась теория конусов в банаховых пространствах. Напр., пусть поставлена задача о минимуме $f(x)$, где x — элемент замкнутого множества G. К о н у с о м $\Gamma_G(x_0)$ наз. множество ненулевых векторов e, каждому из к-рых можно поставить в соответствие положительное число λ_e^* таким образом, чтобы вектор $x=x_0+\lambda e\in G$ для любого $\lambda\in(0, \lambda_e^*)$. Конусом $\Gamma_f(x_0)$ наз. множество ненулевых векторов e, каждому из к-рых можно поставить в соответствие положительное λ_e^* таким образом, чтобы

$$f(x_0+\lambda e)\geqslant f(x_0)$$

для любого $\lambda\in[0, \lambda_e^*]$. Для того чтобы x_0 реализовал минимум функции $f(x)$, необходимо, чтобы пересечение конусов $\Gamma_G(x_0)$ и $\Gamma_f(x_0)$ было пустым. Это условие столь же элементарно, как и условие обращения в нуль вариации, однако из него вытекают не только те результаты, к-рые можно получить классич. методами В. и.; оно позволяет подойти к проблемам гораздо более сложным, напр. к исследованию экстремальных значений недифференцируемых функционалов.

● Л а в р е н т ь е в М. А., Л ю с т е р н и к Л. А., Курс вариационного исчисления, 2 изд., М. – Л., 1950; А х и е з е р Н. И., Вариационное исчисление, Харьков, 1981; К о ш а А., Вариационное исчисление, пер. с венг., М., 1983; Я н г Л., Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления, пер. с англ., М., 1974; П о н т р я г и н Л. С., Б о л т я н с к и й В. Г., Г а м к р е л и д з е Р. В., М и щ е н к о Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 4 изд., М., 1983; А л е к с е е в В. М., Т и х о м и р о в В. М., Ф о м и н С. В., Оптимальное управление, М., 1979.

Н. Н. Моисеев.

ВАРИАЦИО́ННОЕ ИСЧИСЛЕ́НИЕ; ч и с л е н н ы е м е т о д ы — раздел вычислительной математики, посвящённый методам отыскания экстремальных значений функционалов.

Численные методы В. и. принято разделять на два больших класса: непрямые и прямые методы. Непрямые методы основаны на использовании необходимых условий оптимальности, с помощью к-рых исходная вариационная задача сводится к краевой задаче. Прямые методы ориентированы на непосредственное отыскание экстремума функционала. Используемые при этом методы оптимизации являются развитием идей *математического программирования*.

Разделение численных методов В. и. на прямые и непрямые весьма условно. Нек-рые алгоритмы используют элементы обоих подходов. Кроме того, существуют методы, к-рые непосредственно не относятся к двум выделенным классам. Напр., методы, основанные на достаточных условиях оптимальности, образуют самостоятельную группу.

Непрямые методы. С появлением принципа максимума Понтрягина (1956) сведение вариационных задач к краевым стало особенно популярным.

Пусть в задаче оптимального управления требуется найти траекторию $x(t)$ и управление $u(t)$, доставляющие минимум функционалу

$$J=\int_{t_0}^{T} f^0(t, x, u)\,dt \tag{1}$$

при дифференциальных связях:

$$\dot{x}=f(t, x, u), \tag{2}$$

граничных условиях:

$$x(t_0)=x_0, \tag{3}$$

$$x(T)=x_T \tag{4}$$

и ограничениях на управление:

$$u \in U, \tag{5}$$

где $x=(x^1, \ldots, x^n)$, $u=(u^1, \ldots, u^m)$ — векторы фазовых координат и управления, $f=(f^1, \ldots, f^n)$, U — замкнутое множество m-мерного пространства, t — независимое переменное (время).

Согласно принципу максимума Понтрягина, оптимальное управление $u(t)$ должно при каждом t доставлять абсолютный максимум функции Гамильтона:

$$H(\tilde{u}) = \max_{u \in U} H(u) = \max_{u \in U} \left[\sum_{i=1}^{n} \psi_i f^i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right], \tag{6}$$

где $\psi=(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ определяется системой уравнений

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i=1, \ldots, n. \tag{7}$$

Из условия (6) находится управление $u(t, x, \psi)$ и подставляется в (2) и (7). В результате получается замкнутая краевая задача для системы $2n$ дифференциальных уравнений (2) и (7) с граничными условиями (3) и (4).

Наиболее распространённой схемой численного решения этой краевой задачи является схема, использующая метод Ньютона с дроблением шага. При этом вводится вектор невязки

$$\varphi_i = x^i(T) - x_T^i, \quad i=1, \ldots, n, \tag{8}$$

где значения $x^i(T)$ получаются из решения задачи Коши для системы (2), (7) с начальными условиями (3) и $\psi_j(t_0)=\psi_{j0}$, $j=1, \ldots, n$. Невязки (8) рассматриваются как функции от неизвестных $\psi_{10}, \ldots, \psi_{n0}$, к-рые определяются из системы уравнений

$$\varphi_i(\psi_{10}, \ldots, \psi_{n0}) = 0, \quad i=1, \ldots, n. \tag{9}$$

В тех случаях, когда граничные условия и функционал заданы в более общем виде, чем в (3), (4) и (1), к необходимым условиям оптимальности (6), (7) добавляются условия трансверсальности. После исключения входящих в эти условия произвольных постоянных получается замкнутая краевая задача и отвечающая ей система уравнений типа (9).

Специфич. методы разработаны для решения краевых задач частного вида. Так, линейные краевые задачи решаются методом переноса граничных условий (*прогонки метод*). Этот метод также используется в качестве составного элемента для итеративного решения нелинейных краевых задач.

Эффективность и относительная простота реализации непрямых методов на ЭВМ сделали их весьма распространённым средством для решения задач В. и. Однако эти методы не стали универсальными: для нек-рых важных классов задач В. и., напр. содержащих фазовые ограничения, выписывание необходимых условий оптимальности затруднено и приводит к краевым задачам со сложной структурой. Кроме того, необходимые условия не гарантируют, что найденное решение доставляет относительный экстремум функционалу. Для проверки приходится привлекать достаточные условия оптимальности. Наконец, решение системы (9) наталкивается на трудности, связанные, во-первых, с проблемой выбора удачного начального приближения для ψ_{i0} и, во-вторых, с практич. неустойчивостью задачи Коши. Всё это ограничивает сферу применения непрямых методов.

Прямые методы. Первый прямой метод был предложен Л. Эйлером для решения простейшей задачи В. и. Этот метод известен под названием метода ломаных Эйлера (или конечноразностного метода Эйлера) и заключается в том, что функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x})\, dt \tag{10}$$

рассматривается на непрерывных ломаных $x(t)$, удовлетворяющих заданным условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1$$

и состоящих из N прямолинейных отрезков с заданными абсциссами концов. Таким образом, функционал превращается в функцию от ординат вершин этих ломаных, а исходная задача — в задачу минимизации функции многих переменных (см. *Эйлера метод ломаных*).

Из-за сложности решения подобных задач для ручного счёта прямые методы долгое время оставались в стороне от традиционных исследований по В. и. Интерес к ним вновь возрос в нач. 20 в. Были предложены новые способы редукции к задаче об отыскании экстремума функции многих переменных. Наиболее важным из них является *Ритца метод*, основанный на минимизации функционала на конечномерных подпространствах или многообразиях.

Потребности практики увеличили интерес к неклассич. задачам оптимального управления. Наличие в технич. задачах сложных ограничений на фазовые координаты и управляющие функции, разрывность правых частей дифференциальных уравнений, возможность существования особых и скользящих оптимальных режимов и т. д.— всё это потребовало разработки новых разновидностей прямых методов. Наибольшее распространение получили методы, использующие идеи спуска в пространстве управлений и идеи последовательного анализа вариантов (типа *динамического программирования*).

Методы спуска в пространстве управлений основаны на получении последовательности управлений $u_k \in U$ вида

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \delta u_k(t), \tag{11}$$

к-рой соответствует монотонно убывающая последовательность значений функционала. Пусть, напр., ищется минимум функционала

$$J = F(x(T)) \tag{12}$$

при условиях (2), (3) и (5) (U — выпуклое и односвязное множество). Отыскание $\delta u_k(t)$ производится следующим образом. С помощью уравнений в вариациях для (2) и сопряжённой системы (7) с условиями на правом конце

$$\psi_i(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x^i}, \quad i=1, \ldots, n,$$

линейная часть приращения функционала (12) от вариации δu представляется в виде

$$\delta J = -\int_{t_0}^{T} \frac{\partial H}{\partial u}\, \delta u\, dt.$$

Для уменьшения функционала (12) следует на каждой итерации выбирать приращение

$$\delta u_k(t) = \varkappa \frac{\partial H}{\partial u}, \quad \varkappa > 0,$$

где величина $\frac{\partial H}{\partial u}$ вычисляется на управлении $u_k(t)$ и соответствующей ему траектории $x_k(t)$. Законность линеаризации, а следовательно, и уменьшение функционала (12) обеспечиваются выбором достаточно малой величины $\varkappa$. Процесс спуска (11) начинается с нек-рого $u_0(t)$ и заканчивается, когда на нек-рой итерации $|\delta J|$ становится меньше нек-рого заданного ε. Для описанного случая свободного правого конца алгоритм получается наиболее простым.

В случае когда граничные условия заданы и на правом конце, все алгоритмы рассматриваемого типа существенно усложняются. Для учёта граничных условий привлекается процедура проектирования градиента или вводится штраф за невыполнение граничных условий.

Большая группа прямых методов численного решения задач оптимального управления основана на идеях последовательного анализа вариантов. Важным достоинством этих методов является то, что с их помощью удаётся решать задачи с фазовыми ограничениями вида

$$x \in G, \tag{13}$$

где G — замкнутое множество n-мерного пространства. Их основной недостаток — существенное возрастание трудностей с увеличением размерности пространства. Эти методы используют редукцию исходной задачи к задаче нелиней-

ного программирования специального вида. Для этого вводится сетка в пространстве переменных t, x^1, ..., x^n и осуществляется исключение управлений, в результате чего задача сводится к минимизации функции вида

$$J(x_0, \ldots, x_N) = \sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i, x_{i+1}), \qquad (14)$$

где x_i — значение вектора x в точке t_i, $i=0, 1\ldots, N$, при ограничениях

$$x_i \in G_i,$$

к-рые получаются из ограничений (3), (4), (13).

Минимум (14) находится с помощью рекуррентной процедуры, основанной на динамич. программировании. При этом в используемой сетке в пространстве переменных t, x^1, ..., x^n необходимо выполнение определённых соотношений между шагами по t и x^j [напр., вида $h^j=o(\tau)$]. Метод предъявляет большие требования к быстродействию и памяти ЭВМ. Поэтому при практич. реализации сначала находят экстремум на грубой сетке, а потом в окрестности полученного решения его уточняют на более мелкой сетке. Это делается с помощью одного из методов, позволяющих отыскивать локальный экстремум.

● Моисеев Н. Н., Численные методы в теории оптимальных систем, М., 1971; Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962; Васильев Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980; Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960. *И. Б. Вапнярский.*

ВАРИАЦИО́ННО-РА́ЗНОСТНЫЙ МЕ́ТОД — см. *Вариационные методы.*

ВАРИАЦИО́ННО-СЕ́ТОЧНЫЙ МЕ́ТОД — см. *Вариационные методы.*

ВАРИАЦИО́ННЫЕ МЕ́ТОДЫ в ы ч и с л и т е л ь н о й м а т е м а т и к е — методы, заменяющие задачу минимизации функционала I, заданного на некотором бесконечномерном линейном пространстве H, задачами его минимизации на последовательности конечномерных подпространств $\hat{H}_N$. Классич. примером В. м. является *Ритца метод* решения линейных краевых задач для уравнений и систем эллиптич. типа. Если, в частности, краевая задача может трактоваться как операторное уравнение

$$Lu = f \qquad (1)$$

в гильбертовом пространстве H с линейным, самосопряжённым и положительно определённым оператором L, то её решение минимизирует т. н. энергетич. функционал

$$I(u) \equiv (Lu, u) - 2(u, f),$$

а последовательность функций $\hat{u}_N$, получаемых по этому методу, состоит из ортогональных проекций искомого решения u на подпространства $\hat{H}_N$ в смысле гильбертова пространства H_L, отличающегося от H лишь выбором скалярного произведения $(u, v)_{H_L} \equiv (Lu, v)$. Если $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ — базис $\hat{H}_N$ и

$$\hat{u}_N = \sum_{i=1}^{N} u_i \psi_i,$$

то вектор $\bar{u}_N \equiv (u_1, u_2, \ldots, u_N)^T$ является решением системы уравнений

$$\bar{L}\bar{u} = \bar{f}, \qquad (2)$$

где $\bar{L} \equiv ((\psi_j, \psi_i)_{H_L})$, $i \leqslant i$, $j \leqslant N$,— матрица Грама в H_L функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$. Современные варианты метода Ритца чаще всего являются сеточными методами, в к-рых базисные функции ψ_i отличны от нуля лишь на конечном числе ячеек выбранной сетки. В результате этого система (2) имеет разреженные матрицы $\bar{L}$, во многом напоминающие, а иногда даже и совпадающие с матрицами $\bar{L}$ из разностных методов. Тем самым существенно облегчается отыскание решений этих систем на ЭВМ с помощью ряда прямых и итерационных методов. Указанные модификации метода Ритца наз. в а р и а ц и о н н о - р а з н о с т н ы м и (в а р и а ц и о н н о - с е т о ч н ы м и) м е т о д а м и, а также и м е т о д а м и к о н е ч н ы х э л е м е н т о в. Системы типа (2) могут быть получены и на основе метода Галёркина (проекционных методов) из требования ортогональности $L\hat{u}_N - f$ к $\hat{H}_N$, что позволяет относить вариационно-разностные методы к более общему классу проекционно-сеточных методов.

Вариационно-разностные методы широко используются и при решении нелинейных краевых задач, включая задачи на собственные значения и вариационные задачи с ограничениями (вариационные неравенства).

Другими примерами классических вариационных методов служат метод наименьших квадратов и *Треффца метод*. Метод наименьших квадратов имеет ряд современных вариантов, относящихся к классу *проекционных методов*.

К вариационным методам близок и ряд итерационных методов, использующих пошаговую аппроксимацию исходной задачи минимизации функционала над конечномерным пространством подобными же задачами над подпространствами меньшей размерности.

ВАРИАЦИО́ННЫЙ РЯД — последовательность $X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)}$, полученная в результате расположения в порядке неубывания исходной последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$. В. р. обычно используется в математич. статистике как основа непараметрич. методов (сам В. р. и его члены представляют собой т. н. п о р я д к о в ы е с т а т и с т и к и). В. р. служит для построения функции эмпирич. распределения $\tilde{F}_n(x) = \frac{\mu_n(x)}{n}$, где $\mu_n(x)$ — число членов В. р., меньших x, к-рая является оценкой функции распределения $F(x)$ случайных величин $X_1, \ldots, X_n$. Промежуток $(X_{(1)}, X_{(n)})$ между крайними членами В. р. наз. и н т е р в а л о м в а р ь и р о в а н и я, его длина $W_n = X_{(n)} - X_{(1)}$ наз. *размахом* выборки, крайние члены

$$X_{(1)} = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k \quad \text{и} \quad X_{(n)} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k$$

— экстремальными значениями В. р., величина $X_{(k)}$ наз. k-й п о р я д к о в о й с т а т и с т и к о й. Величина $X_{(m)}$ при нечётном $n=2m+1$ или величина $\frac{1}{2}[X_{(m-1)}+X_{(m)}]$ при чётном $n=2m$ наз. в ы б о р о ч н о й м е д и а н о й и служит оценкой медианы распределения. По функции распределения $F(x)$ исходных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ вычисляются распределения любого члена В. р. и совместные распределения его членов.

ВАРИА́ЦИЯ (от лат. variatio — изменение) — термин, введённый Ж. Лагранжем (1762) для обозначения малого изменения независимого переменного или функционала. Метод В.— это метод исследования экстремальной задачи, основанный на малых изменениях аргумента, и изучения того, как в зависимости от них изменяются функционалы. Этот метод является одним из основных методов при решении задач на экстремум (отсюда и название *вариационное исчисление*).

ВАРИА́ЦИЯ ф у н к ц и и, п о л н а я в а р и а ц и я,— одна из важнейших характеристик функции действительного переменного. Пусть функция $f(x)$ задана на нек-ром отрезке $[a, b]$; её вариацией на этом отрезке наз. верхняя грань сумм

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

распространённая на всевозможные разбиения

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

отрезка $[a, b]$ на конечное число частей. Геометрически В. непрерывной функции $f(x)$ представляет собой длину проекции кривой $y=f(x)$ на ось ординат, считая кратность покрытия. В. функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ принято обозначать символом

$$\bigvee_a^b f \quad \text{или} \quad \int_a^b |df(x)|.$$

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную, то

$$\bigvee_a^b f = \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

Свойства В.: 1) если $a<b<c$, то

$$\bigvee_a^b f = \bigvee_a^b f + \bigvee_b^c f, \quad 2)\ \bigvee_a^b (f+g) = \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g.$$

Если В. функции конечна, то такая функция наз. функцией с ограниченной вариацией. Функции с ограниченной В. были определены и впервые изучались К. Жорданом (1881). Многие важные функции принадлежат к числу функций с ограниченной В., напр. монотонные функции, заданные на отрезке, функции с конечным числом максимумов и минимумов, функции, удовлетворяющие условию Липшица. Всякая функция с ограниченной В. на отрезке $[a, b]$ имеет не более чем счётное множество точек разрыва, и притом 1-го рода, интегрируема по Риману и есть разность двух неубывающих функций (теорема Жордана). Предел сходящейся последовательности функций с равностепенно ограниченными В. есть функция с ограниченной В. Функции с ограниченной В. имеют почти всюду конечную производную, к-рая интегрируема по Лебегу (теорема Лебега).

Функции с ограниченной В. имеют приложения в теории интеграла Стилтьеса, в теории тригонометрич. рядов, в геометрии.

ВАРИНГА ПРОБЛЕ́МА — проблема теории чисел, сформулированная (без доказательства) Э. Варингом (1770): любое целое число $N\geqslant 1$ может быть представлено в виде суммы

$$N = a_1^n + \ldots + a_k^n$$

нек-рого числа k слагаемых, каждое из к-рых есть n-я степень целого положительного числа, причём число слагаемых k зависит только от n. Частным случаем является теорема Лагранжа о том, что всякое натуральное число N есть сумма четырёх квадратов. Первое общее (для любого n) решение В. п. дано Д. Гильбертом (1909) с очень грубой оценкой количества слагаемых k в зависимости от n. Более точные результаты получены в 20-х гг. 20 в. Г. Харди и Дж. Литлвудом, а в 1934 И. М. Виноградовым была получена оценка числа k, близкая к окончательной. Решение В. п. элементарными методами найдено в 1942 Ю. В. Линником.

ВЕ́БЕРА ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — одно из *интегральных преобразований*, предложенное Г. Вебером (1873).

ВЕ́БЕРА ФУ́НКЦИИ — *цилиндрические функции* 2-го рода, впервые изученные Г. Вебером (1879).

ВЕ́ДДЕРБЁРНА — А́РТИНА ТЕОРЕ́МА — теорема о строении *полупростых колец*. Первоначальный результат Дж. Веддербёрна (1908) относится к конечномерным алгебрам. Э. Артин (1950) распространил его на кольца с условиями минимальности.

ВЕ́ЙЕРШТРА́ССА АКСИО́МА — одна из *непрерывности аксиом*: всякое непустое ограниченное сверху множество имеет конечную верхнюю грань, а всякое ограниченное снизу — нижнюю грань. Сформулирована К. Вейерштрассом.

ВЕ́ЙЕРШТРА́ССА ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — одно из *интегральных преобразований*, предложенное К. Вейерштрассом.

ВЕ́ЙЕРШТРА́ССА ПРИ́ЗНАК — признак равномерной сходимости *ряда*, установленный К. Вейерштрассом (опубл. 1886).

ВЕ́ЙЕРШТРА́ССА ТЕОРЕ́МА — 1) В. т. о бесконечном произведении — см. *Аналитическая функция*. Установлена К. Вейерштрассом (опубл. 1895).

2) В. т. о приближении функций: для любой действительной непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ существует последовательность алгебраич. многочленов $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$, ..., равномерно сходящаяся на $[a, b]$ к функции $f(x)$. Установлена К. Вейерштрассом (1885). См. также *Приближение функций*, *Многочлен*, *Равномерная сходимость*, *Непрерывная функция*.

3) В. т. о сходимости последовательности: каждая монотонная и ограниченная числовая последовательность сходится. В частности, монотонно возрастающая и ограниченная сверху (соответственно монотонно убывающая и ограниченная снизу) числовая последовательность является сходящейся, и её предел есть точная верхняя (точная нижняя) грань множества членов последовательности.

ВЕ́ЙЕРШТРА́ССА УСЛО́ВИЯ — необходимое условие и (отдельно) достаточное условие сильного экстремума в классическом *вариационном исчислении*. Условия предложены К. Вейерштрассом (1879).

ВЕ́КТОР (от лат. vector, букв.— несущий) — направленный отрезок прямой, у которого один конец (точка A) наз. началом В., другой конец (точка B) — концом В.; такие В. иногда наз. свободными векторами. Обозначения В.: $\boldsymbol{a}$, $\vec{a}$, $\overrightarrow{a}$ или $\overrightarrow{AB}$. Вектор, начало и конец к-рого совпадают, наз. нулевым вектором и обычно обозначается 0. В. характеризуется модулем (или длиной), к-рый равен длине отрезка AB и обозначается $|\boldsymbol{a}|$, и направлением: от A к B. Вектор $\overrightarrow{BA}$ наз. В., противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор единичной длины наз. единичным вектором или ортом. Нулевому В. приписывают любое направление. Два В. наз. коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. В. наз. компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Два коллинеарных В. наз. одинаково (противоположно) направленными, если их концы лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой, соединяющей их начала, или от общего начала. Два вектора наз. равными, если они имеют равные модули и одинаково направлены. Все нулевые В. считаются равными.

Кроме свободных В., то есть В., начальная точка к-рых может быть выбрана свободно, в механике и физике часто рассматриваются В., к-рые характеризуются модулем, направлением и положением начальной точки — точки приложения. Множество равных между собой В., расположенных на одной прямой, наз. скользящим вектором. Рассматриваются связанные векторы, к-рые считаются равными, если они имеют не только равные модули и одинаковые направления, но и общую точку приложения. В основу *векторного исчисления*, занимающегося изучением операций над В., положено понятие свободного В., так как задание скользящего или связанного В. может быть заменено заданием двух свободных В.

Понятие В. возникло как математич. абстракция объектов, характеризующихся величиной и направлением, напр.: перемещение, скорость, напряжённость электрического или магнитного полей.

Общее понятие В. как элемента т. н. *векторного пространства* определяется аксиоматически.

Термин «В.» ввёл У. Гамильтон (ок. 1845); обозначения $\overline{a}$ — Ж. Арган (1806), $\overline{AB}$ — А. Мёбиус, $\boldsymbol{a}$ — О. Хевисайд (1891).

ВЕ́КТОРНАЯ А́ЛГЕБРА — раздел векторного исчисления, в котором изучаются простейшие операции над (свободными) векторами. К числу этих операций относятся линейные операции над векторами: сложение векторов и умножение вектора на число.

Суммой $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ наз. вектор, проведённый из начала $\boldsymbol{a}$ к концу $\boldsymbol{b}$, если конец $\boldsymbol{a}$ и начало $\boldsymbol{b}$ совмещены (рис. 1). Операция сложения векторов обладает свойствами:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \text{ (коммутативность)};$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \text{ (ассоциативность)};$$
$$\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a} \text{ (наличие нулевого элемента)};$$
$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0 \text{ (наличие противоположного элемента)},$$

где 0 — нулевой вектор, $-\boldsymbol{a}$ есть вектор, противоположный вектору $\boldsymbol{a}$. Разностью $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ наз. вектор $\boldsymbol{x}$ такой, что $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ (рис. 2).

Произведением $\lambda\boldsymbol{a}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на число λ в случае $\lambda\neq 0$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ наз. вектор, коллинеарный $\boldsymbol{a}$, модуль к-рого равен $|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$ и к-рый направлен в ту же сторону, что и вектор $\boldsymbol{a}$, если $\lambda>0$, и в противоположную, если $\lambda<0$. Если $\lambda=0$ или (и) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, то $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. Операция умножения вектора на число обладает свойствами:

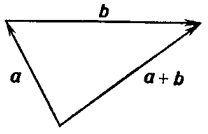


Рис. 1.

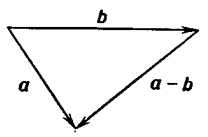


Рис. 2.

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов);

$(\lambda+\mu)\,\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\,\boldsymbol{a}$ (ассоциативность);

$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ (умножение на единицу).

Множество всех векторов пространства с введёнными в нём операциями сложения и умножения на число образует *векторное пространство* (линейное пространство).

Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ..., $\boldsymbol{c}$ наз. линейно зависимыми векторами, если существуют числа α, β, ..., γ, из к-рых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что справедливо равенство

$$\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\ldots+\gamma\boldsymbol{c}=0. \qquad (*)$$

Для линейной зависимости двух векторов необходима и достаточна их коллинеарность, для линейной зависимости трёх векторов необходима и достаточна их компланарность. Если один из векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ..., $\boldsymbol{c}$ нулевой, то они линейно зависимы. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ..., $\boldsymbol{c}$ наз. линейно независимыми, если из равенства (*) следует, что все числа α, β, ..., γ равны нулю. На плоскости существует не более двух, а в трёхмерном пространстве — не более трёх линейно независимых векторов.

Совокупность трёх (двух) линейно независимых векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ трёхмерного пространства (плоскости), взятых в определённом порядке, образует базис. Любой вектор $\boldsymbol{a}$ единственным образом представляется в виде суммы

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3.$$

Числа a_1, a_2, a_3 называют координатами (компонентами) вектора $\boldsymbol{a}$ в данном базисе и пишут $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$.

Два вектора $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты в одном и том же базисе. Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, является пропорциональность их соответствующих координат: $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2$, $a_3=\lambda b_3$. Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$, $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$, $\boldsymbol{c}=\{c_1, c_2, c_3\}$ является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Линейные операции над векторами сводятся к линейным операциям над координатами. Координаты суммы векторов $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$ равны суммам соответствующих координат:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3\}.$$

Координаты произведения вектора $\boldsymbol{a}$ на число λ равны произведениям координат $\boldsymbol{a}$ на λ:

$$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3\}.$$

Скалярным произведением $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ наз. произведение их модулей на косинус угла φ между ними:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$$

(другие обозначения: $\boldsymbol{ab}$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$). За φ принимается угол между векторами, не превосходящий π. Скалярное произведение обладает свойствами:

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ (коммутативность);

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ (дистрибутивность относительно сложения векторов);

$\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b})$ (сочетательность относительно умножения на число);

$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$, лишь если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ или (и) $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, или $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

Для вычисления скалярных произведений векторов часто пользуются прямоугольными координатами, т. е. координатами векторов в базисе, состоящем из единичных взаимно перпендикулярных векторов (ортов) $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ (в ортонормированном базисе). Скалярное произведение векторов

$$\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b}=\{b_1, b_2, b_3\},$$

заданных в ортонормированном базисе, вычисляется по формуле

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Косинусы углов вектора $\boldsymbol{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ с векторами базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ наз. направляющими косинусами вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

Направляющие косинусы обладают следующим свойством:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

См. также *Скалярное произведение*.

Осью наз. прямая с лежащим на ней единичным вектором $\boldsymbol{e}$ (ортом), задающим положительное направление на прямой. Проекцией $\text{Пр.}_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{a}$ вектора $\boldsymbol{a}$ на ось наз. направленный отрезок на оси, алгебраич. значение к-рого равно скалярному произведению вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{e}$. Проекции обладают свойствами:

$$\text{Пр.}_{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\text{Пр.}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}+\text{Пр.}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{b}\ \text{(аддитивность)};$$

$$\lambda\,\text{Пр.}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}=\text{Пр.}_{\boldsymbol{e}}\lambda\boldsymbol{a}\ \text{(однородность)}.$$

Каждая координата вектора в ортонормированном базисе равна проекции этого вектора на ось, определяемую соответствующим вектором базиса.

В пространстве различают правые и левые тройки векторов. Тройка некомпланарных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ наз. правой, если наблюдателю из их общего начала обход концов векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ в указанном порядке кажется совершающимся по часовой стрелке; в противоположном случае $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ — левая тройка. Правая (левая) тройка векторов располагается так, как могут быть расположены соответственно большой, несогнутый указательный и средний пальцы правой (левой) руки (рис. 3). Все правые (левые) тройки векторов наз. одинаково ориентированными. Ниже тройка векторов базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ считается правой.

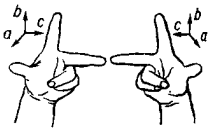


Рис. 3

Пусть на плоскости задано направление положительного вращения (от $\boldsymbol{i}$ к $\boldsymbol{j}$). Псевдоскалярным произведением $\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}$ ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ наз. произведение их модулей на синус угла положительного вращения от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a}\vee\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\varphi.$$

Псевдоскалярное произведение нулевых векторов полагают равным нулю. Псевдоскалярное произведение обладает

свойствами:

$$a \vee b = -b \vee a$$ (антикоммутативность);

$a \vee (b+c) = a \vee b + a \vee c$ (дистрибутивность относительно сложения векторов);

$\lambda(a \vee b) = \lambda a \vee b$ (сочетательность относительно умножения на число);

$a \vee b = 0$, лишь если $a=0$ или (и) $b=0$, или a и b коллинеарны.

Если в ортонормированном базисе векторы a и b имеют координаты $\{a_1, a_2\}$ и $\{b_1, b_2\}$, то

$$a \vee b = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Векторным произведением $[a, b]$ ненулевых и неколлинеарных векторов a и b наз. вектор, модуль к-рого равен произведению их модулей на синус угла φ между ними, перпендикулярный a и b и направленный так, что тройка векторов a, b, $[a, b]$ — правая:

$$|[a, b]| = |a||b| \sin\varphi$$

(другое обозначение: $a \times b$). За φ принимается угол между векторами, не превосходящий π. Векторное произведение полагают равным нулю, если $a=0$ или (и) $b=0$, или они коллинеарны. Векторное произведение обладает свойствами:

$[a, b] = -[b, a]$ (антикоммутативность);

$[a, b+c] = [a, b] + [a, c]$ (дистрибутивность относительно сложения векторов);

$\lambda[a, b] = [\lambda a, b] = [a, \lambda b]$ (сочетательность относительно умножения на число).

Если в ортонормированном базисе векторы a и b имеют координаты $\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$, то

$$[a, b] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

См. также *Векторное произведение.*

Смешанным произведением (a, b, c) векторов a, b, c наз. скалярное произведение вектора a на векторное произведение векторов b и c:

$$(a, b, c) = (a, [b, c]).$$

Смешанное произведение обладает свойствами:

$$(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b) = -(b, a, c) = -(c, b, a) = -(a, c, b);$$

$(a, b, c) = 0$, лишь если $a=0$ или (и) $b=0$, или (и) $c=0$, или a, b, c компланарны; $(a, b, c) > 0$, если тройка векторов a, b, c — правая, $(a, b, c) < 0$, если a, b, c — тройка левая. См. также *Смешанное произведение.*

Двойным векторным произведением $[a, b, c]$ векторов a, b, c наз. векторное произведение $[a, [b, c]]$.

Для вычисления двойного векторного произведения удобны формулы

$$[a, b, c] = [b, (a, c)] - [c, (a, b)],$$

$$[[a, b], [c, d]] = (a, c, d)\, b - (b, c, d)\, a = (a, b, d)\, c - (a, b, c)\, d.$$

● Александров П. С., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., 1979; Беклемишев Д. В., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, 5 изд., М., 1984.

Ю. П. Пытьев.

ВЕ́КТОРНАЯ ЛИ́НИЯ, линия тока,— линия, в каждой точке которой касательная имеет направление вектора векторного поля a в этой точке. Дифференциальные уравнения В. л. имеют вид

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{a_3},$$

где a_1, a_2, a_3 — координаты вектора поля, а x, y, z — координаты точки В. л.

ВЕ́КТОРНАЯ РЕШЁТКА — один из видов *упорядоченного векторного пространства.*

ВЕ́КТОРНАЯ ТРУ́БКА — совокупность всех векторных линий векторного поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую.

Напр., если векторное поле — поле скоростей частиц стационарного потока жидкости, то В. т. есть часть пространства, к-рую «заметает» при движении фиксированный объём жидкости. Интенсивностью I В. т. в сечении S наз. поток векторного поля a через S:

$$I(S) = \iint_S (a, n) d\sigma.$$

С каждым векторным полем связано векторное поле его вихря. В. т. поля вихря наз. вихревыми трубками поля. Поток вихря через любые сечения вихревой трубки постоянен и наз. напряжением вихревой трубки.

ВЕ́КТОРНАЯ ФУ́НКЦИЯ — то же, что *вектор-функция.*

ВЕ́КТОРНОЕ ИСЧИСЛЕ́НИЕ — раздел математики, в котором изучаются свойства операций над *векторами.* В. и. подразделяют на *векторную алгебру* и *векторный анализ.* В векторной алгебре изучают линейные операции (сложение векторов и умножение вектора на число) и различные произведения векторов (скалярное, псевдоскалярное, векторное, смешанное, двойное векторное). В векторном анализе изучают векторы, являющиеся функциями от одного или нескольких скалярных аргументов.

Возникновение В. и. тесно связано с потребностями механики и физики. До 19 в. для задания векторов использовался лишь координатный способ и операции над векторами сводились к операциям над их координатами. Лишь в сер. 19 в. было создано В. и., в к-ром операции проводились непосредственно над векторами, без обращения к координатному способу задания. Основы В. и. были заложены исследованиями У. Гамильтона и Г. Грассмана. Современный вид В. и. придал Дж. Гиббс.

● Дубнов Я. С., Основы векторного исчисления, 4 изд., ч. 1—2, М.— Л., 1950—52; Лаптев Г. Ф., Элементы векторного исчисления, М., 1975.

ВЕ́КТОРНОЕ ПО́ЛЕ — функция, определённая на подмножестве трёхмерного евклидова пространства, значениями которой являются векторы, приложенные в точках этого подмножества. Напр., совокупность касательных или нормальных векторов к гладкой кривой (поверхности) есть В. п. К этому понятию приводит ряд физич. явлений и процессов. Так, векторы скоростей частиц движущейся жидкости в каждый момент времени образуют поле скоростей; гравитационные силы, действующие на материальную точку со стороны распределённой в пространстве массы, образуют поле тяготения; электрич. заряд действует на окружающие его заряды силами, образующими электростатическое поле, и т. д.

Понятие «В. п.» введено М. Фарадеем (ок. 1830).

В. п. определяется также на любом дифференцируемом многообразии M; при этом каждой точке $x \in M$ сопоставляется вектор $v(x)$ касательного пространства к M в этой точке. В частности, векторное поле в области U n-мерного векторного пространства V над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел или полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел есть функция, сопоставляющая каждой точке $x \in U$ вектор $v(x) \in V$. Координаты вектора $v(x)$ суть функции $v_i(x) = v_i(x_1, \ldots, x_n)$ от координат точки x. В зависимости от характера этих функций различают непрерывные, дифференцируемые, аналитические и т. д. векторные поля.

В. п. $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$ задаёт оператор дифференцирования

$$\sum_{i=1}^{n} v_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

по направлению поля, определённый на дифференцируемых функциях. Поскольку этот оператор полностью определяет поле v, его часто отождествляют с исходным векторным полем.

Естественным образом определяется операция сложения В. п. и операция умножения на функцию. Если v и w — два дифференцируемых В. п., то оператор $vw-wv$ на функциях также определяется нек-рым В. п., к-рое обозначается $[v, w]$ и наз. коммутатором полей v и w. Координаты $[v, w]_i$ поля $[v, w]$ выражаются через координаты v_i и w_i полей v и w по формуле

$$[v, w]_i=\sum_k\left(v_k\frac{\partial w_i}{\partial x_k}-w_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right).$$

Дифференцируемая кривая $x(t)$, $a<t<b$, наз. интегральной для В. п. v, если касательный вектор $x'(t)$ в любой её точке $x(t)$ совпадает с $v(x(t))$. Это равносильно тому, что координаты $x_i(t)$ точки $x(t)$ составляют решение системы дифференциальных уравнений

$$x_i'(t)=v_i,\quad i=1, \ldots, n.$$

В геометрии и механике В. п. часто интерпретируются как бесконечно малые (инфинитезимальные) преобразования, т. е. как поля скоростей дифференцируемых семейств преобразований. Точнее, с каждым семейством преобразований F_t, $|t|<\varepsilon$, таким, что $F_t(x)$ — дифференцируемая функция от x и t и F_0 — тождественное преобразование, связывается поле скоростей $v(x)=\frac{d}{dt}F_t(x)\Big|_{t=0}$. Траектории $F_t(x)$ точек $x\in U$ являются интегральными для поля v тогда и только тогда, когда семейство F_t является потоком, т. е. $F_{t+s}=F_tF_s$ для $|t|<\varepsilon$, $|s|<\varepsilon$, $|t+s|<\varepsilon$. Всякое дифференцируемое В. п. является полем скоростей нек-рого потока F_t, траектория к-рого определена, однако, при $|t|<\varepsilon(x)$, где $\varepsilon(x)>0$ зависит от точки x.

На компактном многообразии всякое дифференцируемое В. п. является полем скоростей потока F_t, определённого при всех $t\in\mathbb{R}$.

ВЕ́КТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕ́НИЕ, внешнее произведение, $[a, b]$ ненулевых и неколлинеарных векторов a и b — вектор, модуль которого равен произведению их модулей на синус угла φ между ними, перпендикулярный a и b и направленный так, что тройка векторов a, b, $[a, b]$ — правая:

$$|[a, b]|=|a|\cdot|b|\sin\varphi$$

(другое обозначение: $a\times b$). За φ принимается угол между векторами, не превосходящий π.

В. п. полагают равным нулю, если $a=0$ или (и) $b=0$, или они коллинеарны. В. п. обладает свойствами:

$$[a, b]=-[b, a];\ [a, b+c]=[a, b]+[a, c];$$

$$\lambda[a, b]=[\lambda a, b]=[a, \lambda b].$$

Если в ортонормированном базисе векторы a и b имеют координаты $\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$, то

$$[a, b]=\left\{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right\}.$$

Пример В. п.: момент силы F, приложенной к точке M, относительно точки 0 есть В. п. $[\overrightarrow{OM}, F]$.

Понятие «В. п.» и название «В. п.» введены У. Гамильтоном (1853); Г. Грассман (1844) применял термин «внешнее произведение», обозначение $[a, b]$ введено им же (1844); $a\times b$ — Дж. Гиббсом (1881).

ВЕ́КТОРНОЕ ПРОСТРА́НСТВО, линейное пространство,— математическое понятие, обобщающее понятие совокупности всех (свободных) *векторов* обычного 3-мерного пространства.

Векторным пространством (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) наз. множество L, состоящее из элементов любой природы (наз. векторами), в к-ром определены операции сложения элементов и умножения элементов на действительные (комплексные) числа, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $x+y=y+x$ (коммутативность сложения);

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность сложения);

3) имеется нулевой вектор 0 (или нуль-вектор), удовлетворяющий условию $x+0=x$ для любого вектора x;

4) для любого вектора x существует противоположный ему вектор y такой, что $x+y=0$;

5) $1\cdot x=x$;

6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ (ассоциативность умножения);

7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ (дистрибутивность относительно числового множителя);

8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ (дистрибутивность относительно векторного множителя).

Аналогично определяется понятие В. п. над произвольным полем K.

Выражение

$$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n \qquad (*)$$

наз. линейной комбинацией векторов e_1, e_2, ..., e_n с коэффициентами α_1, α_2, ..., α_n. Линейная комбинация (*) наз. нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов α_1, α_2, ..., α_n отличен от нуля. Векторы e_1, e_2, ..., e_n наз. линейно зависимыми, если существует нетривиальная комбинация (*), представляющая собой нулевой вектор. В противном случае (т. е. если только тривиальная комбинация векторов e_1, e_2, ..., e_n равна нулевому вектору) векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ наз. линейно независимыми.

В. п. наз. n-мерным (или имеет «размерность n»), если в нём существуют n линейно независимых элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а любые $n+1$ элементов линейно зависимы. В. п. наз. бесконечномерным, если в нём для любого натурального n существует n линейно независимых векторов. Любые n линейно независимых векторов n-мерного В. п. образуют базис этого пространства. Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис В. п., то любой вектор x этого пространства может быть представлен единственным образом в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\ldots+\alpha_ne_n.$$

При этом числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ наз. координатами вектора x в данном базисе.

Примеры В. п. Множество всех векторов 3-мерного пространства образует В. п. Более сложным примером может служить т. н. n-мерное векторное пространство. Векторами этого пространства являются упорядоченные системы из n действительных чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Сумма двух векторов и произведение на число определяются соотношениями:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)+(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)=$$
$$=(\lambda_1+\mu_1, \lambda_2+\mu_2, \ldots, \lambda_n+\mu_n),$$
$$\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)=(\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots, \alpha\lambda_n).$$

Базисом в этом пространстве может служить, напр., следующая система из n векторов: $e_1=(1, 0, \ldots, 0)$, $e_2=(0, 1, \ldots, 0)$, ..., $e_n=(0, 0, \ldots, 1)$.

Множество L всех многочленов $\alpha_0+\alpha_1u+\ldots+\alpha_nu^n$ (любых степеней n) от одного переменного с действительными коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ с обычными алгебраич. правилами сложения многочленов и умножения многочленов на действительные числа образует В. п. Многочлены $1, u, u^2, \ldots, u^n$ (при любом n) линейно независимы в L, поэтому L — бесконечномерное В. п. Многочлены степени не выше n образуют В. п. размерности $n+1$; его базисом могут служить многочлены $1, u, u^2, \ldots, u^n$.

Подпространства. В. п. L' наз. подпространством L, если $L'\subset L$ (т. е. каждый вектор пространства L' есть и вектор пространства L) и если для каждого вектора $v\subset L'$ и для каждых двух векторов v_1 и v_2 ($v_1, v_2\in L'$) вектор λv (при любом λ) и вектор v_1+v_2 один и тот же независимо от того, рассматриваются ли векторы v, v_1, v_2 как элементы пространства L' или L. Линейной оболочкой векторов $x_1, x_2, \ldots, x_p$ наз. множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов, т. е. векторов

вида $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_p x_p$. В 3-мерном пространстве линейной оболочкой одного ненулевого вектора x_1 будет совокупность всех векторов, лежащих на прямой, определяемой вектором x_1. Линейной оболочкой двух не лежащих на одной прямой векторов x_1 и x_2 будет совокупность всех векторов, расположенных в плоскости, к-рую определяют векторы x_1 и x_2. В общем случае произвольного В. п. L линейная оболочка векторов $x_1, x_2, \ldots, x_p$ этого пространства представляет собой подпространство пространства L размерности p. В n-мерном В. п. существуют подпространства всех размерностей, меньших p. Всякое конечномерное (данной размерности k) подпространство L' В. п. L есть линейная оболочка любых k линейно независимых векторов, лежащих в L'. Пространство, состоящее из всех многочленов степени $\leqslant n$ (линейная оболочка многочленов $1, u, u^2, \ldots, u^n$), есть $(n+1)$-мерное подпространство пространства L всех многочленов.

Для развития геометрич. методов в теории В. п. нужно указать пути обобщения таких понятий, как модуль (длина) вектора, угол между векторами и т. п. Один из возможных путей заключается в том, что любым двум векторам x и y из L ставится в соответствие число, обозначаемое (x, y) и наз. *скалярным произведением* векторов x и y.

См. также *Евклидово пространство*, *Гильбертово пространство*.

● Александров П. С., Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М., 1979; Ильин В. А., Позняк Э. Г., Линейная алгебра, 3 изд., М., 1984; Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971; Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р., Линейная алгебра и многомерная геометрия, 2 изд., М., 1974; Архангельский А. В., Конечномерные векторные пространства, М., 1982.

Э. Г. Позняк.

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ — раздел векторного исчисления, в котором изучаются средствами математического анализа векторные и скалярные функции одного или нескольких аргументов (*векторные поля* и *скалярные поля*).

Если каждому значению переменного t из нек-рого множества $\{t\}$ ставится в соответствие по известному закону определённый вектор r, то говорят, что на множестве $\{t\}$ задана вектор-функция (векторная функция) $r=r(t)$. В 3-мерном пространстве задание вектор-функции $r=r(t)$ эквивалентно заданию трёх скалярных функций

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t).$$

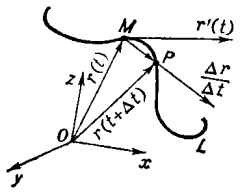


Рис. 1.

Понятие вектор-функции становится наиболее наглядным, если обратиться к годографу этой функции, т. е. множеству концов всех векторов $r(t)$, приложенных к началу координат O (рис. 1). Если при этом рассматривать аргумент t как время, то вектор-функция $r(t)$ представляет собой закон движения точки M, движущейся по кривой L — годографу функции $r(t)$.

Для изучения вектор-функций важную роль играет понятие производной. Это понятие вводится следующим образом: аргументу t придаётся приращение $\Delta t\neq 0$ и вектор $\Delta r=r(t+\Delta t)-r(t)$ (на рис. 1 это вектор $\overline{MP}$) множится на $\frac{1}{\Delta t}$. Предел выражения $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$ наз. производной вектор-функции $r(t)$ и обозначается $r'(t)$ или $\frac{dr}{dt}$. Производная представляет собой вектор, касательный к годографу L в данной точке M. Если вектор-функция рассматривается как закон движения точки по кривой L, то производная $r'(t)$ равна скорости движения этой точки. Правила вычисления производных различных произведений вектор-функций подобны правилам вычисления производных произведений обычных функций, напр.:

$$(r_1, r_2)'=(r_1', r_2)+(r_1, r_2'),$$

$$[r_1, r_2]'=[r_1', r_2]+[r_1, r_2'].$$

В дифференциальной геометрии вектор-функции одного аргумента используются для задания кривых. Для задания поверхностей пользуются вектор-функциями двух аргументов.

Векторные и скалярные функции используются соответственно для задания векторных и скалярных полей. Напр., поле скоростей частиц устоявшегося потока жидкости — векторная функция; плотность тела в его различных точках — скалярная функция.

Для геометрич. характеристики скалярного поля используются понятия линий и поверхностей уровня. Линией уровня плоского скалярного поля наз. линия, на к-рой функция, задающая поле, имеет постоянное значение. Аналогично определяется поверхность уровня пространственного скалярного поля. Примерами линий уровня могут служить изотермы — линии уровня скалярного поля температуры неравномерно нагретой пластинки.

При смещении по нормали к поверхности (линии) уровня скалярного поля в точке M наблюдается максимальное изменение в этой точке функции φ, задающей поле. Это изменение характеризуется с помощью градиента скалярного поля. Градиент — вектор, направленный по нормали к поверхности (линии) уровня в точке M в сторону возрастания φ в этой точке. Величина градиента равна производной φ' в указанном направлении. В данном базисе i, j, k градиент grad φ имеет координаты $\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right\}$ $\left(\text{для плоского поля } \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}\right)$. Градиент скалярного поля представляет собой векторное поле. См. также *Градиент*.

Для характеристики векторных полей вводится целый ряд понятий: векторной линии, векторной трубки, циркуляции векторного поля, дивергенции векторного поля и вихря векторного поля. Пусть в нек-рой области Ω задано векторное поле посредством вектор-функции $a(M)$ переменной точки M из Ω. Линия L (рис. 2) в области Ω наз. векторной линией (линией тока), если вектор касательной в каждой её точке M направлен по вектору $a(M)$. См. также *Векторная линия*.

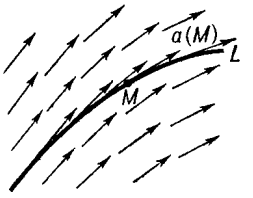


Рис. 2.

Если поле $a(M)$ — поле скоростей частиц стационарного потока жидкости, то векторные линии этого поля — траектории частиц жидкости. Часть пространства в Ω (рис. 3), состоящая из векторных линий, наз. векторной трубкой. См. также *Векторная трубка*.

Рис. 3.

Пусть AB — нек-рая гладкая линия в Ω, l — длина дуги AB, отсчитываемая от точки A до переменной точки M этой линии, t — единичный вектор касательной к AB в M. Циркуляцией поля $a(M)$ вдоль кривой AB наз. выражение

$$\int_{AB}(a, t)\,dl.$$

Если $a(M)$ — силовое поле, то циркуляция a вдоль AB представляет собой работу этого поля вдоль пути AB. См. также *Циркуляция*.

Дивергенцией векторного поля $a(M)$, имеющего в базисе i, j, k координаты a_x, a_y, a_z, наз. сумма

$$\operatorname{div} a=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Напр., дивергенция гравитационного поля, создаваемого нек-рым распределением масс, равна объёмной плотности $\rho(x, y, z)$ этого поля, умноженной на 4π. См. также *Дивергенция*.

Вихрь (или ротор) векторного поля $a(M)$ представляет собой векторную характеристику «вращательной

составляющей» этого поля:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left\{ \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right\},$$

где a_x, a_y, a_z — координаты $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. См. также *Вихрь*.

Градиент скалярного поля, дивергенция и вихрь векторного поля обычно наз. основными дифференциальными операциями В. а.

Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ наз. потенциальным полем, если это поле представляет собой градиент нек-рого скалярного поля $\varphi(M)$. При этом поле $\varphi(M)$ наз. потенциалом векторного поля $\boldsymbol{a}$. Если в односвязной области Ω задано потенциальное поле $\boldsymbol{a}(M)$, то потенциал $\varphi(M)$ этого поля может быть найден по формуле

$$\varphi = \int_{AM} (\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{t}) \, dl,$$

в к-рой AM — любая гладкая кривая, соединяющая фиксированную точку A из Ω с точкой M, $\boldsymbol{t}$ — единичный вектор касательной кривой к AM и l — длина дуги AM, отсчитываемая от точки A. См. также *Потенциальное поле*.

Векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$ наз. соленоидальным, если это поле представляет собой вихрь нек-рого поля $\boldsymbol{b}(M)$, поле $\boldsymbol{b}(M)$ наз. векторным потенциалом поля $\boldsymbol{a}$ (M). См. также *Соленоидальное поле*.

Векторное поле $\boldsymbol{a}$, для к-рого $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$, наз. гармоническим.

В В. а. важную роль играют интегральные соотношения: формула Остроградского и формула Стокса. Пусть V — область, граница Г к-рой состоит из конечного числа кусков гладких поверхностей, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к Г. Пусть в области V задано такое векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$, что $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ представляет собой непрерывную функцию. Тогда справедливо соотношение

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{a} \, dv = \iint_\Gamma (\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{n}) \, d\sigma \qquad (1)$$

— формула Остроградского. Если $\boldsymbol{a}$ — поле скоростей установившегося потока несжимаемой жидкости, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})d\sigma$ — объём жидкости, протекающей за единицу времени через площадку $d\sigma$ на границе Г. Поэтому правая часть формулы (1) представляет собой поток жидкости через границу Г тела V за единицу времени. Так как в рассматриваемом случае $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ характеризует интенсивность источников жидкости, то формула Остроградского выражает следующий факт: поток жидкости через замкнутую поверхность Г равен количеству жидкости, порождаемой всеми источниками, расположенными внутри Г. См. также *Остроградского формула*.

Пусть в области Ω задано непрерывное и дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{a}(M)$, имеющее непрерывный вихрь $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$. Пусть Г — ориентируемая поверхность, состоящая из конечного числа кусков гладких поверхностей, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к Г, $\boldsymbol{t}$ — единичный вектор касательной к краю γ поверхности Г, l — длина дуги γ. Справедливо соотношение

$$\iint_\Gamma (\boldsymbol{n}, \operatorname{rot} \boldsymbol{a}) \, d\sigma = \int_\gamma (\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{t}) \, dl \qquad (2)$$

— формула Стокса. Формула (2) выражает следующий факт: поток вихря векторного поля $\boldsymbol{a}$ через поверхность Г равен циркуляции этого поля вдоль кривой γ. См. также *Стокса формула*.

Формула Остроградского служит источником инвариантного (независящего от выбора системы координат) определения операций В. а. Напр., из этой формулы вытекает, что

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\iint_\Gamma (\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{n}) \, d\sigma}{V}. \qquad (3)$$

Так как выражение $\iint_\Gamma (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) d\sigma$ представляет собой поток жидкости через Г, а $\frac{1}{V} \iint_\Gamma (\boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{n}) d\sigma$ — величину этого потока на единицу объёма, то определение $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ с помощью соотношения (3) показывает, что $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ характеризует интенсивность источника в данной точке.

Назв. «В. а.» ввёл Дж. Гиббс; его первые публикации по В. а. относятся к 1881 и 1884, систематически изложено В. а. в его лекциях, изданных в 1901. С 1882 В. а. начинает использовать в своих работах О. Хевисайд.

● Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 2 изд., ч. 2, М., 1980; Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 2, М., 1981.

А. Б. Иванов.

ВЕ́КТОРНЫЙ ПОТЕНЦИА́Л — см. *Векторный анализ*.

ВЕ́КТОР-СТОЛБЕ́Ц — см. *Матрица*.

ВЕ́КТОР-СТРОКА́ — см. *Матрица*.

ВЕ́КТОР-ФУ́НКЦИЯ, векторная функция,— функция $\boldsymbol{r} = f(t)$, значения которой являются *векторами*. В 3-мерном пространстве задание В.-ф. равносильно заданию трёх функций $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, выражающих координаты вектора $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты системы координат. В.-ф. наз. непрерывной, дифференцируемой и т. п. (в точке или в области), если такими являются все функции f_i. Множество концов векторов $\boldsymbol{r}$, отложенных от нулевой точки координат, наз. годографом В.-ф. Дифференциальные и интегральные свойства В.-ф. изучает *векторный анализ*.

ВЕ́ЛИЧИНА — одно из основных математических понятий, смысл которого с развитием математики подвергался ряду обобщений.

I. Ещё в «Началах» Евклида (3 в. до н. э.) были отчётливо сформулированы свойства В., наз. теперь, для отличия от дальнейших обобщений, положительными скалярными величинами. Это первоначальное понятие В. является непосредственным обобщением более конкретных понятий: длины, площади, объёма, массы и т. п. Каждый конкретный род В. связан с определённым способом сравнения физич. тел или др. объектов. Напр., в геометрии отрезки сравниваются при помощи наложения, и это сравнение приводит к понятию длины: два отрезка имеют одну и ту же длину, если при наложении они совпадают; если же один отрезок накладывается на часть другого, не покрывая его целиком, то длина первого меньше длины второго. Общеизвестны более сложные приёмы, необходимые для сравнения плоских фигур по площади или пространственных тел по объёму.

В соответствии со сказанным, в пределах системы всех однородных В. (т. е. в пределах системы всех длин, или всех площадей, или всех объёмов) устанавливается отношение неравенства: две В. a и b одного и того же рода или совпадают $(a = b)$, или первая меньше второй $(a < b)$, или вторая меньше первой $(b < a)$. Общеизвестно также в случае длин, площадей, объёмов и то, каким образом устанавливается для каждого рода В. смысл операции сложения. В пределах каждой из рассматриваемых систем однородных В. отношение $a < b$ и операция $a + b = c$ обладают следующими свойствами:

1) каковы бы ни были a и b, имеет место одно и только одно из трёх отношений: или $a = b$, или $a < b$, или $b < a$;

2) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (транзитивность отношений «меньше», «больше»);

3) для любых двух В. a и b существует однозначно определённая В. $c = a + b$;

4) $a + b = b + a$ (коммутативность сложения);

5) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ассоциативность сложения);

6) $a + b > a$ (монотонность сложения);

7) если $a > b$, то существует одна и только одна В. c, для к-рой $b + c = a$ (возможность вычитания);

8) каковы бы ни были В. a и натуральное число n, существует такая В. b, что $nb = a$ (возможность деления);

9) каковы бы ни были В. a и b, существует такое натуральное число n, что $a < nb$. Это свойство наз. аксиомой Евдокса или аксиомой Архимеда.

На свойстве 9) совместно с более элементарными свойствами 1) — 8) основана теория измерения В., развитая древнегреч. математиками.

Если взять к.-л. длину l за единичную, то система s' всех длин, находящихся в рациональном отношении к l, удовлетворяет требованиям 1) — 9). Существование несоизмеримых отрезков (открытие к-рых приписывается Пифагору, 6 в. до н. э.) показывает, что система s' ещё не охватывает системы s всех вообще длин.

Чтобы получить вполне законченную теорию В., к требованиям 1) — 9) надо присоединить ещё ту или иную дополнительную аксиому непрерывности, напр.:

10) если последовательности величин $a_1<a_2<\ldots<b_2<b_1$ обладают тем свойством, что $b_n-a_n<c$ для любой В. c при достаточно большом номере n, то существует единственная В. x, к-рая больше всех a_n и меньше всех b_n.

Свойства 1) — 10) и определяют полностью современное понятие системы положительных скалярных В. Если в такой системе выбрать к.-л. В. l за единицу измерения, то все остальные В. системы однозначно представляются в виде $a=\alpha l$, где α — положительное действительное число.

II. Рассмотрение направленных отрезков на прямой, скоростей, могущих иметь два противоположных направления, и т. п. В. естественно приводит к тому обобщению понятия скалярной В., к-рое является основным в механике и физике. Система скалярных В. в этом понимании включает в себя, кроме положительной В., нуль и отрицательную В. Выбирая в такой системе к.-л. положительную В. l за единицу измерения, выражают все остальные В. системы в виде $a=\alpha l$, где α — действительное число (положительное, отрицательное или равное нулю). Конечно, систему скалярных В. в этом понимании можно охарактеризовать и аксиоматически, не опираясь на понятие числа. Для этого пришлось бы несколько изменить требования 1) — 10), к-рыми выше охарактеризовано понятие положительной скалярной В.

III. В более общем смысле величинами наз. векторы, тензоры и др. «нескалярные величины». Такие В. можно складывать, но отношение неравенства ($a<b$) для них теряет смысл.

IV. В нек-рых более отвлечённых математич. исследованиях играют известную роль «неархимедовы величины», к-рые имеют с обычными скалярными В. то общее, что для них сохраняются обычные свойства неравенств, но аксиома 9) не выполняется.

V. Так как система действительных положительных чисел удовлетворяет перечисленным выше свойствам 1) — 10), а система всех действительных чисел обладает всеми свойствами скалярных В., то вполне законно сами действительные числа назвать величинами. Это особенно принято при рассмотрении переменных величин. Если к.-л. конкретная В., напр. длина l нагреваемого металлич. стержня, изменяется во времени, то меняется и измеряющее ее число $x=l/l_0$ (при постоянной единице измерения l_0). Само это меняющееся во времени число x принято называть переменной В. и говорить, что x принимает в к.-л. последовательные моменты времени t_1, t_2, ... «числовые значения» x_1, x_2, ... В традиционной математич. терминологии говорить о «переменных числах» не принято. Однако логичнее такая точка зрения: числа, как и длины, объёмы и т. п., являются частными случаями В. и, как всякие В., могут быть и переменными и постоянными. Столь же законно и рассмотрение переменных векторов, тензоров и т. п.

А. Н. Колмогоров.

ВЕРЗИ́ЕРА (от лат. verso — поворачиваю) — плоская кривая; то же, что *Аньези локон*.

ВЕ́РНАЯ ЗНАЧАЩАЯ ЦИ́ФРА — см. *Значащая цифра*.

ВЕРОЯ́ТНОЕ ОТКЛОНЕ́НИЕ, срединное отклонение, семиинтерквартильная широта,— одна из характеристик рассеяния распределения вероятностей, равная $\frac{1}{2}(K_{3/4}-K_{1/4})$, где K_p — *квантили* распределения случайной величины X. Если распределение случайной величины X непрерывно и симметрично относительно точки a, то В. о. B удовлетворяет условию

$$P\{|X-a|<B\}=P\{|X-a|>B\}=\frac{1}{2}.$$

Для нормального распределения существует простая связь В. о. с квадратичным отклонением σ:

$$\Phi(B/\sigma)=3/4,$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения. Приближённо $B\approx 0{,}6745\sigma\approx 2/3\sigma$.

ВЕРОЯ́ТНОСТЕЙ ТЕО́РИЯ.

СОДЕРЖАНИЕ:

Предмет теории вероятностей 113
Основные понятия теории вероятностей 114
Случайные величины 115
Предельные теоремы 116
Случайные процессы 117

Вероятностей теория — математическая наука, позволяющая по вероятностям одних случайных событий находить *вероятности* других случайных событий, связанных каким-либо образом с первыми.

Утверждение о том, что к.-л. событие наступает с вероятностью, равной, напр., ½, ещё не представляет само по себе окончательной ценности, т. к. мы стремимся к достоверному знанию. Окончательную познавательную ценность имеют те результаты В. т., к-рые позволяют утверждать, что вероятность наступления к.-л. события A весьма близка к единице или (что то же самое) вероятность ненаступления события A весьма мала. В соответствии с принципом «пренебрежения достаточно малыми вероятностями» такое событие справедливо считают практически достоверным. Ниже (в разделе Предельные теоремы) показано, что имеющие научный и практич. интерес выводы такого рода обычно основаны на допущении, что наступление или ненаступление события A зависит от большого числа случайных, мало связанных друг с другом факторов (см. по этому поводу ст. *Больших чисел закон*). Поэтому можно также сказать, что В. т. есть математич. наука, выясняющая закономерности, к-рые возникают при взаимодействии большого числа случайных факторов.

Предмет теории вероятностей

Для описания закономерной связи между нек-рыми условиями S и событием A, наступление или ненаступление к-рого при данных условиях может быть точно установлено, естествознание использует обычно одну из следующих двух схем.

а) При каждом осуществлении условий S наступает событие A. Такой вид, напр., имеют все законы классич. механики, к-рые утверждают, что при заданных начальных условиях и силах, действующих на тело или систему тел, движение будет происходить однозначно определённым образом.

б) При условиях S событие A имеет определённую вероятность $P(A|S)$, равную p. Так, напр., законы радиоактивного излучения утверждают, что для каждого радиоактивного вещества существует определённая вероятность того, что из данного количества вещества за данный промежуток времени распадается к.-л. число N атомов.

Назовём частотой события A в данной серии из n испытаний (т. е. из n повторных осуществлений условий S) отношение $h=m/n$ числа m тех испытаний, в к-рых A наступило, к общему их числу n. Наличие у события A при условиях S определённой вероятности, равной p, проявляется в том, что в почти каждой достаточно длинной серии испытаний частота события A приблизительно равна p. Всякая математич. модель, предназначенная для схематич. описания связи между условиями S и случайным событием A, обычно включает также определённые допущения о характере и степени зависимости испытаний. После того как такие дополнительные допущения (из к-рых наиболее часто встречающимся является неза-

висимость испытаний; см. раздел Основные понятия теории вероятностей) сделаны, вышеприведённое расплывчатое утверждение о близости частоты к вероятности может быть количественно уточнено.

Статистич. закономерности, т. е. закономерности, описываемые схемой типа б), были впервые обнаружены на примере азартных игр, подобных игре в кости. Очень давно известны также статистич. закономерности рождения, смерти (напр., вероятность новорождённому быть мальчиком равна 0,515). Конец 19 в. и 1-я пол. 20 в. отмечены открытием большого числа статистич. закономерностей в физике, химии, биологии и др. науках. Следует отметить, что статистич. закономерности возникают и в схемах, не связанных непосредственно с понятием случая, напр. в распределении цифр в таблицах функций (см. *Случайные числа*); это обстоятельство используют, в частности, при «моделировании» случайных явлений (см. *Монте-Карло метод*).

Возможность применения методов В. т. к изучению статистич. закономерностей, относящихся к весьма далёким друг от друга областям науки, основана на том, что вероятности событий всегда удовлетворяют нек-рым простым соотношениям, о к-рых сказано ниже (см. раздел Основные понятия теории вероятностей). Изучение свойств вероятностей событий на основе этих простых соотношений и составляет предмет В. т.

Основные понятия теории вероятностей

Наиболее просто определяются основные понятия В. т. как математич. дисциплины в рамках т. н. элементарной теории вероятностей. Каждое испытание T, рассматриваемое в элементарной В. т., таково, что оно заканчивается одним и только одним из исходов, или, как говорят, одним из элементарных событий $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$. С каждым исходом ω_k связывается неотрицательное число p_k — вероятность этого исхода. Числа p_k должны при этом в сумме давать единицу. Рассматриваются затем события A, заключающиеся в том, что «наступает или ω_i, или ω_j, ..., или ω_k». Исходы ω_i, ω_j, ..., ω_k наз. благоприятствующими A, и, по определению, полагают вероятность $P(A)$ события A, равной сумме вероятностей благоприятствующих ему исходов:

$$P(A)=p_i+p_j+\ldots+p_k. \qquad (1)$$

Частный случай $p_1=p_2=\ldots=p_s=1/s$ приводит к формуле

$$P(A)=\frac{r}{s}, \qquad (2)$$

выражающей т. н. классическое определение вероятности, в соответствии с к-рым вероятность к.-л. события A равна отношению числа r исходов, благоприятствующих A, к числу s всех «равновозможных» исходов. Вычисление вероятностей сводится при этом к подсчёту числа благоприятствующих событию A исходов и часто оказывается трудной комбинаторной задачей.

Пример. При бросании двух игральных костей каждый из 36 возможных исходов может быть обозначен (i, j), где i — число очков, выпадающее на первой кости, j — на второй. Исходы предполагаются равновероятными. Событию A — «сумма очков равна 4», благоприятствуют три исхода (1; 3), (2; 2), (3; 1). Следовательно, $P(A)={}^3/_{36}={}^1/_{12}$.

Вопрос о том, как определяются численные значения вероятностей p_k в данной конкретной задаче, лежит, по существу, за пределами В. т. как чисто математич. дисциплины. В одних случаях выбор этих значений производится на основе обработки результатов большого числа наблюдений. В других случаях возможно теоретич. предсказание вероятностей, с к-рыми те или иные события будут встречаться в данном испытании. Такое предсказание часто основывается на объективной симметрии связи между условиями, в к-рых производится испытание, и исходами этих испытаний и приводит тогда к формуле (2). Пусть, напр., испытание состоит в подбрасывании игральной кости, представляющей собой кубик из однородного материала. Тогда можно предполагать, что с вероятностью ${}^1/_6$ кость может упасть на каждую из своих граней. В этом примере предположение о равновероятности исходов находится в согласии с опытом. Такого рода примеры и послужили основой для классич. определения вероятности.

Более тонкое и глубокое объяснение причин равновероятности исходов в нек-рых специальных случаях даётся т. н. методом произвольных функций. Суть этого метода можно пояснить следующим образом на примере бросания кости. Пусть опыт поставлен так, что случайные воздействия на кость со стороны воздуха можно считать пренебрежимо малыми. Тогда, если точно даны начальное положение, начальная скорость кости и ее механич. характеристики, движение может быть рассчитано по законам классич. механики и результат опыта можно предсказать достоверно. Практически начальные условия не могут никогда быть фиксированы с абсолютной точностью, и, напр., даже очень малые изменения начальной скорости приводят к другому результату, если только время t от момента подбрасывания до момента падения достаточно велико. Оказывается, что при очень широких допущениях относительно распределения вероятностей начальных значений (отсюда и название метода) вероятность каждого из шести возможных исходов стремится к ${}^1/_6$ при $t\to\infty$.

Другой пример — тасование колоды карт с целью достижения равновероятности всех возможных расположений. Здесь переход от одного расположения карт к другому при очерёдном тасовании обычно носит вероятностный характер. Факт стремления к равновероятности устанавливается методами теории *Маркова цепей*.

Оба случая могут быть включены в общую *эргодическую теорию*.

Исходя из к.-л. данных событий, можно определить два новых события: их объединение (сумму) и совмещение (произведение). Событие B наз. объединением (или суммой) событий $A_1, A_2, \ldots, A_r$, если оно имеет вид: «наступает или A_1, или A_2, ..., или A_r». Событие C наз. совмещением (или произведением) событий $A_1, A_2, \ldots, A_r$, если оно имеет вид:

«наступает и A_1, и A_2, ..., и A_r».

Объединение событий обозначают знаком $\bigcup$, а совмещение — знаком $\bigcap$. Таким образом, пишут:

$$B=A_1\bigcup A_2\bigcup\ldots\bigcup A_r,\ C=A_1\bigcap A_2\bigcap\ldots\bigcap A_r.$$

События D и E наз. несовместными, если их одновременное осуществление невозможно, т. е. если не существует среди исходов испытания ни одного благоприятствующего и D, и E.

С введёнными операциями связаны две основные теоремы элементарной В. т.— теоремы сложения и умножения вероятностей.

Теорема сложения вероятностей: если события $A_1, A_2, \ldots, A_r$ таковы, что каждые два из них несовместны, то вероятность их объединения равна сумме их вероятностей.

Так, в приведённом выше примере с бросанием двух костей событие B — «сумма очков не превосходит 4», есть объединение трёх несовместных событий A_2, A_3, A_4, заключающихся в том, что сумма очков равна соответственно 2, 3, 4. Вероятности этих событий ${}^1/_{36}$; ${}^2/_{36}$; ${}^3/_{36}$. По теореме сложения вероятность B равна

$${}^1/_{36}+{}^2/_{36}+{}^3/_{36}={}^1/_6.$$

Условную вероятность события B при условии A ($P(A)>0$) определяют формулой

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},$$

что, как можно показать, находится в полном соответствии со свойствами частот. События $A_1, A_2, \ldots, A_r$ наз. независимыми, если условная вероятность каждого из них при условии, что какие-либо из остальных наступили, равна его «безусловной» вероятности (см. также *Независимость* в теории вероятностей).

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совмещения событий A_1, A_2, . . ., A_r равна вероятности события A_1, умноженной на вероятность события A_2, взятую при условии, что A_1 наступило, . . ., умноженной на вероятность события A_r при условии, что A_1, A_2, . . ., A_{r-1} наступили. Для независимых событий теорема умножения приводит к формуле

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r) = P(A_1)\,P(A_2)\ldots P(A_r), \quad (3)$$

т. е. вероятность совмещения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Формула (3) остаётся справедливой, если в обеих её частях нек-рые из событий заменить на противоположные им.

Пример. Производится 4 выстрела по цели с вероятностью попадания 0,2 при отдельном выстреле. Попадания в цель при различных выстрелах предполагаются независимыми событиями. Какова вероятность попадания в цель ровно три раза?

Каждый исход испытания может быть обозначен последовательностью из четырёх букв [напр., (у, н, н, у) означает, что при первом и четвёртом выстрелах были попадания (успех), а при втором и третьем — попаданий не было (неудача)]. Всего будет $2\cdot2\cdot2\cdot2=16$ исходов. В соответствии с предположением о независимости результатов отдельных выстрелов следует для определения вероятностей этих исходов использовать формулу (3) и примечание к ней. Так, вероятность исхода (у,н,н,н) следует положить равной

$$0{,}2\cdot0{,}8\cdot0{,}8\cdot0{,}8=0{,}1024;$$

здесь $0{,}8=1-0{,}2$ — вероятность промаха при отдельном выстреле. Событию «в цель попадают три раза» благоприятствуют исходы (у, у, у, н), (у, у, н, у), (у, н, у, у), (н, у, у, у), вероятность каждого одна и та же: $0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}8=\ldots=0{,}8\cdot0{,}2\cdot0{,}2\cdot0{,}2=0{,}0064$; следовательно, искомая вероятность равна

$$4\cdot0{,}0064=0{,}0256.$$

Обобщая рассуждения разобранного примера, можно вывести одну из основных формул В. т.: если события A_1, A_2, . . ., A_n независимы и имеют каждое вероятность p, то вероятность наступления ровно m из них равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}; \quad (4)$$

здесь C_n^m обозначает число сочетаний из n элементов по m (см. *Биномиальное распределение*). При больших n вычисления по формуле (4) становятся затруднительными. Пусть в предыдущем примере число выстрелов равно 100, и ставится вопрос об отыскании вероятности x того, что число попаданий лежит в пределах от 8 до 32. Применение формулы (4) и теоремы сложения даёт точное, но практически мало пригодное выражение исходной вероятности

$$x = \sum_{m=8}^{32} C_{100}^m (0{,}2)^m (0{,}8)^{100-m}.$$

Приближённое значение вероятности x можно найти по *Лапласа теореме*:

$$x \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{3} e^{-z^2/2}\,dz = 0{,}9973,$$

причём ошибка не превосходит 0,0009. Найденный результат показывает, что событие $8 \leqslant m \leqslant 32$ практически достоверно. Это самый простой, но типичный пример использования предельных теорем В. т.

К числу основных формул элементарной В. т. относится также т. н. формула полной вероятности: если события A_1, A_2, . . ., A_r попарно несовместны и их объединение есть достоверное событие, то для любого события B его вероятность равна сумме

$$P(B) = \sum_{k=1}^{r} P(B \mid A_k)\,P(A_k).$$

Теорема умножения вероятностей оказывается особенно полезной при рассмотрении составных испытаний. Говорят, что испытание T составлено из испытаний T_1, T_2, . . ., T_{n-1}, T_n, если каждый исход испытания T есть совмещение нек-рых исходов A_i, B_j, . . ., X_k, Y_l соответствующих испытаний T_1, T_2, . . ., T_{n-1}, T_n. Из тех или иных соображений часто бывают известны вероятности

$$P(A_i),\ P(B_j \mid A_i),\ \ldots,\ P(Y_l \mid A_i \cap B_j \cap \ldots \cap X_k). \quad (5)$$

По вероятностям (5) с помощью теоремы умножения могут быть определены вероятности $P(E)$ для всех исходов E составного испытания, а вместе с тем и вероятности всех событий, связанных с этим испытанием (подобно тому, как это было сделано в разобранном выше примере). Наиболее значительными с практич. точки зрения представляются два типа составных испытаний: а) составляющие испытания независимы, т. е. вероятности (5) равны безусловным вероятностям $P(A_i)$, $P(B_j)$, . . ., $P(X_k)$, $P(Y_l)$; б) на вероятности исходов к.-л. испытания влияют результаты лишь непосредственно предшествующего испытания, т. е. вероятности (5) равны соответственно: $P(A_i)$, $P(B_j|A_i)$,. . ., $P(Y_l|X_k)$. В этом случае говорят об испытаниях, связанных в цепь Маркова. Вероятности всех событий, связанных с составным испытанием, вполне определяются здесь начальными вероятностями $P(A_i)$ и переходными вероятностями $P(B_j|A_i)$,. . ., $P(Y_l|X_k)$ (см. *Марковский процесс*).

Случайные величины

Если каждому исходу ω_k испытания T поставлено в соответствие число x_r, говорят, что задана случайная величина X. Среди чисел x_1, x_2,. . ., x_s могут быть и равные; совокупность различных значений x_r при $r=1, 2, \ldots, s$ называют совокупностью возможных значений случайной величины. Так, в примере с бросанием двух костей с каждым исходом испытания (i, j) связывается случайная величина $X=i+j$ — сумма очков на обеих костях. Возможные значения суть 2, 3, 4,. . ., 11, 12; соответствующие вероятности равны $^1/_{36}$, $^2/_{36}$, $^3/_{36}$,. . ., $^2/_{36}$, $^1/_{36}$.

При одновременном изучении нескольких случайных величин вводится понятие их совместного распределения, к-рое задаётся указанием возможных значений каждой из них и вероятностей совмещения событий

$$\{X_1=a_1\},\ \{X_2=a_2\},\ \ldots,\ \{X_n=a_n\}, \quad (6)$$

где a_k — какое-либо из возможных значений величины X_k. Случайные величины наз. независимыми, если при любом выборе a_k события (6) независимы. С помощью совместного распределения случайных величин можно вычислить вероятность любого события, определяемого этими величинами, напр. события

$$a < X_1 + X_2 + \ldots + X_n < b$$

и т. п.

Часто вместо полного задания распределения вероятностей случайной величины предпочитают пользоваться небольшим количеством числовых характеристик. Из них наиболее употребительны *математическое ожидание* и *дисперсия* (см. также *Момент*, *Семиинвариант*).

В число основных характеристик совместного распределения нескольких случайных величин наряду с математич. ожиданиями и дисперсиями этих величин включаются коэффициенты *корреляции* и т. п. Смысл перечисленных характеристик в значительной степени разъясняется предельными теоремами (см. раздел Предельные теоремы).

Схема испытаний с конечным числом исходов недостаточна уже для самых простых применений В. т. Так, при изучении случайного разброса точек попаданий снарядов вокруг центра цели, при изучении случайных ошибок, возникающих при измерении к.-л. величины, и т. д. уже невозможно ограничиться испытаниями с конечным числом исходов. При этом в одних случаях результат испытания может быть выражен числом или системой чисел, в других — результатом испытания может быть функция (напр., запись изменения давления в данной точке атмосферы за данный промежуток времени), системы функций и т. д. Следует отметить, что многие данные выше определения и теоремы с соответствующими изменениями приложимы и в

этих более общих обстоятельствах, хотя способы задания распределения вероятностей изменяются (см. *Распределение* вероятностей, *Плотность вероятности*). Аналогом классич. «равновероятности исходов» здесь служит равномерное распределение рассматриваемых объектов в к.-л. области (именно его имеют в виду, говоря о наудачу взятой из данной области точке, о наудачу взятой секущей данной фигуры и т. п.).

Наиболее серьёзное изменение претерпевает определение вероятности, к-рое в элементарном случае давалось формулой (2). В более общих схемах, о к-рых идёт речь, события являются объединениями бесконечного числа элементарных событий, вероятность каждого из к-рых может быть равна нулю. В соответствии с этим свойство, выраженное теоремой сложения, не выводится из определения вероятности, а включается в него.

Наиболее распространённая в настоящее время логич. схема построения основ В. т. разработана А. Н. Колмогоровым (1933). Основные черты этой схемы следующие. При изучении к.-л. реальной задачи методами В. т. прежде всего выделяется множество Ω элементов ω, наз. э л е м е н т а р н ы м и с о б ы т и я м и. Всякое событие вполне описывается множеством благоприятствующих ему элементарных событий и поэтому рассматривается как некрое множество элементарных событий. С нек-рыми из событий A связываются определённые числа $P(A)$, наз. их вероятностями и удовлетворяющие условиям

1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны и A — их сумма, то

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

(аддитивность вероятности).

Для создания полноценной математич. теории требуют, чтобы область определения $P(A)$ была σ-алгеброй и чтобы условие 3) выполнялось и для б е с к о н е ч н ы х последовательностей попарно несовместных событий (счётная аддитивность вероятности). Свойства неотрицательности и счётной аддитивности есть основные свойства меры множества. В. т. может, таким образом, с формальной точки зрения рассматриваться как часть теории меры. Основные понятия В. т. получают при таком подходе новое освещение. Случайные величины превращаются в измеримые функции, их математич. ожидания — в абстрактные интегралы Лебега, и т. п. Однако основные проблемы В. т. и теории меры различны. О с н о в н ы м, с п е ц и ф и ч е с к и м для В. т. является понятие н е з а в и с и м о с т и событий, испытаний, случайных величин. Наряду с этим В. т. тщательно изучает и такие объекты, как условные распределения, условные математич. ожидания и т. п.

В отношении указанной выше схемы можно сделать следующие замечания. В соответствии с ней в основе каждой вероятностной модели лежит вероятностное пространство, рассматриваемое как тройка (Ω, S, P), где Ω — множество элементарных событий, S — выделенная в Ω σ-алгебра подмножеств, P — распределение вероятностей (счётноаддитивная нормированная мера) на S. Два достижения связаны с этой схемой — определение вероятностей в бесконечномерных пространствах (в частности, вероятностей, связанных с бесконечными последовательностями испытаний и случайными процессами) и общее определение условных вероятностей и условных математич. ожиданий (по отношению к данной случайной величине и т. п.).

При последующем развитии В. т. выяснилось, что указанное общее определение вероятностного пространства целесообразно ограничить. Так появились понятия совершенных распределений, плотных распределений и т. п.

Известны и другие подходы к основным понятиям В. т., напр. аксиоматизация, при к-рой основным объектом становятся нормированные булевы алгебры событий. Основное преимущество (в предположении, что рассматриваемая алгебра полна в метрич. смысле) здесь состоит в том, что для любых направленных систем событий выполняются соотношения

$$P\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) = \sup_\alpha P(A_\alpha), \quad A_\alpha \uparrow,$$

$$P\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right) = \inf_\alpha P(A_\alpha), \quad A_\alpha \downarrow.$$

Возможна аксиоматизация понятия случайной величины как элемента нек-рой коммутативной алгебры, на к-рой определён линейный функционал (аналог математич. ожидания).

Предельные теоремы

При формальном изложении В. т. предельные теоремы появляются в виде своего рода надстройки над её элементарными разделами, в к-рых все задачи имеют конечный, чисто арифметич. характер. Однако познавательная ценность В. т. раскрывается только предельными теоремами. Так, *Бернулли теорема* показывает, что при независимых испытаниях частота появления к.-л. события, как правило, мало отклоняется от его вероятности, а *Лапласа теорема* указывает вероятности тех или иных отклонений. Аналогично смысл таких характеристик случайной величины, как её математич. ожидание и дисперсия, разъясняется законом больших чисел и центральной предельной теоремой (см. *Больших чисел закон*, *Больших чисел усиленный закон*, *Предельные теоремы* теории вероятностей).

Пусть

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \qquad (7)$$

— независимые случайные величины, имеющие одно и то же распределение вероятностей с $\mathsf{E}X_n = a$, $\mathsf{D}X_n = \sigma^2$ и Y_n — среднее арифметическое первых n величин из последовательности (7):

$$Y_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n.$$

В соответствии с законом больших чисел, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства $|Y_n - a| \leqslant \varepsilon$ имеет при $n \to \infty$ пределом 1 и, таким образом, Y_n, как правило, мало отличается от a. Центральная предельная теорема уточняет этот результат, показывая, что отклонения Y_n от a приближённо подчинены нормальному распределению со средним 0 и дисперсией σ^2/n. Таким образом, для вычисления (в первом приближении) вероятностей тех или иных отклонений Y_n от a при больших n нет надобности знать во всех деталях распределение величин X_k; достаточно знать лишь их дисперсию. При необходимости увеличить точность приближения необходимо привлекать моменты более высокого порядка.

Эти утверждения могут быть с надлежащими изменениями распространены на случайные векторы (из конечномерных и нек-рых бесконечномерных векторных пространств). Условия независимости могут быть заменены условиями «слабой» (в том или ином смысле) зависимости X_n. Известны также предельные теоремы для распределений на группах, для распределений значений арифметич. функций и т. д.

В приложениях (в частности, в математич. статистике и статистич. физике) возникает необходимость аппроксимировать малые вероятности (событий типа $|Y_n - a| > \varepsilon$) с большой о т н о с и т е л ь н о й точностью. Это приводит к значительным поправкам в аппроксимации нормальным законом.

В 20-х гг. 20 в. было обнаружено, что даже в схеме последовательности одинаково распределённых и независимых случайных величин могут вполне естественным образом возникать предельные распределения, отличные от нормального. Так, напр., если X_1 — время до первого возвращения нек-рой случайно меняющейся системы в исходное положение, X_2 — время между первым и вторым возвращениями и т. д., то при очень общих условиях распределение суммы $X_1 + \ldots + X_n$ (т. е. времени до n-го возвращения) после умножения на $n^{-1/\alpha}$ (α — постоянная, меньшая 1) сходится к нек-рому предельному распределению. Таким

образом, время до n-го возвращения растёт, грубо говоря, как $n^{1/\alpha}$, т. е. быстрее n (в случае приложимости закона больших чисел оно было бы порядка n). Это обстоятельство видно уже в примере *Бернулли блуждания* (где проявляется и другой парадоксальный закон — закон арксинуса).

Основным методом доказательства предельных теорем является метод *характеристических функций* (и близкие к нему методы преобразований Лапласа и производящих функций). В ряде случаев необходимо обращение к методам теории функций комплексного переменного.

Механизм возникновения большинства предельных закономерностей может быть до конца понят лишь в связи с теорией случайных процессов.

Случайные процессы

В ряде физич. и химич. исследований последних десятилетий возникла потребность наряду с одномерными и многомерными случайными величинами рассматривать случайные процессы, т. е. процессы, для к-рых определена вероятность того или иного их течения. Пример случайного процесса — изменение координаты частицы, совершающей броуновское движение. В В. т. случайный процесс рассматривают обычно как однопараметрич. семейство случайных величин $X(t)$. В подавляющем числе приложений параметр t является временем, но этим параметром может быть, напр., произвольное независимое переменное и тогда обычно говорят о *случайной функции* (если t — точка пространства, то — о *случайном поле*). В том случае, когда параметр t пробегает целочисленные значения, случайная функция наз. случайной последовательностью (или временны́м рядом). Подобно тому как случайная величина характеризуется законом распределения, случайный процесс может быть охарактеризован совокупностью совместных законов распределения для $X(t_1)$, $X(t_2)$, . . ., $X(t_n)$ для всевозможных моментов времени t_1, t_2,. . ., t_n при любом натуральном $n>0$ (т. н. конечномерными распределениями). Наиболее интересные конкретные результаты теории случайных процессов получены в двух специальных направлениях — *марковские процессы* и *стационарные случайные процессы*; наряду с ними сильно повысился интерес к *мартингалам*.

Исторически первыми изучались марковские процессы. Случайный процесс $X(t)$ наз. марковским, если для любых двух моментов времени t_0 и t_1 (где $t_0<t_1$) условное распределение вероятностей $X(t_1)$ при условии, что заданы все значения $X(t)$ при $t\leqslant t_0$, зависит только от $X(t_0)$ (в силу этого марковские случайные процессы иногда наз. процессами без последействия). Марковские процессы являются естественным обобщением детерминированных процессов, рассматриваемых в классич. физике. В детерминированных процессах состояние системы в момент времени t_0 однозначно определяет ход процесса в будущем; в марковских процессах состояние системы в момент времени t_0 однозначно определяет распределение вероятностей хода процесса при $t>t_0$, причём никакие сведения о ходе процесса до момента времени t_0 не изменяют это распределение.

Подобно тому как изучение непрерывных детерминированных процессов сводится к дифференциальным уравнениям относительно функций, описывающих состояние системы, изучение непрерывных марковских процессов сводится к дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнениям относительно распределения вероятностей процесса.

Вторым крупным направлением случайных процессов является теория стационарных случайных процессов. Стационарность процесса, т. е. неизменность во времени его вероятностных закономерностей, налагает сильное ограничение на процесс и позволяет из одного этого допущения извлечь ряд важных следствий.

Для большей части теории достаточно предположения о стационарности в широком смысле, т. е. требования независимости от t математич. ожиданий $\mathsf{E}X(t)$ и $\mathsf{E}X(t)X(t+\tau)$. Из этого предположения вытекает возможность т. н. спектрального разложения

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dz(\lambda),$$

где $z(\lambda)$ — случайная функция с некоррелированными приращениями. Для стационарных процессов развиты способы наилучшей (в среднем квадратичном) линейной интерполяции, экстраполяции и фильтрации.

В настоящее время выделен довольно широкий класс процессов, для к-рых эффективно решаются задачи наилучшей нелинейной фильтрации, интерполяции и экстраполяции. Существенную часть соответствующего аналитич. аппарата составляют стохастич. дифференциальные уравнения, стохастич. интегралы и мартингалы. Отличительное свойство мартингала $X(t)$ состоит в том, что условное математич. ожидание $X(t)$ при условии, что известно поведение процесса до момента $s<t$, равно $X(s)$.

Теория случайных процессов тесно связана с классич. проблематикой предельных теорем для сумм случайных величин. Те законы распределения, к-рые выступают при изучении сумм случайных величин как предельные, в теории случайных процессов являются точными законами распределения соответствующих характеристик. Этот факт позволяет доказывать многие предельные теоремы с помощью соответствующих случайных процессов.

В заключение следует добавить, что логически безупречное определение понятий, связанных со случайными процессами, в рамках указанной выше аксиоматики создавало и создаёт много трудностей теоретико-множественного характера (связанных, напр., с определением вероятности, непрерывности или дифференцируемости и т. п. свойств случайных процессов). Поэтому, в частности, в монографиях по теории случайных процессов около половины объёма отводится анализу развития теоретико-множественных конструкций.

● **История теории вероятностей.** История математики, т. 2—3, М., 1970—72; Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978.

Классики науки. Bernoulli J., Ars conjectandi, opus posthumum, Basileae, 1713 (в рус. пер.— Четвертая часть сочинения: Бернулли Я., О законе больших чисел, пер. с лат., М., 1986); Moivre A. de, Doctrine of Chances, 3 ed., L., 1756 (переизд. N. Y., 1967); Laplace [P. S.], Théorie analytique des probabilités, 3 éd., P., 1886; Чебышев П. Л., Полн. собр. соч., т. 2—3, М.— Л., 1947—48; Liapounoff A., Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité, СПБ, 1901; Марков А. А., Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924; Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4 изд., М.— Л., 1946; Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974.

Учебники и справочники. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; Боровков А. А., Теория вероятностей, М., 1976; Розанов Ю. А., Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика, М., 1985; Севастьянов Б. А., Курс теории вероятностей и математической статистики, М., 1982; Ширяев А. Н., Вероятность, М., 1980; Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987.

Монографии. Лоэв М., Теория вероятностей, пер. с англ., М., 1962; Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1—2, М., 1984.

Ю. В. Прохоров, Б. А. Севастьянов.

ВЕРОЯ́ТНОСТИ КЛАССИ́ЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕ́НИЕ — см. *Вероятностей теория*, *Вероятность*.

ВЕРОЯ́ТНОСТИ СТАТИСТИ́ЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕ́НИЕ — см. *Вероятность*.

ВЕРОЯ́ТНОСТНАЯ БУМА́ГА — специальным образом разграфлённая бумага, с помощью к-рой на практике осуществляется преобразование графика функции распределения в прямую линию. Это достигается изменением обычных шкал на одной или обеих осях. В. б. предназначена для графич. метода (т. н. метода выпрямленных диаграмм) проверки гипотез о принадлежности эмпирич. распределения к заданному семейству распределений и изготавливается типографским способом для таких часто встречающихся распределений, как нормальное распределение, логарифмически нормальное распределение, показательное распределение, хи-квадрат распределение. Иного рода гипотезы проверяются с помощью т. н. биномиальной и пуассоновской В. б. Наиболее рас-

пространена нормальная В. б., на к-рой график функции нормального распределения изображается прямой линией. Смысл осуществляемого преобразования в том, что для функции нормального распределения $F(x)$ с параметрами a и σ^2 график функции

$$y = \Phi^{-1}[F(x)],$$

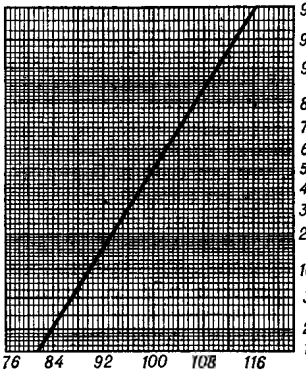
где Φ^{-1} функция, обратная к

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,F}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du,$$

будет прямой линией с уравнением

$$y(x) = \frac{x-a}{\sigma}.$$

Поэтому прямоугольная система координат на нормальной В. б. устроена так, что вертикальная ось проградуирована в квантилях стандартного нормального распределения, а в качестве ординат откладываются непосредственно значения функции распределения, соответствующие квантилям (рис.). На свойстве «выпрямления» основан простой способ проверки гипотезы о принадлежности данной выборки к нормальной совокупности: если построенная на нормальной В. б. эмпирич. функция распределения хорошо приближается прямой линией, то можно с основанием полагать, что гипотеза нормальности приемлема, и использовать затем обычные приёмы теории статистич. проверки гипотез. Достоинство этого метода состоит в том, что вывод о принадлежности к нормальной совокупности можно сделать без знания численных значений параметров гипотетич. распределения (см. *Непараметрические методы* математич. статистики).



Проведённая линия — график функции нормального распределения со средним 100 и стандартным отклонением 8.

ВЕРОЯ́ТНОСТНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — совокупность (Ω, S, P) непустого множества Ω, класса S подмножеств множества Ω и распределения P на S. Точки множества Ω наз. элементарными событиями, а само множество Ω — пространством элементарных событий. Принадлежащие S подмножества множества Ω наз. (случайными) событиями.

Понятие «В. п.», введённое А. Н. Колмогоровым (1933), лежит в основе логич. схемы построения теории вероятностей.

ВЕРОЯ́ТНОСТНЫЙ АВТОМА́Т — обобщение *конечного автомата*, в к-ром функции переходов и выходов являются случайными функциями. Тем самым В. а. может быть задан системой (A, S, B, φ, ψ), где A, S, B — конечные алфавиты, имеющие тот же смысл, что и в конечном автомате, а φ, ψ — случайные функции, отображающие $S \times A$ соответственно в S и B и задаваемые системами вероятностных мер $\varphi_{s,a}$, $\psi_{s,a}$, определённых для любых a из A и s из S соответственно на множествах S и B.

ВЕРОЯ́ТНОСТНЫЙ ПРОЦЕ́СС — то же, что *случайный процесс*.

ВЕРОЯ́ТНОСТЬ математическая — числовая характеристика степени возможности наступления к.-л. определённого события в тех или иных определённых, могущих повторяться неограниченное число раз условиях. Как категория научного познания понятие «В.» отражает особый тип связей между явлениями, характерных для массовых процессов. Понятие математич. В. лежит в основе особого класса закономерностей — вероятностных или статистических — и является выражением качественно своеобразной связи между случайным и необходимым.

Часто численное значение В. находится с помощью классического определения вероятности: В. равна отношению числа исходов, «благоприятствующих» данному событию, к общему числу «равновозможных» исходов. Напр., если из 10 млн. облигаций государственного выигрышного займа, на к-рые в одном тираже должен выпасть один выигрыш максимального размера, в данном городе размещено 500 тыс. облигаций, то В. того, что максимальный выигрыш достанется жителю данного города, равна 500 000/10000000=1/20.

В других, более сложных ситуациях определение численного значения В. требует статистического подхода. Напр., если при 100 попытках стрелок попал в цель 39 раз, то можно думать, что для него В. попадания в цель при данных условиях приблизительно равна 39/100, т. е. частоте попадания. По В., определённой классич. или статистич. способом, могут быть вычислены в соответствии с правилами *вероятностей теории* новые В. Напр., если для нашего стрелка В. попадания при отдельном выстреле равна $^4/_{10}$, то В. того, что он будет иметь хотя бы одно попадание при четырёх выстрелах, равна $1-(1-4/10)^4 \sim 0{,}87$. Этот вывод может быть проверен статистически: если попытки поразить цель хотя бы одним выстрелом из четырёх будут повторяться много раз, то они будут иметь успех приблизительно в 87% случаев (в предположении, что за это время искусство стрелка не изменится заметным образом).

В современной теории вероятностей свойства В. формулируются в виде аксиом. Однако ни эти аксиомы, ни классич. подход к В., ни статистич. подход не дают исчерпывающего описания реального содержания понятия «В.», а являются лишь приближениями ко всё более полному его раскрытию. Далеко не всякое событие, наступление к-рого при данных условиях не является однозначно определённым, имеет при этих условиях определённую В. Предположение, что при данных условиях для данного события В., как вполне определённая нормальная доля числа наступлений данного события при большом числе повторений данных условий, существует, является гипотезой, к-рая в каждом отдельном вопросе требует спец. проверки или обоснования. Напр., имеет смысл говорить о В. попадания в цель заданных размеров, с заданного расстояния из винтовки известного образца стрелком, вызванным наудачу из определённого воинского подразделения. Однако было бы бессмысленным говорить о попадании в цель вообще, если об условиях стрельбы ничего не известно.

По поводу связи В. с частотой надо иметь в виду следующее. Если n — число повторных испытаний, осуществляющих заданные условия, и m — число испытаний, в к-рых данное событие наступает, то частота m/n, как правило, мало отличается от вероятности p. Чем больше число n, тем реже встречаются сколько-либо значительные отклонения частоты m/n от вероятности p. Для пояснения этого обстоятельства рассмотрим пример бросания симметричной монеты, в к-ром В. появления «герба» и «решётки» одинаковы и равны $^1/_2$. При десяти бросаниях ($n=10$) появление десяти «гербов» или десяти «решёток» очень мало вероятно. Но и утверждать, что «герб» выпадает ровно пять раз, нет достаточных оснований; более того, утверждая, что «герб» выпадает 4 или 5, или 6 раз, мы ещё довольно сильно рискуем ошибиться. Но при ста бросаниях монеты можно уже без практически ощутимого риска заранее утверждать, что число выпавших «гербов» будет лежать между 35 и 65 (см. *Больших чисел закон*).

Математич. В. может служить для оценки В. события в обычном, житейском смысле, т. е. для уточнения т. н. «проблематических» суждений, выражающихся обычно словами «возможно», «вероятно», «очень вероятно» и т. п. По поводу этих оценок следует иметь в виду, что в применении к любому определённому суждению, к-рое на самом деле может быть только истинным или ложным, оценка его В. имеет лишь временный или же субъективный смысл,

т. е. выражает лишь наше отношение к делу. Напр., если кто-либо, не имея по этому поводу спец. сведений, захочет представить себе вид окрестностей Москвы 23 марта 1930, то он скажет: «вероятно, в этот день на полях лежал снег». Однако на самом деле в 1930 снег под Москвой к 22 марта уже сошёл с полей. Выяснив это обстоятельство, мы должны будем отменить первоначальную оценку, выраженную заключённым в кавычки проблематич. суждением. Тем не менее эта оценка, оказавшаяся в применении к данному индивидуальному случаю ошибочной, основана на верном общем правиле: «в начале двадцатых чисел марта на полях под Москвой по большей части лежит снег». Это правило отражает объективные свойства климата Подмосковья. Такого рода правила можно выражать, указывая уровень В. интересующего нас события, при тех или иных общих, осуществимых неограниченное число раз условиях. Эти оценки имеют объективный смысл. Поэтому расчёт В. для подтверждения наших оценок степени надёжности тех или иных утверждений, относящихся к отдельным индивидуальным событиям, не должно давать повода к мнению, что математич. В. является только числовым выражением нашей субъективной уверенности в наступлении нек-рого события. Такое субъективное понимание смысла математич. В. является ошибочным. При последовательном развитии оно приводит к абсурдному утверждению, что из чистого незнания, анализируя одни лишь субъективные состояния нашей большей или меньшей уверенности, мы можем сделать к.-л. определённые заключения относительно внешнего мира.

Наибольший интерес представляют собой В., близкие к 1 или 0. Соответствующие события рассматриваются как «практически достоверные» или «практически невозможные». Этот интерес вызывается тем, что подсчёт В. для оценки положения в отдельных индивидуальных случаях неизбежно приводит к вопросу о том, какими В. можно пренебрегать на практике. Этот вопрос решается по-разному, в зависимости от того, насколько велика необходимость быстрого перехода от накопления надёжных данных к их действительному употреблению. Напр., если при данных условиях стрельбы теоретич. расчёт приводит к тому, что поставленная боевая задача будет решена данным числом выстрелов с В. 0,95 (т. е. В. того, что назначенного числа снарядов не хватит, равна 0,05), то обычно считают возможным исходить при руководстве боевыми операциями из предположения, что назначенное число снарядов окажется достаточным. В более спокойной обстановке научных исследований принято пренебрегать лишь В. в 0,003 (эта норма связана с т. н. правилом трёх сигма), а иногда требовать и ещё большего приближения В. отсутствия ошибки к единице. Так, напр., В. события: «при 100 бросаниях симметричной монеты число выпадений «герба» находится в пределах от 35 до 65», равна 0,99822, что с точки зрения многих применений можно считать указанием на «практич. достоверность» этого события. Хотя в статистике и рекомендуют обычно пренебрегать В. от 0,05 при предварительных ориентировочных исследованиях до 0,001 при окончательных серьёзных выводах, часто достижима значительно большая достоверность вероятностных выводов; основные выводы статистич. физики основаны на пренебрежении лишь В. порядка, меньшего 0,000 000 000 1.

В основе математич. моделей, используемых в теории вероятностей, лежат три понятия: пространство Ω т. н. элементарных событий, класс событий A (подмножеств Ω) и определённая на этом классе функция множеств P — вероятностная мера. Значение $P(A)$ функции P для события A наз. в этом случае **вероятностью** события A.

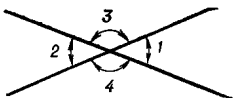
● Борель Э., Вероятность и достоверность, пер. с франц., 2 изд., М., 1964; Математика, ее содержание, методы и значение, т. 2, М., 1956, гл. 11; Колмогоров А. Н., в сб.: Проблемы передачи информации, т. 5, в. 3, М., 1969. *А. Н. Колмогоров.*

ВЕРОЯТНОСТЬ a posteriori — см. *Бейеса теорема.*

ВЕРОЯТНОСТЬ a priori — см. *Бейеса теорема.*

ВЕРОЯТНОСТЬ ЗАНЯТОСТИ — см. *Массового обслуживания теория.*

ВЕРТИКА́ЛЬНЫЕ УГЛЫ́ — пары углов с общей вершиной, образуемые при пересечении двух прямых так, что стороны одного угла являются продолжением сторон другого. На рис. — две пары В. у. ($\angle 1$, $\angle 2$) и ($\angle 3$, $\angle 4$).



ВЕ́РХНИЙ И НИ́ЖНИЙ ПРЕДЕ́ЛЫ числовой последовательности — наибольший (соответственно наименьший) среди всех её *частичных пределов* (конечных или бесконечных). Верхний предел обозначается $\overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n$ или $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, нижний предел обозначается $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n$ или $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$. Для любой последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ существует как верхний $\overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n$, так и нижний $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n$ пределы (конечные или равные одному из символов $+\infty$, $-\infty$), т. е. существуют подпоследовательности $\{x'_{n_k}\}$ и $\{x''_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n; \quad \lim_{k\to\infty} x''_{n_k} = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

Напр.,

если $x_n=(-1)^n$, то $\overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n=1$, $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n=-1$,

если $x_n=n+(-1)^n n$, то $\overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n=0$,

если $x_n=(-1)^n n$, то $\overline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$.

У ограниченной последовательности её В. и н. п. конечны.

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел (равный конечному числу, $+\infty$ или $-\infty$), необходимо и достаточно, чтобы её В. и н. п. совпадали:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

ВЕ́РХНИЙ ИНТЕГРА́Л ДАРБУ́ — см. *Интеграл.*

ВЕ́РХНЯЯ ГРАНИ́ЦА множества — см. *Верхняя и нижняя грани.*

ВЕ́РХНЯЯ И НИ́ЖНЯЯ ГРА́НИ — характеристики множеств на прямой. Верхняя грань нек-рого множества действительных чисел — наименьшее число, ограничивающее сверху это множество. Нижняя грань данного множества — наибольшее число, ограничивающее его снизу. Более подробно: пусть задано нек-рое подмножество X действительных чисел. Число b наз. его **верхней гранью** (в. г.) и обозначается $\sup X$ (от лат. supremum — наивысшее), если для каждого числа $x\in X$ выполняется неравенство $x\leqslant b$ и, каково бы ни было $b'<b$, существует такое $x'\in X$, что $x'>b'$. Число a наз. **нижней гранью** (н. г.) множества X и обозначается $\inf X$ (от лат. infimum — наинизшее), если для каждого $x\in X$ выполняется неравенство $x\geqslant a$ и, каково бы ни было $a'>a$, существует такое $x'\in X$, что $x'<a'$.

Примеры:

$$\inf[a,\ b]=a,\ \sup[a,\ b]=b,$$
$$\inf(a,\ b)=a,\ \sup(a,\ b)=b;$$

если множество X состоит из двух точек α и β, $\alpha<\beta$, то

$$\inf X=\alpha,\quad \sup X=\beta.$$

Эти примеры показывают, в частности, что в. г. (н. г.) может как принадлежать этому множеству (напр., в случае отрезка $[a,\ b]$), так и не принадлежать ему [напр., в случае интервала $(a,\ b)$]. Если в нек-ром множестве существует наибольшее (наименьшее) число, то оно, очевидно, и является в. г. (н. г.) этого множества.

В. г. (н. г.) не ограниченного сверху (снизу) множества наз. символ $+\infty$ (соответственно символ $-\infty$). Если N — множество натуральных чисел: $N=\{1, 2, 3,\ldots\}$, то

$$\inf N=1, \quad \sup N=+\infty.$$

Если Z — множество всех целых чисел, положительных и отрицательных, то

$$\inf Z=-\infty, \quad \sup Z=+\infty.$$

Всякое непустое множество действительных чисел имеет, и притом единственную, в. г. (н. г.) конечную или бесконечную. При этом всякое ограниченное сверху непустое множество имеет конечную в. г., а всякое ограниченное снизу — конечную н. г.

Иногда в. г. (н. г.) множества наз. его точной верхней (нижней) гранью, понимая в этом случае под термином в. г. (н. г.) множества любое число, ограничивающее его сверху (снизу). Реже вместо термина в. г. (н. г.) множества, в том или ином из вышеуказанных смыслов, употребляется термин верхняя (нижняя) граница множества.

В. г. (н. г.) функции, принимающей действительные значения, в частности последовательности действительных чисел, называют в. г. (н. г.) множества её значений.

Для существования конечной в. г. (н. г.) необходимо и достаточно, чтобы множество X было ограничено сверху (снизу), т. е. чтобы существовали такие числа A, что $x\leqslant A$ ($x\geqslant A$) для любого $x\in X$. Это предложение представляет собою одну из форм принципа непрерывности множества действительных чисел (т. н. аксиома непрерывности Вейерштрасса).

Важность понятий В. и н. г. для математич. анализа была выяснена К. Вейерштрассом; они являются основными для строгого изложения начал математич. анализа. Аналогично понятию В. и н. г. для числовых множеств вводятся понятия В. и н. г. для любых частично упорядоченных множеств.

ВЕС — 1) В. топологического пространства — наименьшее кардинальное число, являющееся мощностью его открытой *базы*.

2) В.— то же, что *весовая функция*.

ВЕСА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ — числа, выражающие относительную точность результатов измерений. В. р. и. обратно пропорциональны дисперсиям соответствующих ошибок. Надёжное установление В. р. и. на практике особенно важно в тех случаях, когда измерения производятся с разной точностью. Игнорировать эти различия при использовании результатов подобных измерений нельзя, т. к. это обесценивало бы лучшие измерения, ставя их на один уровень с малонадёжными. Поэтому более точным измерениям присваивается больший вес. В случае нескольких независимых измерений $x_1, x_2,\ldots, x_n$ одной и той же величины a, в предположении, что измерения лишены систематич. ошибки и имеют соответственно веса $p_1, p_2,\ldots, p_n$, наиболее надёжной линейной оценкой величины a является взвешенное среднее

$$S=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n},$$

к-рое имеет вес $p=p_1+p_2+\ldots+p_n$. Среди всех линейных оценок взвешенное среднее S обладает минимальной дисперсией.

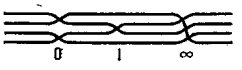
ВЕСОВАЯ ФУНКЦИЯ, в е с,— функциональный множитель, позволяющий получить конечность суммы некоторого ряда или интеграла от некоторой функции, которые без этого множителя бесконечны.

ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ МЕТОД — см. *Дискретное программирование*.

ВЕТВЛЕНИЯ ТОЧКА — изолированная особая точка a аналитической функции $f(z)$ одного комплексного переменного z такая, что аналитическое продолжение какого-либо элемента функции $f(z)$ вдоль замкнутого пути, охватывающего a, приводит к новым элементам $f(z)$.

Напр., точка $z_0=0$ является В. т. функций $\sqrt{z}$ и $\operatorname{Ln} z$; при однократном обходе вокруг неё элементы этих функций изменяются так, что $\sqrt{z}$ меняет знак, а к исходному значению $\operatorname{Ln} z$ прибавляется или вычитается число $2\pi i$ (в зависимости от направления обхода).

Если после нек-рого минимального числа обходов $m>1$ в одном и том же направлении элементы $f(z)$ приобретают первоначальный вид, то В. т. z_0 наз. В. т. конечного порядка $m-1$ ($z_0=0$ есть В. т. порядка 1 для $\sqrt{z}$). В противном случае, когда при любом числе обходов получаются всё новые и новые элементы $f(z)$, В. т. z_0 наз. логарифмической точкой ветвления или В. т. бесконечного порядка ($z_0=0$ есть логарифмич. В. т. для $\operatorname{Ln} z$). На рисунке схематически показаны В. т. функции $\sqrt{1+\sqrt{z}}$. В точке $z=0$ функция имеет две различные В. т. 1-го порядка; в точке $z=1$ — одну В. т. 1-го порядка и два правильных, неразветвлённых элемента; в точке $z=\infty$ — В. т. 3-го порядка. Остальные точки комплексной плоскости — правильные точки функции.



ВЕТВЬ аналитической функции — см. *Аналитическая функция*.

ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС — случайный процесс, описывающий широкий круг явлений, связанных с размножением и превращением каких-либо объектов. Примерами таких процессов являются различные цепные реакции, напр. размножение частиц, распад молекул, рост популяции. Простейший дискретный В. п. X_n, $n=0, 1, 2,\ldots$, определяется следующими условиями:

а) $X_0=1$,

б) $p_k=\mathsf{P}\{X_1=k\}$, $\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1$,

в) $\mathsf{P}\{X_{n+1}=k \mid X_n=j\}=\mathsf{P}\{Y_1+\ldots+Y_j=k\}$,

где случайные величины Y_j взаимно независимы и распределены так же, как X_1. Рассматриваемый В. п. представляет собой однородную *Маркова цепь* со счётным числом состояний 0, 1, 2,.... Эти состояния интерпретируются как число частиц; в начальный момент времени имеется одна частица; X_n выражает число частиц n-го поколения начальной частицы; независимость случайных величин Y_j означает независимость размножения частиц одного поколения (это предположение является основным математич. предположением, выделяющим класс В. п.).

Переходные вероятности В. п.

$$p_{ij}(n)=\mathsf{P}\{X_{m+n}=j \mid X_m=i\}$$

(вероятности того, что i частиц за время n превращается в j частиц) удовлетворяют дополнительному условию (ветвления):

$$p_{ij}(n)=\sum_{j_1+\ldots+j_i=j}p_{1j_1}(n)\,p_{1j_2}\cdots p_{1j_i}(n).$$

Явное выражение для переходных вероятностей В. п. получить довольно трудно. Более удобным аналитич. методом изучения свойств В. п., позволяющим обойти вычисление переходных вероятностей, является метод производящих функций. Производящая функция распределения числа частиц n-го поколения

$$F_n(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}\{X_n=k\}\,s^k$$

при условии, что $X_0=1$, задаётся рекуррентным соотношением

$$F_n(s)=F(F_{n-1}(s)),$$

где $F(s)=\sum p_ks^k$ — производящая функция X_1. Отсюда можно вывести, что $p_{ij}(n)$— коэффициент при s^j в разложении $[F_n(s)]^i$ по степеням s. Если $A=F'(1)$ конечно, то математич. ожидание $\mathsf{E}X_n$ (среднее число частиц в n-м поколении) равно A^n.

В теории В. п. наиболее важной является задача о вырождении процесса с вероятностью 1, т. е. об условиях,

при к-рых

$$\lim_{n\to\infty} p_{10}(n)=1,$$

где $p_{10}(n)=\mathsf{P}\{X_n=0|X_0=1\}$. Эта задача впервые была поставлена Ф. Гальтоном (1873) в связи с проблемой о вырождении фамилий. Основная теорема о вырождении В. п. утверждает: вероятность вырождения В. п.

$$q=\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{X_n=0\}$$

является наименьшим неотрицательным корнем уравнения $F(s)=s$. Если $A\leqslant 1$ и $F(s)\not\equiv s$, то $q=1$, если же $A>1$, то $q<1$.

Приведённый В. п. обобщается на тот случай, когда в начальный момент времени имеется не одна, а несколько частиц. Модель В. п. можно обобщить, рассматривая частицы нескольких типов $T_1,\ldots, T_m$. Тогда состояние В. п. в нек-рый момент времени описывается случайным вектором $X_n=(X_{n,1},\ldots, X_{n,m})$, где $X_{n,k}$ — число частиц типа T_k в момент n. Кроме того, рассматриваются также В. п. с непрерывным временем.

● Севастьянов Б. А., Ветвящиеся процессы, М., 1971.

Б. А. Севастьянов.

ВЕЩЕ́СТВЕННОЕ ЧИСЛО́ — то же, что *действительное число.*

ВЗАИ́МНО ОДНОЗНА́ЧНОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — то же, что *инъективное отображение.*

ВЗАИ́МНО ОДНОЗНА́ЧНОЕ СООТВЕ́ТСТВИЕ — соответствие между двумя множествами A и B, при котором каждому элементу из множества A сопоставляется единственный элемент из множества B и каждому элементу из B сопоставлен ровно один элемент из A. Таким образом, В. о. с. определяет пару взаимно обратных друг другу биективных отображений $f: A\to B$ и $g: B\to A$ ($fg=\varepsilon_A$, $gf=\varepsilon_B$, где ε_A, ε_B — тождественные отображения множеств A и B соответственно).

ВЗАИ́МНО ПРОСТЫ́Е ЧИ́СЛА — целые числа, не имеющие общих (простых) делителей. Если каждое из этих чисел взаимно просто с каждым другим из них, то говорят, что числа попарно простые. Пример: три числа 6, 8, 9 — В. п. ч., но не попарно просты.

ВЗАИ́МНОСТИ ЗАКО́Н — теорема о *квадратичных вычетах.*

ВЗВЕ́ШЕННОЕ СРЕ́ДНЕЕ n чисел $x_1, x_2,\ldots, x_n$ с весами $p_1, p_2,\ldots, p_n$ соответственно — число

$$S=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}.$$

ВЗВЕ́ШЕННОЕ СТЕПЕННО́Е СРЕ́ДНЕЕ — см. *Среднее.*

ВИЕ́ТА ТЕОРЕ́МА о корнях — теорема, устанавливающая соотношения между корнями и коэффициентами многочлена. Пусть $P_n(x)$ — многочлен степени n с коэффициентами из нек-рого поля и старшим коэффициентом 1. Над полем, содержащим все корни $P_n(x)$ [напр., над полем разложения для $P_n(x)$], многочлен $P_n(x)$ разлагается на линейные множители:

$$P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

где α_i — корни $P_n(x)$, $i=1, 2,\ldots, n$. В. т. устанавливает справедливость соотношений (формулы Виета):

$$a_n=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,$$
$$a_{n-1}=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}+\alpha_1\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n+\ldots$$
$$\ldots+\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n,$$
$$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n).$$

В частности, для квадратного уравнения ($n=2$)

$$x^2+px+q=0$$

формулы Виета имеют вид

$$q=\alpha_1\alpha_2,\quad p=-(\alpha_1+\alpha_2).$$

Ф. Виет (1646) нашёл эту зависимость для всех n, однако с оговоркой на положительность корней; в общем виде В. т. установлена А. Жираром (1629).

ВИЕ́ТА ФО́РМУЛЫ — см. *Виета теорема, Квадратное уравнение.*

ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕ́СС — случайный процесс, служащий математической моделью броуновского движения. В. п. определяется как случайный процесс $X(t)$ с непрерывным временем $t\in T$ (обычно $T=[0, \infty)$ или $T=[0, 1]$) с $X(0)=0$, приращения к-рого за непересекающиеся промежутки времени взаимно независимы, при этом $X(s+t)-X(s)$ при любом s имеет нормальное распределение с нулевым математич. ожиданием и дисперсией t (такой В. п. наз. стандартным; произвольный В. п., у к-рого приращения за время t распределены с математич. ожиданием θt и дисперсией σ^2t, линейно преобразуется к стандартному В. п.; θ и σ^2 наз. соответственно коэффициентами сноса и диффузии). В. п. в терминах общей классификации случайных процессов является однородным марковским процессом с непрерывным временем и непрерывным пространством состояний. Переходные плотности В. п. $p(t; x, y)$ (характеризующие переход из x в y за время t) представляют собой единственное решение уравнения диффузии

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

и равны

$$p(t; x, y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(y-x)^2/2t}.$$

Для любых n и $0<t_1<\ldots<t_n$ совместное распределение случайных величин $X(t_1),\ldots, X(t_n)$ нормально.

История изучения броуновского движения началась с открытия Р. Броуна (1827), наблюдавшего непрерывное беспорядочное движение микроскопич. частиц в жидкой среде.

Первая строгая теория процесса броуновского движения была дана Н. Винером (1918—23). Пусть $X(t)$ — координата частицы в момент t в однородном броуновском движении. Функцию $X(t)$ от непрерывного параметра t можно рассматривать как траекторию нек-рого случайного процесса. Представление о том, что распределение смещения $X(s+t)-X(s)$ зависит только от t и не зависит от s и при $t>0$ не зависит от перемещений частицы до момента s, приводит к допущению, что процесс $X(t)$ имеет независимые приращения. Если время t достаточно велико (по сравнению с промежутком между столкновениями с другими частицами), то приращение координаты $X(s+t)-X(s)$ является суммой большого числа малых смещений. В соответствии с центральной предельной теоремой это приращение как сумма почти независимых случайных величин должно быть нормально распределённым. Таким образом, процесс $X(t)$ должен быть В. п.

В. п. обладает следующими характерными свойствами: траектории В. п. можно выбирать непрерывными с вероятностью 1 (это — единственный непрерывный с вероятностью 1 процесс с независимыми приращениями); однако траектории В. п. с вероятностью 1 не дифференцируемы ни в одной точке; при выходе из к.-л. точки траектория за сколь угодно малое время с вероятностью 1 возвращается в исходную точку и т. д.

К В. п. можно также прийти, обобщая дискретное симметричное случайное блуждание частицы, к-рая перемещается в дискретные моменты времени. В. п. $X(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, является в известном смысле предельным для случайных ломаных, построенных по точкам $\left(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{\sqrt{n}}\right)$, где S_k — суммы случайных величин X_i с математич. ожиданием $\mathsf{E}X_i=0$ и дисперсией $\mathsf{D}X_i=1$.

В. п. играет фундаментальную роль во многих теоретико-вероятностных моделях и практич. приложениях при изучении случайных процессов других типов. Методы изучения В. п. типичны для анализа общих диффузионных процессов.

● Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; Леви П., Стохастические процессы и броуновское движение, пер. с франц., М., 1972.

ВИНОГРА́ДОВА МЕ́ТОД — метод оценок тригонометрических сумм, позволяющий получить очень точные оценки для широкого класса тригонометрических сумм, в которых переменная суммирования пробегает значения последовательных целых чисел, последовательных простых чисел и т. д. Этот метод позволяет решить целый ряд классич. проблем аналитич. теории чисел (распределение дробных долей широкого класса функций, распределение простых чисел в натуральном ряде, аддитивные проблемы, частными случаями к-рых являются проблемы Варинга и Гольдбаха, и др.).

Метод предложен И. М. Виноградовым (1934).

● Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2 изд., М., 1980; его же, Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976; Хуа Ло-ген, Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, пер. с нем., М., 1964.

ВИ́НТ — см. *Винтовое исчисление.*

ВИНТОВА́Я ЛИ́НИЯ — пространственная кривая, описываемая точкой, которая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси и одновременно перемещается поступательно с постоянной скоростью вдоль этой оси. В. л. наз. также цилиндрич. В. л., так как она расположена на поверхности круглого цилиндра (рис. 1). Параметрич. уравнения цилиндрич. В. л.:

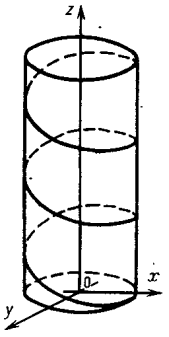


Рис. 1.

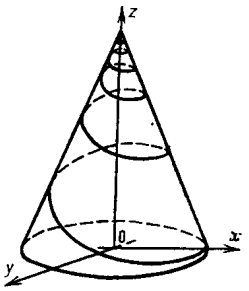


Рис. 2.

$$x = a\cos t,$$
$$y = a\sin t, \quad z = ht,$$

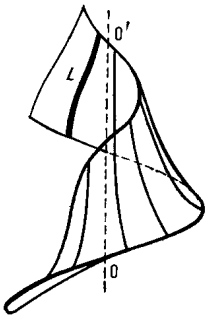
где t — длина дуги кривой, a — радиус цилиндра, h — постоянная.

Конич. В. л.— линия на поверхности круглого конуса, пересекающая все образующие под одинаковым углом (рис. 2). Параметрич. уравнения конич. В. л.:

$$x = ce^{mt}\cos t, \quad y = ce^{mt}\sin t, \quad z = ce^{mt}\operatorname{ctg}\alpha,$$

где t — длина дуги кривой, α — угол между осью конуса и его образующей, $m = \sin\alpha/\operatorname{tg}\varphi$, φ — угол между касательной к В. л. и образующей конуса.

ВИНТОВА́Я ПОВЕ́РХНОСТЬ — поверхность, описываемая плоской кривой L, которая, равномерно вращаясь вокруг оси OO', одновременно совершает равномерное поступательное перемещение вдоль этой же оси (рис.). Если L лежит в плоскости оси вращения z и определяется уравнением $z=f(u)$, то радиус-вектор В. п. есть



$$\boldsymbol{r} = \{u\cos v,\ u\sin v,$$
$$f(u) + hv\},\ h = \text{const},$$

её линейный элемент

$$ds^2 = (1+f'^2)\,du^2 + 2hf'\,du\,dv + (u^2+h^2)\,dv^2.$$

Если $f=\text{const}$, то В. п. есть геликоид. Если $h=0$, то В. п.— поверхность вращения.

ВИНТОВО́Е ДВИЖЕ́НИЕ — см. *Вращение, Движение.*

ВИНТОВО́Е ИСЧИСЛЕ́НИЕ — раздел векторного исчисления, в котором изучаются операции над винтами. При этом винтом наз. пара векторов $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, приложенных началами к одной точке O и удовлетворяющих условиям: при переходе к новой точке O' вектор $\boldsymbol{a}$ не изменяется, а вектор $\boldsymbol{b}$ заменяется вектором $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}-[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}]$, где $\boldsymbol{p}=OO'$. Понятие винта используется в механике (равнодействующая $\boldsymbol{f}$ системы сил $\boldsymbol{f}_i$ и главный момент $\boldsymbol{m}$ этой системы относительно точки системы образуют винт $\{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{m}\}$), в геометрии (в теории линейчатых поверхностей).

ВИХРЕВА́Я ТРУ́БКА — см. *Векторная трубка.*

ВИХРЬ, ротор, векторного поля $\boldsymbol{a}$ — векторная характеристика «вращательной составляющей» поля $\boldsymbol{a}$. Обозначается символом $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ (иногда $\operatorname{curl}\boldsymbol{a}$). В. может быть истолкован следующим образом. Пусть $\boldsymbol{a}$ — поле скоростей потока жидкости. И пусть в данной точке потока имеется малое колёсико с лопастями и с осью, ориентированной по направлению $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ в этой точке. Тогда угловая скорость вращения колёсика под воздействием потока будет максимальной и её значение будет равно $\frac{1}{2}|\operatorname{rot}\boldsymbol{a}|$. Если поле $\boldsymbol{a}$ имеет координаты a_x, a_y, a_z в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, то В.

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left\{\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x},\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right\}.$$

Свойства В.:

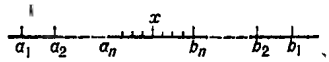
$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0,$$
$$\operatorname{rot}(\varphi, \boldsymbol{a}) = \varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a} + [\operatorname{grad}\varphi, \boldsymbol{a}],$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} - \Delta\boldsymbol{a}$$

(Δ — оператор Лапласа). См. также *Векторный анализ.*

Термин «В.» («ротор») ввёл У. Клиффорд (1878); ему же принадлежит обозначение rot, впрочем, ранее (1855, 1856) это обозначение (как и curl) применял Дж. Максвелл.

ВЛОЖЕ́НИЕ — то же, что *инъективное отображение*,

ВЛО́ЖЕННЫЕ ОТРЕ́ЗКИ, система вложенных отрезков,— система числовых отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, . . ., $[a_n, b_n]$, . . ., для которых $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$ (рис.). Для всякой системы В. о.

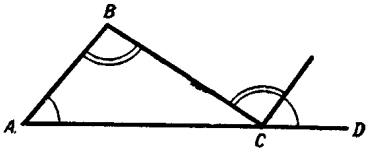


существует хотя бы одно число x, к-рое принадлежит всем отрезкам данной системы (принцип вложенных отрезков Кантора).

ВНЕ́ШНЕЕ ПРОИЗВЕДЕ́НИЕ векторов — то же, что *векторное произведение* векторов.

ВНЕ́ШНИЙ АВТОМОРФИ́ЗМ — см. *Автоморфизм.*

ВНЕ́ШНИЙ У́ГОЛ — угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника (или многоугольника), напр. $\angle BCD$ на рисунке. В. у. треугольника равен сумме внутренних его углов, с ним не смежных:



$$\angle BCD = \angle CAB + \angle ABC.$$

ВНЕ́ШНЯЯ А́ЛГЕБРА — то же, что *Грассмана алгебра.*

ВНЕ́ШНЯЯ КРИВИЗНА́ многообразия, погружённого в некоторое пространство X на единицу большей размерности,— произведение $K_{\text{внеш.}}$ его *главных кривизн* или, что то же самое, отношение определителей первой и второй квадратичных форм. В отличие от *внутренней кривизны* $K_{\text{внутр.}}$, В. к. зависит от кривизны пространства, где располагается многообразие, и выражается через них; напр., если X — риманово пространство постоянной кривизны $K_{\text{простр.}}$, то

$$K_{\text{внеш.}} = K_{\text{внутр.}} - K_{\text{простр.}}.$$

В. к. поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве совпадает с её внутренней кривизной.

ВНЕ́ШНЯЯ МЕ́РА множества — нижняя грань мер открытых множеств, содержащих данное множество. См. *Мера* множества.

ВНЕ́ШНЯЯ ФО́РМА — см. *Линейная алгебра.*

ВНУ́ТРЕННЕЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — непрерывное *открытое отображение.* Важнейший пример В. о.— отображение плоскости $\mathbb{R}^2$ в себя, осуществляемое голоморфной функцией.

ВНУ́ТРЕННЕЕ ПРОИЗВЕДЕ́НИЕ векторов — то же, что *скалярное произведение*.

ВНУ́ТРЕННИЕ УРАВНЕ́НИЯ линии — см. *Дифференциальная геометрия*.

ВНУ́ТРЕННИЙ АВТОМОРФИ́ЗМ — см. *Автоморфизм*.

ВНУ́ТРЕННОСТЬ множества — см. *Внутренняя точка*.

ВНУ́ТРЕННЯЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ — раздел геометрии, изучающий только такие свойства поверхности и фигур на ней, которые могут быть получены лишь при помощи измерений на самой поверхности без обращения к объемлющему пространству. Так, расстояние между двумя точками на поверхности определяется как минимум длин кривых, лежащих на поверхности и соединяющих эти точки. В. г. поверхности не меняется при её изгибании, т. е. при такой деформации, когда длины кривых на поверхности не изменяются. Простейшие случаи В. г.: планиметрия — В. г. плоскости, геометрия на сфере, с к-рой совпадает в первом приближении геометрия земной поверхности и возникшая в связи с задачами картографии. В. г. искривлённой поверхности можно рассматривать как геометрию двумерного искривлённого пространства. Развитие понятия искривлённого пространства привело к созданию Б. Риманом т. н. *римановых пространств*, играющих большую роль в современной физике. В общих геометрич. теориях понятию «В. г.» придаётся общий смысл, состоящий в том, что к.-л. фигура с точки зрения её В. г. рассматривается как нек-рое пространство само в себе. Основы В. г. созданы К. Гауссом (1827).

ВНУ́ТРЕННЯЯ КРИВИЗНА́ многообразия — мера искривлённости многообразия, зависящая только от его метрических свойств. В. к. описывается *кривизны тензором*, зависящим от коэффициентов метрич. тензора и их первых и вторых производных. В. к. поверхности в евклидовом пространстве является её *гауссовой кривизной*.

ВНУ́ТРЕННЯЯ МЕ́РА множества — верхняя грань мер замкнутых множеств, содержащихся в заданном множестве. См. *Мера* множества.

ВНУ́ТРЕННЯЯ МЕ́ТРИКА — точная нижняя грань длин кривых, соединяющих данные точки. См. *Римана геометрия*.

ВНУ́ТРЕННЯЯ ТО́ЧКА множества — точка x множества X, рассматриваемого как топологическое пространство, имеющая открытую окрестность, содержащуюся в X. Совокупность В. т. образует внутренность множества X; она обозначается $\langle X\rangle$ или $\operatorname{Int} X$; это — объединение всех *открытых множеств*, содержащихся в X.

Операция $\langle\cdot\rangle$, определённая на множествах пространства T, удовлетворяет условиям

1) $\langle X\rangle\cap\langle Y\rangle=\langle X\cap Y\rangle$,

2) $\langle X\rangle\subset X$,

3) $\langle T\rangle=T$,

4) $\langle\langle X\rangle\rangle=\langle X\rangle$,

и, кроме того,

$$\langle\varnothing\rangle=\varnothing,\quad X\subset Y\Rightarrow\langle X\rangle\subset\langle Y\rangle$$

и определяет в T топологич. структуру, в к-рой открытыми множествами считаются такие, что $\langle X\rangle=X$; эта операция двойственна операции замыкания $[\cdot]$ (см. *Прикосновения точка*).

ВО́ГНУТАЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Выпуклая функция*.

ВОЗВЕДЕ́НИЕ В СТЕ́ПЕНЬ — алгебраическое действие, заключающееся в повторении числа a сомножителем несколько (n) раз:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}=a^n;$$

число a наз. основанием степени, n — показателем степени, a^n — степенью. Вторая степень числа наз. квадратом, третья — кубом. При В. в с. выполняются равенства: $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, $a^m:a^n=a^{m-n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$. См. также *Степень*.

ВОЗВРА́ТА РЕБРО́ — см. *Линейчатая поверхность*.

ВОЗВРА́ТА ТО́ЧКА кривой, заострения точка,— см. *Особая точка* кривой.

ВОЗВРА́ТНАЯ ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ, рекуррентная последовательность,— последовательность a_0, a_1, a_2,. . ., удовлетворяющая соотношению вида

$$a_{n+p}+c_1a_{n+p-1}+\ldots+c_pa_n=0,$$

где c_1,. . ., c_p — постоянные. Это соотношение позволяет вычислить один за другим члены последовательности, если известны первые p членов. Классич. примером В. п. является последовательность чисел Фибоначчи:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8\ \ldots$$

($a_0=1$, $a_1=1$,. . ., $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$). А. Муавр рассмотрел под названием возвратных рядов степенные ряды $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ с коэффициентами, образующими В. п. Такие ряды изображают всегда рациональные функции.

ВОЗВРА́ТНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение вида

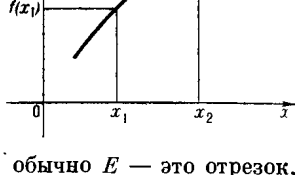
$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

в к-ром коэффициенты, равноудалённые от начала и конца, равны между собой: $a_i=a_{n-i}$. В. у. степени $2n$ можно привести к уравнению n-й степени, положив $z=x\pm\frac{1}{x}$.

ВОЗВРА́ТНЫЙ РЯД — см. *Возвратная последовательность*.

ВОЗРАСТА́ЮЩАЯ ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ — такая последовательность x_n, что для $n=1$, 2,. . . выполняется неравенство $x_n<x_{n+1}$. Иногда такие последовательности наз. строго возрастающими, а термин «В. п.» применяется к последовательностям, удовлетворяющим для всех n лишь условию $x_n\leqslant x_{n+1}$. Такие последовательности наз. также неубывающими. Всякая ограниченная сверху неубывающая последовательность имеет конечный предел, а всякая не ограниченная сверху имеет бесконечный предел, равный $+\infty$.

ВОЗРАСТА́ЮЩАЯ ФУ́НКЦИЯ, строго возрастающая функция,— монотонная функция, значения которой увеличиваются при увеличении значений её аргумента. Напр., $2x+1$, x^3, 2^x, $\ln x$, $\arcsin x$ являются В. ф.



Функция $f(x)$ наз. возрастающей на множестве E, если $f(x_1)<f(x_2)$ для любых x_1, x_2 из E таких, что $x_1<x_2$ (график В. ф. см. на рис.); если выполняется неравенство $f(x_1)\leqslant f(x_2)$, то функция $f(x)$ наз. неубывающей. Предполагается, что множество E принадлежит области определения функции $f(x)$, обычно E — это отрезок, интервал или полуинтервал. Если функция является возрастающей на множестве E, то говорят также, что эта функция возрастает на E. Напр., x^2 возрастает на луче $x\geqslant 0$; $\sin x$ возрастает на отрезке $-\pi/2\leqslant x<\pi/2$, $\operatorname{tg}x$ возрастает на интервале $-\pi/2<x<\pi/2$.

Функция $f(x)$ наз. возрастающей в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, в к-рой $f(x)$ является возрастающей. Для того чтобы функция была возрастающей на интервале, необходимо и достаточно, чтобы она была возрастающей в каждой точке этого интервала.

Дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ является возрастающей на этом интервале тогда и только тогда, когда $f'(x)\geqslant 0$ на (a, b) и $f'(x)\not\equiv 0$ на каждом интервале, входящем в (a, b).

ВОЛНОВО́Е УРАВНЕ́НИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными, описывающее процесс распространения возмущений в некоторой среде. В случае

малых возмущений и однородной изотропной среды В. у. имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где x, y, z — пространственные переменные, t — время, $u=u(x, y, z)$ — искомая функция, характеризующая возмущение в точке (x, y, z) в момент t, a — скорость распространения возмущения. В. у. является одним из основных уравнений математич. физики и широко используется в приложениях. Если u зависит только от двух (одной) пространственных переменных, то В. у. упрощается и наз. двумерным (одномерным). В. у. допускает решение в виде «расходящейся сферич. волны»:

$$u=\frac{f(t-r/a)}{r},$$

где f — произвольная функция, а $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Особый интерес представляет т. н. элементарное решение (элементарная волна):

$$u=\frac{\delta(t-r/a)}{r}$$

(где δ — дельта-функция), дающее процесс распространения возмущения, произведённого мгновенным точечным источником (действовавшим в начале координат при $t=0$). Образно говоря, элементарная волна представляет собой «бесконечный всплеск» на окружности $r=at$, удаляющейся от начала координат со скоростью a с постепенным уменьшением интенсивности. При помощи наложения элементарных волн можно описать процесс распространения произвольного возмущения.

Малые колебания струны описываются одномерным В. у.:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Ж. Д' Аламбер (1747) предложил метод решения этого В. у. в виде наложения прямой и обратной волн: $u=f(x-at)+g(x+at)$, а Л. Эйлер (1748) установил, что функции f и g определяются заданием т. н. начальных условий.

ВОЛЬТЕ́РРЫ ОПЕРА́ТОР — компактный оператор, действующий в банаховом пространстве, спектр которого состоит из нуля. Напр., линейный интегральный оператор вида

$$V_\varphi=\int_a^x K(x, y)\,\varphi(y)\,dy,$$

где $K(x, y)$ — непрерывная в квадрате $a\leqslant x, y\leqslant b$ функция, есть В. о. в пространстве $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций.

Назван по имени В. Вольтерры, изучавшего соответствующие такому оператору интегральные *Вольтерры уравнения*.

ВОЛЬТЕ́РРЫ УРАВНЕ́НИЕ — интегральное уравнение вида

$$\varphi(s)-\lambda\int_a^s K(s, t)\,\varphi(t)\,dt=f(s),\ a\leqslant s\leqslant b;$$

является частным случаем *Фредгольма уравнения*. К В. у. приводит ряд физич. задач, в частности исследование рассеяния рентгеновских лучей. Если $f(s)$ непрерывна на отрезке $a\leqslant s\leqslant b$, а $K(s, t)$ непрерывна в треугольнике $a\leqslant s\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant s$, то при любом (действительном или комплексном) значении λ В. у. имеет единственное решение, к-рое представляется абсолютно и равномерно сходящимся рядом

$$\varphi(s)=a_0(s)+\lambda a_1(s)+\lambda^2 a_2(s)+\ldots+\lambda^n a_n(s)+\ldots,$$

где

$$a_0(s)=f(s),\ a_k(s)=\int_a^s K(s, t)\,a_{k-1}(t)\,dt,\ k=1, 2, \ldots$$

Соответствующее однородное В. у.

$$\varphi(s)-\lambda\int_a^s K(s, t)\,\varphi(t)\,dt=0$$

при любом λ имеет только тривиальное решение $\varphi(s)\equiv 0$.

К В. у. приводятся при нек-рых дополнительных предположениях уравнения вида

$$\int_a^s K(s, t)\,\varphi(t)\,dt=f(s)$$

(такие уравнения часто наз. В. у. 1-го рода, а уравнения, рассмотренные выше,— В. у. 2-го рода). Если $f'(s)$ непрерывна на $a\leqslant s\leqslant b$, $K(s, t)$ и $K'_s(s, t)$ непрерывны в области $a\leqslant s\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant s$ и $K(s, s)$ не обращается в нуль, то, продифференцировав обе части уравнения по s и разделив на $K(s, s)$, приходят к В. у.

$$\varphi(s)+\int_a^s K^*(s, t)\,\varphi(t)\,dt=f^*(s),$$

где $K^*(s, t)=K'_s(s, t)/K(s, s)$, $f^*(s)=f'(s)/K(s, s)$. Если $K(s, s)\equiv 0$, но $K'_s(s, s)\neq 0$, то в предположении непрерывности вторых производных к В. у. приводит двукратное дифференцирование по s.

В. у. рассмотрено В. Вольтеррой (1896).

ВОРОНО́ГО МЕ́ТОД СУММИ́РОВАНИЯ — один из методов *суммирования*; введён Г. Ф. Вороным (1902).

ВОРОНО́ГО О́БЛАСТЬ — область, образующая нормальное разбиение пространства (см. *Многогранник*). Понятие введено Г. Ф. Вороным (1908) в связи с задачей о параллелоэдрах.

ВПИ́САННАЯ ФИГУ́РА — фигура, расположенная определённым образом относительно другой. Напр., вписанный в кривую многоугольник — многоугольник, к-рый расположен относительно кривой (вписан в кривую) таким образом, что все его вершины лежат на этой кривой (рис. 1); вписанная в многоугольник окружность — окружность, к-рая касается всех его сторон (рис. 2); вписанный в окружность угол — угол, вершина к-рого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

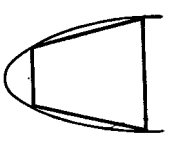


Рис. 1.

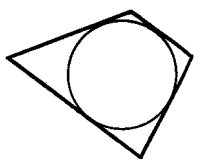


Рис. 2.

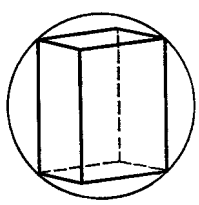


Рис. 3.

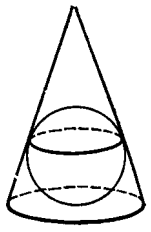


Рис. 4.

Фигура, в к-рую вписана другая, наз. описанной фигурой. Напр., на рис. 2 четырёхугольник описан вокруг окружности.

Аналогично определяются вписанные и описанные фигуры в пространстве. Напр., все вершины вписанного в сферу параллелепипеда лежат на сфере (рис. 3); сфера, вписанная в конус, касается его основания и всех его образующих (рис. 4).

ВПОЛНЕ́ НЕПРЕРЫ́ВНЫЙ ОПЕРА́ТОР — непрерывный *компактный оператор*.

ВПОЛНЕ́ ОГРАНИ́ЧЕННОЕ МНО́ЖЕСТВО, предкомпактное множество,— множество A в метрическом пространстве X, обладающее свойством: для каждого $\varepsilon>0$ существует конечное число точек $x_i\in X$ таких, что каждая точка из A отстоит от одной из них на расстояние, меньшее ε. В. о. м. является ограниченным множеством, обратное верно не всегда. Вполне ограниченное полное пространство является компактным пространством.

ВПОЛНЕ́ ПРИВОДИ́МЫЙ МО́ДУЛЬ — модуль, разлагающийся в прямую сумму неприводимых подмодулей (см. *Неприводимый модуль*).

ВПОЛНЕ́ РЕГУЛЯ́РНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — топологическое пространство, удовлетворяющее условию $T_{3^1/_2}$ (см. *Отделимости аксиомы*).

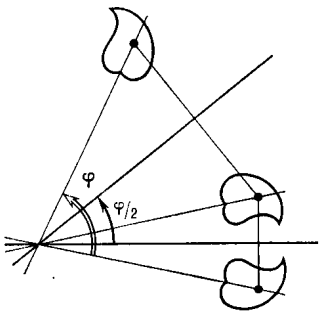
ВПОЛНЕ́ УПОРЯ́ДОЧЕННОЕ МНО́ЖЕСТВО — линейно упорядоченное множество M, в котором имеется наименьший элемент (н у л ь В.у.м.) и для всякого элемента (не являющегося наибольшим в M) существует элемент, непосредственно следующий за ним. Последнее условие равносильно тому, что всякое подмножество множества M имеет наименьший элемент.

Понятие «В.у.м.» было введено Г. Кантором в 1883. Примером В.у.м. служит естественным образом упорядоченное множество натуральных чисел. С другой стороны, отрезок действительных чисел [0, 1] с естественным порядком не является В.у.м. Любое подмножество В.у.м. само вполне упорядоченное.

Принимая в числе аксиом теории множеств *выбора аксиому*, можно доказать, что во всяком непустом множестве можно установить отношение порядка, превращающее его в В.у.м. (т. е. всякое непустое множество можно вполне упорядочить). Эта теорема, наз. т е о р е м о й Ц е р м е л о, на самом деле эквивалентна аксиоме выбора.

ВПОЛНЕ́ ХАРАКТЕРИСТИ́ЧЕСКАЯ ПОДГРУ́ППА — см. *Подгруппа*.

ВРАЩЕ́НИЕ, п о в о р о т,— частный случай движения, при котором, по крайней мере, одна точка пространства остаётся неподвижной. При В. плоскости неподвижная точка наз. ц е н т р о м В., при В. пространства неподвижная прямая — о с ь ю В. Вращение евклидова пространства наз. с о б с т в е н н ы м (1-го рода) или н е с о б с т в е н н ы м (2-го рода) в зависимости от того, сохраняет оно или не сохраняет ориентацию пространства.



На плоскости собственное В. выражается в декартовых прямоугольных координатах (x, y) при помощи формул (начало координат в центре В.):

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi,$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi,$$

где φ — угол поворота. Собственное В. на угол φ может быть представлено как произведение двух осевых симметрий с осями, пересекающимися под углом $\varphi/2$ (рис.). Несобственное В. на плоскости выражается в декартовых прямоугольных координатах (x, y) при помощи формул (начало координат в центре В.):

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$
$$y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi,$$

где φ — угол поворота. Несобственное В. на плоскости может быть представлено как произведение собственного В. на осевую симметрию.

Отличное от сдвига и зеркального отражения движение пространства можно получить путём В. вокруг нек-рой оси и последующего сдвига вдоль этой оси (в и н т о в о е д в и ж е н и е).

ВРАЩЕ́НИЙ МЕ́ТОД — метод решения таких задач линейной алгебры, как полная проблема собственных значений эрмитовой матрицы, решение систем линейных алгебраических уравнений и др.

В. м. основан на последовательном преобразовании исходной матрицы к более простому виду путём умножения её с одной или с двух сторон на матрицы плоского вращения. Для заданных индексов p и q, где $p \neq q$, матрица плоского вращения U отличается от единичной лишь элементами

$$u_{qq} = u_{pp} = \cos\varphi,\ u_{pq} = \sin\varphi,\ u_{qp} = -\sin\varphi.$$

Выбор p, q, φ подчиняется требованиям задачи.

1) В. м. (м е т о д Я к о б и) для решения полной проблемы собственных значений эрмитовой матрицы основан на подобном преобразовании эрмитовой матрицы к диагональному виду с помощью последовательности плоских вращений. В. м.— итерационный метод, он имеет простую вычислительную схему и всегда сходится, причём скорость сходимости — асимптотически квадратичная. Наличие кратных и близких собственных значений у матрицы не вызывает осложнений. В. м. позволяет вычислить собственные значения как с нахождением собственных векторов, так и без них. Система собственных векторов, вычисленных по В. м., ортонормирована.

В современном виде это один из наиболее развитых и эффективных по реализации на ЭВМ методов решения полной проблемы собственных значений матрицы.

Классический В. м. состоит в построении последовательности матриц $A_0, A_1, A_2, \ldots$, где $A_0 = A$ — исходная матрица, $A_k = U_k^* A_{k-1} U_k$, U_k — матрица плоского вращения, аннулирующая максимальный по модулю внедиагональный элемент матрицы A_{k-1}. При этом если

$$A_k = \|a_{ij}^{(k)}\|,\ \left|a_{pq}^{(k-1)}\right| = \max_{i \neq j}\left|a_{ij}^{(k-1)}\right| \text{ и } U_k = \|u_{ij}^{(k)}\|,$$

то в действительном случае, когда A — симметрическая матрица,

$$\left.\begin{aligned} u_{pp}^{(k)} = u_{qq}^{(k)} = \cos\varphi;\ u_{pq}^{(k)} = -u_{qp}^{(k)} = \sin\varphi, \\ \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{pq}^{(k-1)}}{a_{pp}^{(k-1)} - a_{qq}^{(k-1)}},\ |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{4}. \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

В комплексном случае соотношения (*) незначительно усложняются.

Последовательность матриц A_k сходится к диагональной матрице A, скорость сходимости — асимптотически квадратичная. Диагональные элементы матрицы A_k являются приближёнными собственными значениями A, а столбцы матрицы $U^{(k)} = U_1 U_2 \ldots U_k$ — приближёнными собственными векторами.

Реализация описанного варианта В. м. требует выбора максимального по модулю внедиагонального элемента матрицы на каждом шаге. Для выполнения этой операции на ЭВМ требуется значительный объём вычислительной работы.

Существуют другие варианты В. м., более эффективные в этом отношении: циклический В. м., В. м. с барьером, В. м. с выбором оптимального элемента.

В ц и к л и ч е с к о м В. м. пары индексов (p, q) аннулирующего элемента пробегают циклически все наддиагональные позиции. Недостатком этого процесса является возможность выполнения большого числа неэффективных вращений, аннулирующих малые внедиагональные элементы.

Этот недостаток частично устраняется в б а р ь е р н о м В. м., в к-ром вводится монотонно убывающая к нулю последовательность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, называемых барьерами, и при циклич. просмотре индексов (p, q) аннулируются лишь те внедиагональные элементы, к-рые по модулю не меньше α_1. После того, как все внедиагональные элементы стали меньше α_1, барьер α_1 заменяется на барьер α_2 и процесс продолжается. Практич. использование этого варианта В. м. встречает ряд трудностей, связанных с выбором оптимального барьера.

Наиболее эффективным для использования в вычислительной практике является В. м. с в ы б о р о м о п т и м а л ь н о г о э л е м е н т а. В этом методе пары индексов (p, q) соответствуют почти максимальному элементу и выбираются так, что p — номер строки с максимальной евклидовой длиной, q — номер столбца максимального по модулю внедиагонального элемента p-й строки. Поскольку на каждом шаге процесса строки матрицы, за исключением p-й и q-й, не меняют длины, то выбор индексов (p, q) существенно не увеличивает общего объёма вычислений. Вся теория классич. В. м. полностью переносится на описанную модификацию.

Расчётные формулы В. м., реализующие вычисление (*), обеспечивают сходимость процесса В. м. в реальных

условиях машинной арифметики и высокую точность как собственных значений, так и собственных векторов.

2) В. м. для решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax=b$ заключается в построении разложения $LAS=G$, где G — матрица простого вида, L и S — произведения матриц плоского вращения или матриц перестановок. Решение системы (в том числе и в смысле метода наименьших квадратов) сводится к аналогичной задаче $Gu=l$, где $l=Lb$, и вычислению вектора $x=Su$.

Метод Гивенса — метод преобразования $(m\times n)$-матрицы A в правую треугольную при $m\geqslant n$ или правую трапециевидную при $m<n$ матрицу. Для этого A умножается слева на последовательность матриц вращения, осуществляющих исключение поддиагональных элементов в порядке возрастания строчного, затем столбцового индексов.

Нормализованный В. м.— метод, приводящий A к такому же виду с использованием перестановок столбцов. Сначала на место первого столбца ставится столбец наибольшей длины, в нём исключаются поддиагональные элементы, затем остальные столбцы переставляются так, чтобы на месте первого столбца находился столбец, имеющий наибольшую длину, без учёта элементов первой строки, в нём исключаются поддиагональные элементы и т. д.

Приведение к двухдиагональному виду. Вначале с помощью умножений слева на подходящие матрицы вращения в первом столбце исключаются все элементы, кроме первого, затем посредством умножений справа на матрицы вращения в первой строке исключаются все элементы, кроме первых двух, и т. д. В итоге A преобразуется в двухдиагональную матрицу.

При программной реализации матрицы плоского вращения задаются не двумя, а одним параметром, запоминаемым на месте исключённого элемента. Общие вычислительные затраты определяются построением разложения. В методе Гивенса при $m=n$ требуется $2n^3$ арифметич. операций. Это число может быть уменьшено при использовании быстрых масштабированных вращений (требующих, однако, нек-рой дополнительной памяти).

Применение указанных разложений матрицы связано с возможностью устойчивой их реализации на базе В. м.

Г. Д. Ким, Е. Е. Тыртышников.

ВРАЩЕ́НИЯ ПОВЕ́РХНОСТЬ — поверхность, образованная вращением плоской линии вокруг прямой (оси поверхности вращения), расположенной в плоскости этой линии. Примерами В. п. могут служить сфера (к-рую можно рассматривать как поверхность, образованную вращением полуокружности вокруг её диаметра), прямой круговой конус, круглый цилиндр. Линии пересечений В. п. с плоскостями, проходящими через её ось, наз. меридианами поверхности вращения, с плоскостями, перпендикулярными оси,— параллелями поверхности вращения. Пусть по оси В. п. направлена ось Oz прямоугольной системы координат $Oxyz$, тогда уравнение В. п. можно записать в виде

$$F(x^2+y^2,\ z)=0.$$

Уравнение поверхности второго порядка, являющейся В. п., записывается в виде

$$A(x^2+y^2)+az^2+2bz+c=0.$$

Так, уравнение $z=x^2+y^2$ определяет В. п., наз. параболоидом вращения, к-рая получается вращением около оси Oz параболы $z=x^2$, $y=0$. В. п., определяемые уравнениями $x^2+y^2-z^2=1$ и $x^2+y^2-z^2=-1$, наз. соответственно однополостным и двуполостным гиперболоидами вращения и получаются вращением вокруг оси Oz равнобочной гиперболы, лежащей в плоскости $y=0$ и имеющей ось Ox соответственно своей действительной и мнимой осью. Эллипсоид вращения получается вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$, лежащего в плоскости xOz, вокруг его малой оси.

В. п. можно задать параметрич. уравнениями

$$x=f(u)\cos v,\ y=f(u)\sin v,\ z=u,$$

где $f(u)$ — функция, определяющая форму меридиана, v — угол поворота плоскости меридиана.

ВРЕМЕ́ННАЯ СЛО́ЖНОСТЬ АЛГОРИ́ТМА — см. *Алгоритмов анализ.*

ВРЕМЕ́ННО́Й РЯД — то же, что *случайная последовательность.*

ВРОНСКИА́Н — функциональный определитель, составленный из n функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ и их производных до $n-1$ порядка включительно:

$$W(x)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Обращение В. в нуль $[W(x)=0]$ является необходимым, а при нек-рых дополнительных предположениях и достаточным условием линейной зависимости между данными n функциями, дифференцируемыми $n-1$ раз. На этом основано применение В. в теории линейных дифференциальных уравнений.

Понятие «В.» введено Ю. Вроньским (1812).

ВСЕО́БЩНОСТИ КВА́НТОР — логическая операция, служащая для образования новых высказываний и высказывательных форм из данных с помощью оборота «для всех x». Обозначение: $\forall x$ или $(\forall x)$. См. *Квантор.*

ВСТРЕ́ЧНАЯ ПРОГО́НКА — см. *Прогонки метод.*

ВСЮ́ДУ ПЛО́ТНОЕ МНО́ЖЕСТВО — множество, замыкание которого — всё пространство.

ВТОРА́Я АКСИО́МА СЧЁТНОСТИ — см. *Счётности аксиома.*

ВТОРА́Я КВАДРАТИ́ЧНАЯ ФО́РМА поверхности — см. *Дифференциальная геометрия, Поверхностей теория.*

ВТОРА́Я КРАЕВА́Я ЗАДА́ЧА — то же, что *Неймана задача*; см. также *Краевая задача.*

ВХОДНО́Й АЛФАВИ́Т — внешние воздействия на *автомат.*

ВЫБО́РА АКСИО́МА, аксиома Цермело,— одна из аксиом аксиоматической теории множеств. Пусть дано множество $\mathfrak{M}$, элементами к-рого являются попарно непересекающиеся непустые множества M_α; тогда существует множество M, каждый элемент к-рого есть элемент m_α нек-рого множества M_α и к-рое пересекается с каждым множеством M_α лишь по одному элементу m_α. Другими словами, В. а. постулирует существование множества M, состоящего из элементов m_α, «выбранных по одному» из каждого множества $M_\alpha\in\mathfrak{M}$. В. а. была явно сформулирована Э. Цермело (1904) и вызвала многочисленные исследования о фактич. месте, занимаемом ею в логич. построении теории множеств. Это объясняется, в частности, тем, что из В. а. вытекают следствия, противоречащие интуиции «здравого смысла». Напр., из В. а. возникает возможность разбиения шара на конечное число частей, из к-рых движениями в пространстве можно составить два таких же шара.

ВЫБО́РА ТЕОРЕ́МЫ — группа теорем *комбинаторного анализа*, связанных с выбором элементов из множества.

ВЫБО́РКА — понятие математической статистики, объединяющее результаты каких-либо однородных наблюдений. В. в широком смысле наз. конечная совокупность результатов наблюдений $X_1, \dots, X_n$, представляющих собой независимые одинаково распределённые случайные величины. Так определённая В. наз. случайной, а её конкретные значения в каждом отдельном случае $x_1, \dots, x_n$ — простой выборкой. В узком смысле понятие В. связано с теорией статистич. *выборочного метода* и предполагает наличие нек-рой конечной *генеральной совокупности*, из к-рой эта В. извлекается (рассматриваются,

напр., повторные и бесповторные В.). См. также *Эмпирическое распределение.*

ВЫБОРОЧНАЯ ДИСПЕ́РСИЯ — дисперсия *эмпирического распределения.* См. также *Выборочный метод, Математическая статистика, Несмещённая оценка, Состоятельная оценка, Распределение.*

ВЫБОРОЧНАЯ МЕДИА́НА — медиана *эмпирического распределения.* См. также *Вариационный ряд, Медиана, Статистическая оценка.*

ВЫБОРОЧНАЯ ФУ́НКЦИЯ, реализация, траектория,— функция $X_t=X_t(\omega)$ аргумента t, однозначно соответствующая каждому наблюдению случайного процесса X_t, $t\in T$; здесь $\{\omega\}=\Omega$ — множество элементарных событий. Случайный процесс характеризуется вероятностной мерой в пространстве В. ф.

ВЫБОРОЧНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — множество всех элементарных событий, связанных с некоторым экспериментом, причём любой неразложимый исход эксперимента представляется одной и только одной точкой В. п.

ВЫБОРОЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — то же, что *эмпирическое распределение.*

ВЫБОРОЧНОЕ СРЕ́ДНЕЕ — математическое ожидание *эмпирического распределения.* См. также *Выборочный метод, Многомерный статистический анализ, Математическая статистика, Распределение, Состоятельная оценка.*

ВЫБОРОЧНОЕ СРЕ́ДНЕЕ КВАДРАТИ́ЧНОЕ ОТКЛОНЕ́НИЕ — см. *Математическая статистика.*

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕ́ТОД — статистический метод исследования общих свойств совокупности каких-либо объектов на основе изучения свойств лишь части этих объектов, взятых на выборку. Математич. теория В. м. опирается на два важных раздела математич. статистики — теорию выбора из конечной совокупности и теорию выбора из бесконечной совокупности. Основное отличие В. м. для конечной и бесконечной совокупностей заключается в том, что в первом случае В. м. применяется, как правило, к объектам неслучайной, детерминированной природы (напр., число дефектных изделий в данной партии готовой продукции не является случайной величиной, это число — неизвестная постоянная, к-рую и надлежит оценить по выборочным данным). Во втором случае В. м. обычно применяется для изучения свойств случайных объектов (напр., для исследования свойств непрерывно распределённых случайных ошибок измерений, каждое из к-рых теоретически может быть истолковано как реализация одного из бесконечного множества возможных результатов).

Выбор из конечной совокупности. Выбор из конечной совокупности и его теория являются основой статистич. контроля качества; часто применяются в социологич. исследованиях. Согласно теории вероятностей, выборка будет правильно отражать свойства всей совокупности, если выбор производится случайно, т. е. так, что любая из возможных выборок заданного объёма n из совокупности объёма N [число таких выборок равно $N!/n!\,(N-n)!$] имеет одинаковую вероятность быть фактически выбранной.

На практике наиболее часто используется выбор без возвращения (бесповторная выборка), когда каждый отобранный объект перед выбором следующих объектов в исследуемую совокупность не возвращается (такой выбор применяется, напр., для определения выигрышных лотерейных билетов, при статистич. контроле качества, а также при демографич. исследованиях). Выбор с возвращением (выборка с повторением) рассматривается обычно лишь в теоретич. исследованиях (примером выбора с возвращением является регистрация числа частиц, коснувшихся в течение данного времени стенок сосуда, внутри к-рого совершается броуновское движение). Если $n\ll N$, то повторный и бесповторный выборы дают практически эквивалентные результаты.

Свойства совокупности, исследуемые В. м., могут быть качественными и количественными. В первом случае задача выборочного обследования заключается в определении количества M объектов совокупности, обладающих к.-л. признаками (напр., при статистич. контроле часто интересуются количеством M дефектных изделий в партии объёма N). Оценкой для M служит отношение mN/n, где m — число объектов с данным признаком в выборке объёма n. В случае количественного признака имеют дело с определением среднего значения совокупности $\bar{x}=(x_1+x_2+\ldots+x_N)/N$. Оценкой для $\bar{x}$ является выборочное среднее

$$\overline{X}=(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — те значения из исследуемой совокупности $x_1, x_2, \ldots, x_N$, к-рые принадлежат выборке. С математич. точки зрения первый случай — частная разновидность второго, к-рый имеет место, когда M величин x_i равны 1, а остальные $N-M$ равны 0; в этой ситуации $\bar{x}=M/N$ и $\overline{X}=m/n$.

В математич. теории В. м. оценка среднего значения занимает центральное место потому, что она служит основой количественного описания изменчивости признака внутри совокупности, т. к. за характеристику изменчивости обычно принимают выборочную дисперсию

$$D^2=\frac{(x_1-\bar{x})^2+\ldots+(x_N-\bar{x})^2}{N},$$

представляющую собой среднее значение квадратов отклонений x_i от их среднего значения $\bar{x}$. В случае изучения качественного признака

$$D^2=M\,(N-M)/N^2.$$

О точности оценок m/n и $\overline{X}$ судят по их дисперсиям

$$D^2_{m/n}=\mathsf{E}\left(\frac{m}{n}-\frac{M}{N}\right)^2 \text{ и } D^2_{\overline{X}}=\mathsf{E}\,(\overline{X}-\bar{x})^2,$$

к-рые в терминах дисперсии конечной совокупности D^2 выражаются в виде отношений D^2/n (в случае выборок с повторением) и $D^2(N-n)/n\,(N-1)$ (в случае бесповторных выборок). Т. к. во многих практически интересных задачах случайные величины m/n и $\overline{X}$ при $n\geqslant 30$ приближённо подчиняются нормальному распределению, то отклонения m/n от M/N и $\overline{X}$ от $\bar{x}$, превышающие по абсолютной величине $2D_{m/n}$ и $2D_{\overline{X}}$ соответственно, могут при $n\geqslant 30$ осуществиться в среднем приблизительно в одном случае из двадцати.

Более полную информацию о распределении количественного признака в данной совокупности можно получить с помощью *эмпирического распределения* этого признака в выборке.

Выбор из бесконечной совокупности. В математич. статистике результаты к.-л. однородных наблюдений (чаще всего независимых) принято называть *выборкой* даже в том случае, когда эти результаты не соответствуют понятию выборки с повторениями или без повторений из конечной совокупности. Напр., результаты измерений углов на местности, подверженные независимым непрерывно распределённым случайным ошибкам, часто наз. выборкой из бесконечной совокупности. Предполагается, что принципиально можно осуществить любое число таких наблюдений. Полученные фактич. результаты считают выборкой из бесконечного множества возможных результатов, наз. *генеральной совокупностью.*

Понятие генеральной совокупности не является логически безупречным и необходимым. Для решения практич. задач нужна не сама бесконечная генеральная совокупность, а лишь те или иные характеристики, к-рые ей ставятся в соответствие. Эти характеристики с точки зрения теории вероятностей являются числовыми или функциональными характеристиками нек-рого распределения вероятностей, а элементы выборки — случайными величинами, подчиняющимися этому распределению. Такое истолкование позволяет распространить на выборочные оценки общую теорию *статистических оценок.* По этой причине, напр., в вероятностной теории обработки наблю-

дений понятие бесконечной генеральной совокупности заменяется понятием распределения вероятностей, содержащего неизвестные параметры. Результаты наблюдений трактуются как экспериментально наблюдаемые значения случайных величин, подчиняющихся этому распределению. Цель обработки — вычисление по результатам наблюдений в том или ином смысле оптимальных статистич. оценок для неизвестных параметров распределения.

Выше речь шла о выборочном обследовании одной совокупности к.-л. объектов. Однако практич. применение В. м. часто осуществляется во многих однородных совокупностях (напр., при оценке доли бракованных изделий в нескольких партиях готовой продукции). В этой ситуации объектом изучения является не одно число M, а несколько неизвестных чисел $M_1, M_2, \ldots$ Пусть, напр., все обследуемые партии готовой продукции содержат N изделий, причём $M_1, M_2, \ldots$ — количества дефектных изделий в этих партиях, а $m_1, m_2, \ldots$ — соответствующие количества дефектных изделий, обнаруженных в выборках объёма n. Согласно условию т. н. бездефектной приёмки, партия с номером i передаётся потребителю, если $m_i=0$, в противном случае она бракуется. Предположим, что контроль изделий сопряжён с их уничтожением, и поэтому потребитель либо получает партию объёма $R_i=0$ (при $m_i>0$), либо партию объёма $R_i=N-n$ с количеством дефектных изделий $D_i=M_i$ (при $m_i=0$), причём значения $R_1, R_2, \ldots$ (а, значит, и их сумма) известны, а значение $D_1+D_2+\ldots$ неизвестно. Отношение $(D_1+D_2+\ldots)/(R_1+R_2+\ldots)$ называют долей пропущенного брака, а его математич. ожидание q — средней долей пропущенного брака. Задача математич. статистики заключается в оценке q по значениям $R_1, R_2, \ldots$, зафиксированным в результате применения В. м. Если значения $M_1, M_2, \ldots$ можно трактовать как реализации независимых одинаково распределённых случайных величин с известным законом распределения $\mathrm{P}\{M_i=r\}=p_r$, то, согласно формуле Бейеса, статистич. оценка среднего числа пропущенных дефектных изделий в принятых партиях выражается формулой

$$\tilde{D}=\mathrm{E}\{M\,|_m=0\}=\left(\sum\nolimits_{r=1}^{N-n} r\,\frac{C_{N-r}^{n}}{C_N^n}\,p_r\right)\Big/\mathrm{P}\{m=0\},$$

причём

$$\frac{\tilde{D}}{n}\leqslant\frac{(N-n)\,\mathrm{P}\{m-1\}}{\mathrm{P}\{m=0\}},$$

где

$$\mathrm{P}\{m=k\}=\sum\nolimits_{r=0}^{N-n}\frac{C_r^k C_{N-r}^n}{C_N^n}\,p_r,\quad k=0,\ 1,\ \ldots$$

Поэтому оценка

$$\tilde{q}=\frac{\tilde{D}}{(N-n)}$$

средней доли пропущенного брака в принятых партиях удовлетворяет неравенству

$$\tilde{q}\leqslant\mathrm{P}\{m=1\}/(n\mathrm{P}\{m=0\})\approx s_1/ns_0,$$

где s_0 — число принятых партий, а s_1 — количество тех забракованных партий, в выборках из к-рых обнаружено ровно одно дефектное изделие.

● Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике (Общая часть), М., 1955, гл. 5; Беляев Ю. К., Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975; Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

Л. Н. Большев.

ВЫБОРОЧНЫЙ МОМЕ́НТ — момент *эмпирического распределения.*

ВЫВОД логический — рассуждение с целью установления истинности какого-либо утверждения; это рассуждение опирается при этом на аксиомы данной теории и ряд допущений или гипотез и состоит в последовательном переходе от этих аксиом и гипотез к новым, логически связанным с предыдущими предложениями. В ходе такого рассуждения возникает цепочка последовательно выдвигаемых предложений, одни из к-рых принимаются в качестве аксиом или допущений, а каждое из остальных логически следует из нек-рых ранее сформулированных в данном выводе предложений; последним в выводе должно быть предложение, истинность к-рого обосновывается этим рассуждением. Часто логич. В. называют именно эту цепочку логически взаимосвязанных предложений.

Переход от аксиом и допущений путём логич. рассуждения к новым утверждениям играет важную роль при аксиоматич. построении математич. теорий. Исследованием логич. В. в аксиоматич. теориях занимается математич. логика. При этом аксиоматич. теории представляются в виде *формальных систем*, или формальных теорий, в к-рых все предложения, в том числе и аксиомы, записываются как формулы нек-рого *формализованного языка*, а все способы логич. рассуждения сведены к небольшому числу чисто формальных *вывода правил*. Выводом или формальным выводом из множества гипотез Г в формальной теории $\mathscr{T}$ наз. конечная последовательность формул этой теории, каждая из к-рых либо есть аксиома, либо принадлежит Г, либо может быть получена по одному из правил вывода из предшествующих ей формул. Вывод из Г наз. выводом формулы A, если A совпадает с последней формулой в этом выводе. Говорят, что формула A выводима из гипотез Г в формальной теории $\mathscr{T}$, если существует формальный вывод этой формулы из Г в $\mathscr{T}$. Вместо «формула A выводима из гипотез Г в теории $\mathscr{T}$» обычно пишут $\Gamma\vdash_{\mathscr{T}}A$, или просто $\Gamma\vdash A$, если из контекста ясно, о какой формальной теории идёт речь. Если множество гипотез Г пусто, то вывод наз. доказательством, а всякая формула, выводимая из пустого множества гипотез, наз. *теоремой* данной теории.

Для т. н. теорий 1-го порядка, основанных на классич. *предикатов исчислении*, понятие формального вывода является адекватным уточнением интуитивного понятия логич. В.: в силу *Гёделя теоремы о полноте* для любой формулы, к-рая логически следует из аксиом данной теории и нек-рых гипотез Г, существует формальный вывод такой формулы из Г в данной теории. Это обстоятельство позволило получить ряд важных результатов о логич. В. Если, напр., аксиомы и гипотезы образуют *разрешимое множество* среди всех предположений теории, то понятие В. становится разрешимым, т. е. существует алгоритм, к-рый позволяет проверить, является ли В. произвольная данная цепочка формул. Если формула A выводима из множества гипотез Г, то существует конечное подмножество гипотез из Г, из к-рого выводима A.

ВЫВОДА ПРА́ВИЛО, дедуктивное правило,— один из основных элементов задания *исчислений*. В общем случае В. п.— это операция, к-рая множество выражений в языке данного исчисления, наз. посылками, преобразует в выражение этого же языка, наз. заключением. Обычно рассматриваются В. п., к-рые каждый раз применяются лишь к конечному числу посылок, причём это число для данного правила неизменно. Более того, в исчислениях используются лишь В. п., к-рые представляют собой алгоритмы, применимые к посылкам и перерабатывающие их в заключения, причём можно алгоритмически распознать, получается ли данное выражение P из данных посылок $P_1, \ldots, P_n$ за одно применение данного правила. Очень часто В. п. формулируются с использованием метапеременных, т. е. переменных, значениями к-рых могут быть (все или нек-рые) выражения данного исчисления. Напр., правило модус поненс, часто используемое в логич. и логико-математич. исчислениях, записывается так: $\dfrac{A,\ A\supset B}{B}$, где A, B — переменные для формул, $\supset$ — знак импликации. Это правило позволяет из посылок (формул) A и $A\supset B$ получить заключение — формулу B.

В логич. и логико-математич. исчислениях В. п. являются аналогом элементарных логич. шагов дедуктивного рассуждения. Они позволяют из истинных посылок получать лишь истинные заключения. На этом основано ис-

пользование В. п. для формализации логических умозаключений.

ВЫДЕЛЕ́НИЯ АКСИО́МА — см. *Аксиоматическая теория множеств.*

ВЫ́ИГРЫША ФУ́НКЦИЯ — см. *Бескоалиционная игра, Позиционная игра.*

ВЫПРЯМЛЕННОЙ ДИАГРА́ММЫ МЕ́ТОД — один из *непараметрических методов* математической статистики. См. также *Вероятностная бумага.*

ВЫПУКЛАЯ КРИВА́Я — граница (или её связная часть) плоской *выпуклой области.*

ВЫ́ПУКЛАЯ О́БЛАСТЬ — *выпуклое множество*, содержащее внутренние точки.

ВЫПУКЛАЯ ОБОЛО́ЧКА множества M — наименьшее *выпуклое множество*, содержащее M, то есть пересечение всех содержащих M выпуклых множеств.

ВЫПУКЛАЯ ПОВЕ́РХНОСТЬ — область (связное открытое множество) на границе *выпуклого тела.* Вся граница выпуклого тела наз. полной В. п. Если тело конечно, то полная В. п. наз. замкнутой. Если тело бесконечно, то полная В. п. наз. бесконечной; в этом случае она гомеоморфна либо плоскости, либо круглому цилиндру.

ВЫПУКЛАЯ ФИГУ́РА — замыкание *выпуклого множества.*

ВЫПУКЛАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция, графиком которой является *выпуклая кривая.* В. ф. может быть выпуклой вверх (вогнутой вниз, рис. 1) или выпуклой вниз (вогнутой вверх, рис. 2). Иногда выпуклой называют только

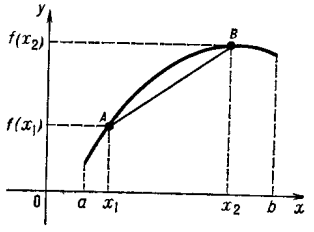


Рис. 1.

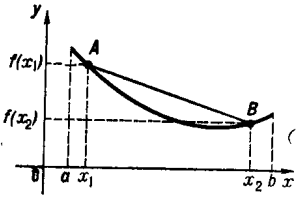


Рис. 2.

функцию, выпуклую вверх, а функцию, выпуклую вниз,— вогнутой функцией.

Функция $f(x)$ наз. выпуклой вверх (вниз) на отрезке $[a, b]$, если каждая дуга графика этой функции лежит не ниже (не выше) стягивающей её хорды. Подробнее это означает следующее. Пусть $y=l(x)$ — уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$. Если $f(x)\geqslant l(x)$ ($f(x)\leqslant l(x)$) при $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, где x_1 и x_2— любые точки отрезка $[a, b]$, то $f(x)$ выпуклая вверх (вниз). При этом если $f(x)>l(x)$ ($f(x)<l(x)$) при $x_1<x<x_2$, то $f(x)$ наз. строго выпуклой вверх (вниз).

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$ и дважды дифференцируемая на интервале (a, b), является выпуклой вверх (вниз) тогда и только тогда, когда $f''(x)\leqslant 0$ ($f''(x)\geqslant 0$) на этом интервале. Для строго выпуклой добавляется условие: $f(x)\not\equiv 0$ на каждом интервале, входящем в (a, b).

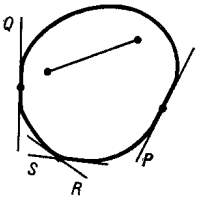
Понятие В. ф. определяется и для функций многих переменных. Напр., для дважды дифференцируемой функции условие выпуклости заключается в знакоопределённости её второго дифференциала.

ВЫПУКЛОЕ МНО́ЖЕСТВО — множество в евклидовом или другом векторном пространстве, которое вместе с любыми двумя точками содержит все точки соединяющего их отрезка.

Пересечение любой совокупности В. м. есть В. м. Наименьшая размерность плоскости, содержащей данное В. м., наз. размерностью этого В. м. Замыкание В. м. (т. е. результат присоединения к В. м. всех его предельных точек) даёт В. м.

Через каждую точку границы В. м. на плоскости проходит, по крайней мере, одна опорная прямая, имеющая общую точку с границей, но не рассекающая это множество (на рис. P, Q, R, S — опорные прямые).

В трёхмерном пространстве через каждую точку границы В. м. проходит хотя бы одна опорная плоскость, оставляющая это В. м. в одном замкнутом полупространстве.



Замкнутое В. м. есть пересечение конечного числа замкнутых полупространств. Пересечение конечного числа замкнутых полупространств есть выпуклый многогранник.

ВЫПУКЛОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — раздел математического программирования, в котором исследуется задача максимизации вогнутой целевой функции $f(x)$ векторного аргумента $x=(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющего ограничениям

$$g_i(x)\geqslant 0,\quad i=1, \ldots, m,\quad x\in X,$$

где g_i— вогнутые функции, X — выпуклое множество. Центральным фактом теории В. п. является теорема о седловой точке: для того чтобы допустимая точка x^* задачи В. п. была оптимальной, необходимо (при достаточно широких условиях) и достаточно существование такого вектора $y^*=(y_1^*, \ldots, y_m^*)$ с неотрицательными компонентами y_i^*, что точка (x^*, y^*) является седловой для функции Лагранжа

$$L(x, y)=f(x)+\sum_{i=1}^{m} y_i g_i(x)$$

задачи В. п., т. е. для любых $x\in X$ и y с неотрицательными компонентами выполняются неравенства

$$L(x, y^*)\leqslant L(x^*, y^*)\leqslant L(x^*, y).$$

Ряд методов В. п. опирается на теорему о седловой точке: в них либо минимизируется функция

$$\Phi(y_1, \ldots, y_m)=\max_{x\in X} L(x, y)$$

при $y_i\geqslant 0$, $i=1, \ldots, m$, либо непосредственно отыскивается седловая точка, причём вместо функции Лагранжа иногда используются нек-рые её модификации. Другой подход к решению задачи В. п. связан с поиском возможных направлений, к-рые не выводят из множества допустимых точек и вместе с тем вдоль к-рых целевая функция возрастает. На каждой итерации такого метода вычисляется возможное направление, исходящее из очередной точки, после чего производится сдвиг по этому направлению до следующей точки. Существуют методы решения задач В. п., специально приспособленные к тому случаю, когда целевая функция нелинейна, а ограничения линейны. Как правило, методы В. п. требуют для точного определения оптимальной точки бесконечного числа итераций. Исключением являются задачи квадратичного программирования (целевая функция — сумма вогнутой квадратичной и линейной функций, ограничения линейны) и линейного программирования (целевая функция и ограничения линейны), для к-рых в основном используются конечные методы. Многие вычислительные методы В. п. реализованы в виде программ для ЭВМ; существуют также пакеты программ, охватывающие задачи линейного программирования и В. п. См. также *Исследование операций.*

● Зангвилл У. И., Нелинейное программирование. Единый подход, пер. с англ., М., 1973; Гольштейн Е. Г., Выпуклое программирование. Элементы теории, М., 1970.

ВЫПУКЛОЕ ТЕ́ЛО — замыкание (конечного или бесконечного) *выпуклого множества* в евклидовом или другом топологическом векторном пространстве, имеющего внутренние точки.

Простейшими В. т. являются выпуклые многогранники — В. т., ограниченные конечным числом выпуклых многоугольников. Для любого конечного В. т. можно построить как угодно близкие к нему выпуклые многогранники.

Это позволяет решать многие задачи о В. т. следующим образом: задача решается для выпуклых многогранников, а затем путём предельного перехода соответствующий результат обосновывается и для любого В. т. Так, напр., определяются площади выпуклых поверхностей и объёмы любых В. т.

Исследования В. т. и их границ — выпуклых поверхностей — охватывают широкий круг вопросов: общие свойства В. т. (теоремы об опорных плоскостях, классификация В. т., приближение многогранниками), экстремальные свойства В. т. (напр., шар среди всех В. т. с заданным объёмом имеет минимальную поверхность), теоремы о существовании и единственности В. т. с заданными свойствами (напр., теорема о существовании выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней), свойства различных классов В. т. (напр., тел постоянной ширины), общие свойства выпуклых поверхностей, теоремы существования и единственности для выпуклых поверхностей, внутренняя геометрия выпуклых поверхностей и т. д.

Методы и результаты теории В. т. используются в различных разделах математики: в геометрии, теории чисел, алгебре, математич. анализе.

ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРА́ННИК — см. *Многогранник*.

ВЫПУКЛЫЙ МНОГОУГО́ЛЬНИК — см. *Многоугольник*.

ВЫРОЖДЕННАЯ МАТРИЦА, особая (особенная) матрица, сингулярная матрица,— квадратная матрица, определитель которой равен нулю. Квадратная матрица над полем является В. м. в том и только в том случае, когда между её строками (а также между столбцами) существует линейная зависимость, т. е. когда её ранг меньше её порядка.

ВЫРОЖДЕННОЕ ЛИНЕ́ЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — см. *Линейное преобразование*.

ВЫРОЖДЕННЫХ ЯДЕР МЕ́ТОД — один из методов построения аппроксимирующего уравнения для приближённого (и численного) решения нек-рых видов линейных и нелинейных интегральных уравнений. Основной тип интегральных уравнений, для решения к-рых применяется В. я. м.,— линейные одномерные интегральные уравнения Фредгольма II рода. Для таких уравнений В. я. м. состоит в приближённой замене ядра $K(x, s)$ интегрального уравнения

$$\lambda\varphi(x)+\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds=f(x)$$

на вырожденное ядро вида

$$K_N(x,\ s)=\sum_{n=1}^{N} a_n(x)\,b_n(s)$$

и в последующем решении вырожденного интегрального уравнения Фредгольма

$$\lambda\tilde{\varphi}(x)+\int_a^b K_N(x,\ s)\,\tilde{\varphi}(s)=f(x). \qquad (*)$$

Решение (*) сводится к решению системы алгебраич. линейных уравнений. Вырожденное ядро $K_N(x, s)$ можно искать по ядру $K(x, s)$ многими способами, напр. разложением ядра в ряд Тейлора или Фурье.

ВЫСКА́ЗЫВАНИЕ — предложение естественного или формализованного языка, для которого имеет смысл говорить о его истинности или ложности. Этим В. отличаются, напр., от повелительных или вопросительных предложений естественного языка.

В. и операции над ними составляют основной предмет изучения в математич. логике. В зависимости от целей исследования здесь используются различные математич. уточнения понятия В., т. е. различные варианты отождествления предложений, рассматриваемых как выражающие одно и то же В. Так, в логике высказываний (см. *Высказываний исчисление*) это уточнение заключается в том, что каждое В. однозначно характеризуется его *истинностным значением* И («истина») или Л («ложь»). При этом нет необходимости в к.-л. дальнейшем уточнении понятий предложения и В., так как основной задачей логики В. является не установление истинности или ложности конкретных В., а исследование *логических операций*, позволяющих получить нек-рое новое В. из имеющихся исходных В., причём истинностное значение такого составного В. полностью определяется истинностными значениями входящих в него более простых В. При таком подходе каждой логич. операции соответствует функция, аргументы к-рой и она сама принимают значения И и Л (иногда обозначаемые числами 1 и 0). Такие функции, наз. логич. функциями, исследуются в *алгебре логики*. Таким образом, в логике В. последние отождествляются со своими истинностными значениями.

Другой подход к математич. определению В. состоит в уточнении понятия предложения через понятие формулы нек-рого *формализованного языка*. Формулы являются аналогами повествовательных предложений естественного языка, однако не все они выражают В. Так, формула языка формальной арифметики $x+2=4$ не выражает истинное или ложное В. Поэтому В. наз. лишь формулы, в к-рых каждая переменная, скажем x, находится в области действия кванторов $\forall x$ или $\exists x$. Напр., формула $\forall x(x+2=4)$ есть ложное В., а $\exists x(x+2=4)$ — истинное В.

С понятием В. тесно связано понятие высказывательной формы. Высказывательная форма (в. ф.)— это выражение, содержащее одну или несколько переменных и превращающееся в В. при подстановке вместо этих переменных имён (т. е. обозначений) к.-л. объектов. При этом для каждой переменной должна быть указана область её значений, к-рые разрешается подставлять вместо этой переменной. Типичным примером в. ф. в естественном языке являются бланки различных документов, в к-рые требуется вписать конкретные фамилии, названия городов, учреждений и т. п. (напр., «тов. ... направляется в командировку в город ...»). В формализованных языках в. ф.— это формулы, содержащие свободные переменные. Напр., формула $x+2=4$ есть в. ф., к-рая становится истинным В., если вместо x подставить число 2, и ложным при всех других подстановках. В зависимости от числа свободных переменных в. ф. бывают одноместные, двухместные, трёхместные и т. д. Напр., $x+2=4$ — одноместная, а $t\times w=x$ — трёхместная в. ф. Сами В. можно считать нульместными в. ф.

Наряду со свободными переменными, вместо к-рых допускается подстановка имён конкретных объектов, в. ф. может содержать т. н. связанные переменные, употребление к-рых не предполагает возможности такой подстановки. Напр., выражение $\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx=1$ есть В., а не в. ф., хотя оно и содержит переменную x.

Более общо в. ф. может быть определена как функция, к-рая каждому набору допустимых значений переменных сопоставляет нек-рое В. При том подходе к понятию В., когда оно отождествляется со своим истинностным значением, такое определение в. ф. приводит к понятию *предиката* — функции, определённой на нек-ром множестве и принимающей значения И и Л (или 1 и 0).

ВЫСКА́ЗЫВАНИЙ ИСЧИСЛЕ́НИЕ, пропозициональное исчисление,— общее название *исчислений*, служащих для формализации способов логических рассуждений, в которых учитывается лишь логическая структура высказываний, а именно: как одни высказывания получены из других с помощью таких логических операций, как *конъюнкция*, *дизъюнкция*, *импликация*, *отрицание*.

При изучении общих логич. связей между высказываниями используются формализованные языки. Алфавит наиболее распространённого языка логики высказываний содержит три группы символов: 1) пропозициональные переменные: $A, B, C, \ldots$ (возможно, с индексами); 2) символы логич. операций, или пропозициональные связки: $\&$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\supset$ (импликация), $\neg$ (отрицание); 3) вспомогательные символы: скобки (,). Из пропозициональ-

ных переменных с помощью пропозициональных связок и скобок строятся пропозициональные формулы: 1) все переменные суть формулы; 2) если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то выражения $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$, $\neg\mathfrak{A}$ считаются формулами.

Каждая формула представляет собой форму сложных высказываний: она превращается в высказывание, если в неё вместо переменных подставить к.-л. высказывания. Формула наз. общезначимой или тавтологией, если при любой такой подстановке получается истинное высказывание. Понятие общезначимой пропозициональной формулы становится математически точным после того или иного уточнения понятия высказывания и смысла логич. операций.

Целью логики высказываний является описание класса всех общезначимых формул при данной интерпретации. Одним из способов такого описания является построение В. и., то есть исчисления, аксиомами и выводимыми объектами к-рого являются пропозициональные формулы. При этом в качестве аксиом выбираются нек-рые общезначимые формулы, а правила вывода позволяют из общезначимых формул получать новые общезначимые формулы. Наиболее часто при построении В. и. используются следующие правила вывода: 1) правило подстановки, позволяющее от формулы $\mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n)$ с переменными $X_1, \ldots, X_n$ перейти к формуле $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n)$, получающейся из $\mathfrak{A}$ подстановкой в неё к.-л. формул $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ вместо переменных $X_1, \ldots, X_n$; 2) правило модус поненс, позволяющее из посылок $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ получить $\mathfrak{B}$. Выводом формулы $\mathfrak{B}$ в В. и. наз. конечная последовательность формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ такая, что каждая из формул $\mathfrak{A}_l$ либо есть аксиома, либо получается из нек-рых предшествующих ей формул по одному из правил вывода, и $\mathfrak{B}$ совпадает с $\mathfrak{A}_m$. Говорят, что формула выводима в данном В. и. или является его теоремой, если можно построить вывод этой формулы. В. и. наз. полным, если все тавтологии являются его теоремами.

Важнейшим примером В. и. является классическое В. и. В классич. логике предполагается, что каждое высказывание принимает одно из двух истинностных значений: И («истина») или Л («ложь»), причём истинностное значение составного высказывания однозначно определяется истинностными значениями входящих в него более простых высказываний. Это позволяет ограничиться подстановкой в пропозициональные формулы только истинностных значений высказываний и вычислением значения формулы в соответствии с классич. трактовкой логич. операций. Формула наз. классически общезначимой, классической тавтологией или тождественно истинной, если при любой подстановке в неё значений И и Л вместо переменных формула принимает значение И.

Классич. В. и.— это В. и., в к-ром выводимы все тождественно истинные формулы и только они. Возможны различные варианты классич. В. и., отличающиеся выбором как системы аксиом, так и правил вывода. В качестве примера можно привести следующую систему аксиом:

1. $A\supset(B\supset A)$;
2. $(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$;
3. $A\supset(B\supset A\,\&\,B)$;
4. $A\,\&\,B\supset A$; 5. $A\,\&\,B\supset B$;
6. $(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset(A\vee B\supset C))$;
7. $A\supset A\vee B$; 8. $B\supset A\vee B$;
9. $(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$;
10. $\neg\neg A\supset A$.

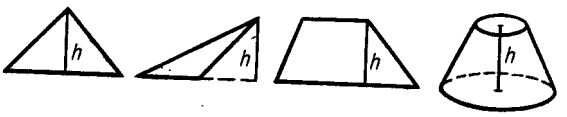
В. и. с указанной системой аксиом и правилами вывода — модус поненс и правило подстановки — является полным.

Если аксиомы 1—10 принять в качестве схем аксиом (т. е. разрешить подстановку в них любых формул В. и. вместо пропозициональных переменных A, B, ...), то можно ограничиться только одним правилом вывода: модус поненс. Дедуктивный аппарат В. и., т. е. система аксиом и правила вывода, используется при построении других логич. и логико-математич. исчислений.

В. Е. Плиско.

ВЫСКАЗЫВАТЕЛЬНАЯ ФОРМА — см. *Высказывание.*

ВЫСОТА́ — отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины геометрической фигуры (напр., треугольника, пирамиды, конуса) на её основание или продолжение основания, а также длина этого отрезка. В. призмы, цилиндра,



шарового слоя, а также усечённых параллельно основанию пирамиды и конуса — расстояние между верхним и нижним основаниями. На рисунке изображены В. (h) треугольников, трапеции и усеченного конуса.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА — название совокупности математических дисциплин, входящих в учебный план технич. и нек-рых других учебных заведений; обычно в курс В. м. включаются элементы *аналитической геометрии, линейной алгебры, дифференциального исчисления, интегрального исчисления* и *дифференциальных уравнений.*

ВЫХОДНО́Й АЛФАВИ́Т — реакции *автомата* на внешние воздействия.

ВЫЧЕТ однозначной аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0— комплексное число, равное значению интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz,$$

взятого в положительном направлении по окружности достаточно малого радиуса $\gamma=\{|z-z_0|=r\}$ с центром в изолированной особой точке z_0 этой функции; $r>0$ достаточно мал, так что круг $|z-z_0|\leqslant r$ не содержит особых точек функции $f(z)$, отличных от z_0. Обозначение: $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$, или выч $f(z)$. В. функции $f(z)$ в точке z_0 равен коэффициенту a_{-1} разложения этой функции в ряд Лорана:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz=a_{-1}.$$

В. в полюсе 1-го порядка вычисляется по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

если $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$, где φ и ψ — аналитич. функции, причём $\varphi(z_0)\neq0$, а для $\psi(z)$ точка z_0— нуль 1-го порядка, т. е. $\psi'(z_0)\neq0$. В полюсе порядка m В. вычисляется по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

Важное значение В. определяется следующей теоремой о вычетах. Пусть $f(z)$ — однозначная аналитич. функция в области D, за исключением конечного числа изолированных особых точек, Γ — простая замкнутая спрямляемая кривая, принадлежащая области D вместе со своей внутренностью и не проходящая через особые точки функции $f(z)$; если $z_1, \ldots, z_n$— все особые точки $f(z)$, лежащие внутри Γ, то

$$\int_\Gamma f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Поскольку В. вычисляются сравнительно просто, эта теорема является эффективным средством для нахождения интегралов от функций как комплексного, так и действительного переменного.

Понятие введено О. Коши (1814), термин — им же (1826).

ВЫЧЕТ целого числа b по модулю $m>0$ — такое целое число a, что разность $a-b$ делится на m, т. е. имеет место сравнение $b\equiv a \pmod m$. Так, число 24 есть В. числа 3 по модулю 7. Совокупность m целых чисел, каждое из к-рых является В. одного и только одного из чисел 0, 1, . . . , $m-1$, наз. полной системой В. по модулю m. Напр., числа 1, 6, 11, 16, 21, 26 образуют полную систему В. по модулю 6. См. также *Квадратичный вычет*, *Степенной вычет*.

ВЫЧИСЛИ́МАЯ ПОСЛЕДОВА́ТЕЛЬНОСТЬ — *вычислимая функция*, область определения которой — натуральные числа.

ВЫЧИСЛИ́МАЯ ФУ́НКЦИЯ — одно из основных понятий теории алгоритмов. Функция f наз. вычислимой, если существует *алгоритм*, перерабатывающий всякий объект x, для к-рого определена функция f, в объект $f(x)$ и не приводящий к результату ни для какого x, для к-рого f не определена. Примеры: x — любое натуральное число, $f(x)=x^2$; x — пара рациональных чисел x_1 и x_2, $f(x)=x_1 : x_2$ (эта функция определена лишь для тех x, у к-рых $x_2\neq 0$); X — пара матриц X_1 и X_2 с целочисленными элементами, $f(X)=X_1X_2$ (эта функция определена лишь для тех X, у к-рых число столбцов в X_1 совпадает с числом строк в X_2). Аргументами и значениями В. ф. могут быть лишь конструктивные объекты (ибо лишь с такими объектами могут оперировать алгоритмы). В. ф., областью определения к-рой служат натуральные числа, наз. вычислимой последовательностью.

Различные уточнения понятия алгоритма (*Тьюринга машина*, *нормальный алгорифм*) приводят к соответствующим уточнениям понятия В. ф. Все они эквивалентны между собой, а в случае числовых функций (т. е. функций с натуральными аргументами и значениями) эквивалентны понятию *рекурсивной функции*. Общепринята гипотеза, что всякая числовая В. ф. является рекурсивной (*Чёрча тезис*).

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ — см. *Машинная графика*.

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ МАТЕМА́ТИКА — раздел математики, включающий круг вопросов, связанных с использованием ЭВМ. Содержание термина «В. м.» нельзя считать установившимся. Первоначально В. м. понималась как прикладная математика. Термин «В. м.» применяется и тогда, когда имеют в виду теорию численных методов и алгоритмов решения типовых математич. задач. В рамках современной терминологии В. м.— часть *информатики*, относящаяся к методологии применения ЭВМ для решения задач науки, техники, производства и практически всех областей человеческой деятельности. Естественно, что многообразие задач В. м. существенно зависит от возможностей типов ЭВМ с соответствующей периферией.

Современная В. м. занимается изучением *математических моделей* окружающей нас действительности как с точки зрения исследования различных объектов и явлений, так и с точки зрения развития методов управления ими. Математич. модели могут включать помимо естественнонаучных объектов ещё технические, экономические, социальные и другие явления и объекты, записанные на математич. языке, т. е. в математич. терминах. Под математич. языком и математич. терминологией подразумевается символическая, формальная запись причинно-следственных отношений между абстрактными объектами и понятиями, также выраженных символами. Тем самым математич. язык и его терминология служат для построения схем взаимоотношений реальных объектов и явлений, т. е. для построения их математич. моделей. Следует отметить, что математич. терминология имеет при этом принципиальное значение, т. к. с помощью математич. методов мы можем изучать следствия, причинно обусловленные принятыми моделями.

Можно выделить следующие естественные этапы изучения математич. моделей:

1) создание качественной модели изучаемого объекта или явления;

2) создание соответствующей математич. модели;

3) изучение математич. задачи, порождаемой рассматриваемой моделью;

4) разработка алгоритма для решения полученной математич. задачи на ЭВМ;

5) создание программы и реализация её на ЭВМ;

6) вывод результатов и накопление полученных знаний на долговременных носителях информации;

7) управление объектом или явлением на базе полученных знаний и уточнение математич. модели. Следует отметить, что на всех перечисленных выше этапах происходит уточнение математич. модели.

Математич. моделирование охватывает широкий круг задач научно-технич. прогресса. Оно принципиально отличается от натурного моделирования, основанного на изучении физич. подобия. При создании новой технич. конструкции, ставящей своей целью повышение производительности труда, формулируется технич. задание, к-рому должна удовлетворять эта новая конструкция. Генеральный конструктор, естественно, может опираться только на тот опыт, к-рым он обладает. Однако если результатом его работы должна быть установка, повышающая производительность труда в 5—10 раз, то опыт физич. подобия здесь, как правило, неправомерен. Создание новых установок или конструкций требует очень много времени и материальных средств, и если в результате проведённой работы оказывается, что установка не удовлетворяет предъявляемым к ней по проекту требованиям, ради к-рых она создаётся, то это приводит к торможению научно-технич. прогресса.

Как же можно прогнозировать работу новых установок? Перед тем, как реализовать проектируемую установку, надо разработать математич. модель этого проекта и с помощью математич. моделирования посмотреть, как установка будет работать. Метод математич. моделирования на ЭВМ заключается в разработке математич. модели установки, выборе эффективного метода и алгоритма решения задачи и просчёте на ЭВМ тех процессов или явлений, к-рые происходят в проектируемой установке. Это, конечно, не просто, но гораздо быстрее и дешевле, чем натурное моделирование. Более того, решая различные варианты задачи на ЭВМ, можно легко оценить, какое влияние имеют те или иные параметры, к-рые заложены в конструкцию установки, как их надо выбирать, чтобы конструкция давала максимальную отдачу.

Таким образом, математич. моделирование позволяет выяснить не только работоспособность установки, но и определить оптимальную технологич. конструкцию, режим работы, и это всё для получения наибольшего эффекта отдачи.

Среди встречающихся в практике задач можно заметить три типа математич. моделей.

1) Прямая задача, когда по заданным локальным физич. законам, действующим внутри исследуемой системы, надо ответить на вопрос: как будет действовать вся эта сложная система? В качестве примера прямых задач можно привести задачи управляемого термоядерного синтеза, задачи авиа- и ракетостроения и т. п.

2) Обратная задача — математич. диагностика, к-рая заключается в том, что требуется определить математич. модель процесса или явления, недоступного для прямого измерения. В этом случае возникает задача: по косвенным наблюдениям, причинно обусловленным изучаемым объектом и оператором причинной связи между ними, требуется установить приближённую математич. модель изучаемого объекта. Здесь можно различать задачи технич. диагностики, требующие изучения процессов внутри действующей машины, задачи медицинской диагностики, когда требуется изучать процессы внутри живого организма, задачи геофизики, имеющие своей целью изучение внутреннего строения Земли (для разведки полезных ископаемых), задачи астрофизики, где объекты изучения вообще недоступны для прямого исследования. Можно привести и много дру-

гих примеров, относящихся, напр., к проблеме искусственного интеллекта.

3) Третий тип математич. моделей связан с проектированием управляющих систем с заранее поставленными целями управления. К таким системам относятся автоматизированные информационные системы и автоматизированные системы управления (АСУ). При этом различают АСУ - производство, АСУ - промышленность, АСУ - министерство, АСУ - транспорт и т. д.

В приложениях математич. моделирования часто встречаются нек-рые наиболее типичные математич. задачи: решение систем линейных алгебраич. уравнений (причём встречаются задачи, где число уравнений больше числа неизвестных); приближённые вычисления интегралов и производных; численные методы решения дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и с частными производными; решение экстремальных задач и т. д.

Методы решения этих задач существенно зависят от задаваемой дополнительной информации. Так, напр., для нахождения экстремумов функции одного переменного определяют значения переменной, для к-рой $f'(x)=0$, с тем, чтобы потом для них проанализировать знак 2-й производной. Однако часто встречаются недифференцируемые функции (заданные, напр., в виде графика или таблицы). В этом случае подобный подход неприменим. Более того, если функция задаётся неточно и задаваемые значения осложнены погрешностью, то нахождение производных представляет собой более сложную задачу, чем нахождение экстремальных значений.

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений, как известно, связано с задачами, к-рые ставятся для этих уравнений, напр. задача Коши, краевая задача и т. д. Здесь приходится говорить не просто о методах решения уравнений, а указывать ту дополнительную информацию, к-рая определяет тип изучаемой задачи. Всё это в ещё большей степени относится к дифференциальным уравнениям с частными производными.

Следует отметить бурное развитие в последние годы различных численных методов решения дифференциальных уравнений с частными производными, в том числе сеточные (разностные) методы, вариационно-разностные методы, метод конечного элемента, асимптотич. методы, методы решения задач теории управления и т. д. Можно выделить также методы для решения классов уравнений с гладкими или быстроосциллирующими правыми частями, вероятностные методы решения в случае, когда в правой части уравнения — случайные функции. Особняком стоят жёсткие задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, к-рые требуют применения существенно различных сеток на интервале интегрирования.

Для того чтобы можно было пользоваться различными алгоритмами, не требуя от постановщика задачи специальных знаний по методам решения различных задач, в настоящее время широко развиваются пакеты и библиотеки прикладных программ. Применение ЭВМ к решению сложных задач, в особенности задач большой размерности, вызвало к жизни исследование устойчивости методов и алгоритмов к различного рода ошибкам (в том числе к ошибкам округления).

Обратные задачи, напр. задача определения элемента x из уравнения $Ax=b$ при известной информации об операторе A и элементе b, часто являются неустойчивыми (некорректно поставленными) задачами, где малым погрешностям во входных данных могут соответствовать большие погрешности в x. Более того, обратные задачи часто имеют решение не для всех b, поэтому, задавая приближённое значение b, следует учитывать, что решение этой задачи может не существовать. Неустойчивые задачи потребовали специального определения понятия приближённых решений и развития соответствующих методов для их нахождения. К неустойчивым относятся, в частности, указанные обратные задачи, а также задачи, связанные с проблемами автоматизации обработки результатов экспериментов.

Применение ЭВМ непрерывно расширяет круг пользователей, и поэтому возникает тенденция такой степени автоматизации, при к-рой становится менее существенным знакомство пользователей с численными методами. Это предъявляет новые требования к алгоритмам, их классификации и к программам решения типовых задач.

Основной задачей теории программирования можно считать облегчение взаимодействия человека с машиной, хотя этот взгляд претерпевает радикальные изменения с развитием вычислительной техники. Смена ряда поколений вычислительных машин обусловила смену этапов в развитии программирования. От составления программ на внутреннем языке машин программирование быстро перешло к составлению стандартных программ решения типовых задач и комплексов таких программ. При их употреблении отпадает необходимость в программировании метода решения; достаточно лишь ограничиться заданием исходной информации.

Появление машин следующих поколений с бóльшим быстродействием сопровождалось ростом числа задач, предъявляемых к решению; в результате этого возникло узкое место системы человек — машина: скорость программирования. Это вызвало к жизни новый этап программирования — создание алгоритмич. языков с трансляторами для перевода с алгоритмич. языка на внутренний язык машины. Наглядность этих языков, доступная для понимания символика, их внедрение упростило программирование и существенно расширило круг пользователей.

Наряду с созданием универсальных алгоритмич. языков (алгол, фортран, ПЛ/1) был разработан ряд проблемно-ориентированных языков для определённого круга пользователей, напр. связанных с задачами обработки экономич. информации (кобол) или язык (лисп) для решения задач с символьными преобразованиями и др. Создание специализированных проблемно-ориентированных языков вызвано тем, что универсальные языки и трансляторы, предназначенные для решения широкого класса задач, иногда слабо учитывают специфику отдельных важных классов задач, что снижает эффективность использования всех возможностей машины и создаёт весьма значительные неудобства пользователям.

При дальнейшем повышении скорости ЭВМ узким местом в системе человек — машина стали устройства для ввода и вывода информации; их медленная работа сводила на нет высокопроизводительную работу центрального устройства. Необходимость преодоления этого противоречия явилась одной из причин создания систем мультипрограммных режимов работы. Другой причиной было требование одновременной работы на машине большого коллектива пользователей (в частности, последнее особенно существенно при применении ЭВМ в автоматизированных системах управления). Всё это вместе с рядом других причин обусловило значительное расширение задач системного программирования, основной задачей к-рого является создание операционных систем, управляющих работой машины (расширяющих возможности машины программным путём и предоставляющих пользователю дополнительное обслуживание, не предусмотренное аппаратурой): возможность ввода и вывода одновременно с решением задач, автоматизация редактирования выдачи, вывод графиков, работа с экраном, диалог с машиной, возможность одновременного решения на машине многих задач.

Современное применение ЭВМ требует организации работы комплексов, включающих большое число различных типов машин, внешние запоминающие устройства, каналы связи между машинами и терминалами пользователей, а зачастую и физич. установки. Такие высокопроизводительные системы создаются, напр., для решения и обработки результатов физич. экспериментов, требующих ввода и обработки большого количества информации.

ЭВМ называют универсальными вычислительными машинами потому, что введённые программы полностью их перестраивают и на одной ЭВМ можно решить чрезвычайно широкий круг задач. Следовательно, эффективность ис-

пользования ЭВМ определяется не только её технич. возможностями, но и её «программным образованием». Однако «математическое и программное образование» ЭВМ складывается не только из программ, реализующих различные методы решения отдельных задач, но и из проблемно-ориентированных вычислительных комплексов. Подобные комплексы представляют собой сложную иерархически-модульную структуру, где ведущий модуль определяет взаимодействие между модулями более низких рангов, предназначенных для решения частных задач, к-рые в свою очередь могут быть легко перестраиваемы путём замены одного частного модуля другим (естественно, если при этом предусмотрена их взаимозаменяемость). Таким образом, создание большой программы в этом случае практически редуцируется к созданию управляющего модуля, к-рый определяет последовательность выполнения различных операций.

В настоящее время широко развивается идеология минимашин, профессиональных и персональных компьютеров. Мини-ЭВМ, персональные компьютеры (вместе с соответствующей периферией) могут взять на себя большие объёмы работ по обработке данных, высвобождая при этом значительные мощности машин для решения наиболее крупных задач.

Необходимо отметить ещё раз, что современное развитие В. м. тесно связано с бурным развитием вычислительной техники, и эта связь стимулирует взаимное совершенствование этих двух важнейших направлений науки и техники.

А. Н. Тихонов.

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ МОДЕ́ЛЬ — типовая задача, соответствующая проблеме численного решения некоторого класса математических или прикладных задач. Напр., обработка методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений производилась путём исследования свойств методов на последовательности усложняющихся моделей (отрезок интегрирования $[0, X)$:

1) уравнение $y'=0$;

2) уравнение $y'=my$, $|m|X$ — порядка 1 [модели 1) и 2) соответствуют задаче интегрирования систем с гладкими решениями на небольших промежутках времени];

3) уравнение $y'=my$, $m<0$, $|m|X\gg 1$ (эта модель соответствует задаче интегрирования на больших промежутках времени систем с устойчивыми решениями);

4) система $y_1'=m_1y_1$, $y_2'=m_2y_2$; $m_2<0$, $|m_2|X\gg|m_1|X$, $|m_1|X$ — порядка 1 (модель т. н. жёсткой дифференциальной системы, у к-рой одни компоненты решения меняются относительно медленно, а другие быстро).

● Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г., Численные методы решения жестких систем, М., 1979; Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1979.

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИ́ТМ — точно определённое указание действий над данными, позволяющее с помощью цифровой вычислительной машины дискретного действия преобразовать за конечное количество операций нек-рый массив данных (входные данные) в другой массив данных (выходные данные). В. а. реализуется в виде вычислительного процесса, т. е. в виде дискретно распределённой во времени конечной последовательности состояний реальной ЭВМ, имеющей, в отличие от абстрактной вычислительной машины, ограниченные скорость выполнения операций, разрядность чисел и объём памяти.

Объектом операций ЭВМ являются данные, представляемые в виде машинных слов, интерпретируемых как машинные числа, машинные команды и т. п. Машинная команда есть машинное слово, к-рое содержит информацию об операции, напр. арифметической, и её операндах (объектах, над к-рыми производится операция, и результатах операции). Арифметич. операция над парой машинных чисел может вывести результат из множества M допустимых машинных слов по двум причинам: вследствие повышения допустимого числа значащих цифр и превышения допустимой величины машинного числа. В первом случае применяется операция округления, к-рая возвращает результат действия в множество M, но делает само действие приближённым и приводит к потере точности. Второй случай приводит к аварийной остановке ЭВМ.

Реальный В. а. складывается из двух частей.

а) Абстрактного (или собственно) В. а., к-рый применяется к математич. объектам (элементам конечномерных векторных пространств, полей, алгебраич. систем, функциональных пространств и т. д.); он не связан с конкретной ЭВМ и может записываться в общепринятых математич. терминах или на к.-л. алгоритмич. языке.

б) Программы, т. е. совокупности машинных команд, описывающих В. а., к-рая организует реализацию вычислительного процесса в конкретной ЭВМ.

Первая часть В. а. является исходной и переходит во вторую часть с помощью различных методов программирования. В. а. содержит ряд управляющих параметров, к-рые остаются неопределёнными в первой части и фиксируются в программе, полностью определяя вычислительный процесс, обеспечивая адаптацию его первой части к конкретной ЭВМ.

В. а. осуществляет переработку числовой и символьной информации и, как правило, связан с потерей информации и точности. Потеря точности является следствием ряда погрешностей, появляющихся на различных этапах вычислений: погрешность модели, погрешность входных данных, погрешность аппроксимации, погрешность округления.

Погрешность модели является следствием приближённости математич. описания реального процесса. Погрешность входных данных зависит от ошибок наблюдения, измерения и т. п., но также может включать в себя и ошибку округления входной информации. Иногда погрешность модели и погрешность входных данных объединяют одним назв. «неустранимая погрешность». Погрешность аппроксимации возникает, если рассматривать абстрактный В. а. как нек-рую дискретную модель, к-рая аппроксимирует континуальную модель. В нек-рых случаях абстрактный В. а. является самостоятельной дискретной моделью, к-рая не сопоставляется ни с какой другой моделью; в этом случае нет смысла говорить о погрешности аппроксимации. Погрешности округления могут встречаться только в реальном вычислительном процессе и зависят от выбора ЭВМ. При заданных входных данных и абстрактном В. а. промежуточные и выходные данные, получаемые в ЭВМ, зависят от выбора ЭВМ и режима её работы (вычисления с одинарной и двойной точностью). Абстрактный В. а. допускает эквивалентные преобразования, к-рые при заданных входных данных могут менять промежуточные данные, но оставляют неизменным окончательный результат. В. а., соответствующий двум различным эквивалентным представлениям абстрактного В. а., может при фиксированной ЭВМ и входных данных приводить к различным окончательным результатам.

Помимо свойств точности, В. а. должен обладать свойством устойчивости. Устойчивость В. а. определяется как свойство В. а., позволяющее судить о скорости накопления суммарной вычислительной погрешности. Ошибки округления, входя в коэффициенты различных уравнений и операторов, вносят возмущения в математич. модель абстрактного В. а. и в этом смысле могут интерпретироваться так же, как и ошибки модели. Чем лучше свойства устойчивости абстрактного В. а., тем меньше, при заданном абстрактном В. а., результаты вычислений зависят от выбора ЭВМ и эквивалентных представлений абстрактного В. а.

Другим условием, особенно важным в массовых вычислениях, является экономичность В. а., измеряемая затратой машинного времени, необходимой для достижения заданной точности вычисления. Экономичные В. а. получили широкое распространение в задачах математич. физики (см., напр., *Дробных шагов метод*). Важной задачей теории В. а. является оптимизация вычислительных алгоритмов.

При построении В. а. характерна тенденция к контролю точности. Контроль точности может косвенно осуществляться за счёт изменения параметров В. а. (внутренняя сходимость), сравнения двух численных решений одной и той же задачи, соответствующих различным В. а., применения тестов и т. д. Прямой контроль точности осуществляется в том случае, когда удаётся получить оценки результата вычислений. Теоретич. оценки такого рода не всегда возможны и эффективны, т. к. не всегда дают достаточно точные границы отклонения численного решения от точного.

Различия в результатах абстрактного и реального В. а. определяются сложными связями между их параметрами. Так, в абстрактном В. а. для сходящегося итерационного процесса точность ε тем больше, чем больше число итераций n. В случае реального В. а. эта ситуация может измениться вследствие влияния ошибок округления и, начиная с нек-рого момента, разность между n-й итерацией и точным решением может потерять тенденцию к убыванию.

Абстрактный В. а. строится независимо от выбора конкретной ЭВМ и только косвенно учитывает её конфигурацию своими свойствами. Так, в связи с появлением ЭВМ с параллельно действующими процессорами получили развитие параллельные алгоритмы. Их сущность заключается в разбиении перерабатываемых численных массивов на части (подмассивы), независимо перерабатываемые соответствующими процессорами; производится обмен информацией между подмассивами, причём время, затрачиваемое на этот обмен, существенно меньше, чем выигрыш времени, достигаемый в результате распараллеливания счёта.

Многообразие ЭВМ приводит к многообразию программ, реализующих один и тот же абстрактный В. а. Особое значение приобретает проблема адаптации, т. е. быстрого и по возможности автоматич. преобразования (при заданном абстрактном В. а.) программы с одной ЭВМ на другую.

Н. Н. Яненко.

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР Академии наук СССР (ВЦ АН СССР) — научно-исследовательское учреждение, занимающееся разработкой вычислительных методов и математич. обеспечения электронных вычислительных машин. Образован в 1955 в Москве. В научных лабораториях В. ц. разрабатываются численные методы решения задач аэро- и гидродинамики, вопросы оптимального управления, теория больших систем, методы исследования операций, математич. обеспечение электронных вычислительных машин, алгоритмич. языки и языки для описания вычислительных машин и систем, технич. кибернетика; издаются сб. «Алгоритмы и алгоритмические языки» (с 1967) и отдельные выпуски трудов В. ц.

ВЫЧИТА́ЕМОЕ — см. *Вычитание.*

ВЫЧИТА́НИЕ — действие, обратное *сложению*; задачей В. является определение одного из двух слагаемых, когда даны сумма и другое слагаемое. Данная сумма наз. уменьшаемым, данное слагаемое — вычитаемым, результат действия — разностью. В области положительных чисел В. не всегда выполнимо (из меньшего числа нельзя вычесть большее). Это обстоятельство является формальным поводом для введения в арифметику нуля и отрицательных чисел; в расширенной таким образом числовой области вычитание всегда однозначно выполнимо.

Г

ГАЛЁРКИНА МЕ́ТОД, метод моментов,— метод нахождения приближённого решения операторного уравнения в виде линейной комбинации элементов заданной линейно независимой системы. Пусть $F(x)$ — нелинейный оператор, область определения к-рого лежит в банаховом пространстве X, а область значений — в банаховом пространстве Y. Для решения уравнения

$$F(x)=0 \qquad (1)$$

методом Галёркина выбираются последовательности конечномерных пространств $X_n \subset X$ и $Y_n^* \subset Y$, $n=1, 2, \ldots$, одинаковой размерности k_n. Приближённое решение $x_n \in X_n$ уравнения (1) ищется из требования ортогональности $F(x_n)$ к Y_n^*.

Если $\{\varphi_i^{(n)}\}_{j=1}^{k_n}$ — базис в X_n, называемый координатной системой, а $\{\psi_j^{(n)}\}_{j=1}^{k_n}$ — базис в Y_n^*, называемый проекционной системой, то x_n разыскивается в виде

$$x_n=\sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)}\varphi_i^{(n)}. \qquad (2)$$

Числовые коэффициенты $c_1^{(n)}, \ldots, c_{k_n}^{(n)}$ определяются из системы уравнений

$$\left\langle F\left(\sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)}\varphi_i^{(n)}\right), \psi_j^{(n)}\right\rangle=0, \quad j=1, \ldots, k_n. \qquad (3)$$

В этой общей постановке задачи нельзя гарантировать, что система (3) имеет хоть одно решение. В случае, если (3) имеет единственное решение при каждом $n=1, 2, \ldots$, приближённое решение (2) может не сходиться при $n \to \infty$ даже к слабо точному решению уравнения (1). Тем не менее Г. м. является мощным средством не только для нахождения приближённых решений, но и для доказательства теорем существования решений линейных и нелинейных уравнений, особенно в задачах для уравнений с частными производными.

В ряде случаев задача определения коэффициентов (2) из системы (3) эквивалентна задаче об отыскании минимума нек-рого функционала и Г. м. превращается в вариационный (энергетический) метод. Наиболее важны из таких методов *Ритца метод* и *наименьших квадратов метод*. Г. м. успешно применяется также в форме метода конечных элементов, когда проекционная система состоит из сплайн-функций. Здесь система (3) может иметь вид разностной схемы, успешно решаемой на ЭВМ. Особенно эффективен Г. м. в задачах с монотонными операторами и их модификациями. См. также *Проекционные методы*.

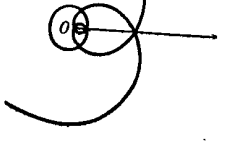
Г. м. получил широкое распространение после исследований Б. Г. Галёркина (1915); ранее он применялся для решения конкретных задач теории упругости И. Г. Бубновым.

● Треногин В. А., Функциональный анализ, М., 1980.

ГАЛИЛЕ́Я СПИРА́ЛЬ — плоская трансцендентная кривая (рис.). Уравнение в полярных координатах:

$$\rho=a\varphi^2-d,$$

где $d \geqslant 0$. Кривая симметрична относительно полярной оси. В полюсе — двойная точка, касательные к к-рой образуют с полярной осью углы $\pm\sqrt{d/a}$; имеет бесконечно много двойных точек на этой оси: $\rho=ak^2\pi^2-d$, где $k=1, 2, 3, \ldots$ Г. с. относится к алгебраич. спиралям. Названа по имени Г. Галилея в связи с его работами (1638) по теории свободного падения тел.



ГАЛУА́ ГРУ́ППА расширения K поля k — группа всех автоморфизмов поля K, оставляющих неподвижным

поле k. В частности, если k — поле, порождаемое коэффициентами алгебраич. уравнения $P(x)=0$, а K — поле, порождаемое всеми корнями этого уравнения, получается рассматривавшаяся Э. Галуа группа Галуа уравнения $P(x)=0$, свойства к-рой определяют разрешимо или неразрешимо данное уравнение в радикалах. См. *Галуа теория*.

ГАЛУА́ ПО́ЛЕ, конечное поле,— поле, число элементов которого конечно. Г. п. впервые рассматривались Э. Галуа в 1832.

Число элементов Г. п. есть степень p^n нек-рого простого числа p, причём для любого простого p и любого натурального n существует единственное (с точностью до изоморфизма) поле с p^n элементами. Оно обозначается $GF(p^n)$ (или F_{p^n}). Число p является характеристикой поля $GF(p^n)$. Поле $GF(p)$ наз. простым полем характеристики p; оно изоморфно полю $\mathbb{Z}_p$ классов вычетов кольца целых чисел по простому модулю p. Поле $GF(p^n)$ содержит в качестве подполя поле $GF(q^m)$ тогда и только тогда, когда $p=q$ и n делится на m.

ГАЛУА́ СООТВЕ́ТСТВИЕ — пара отображений двух частично упорядоченных множеств M и M' (φ: $M \to M'$, Ψ : $M' \to M$), связанных с отношениями порядка на этих множествах следующими аксиомами: 1) если $a \leqslant b$, то $a\varphi \geqslant b\varphi$; 2) если $a' \leqslant b'$, то $a'\psi \geqslant b'\psi$; 3) $(a\varphi)\psi \geqslant a$; 4) $(a'\psi)\varphi \geqslant a'$. Здесь a, $b \in M$, a', $b' \in M'$. Понятие Г. с. возникло из *Галуа теории*, где изучались такие соответствия между всеми подполями нек-рого расширения K поля k и подгруппами его *Галуа группы*, упорядоченными по включению.

ГАЛУА́ ТЕО́РИЯ — созданная Э. Галуа теория алгебраических уравнений высших степеней с одним неизвестным, т. е. уравнений вида

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0; \quad (*)$$

устанавливает возможность (или невозможность) сведения решения таких уравнений к решению цепи других алгебраических уравнений (обычно более низких степеней). Т. к. решением двучленного уравнения $x^m = a$ является радикал $\sqrt[m]{a}$, то уравнение (*) решается в радикалах, если его можно свести к цепи двучленных уравнений. Все уравнения 2-й, 3-й и 4-й степеней решаются в радикалах (см. *Квадратное уравнение*, *Кубическое уравнение*, *Кардано формула*, *Феррари метод*). Попытки найти формулы для корней уравнений 5-й и высших степеней не увенчались успехом. Наиболее упорно над этим вопросом работали в 18 в. Э. Безу и Ж. Лагранж. Последний рассматривал особые линейные комбинации корней, а также изучал вопрос о том, каким уравнениям удовлетворяют рациональные функции от корней уравнения (*). В 1801 К. Гаусс создал полную теорию решения в радикалах двучленного уравнения вида $x^n = 1$, в к-рой свёл решение такого уравнения к решению цепи двучленных же уравнений низших степеней и указал условия, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнение $x^n = 1$ решалось в квадратных радикалах. С точки зрения геометрии последняя задача заключалась в отыскании правильных n-угольников, к-рые можно построить при помощи циркуля и линейки; поэтому уравнение $x^n = 1$ и наз. уравнением *деления круга*. Наконец, в 1824 Н. Абель показал, что общее уравнение 5-й степени и выше не решается в радикалах (однако его доказательство не исключало возможности того, что корни каждого конкретного уравнения всё же как-то выражаются в радикалах через коэффициенты). С другой стороны, Н. Абель дал решение в радикалах одного общего класса уравнений, содержащего уравнения произвольно высоких степеней, т. е. абелевых уравнений.

Таким образом, когда Э. Галуа начал свои исследования, в теории алгебраич. уравнений было сделано уже много, но общей теории, охватывающей всевозможные уравнения (*), всё ещё не было создано. Оставались открытыми, напр., следующие вопросы: 1) установить необходимые и достаточные условия, к-рым должно удовлетворять уравнение (*), для того, чтобы оно решалось в радикалах; 2) узнать вообще, к цепи каких более простых уравнений, хотя бы и не двучленных, может быть сведено решение заданного уравнения (*) и, в частности, 3) каковы необходимые и достаточные условия для того, чтобы уравнение (*) сводилось к цепи квадратных уравнений (т. е. чтобы корни уравнения можно было построить геометрически с помощью циркуля и линейки). Все эти вопросы Э. Галуа решил в своём «Мемуаре об условиях разрешимости уравнений в радикалах» (1832), найденном в его бумагах после смерти и впервые опубликованном в 1846. Своё условие разрешимости уравнения (*) в радикалах Э. Галуа сформулировал в терминах теории групп и полей, введя ряд новых фундаментальных понятий (в настоящее время его имя носят *Галуа группа*, *Галуа поле*, *Галуа соответствие* и нек-рые другие). С каждым уравнением $P_n(x)=0$ Э. Галуа связал два поля: k — поле, порождаемое его коэффициентами, K — поле разложения многочлена $P_n(x)$, порождаемое всеми корнями этого уравнения, и группу $\mathrm{Gal}(K/k)$ автоморфизмов расширения K над k, наз. группой Галуа уравнения. Между подполями поля K, содержащими k, и подгруппами группы $\mathrm{Gal}(K/k)$ устанавливается соответствие. Каждому подполю K' ставится в соответствие подгруппа H в $\mathrm{Gal}(K/k)$, состоящая из всех автоморфизмов, оставляющих на месте каждый элемент поля K', а каждой подгруппе $H \subset \mathrm{Gal}(K/k)$ ставится в соответствие подполе K' поля K, состоящее из всех элементов поля K, не меняющихся под воздействием автоморфизмов из H. Основная теорема Г. т. утверждает, что это соответствие взаимно однозначно. Более того, нормальным подгруппам при этом соответствуют подполя, сами являющиеся полями разложения для других уравнений, а нормальному ряду таких подгрупп — цепочка таких уравнений, к решению к-рых сводится данное. Уравнение $P_n(x)=0$, где $P_n(x)$ — неприводимый многочлен без кратных корней, разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда группа Галуа этого уравнения — *разрешимая группа*. Для практич. применения этого условия весьма важно, что группу Галуа уравнения можно вычислить, не решая этого уравнения. Зависимости между корнями многочлена дают (в силу формул Виета) нек-рые соотношения между его коэффициентами, анализируя к-рые можно вычислить группу Галуа уравнения. Поскольку группа Галуа уравнения может, напр., быть симметрической группой n-й степени (неразрешимой при $n \geqslant 5$), то уравнение степени 5 и выше, вообще говоря, в радикалах не решается. Таково, напр., уравнение $x^5 - 4x - 2 = 0$. Таким образом, из результатов Э. Галуа вытекает существование алгебраич. чисел, не выражающихся через радикалы от рациональных чисел; в то время как результаты Н. Абеля не исключали такой возможности.

Идеи Э. Галуа оказали решающее влияние на развитие алгебры в течение почти целого столетия; они проникли и в другие разделы математики. Г. т. развивалась и обобщалась во многих направлениях. Тем не менее и в классич. Г. т. осталось ещё много нерешённых задач. Напр., неизвестно, для любой ли конечной группы существует уравнение над полем рациональных чисел с этой группой Галуа.

● Галуа Э., Сочинения, пер. с франц., М.— Л., 1936; Постников М. М., Теория Галуа, М., 1963.

ГАМИЛЬТОНА ОПЕРА́ТОР, набла-оператор, ∇-оператор, гамильтониан,— символический дифференциальный оператор вида

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\boldsymbol{k},$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — координатные орты. Если Г. о. применить к скалярной функции $\varphi(x, y, z)$, понимая $\nabla\varphi$ как произведение вектора на скаляр, то получится градиент функции φ:

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\boldsymbol{k}.$$

Если применить Г. о. к вектор-функции $\boldsymbol{a}(x, y, z)$, понимая $\nabla\boldsymbol{a}$ как скалярное произведение векторов, то получится дивергенция вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \nabla\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

где a_x, a_y, a_z — координаты вектора $\boldsymbol{a}$. Скалярное произведение Г. о. самого на себя даёт оператор Лапласа:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Оператор и его обозначение ∇ введены У. Гамильтоном (1853). Термин «Г. о.» и название «набла» для символа ∇ дал (1892) О. Хевисайд.

ГА́МИЛЬТОНА ФУ́НКЦИЯ, гамильтониан, — функция, используемая в классическом вариационном исчислении для представления *Эйлера уравнения* в канонической форме через обобщённые координаты и обобщённые импульсы. Через Г. ф. пишутся *Гамильтона — Якоби уравнения* для функции действия. Функция введена У. Гамильтоном (1835) для описания движений механич. систем.

ГА́МИЛЬТОНА — КЭ́ЛИ ТЕОРЕ́МА — теорема линейной алгебры, согласно которой каждая квадратная матрица является корнем своего характеристического многочлена. Высказана У. Гамильтоном и А. Кэли в сер. 19 в.

ГА́МИЛЬТОНА — ЯКО́БИ УРАВНЕ́НИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка, описывающее экстремали задач классического *вариационного исчисления*. Уравнение установлено У. Гамильтоном (1835) и К. Якоби (1837).

ГАМИЛЬТОНИА́Н — 1) Г.— то же, что *Гамильтона оператор*. 2) Г.— то же, что *Гамильтона функция*. 3) Г. в квантовой механике — оператор энергии.

ГА́ММА-ФУ́НКЦИЯ (Г, γ — гамма, третья буква греч. алфавита), Г-функция, Г-функция Эйлера, эйлеров интеграл 2-го рода,— одна из важнейших трансцендентных функций математического анализа, распространяющая понятие факториала $z! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot z$ на случай комплексных значений z. Г.-ф. впервые введена Л. Эйлером (1729); она определяется формулой

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{z(z+1)\ldots(z+n)}\, n^z.$$

Если действительная часть числа z положительна, то можно также пользоваться формулой

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,dx$$

(*эйлеров интеграл* 2-го рода). Если n — целое положительное число, то $\Gamma(n) = (n-1)!$ Интеграл

$$P(w, z) = \int_0^w x^{z-1}e^{-x}\,dx$$

наз. неполной гамма-функцией.

Основные соотношения для Г.-ф.:

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (функциональное уравнение);

$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ (формула дополнения), отсюда

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$

$$\ln\Gamma(z) = z\ln z - z - \frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \varepsilon(z),$$

где $\varepsilon(z) \to 0$ при $z \to \infty$ (формула Стирлинга).

В действительной области $\Gamma(x) > 0$ для $x > 0$ и принимает знак $(-1)^{k+1}$ на участках $-k-1 < x < -k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (рис.). Для всех действительных x справедливо неравенство

$$\Gamma\Gamma'' > \Gamma'^2 \geqslant 0,$$

т. е. все ветви как $|\Gamma(x)|$, так и $\ln|\Gamma(x)|$ — выпуклые функции. Свойство логарифмич. выпуклости определяет Г.-ф. среди всех решений функционального уравнения

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$$

с точностью до постоянного множителя.

Для положительных x Г.-ф. имеет единственный минимум при $x = 1{,}4616321\ldots$, равный $0{,}885603\ldots$

Локальные минимумы функции $|\Gamma(x)|$ при $x \to -\infty$ образуют последовательность, стремящуюся к нулю.

Г.-ф. представляет собой мероморфную функцию с простыми полюсами в точках $z = 0, -1, -2, \ldots$

Функция $1/\Gamma(z)$ является целой функцией 1-го порядка максимального типа:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1 + \frac{z}{n}e^{-z/n}\right\},$$

где C — постоянная Эйлера. Эта формула послужила отправным пунктом для создания теории разложения целых функций в бесконечные произведения. При этом асимптотически

$$\ln M(r) \sim r\ln r, \quad r \to \infty,$$

где

$$M(r) = \max_{|z|=r} \frac{1}{|\Gamma(z)|}.$$

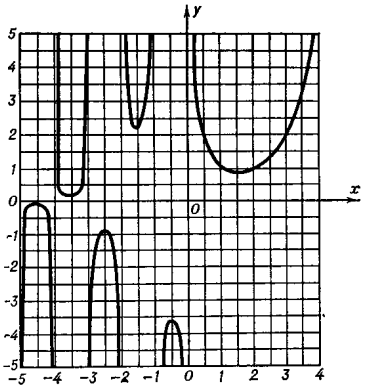


Рис. График функции $y = \Gamma(x)$.

Через Г.-ф. выражается большое число определённых интегралов, бесконечных произведений и сумм рядов. Она играет важную роль в теории специальных функций — цилиндрических, гипергеометрических и др. Г.-ф. и её свойства используются также в аналитич. теории чисел.

Назв. «Г.-ф.» и обозначение $\Gamma(z)$ предложил А. Лежандр (1814).

● Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами, пер. с англ., М., 1979.

Е. Д. Соломенцев.

ГА́НКЕЛЯ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — одно из *интегральных преобразований*, предложенное Г. Ганкелем (1864).

ГА́НКЕЛЯ ФУ́НКЦИИ — *цилиндрические функции* 3-го рода. Г. ф. введены Г. Ганкелем (1869).

ГАРМО́НИКА (от греч. ἁρμονικός — соразмерный, гармонический) — простейшая периодическая функция вида

$$y = f(x) = a\sin(\omega x + \varphi_0) = a\cos(\omega x - \varphi_0), \qquad (*)$$

где a — амплитуда, ω — круговая частота, φ_0 — начальная фаза. Если переменная x есть время t, то величина $y = f(t)$ совершает *гармоническое колебание* с периодом $T = 2\pi/\omega$ и частотой $\nu = 1/T = \omega/2\pi$. Функция вида (*) наз. основной Г. Функции

$$a_2\sin(2\omega x + \varphi_0),\ a_3\sin(3\omega x + \varphi_0),\ \ldots,\ a_k\sin(k\omega x + \varphi_0),\ \ldots$$

наз. соответственно второй, третьей и т. д. высшими Г. относительно основной. Частоты высших Г. кратны низшей — основной частоте, к-рой обладает основная Г. Периодич. функция может быть разложена на последовательность Г., что составляет задачу *гармонического анализа*.

ГАРМОНИ́ЧЕСКАЯ ПРОПО́РЦИЯ — пропорция, средние члены которой равны, а последний член представляет собой разность между первым и средним:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}.$$

Разложение числа a на два слагаемых b и $a-b$, образующих Г. п., наз. гармоническим делением или *золотым сечением*, а также делением в крайнем и среднем отношении.

ГАРМОНИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ — действительная функция $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ от n действительных переменных, заданная в некоторой области D, непрерывная в D вместе с частными производными 1-го и 2-го порядков и удовлетворяющая в D уравнению Лапласа:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0.$$

Иногда это определение распространяется и на комплексные функции $w(x)=u(x)+iv(x)$ в том смысле, что их действительная и мнимая части

$$u(x)=\operatorname{Re} w(x) \quad \text{и} \quad v(x)=\operatorname{Im} w(x)$$

являются Г. ф.

В случае неограниченной области D с конечной границей S обычно добавляют требование, чтобы Г. ф. $u(x)$ была регулярной в бесконечности, т. е. чтобы при $n\geqslant 3$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x)=u(\infty)=0, \quad |x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2},$$

а при $n=2$ существовал конечный предел

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x)=u(\infty).$$

Основные свойства Г. ф. здесь формулируются для случая Г. ф. $u(x)=u(x_1, x_2, x_3)$ от трёх переменных (с соответствующими изменениями они верны и при любом числе переменных $n\geqslant 2$).

1) Если замкнутая гладкая поверхность S вместе со своей внутренней областью расположена в D, то

$$\int \frac{\partial u(y)}{\partial n}\, dS(y)=0,$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали.

2) Теорема о среднем значении: если шар $B(x_0, R)$ радиуса R с центром в точке $x_0\in D$ расположен вместе со своей граничной сферой $S(x_0, R)$ в D, то среднее арифметическое значение Г. ф. по объёму шара равно значению Г. ф. $u(x)$ в центре шара, т. е.

$$u(x_0)=\frac{3}{4\pi R^3}\int_{B(x_0, R)} u(y)\, dB(y).$$

Среднее по площади сферы $S(x_0, R)$ также равно значению Г. ф. в центре.

3) Принцип экстремума: ни в какой точке $x_0\in D$ конечной области D Г. ф. $u(x)$ не может достигать локального экстремума. Следовательно, если Г. ф. $u(x)$ непрерывна в области D и на её границе S, то её наибольшее и наименьшее значения достигаются только в точках границы S.

4) Если известно, что Г. ф. $u(x)$ ограничена сверху или снизу во всём пространстве, то $u(x)$ есть постоянная.

5) Г. ф. $u(x)$ есть аналитич. функция от координат x_1, x_2, x_3 в окрестности любой точки $x_0\in D$. В частности, Г. ф. $u(x)$ имеет частные производные всех порядков, к-рые также являются Г. ф.

6) Первая теорема Гарнака: если последовательность Г. ф. $\{u_n(x)\}$ в ограниченной области D, непрерывных в D и на границе S, равномерно сходится на S, то она равномерно сходится и в D, причём предельная функция

$$u(x)=\lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

есть Г. ф. в D.

7) Вторая теорема Гарнака: если последовательность Г. ф. $\{u_n(x)\}$ монотонна в области D и сходится, по крайней мере, в одной точке $x_0\in D$, то она сходится всюду в D к Г. ф. $u(x)=\lim_{n\to\infty} u_n(x)$.

Имеется тесная связь между Г. ф. двух переменных (x_1, x_2) и аналитич. функциями комплексного переменного x_1+ix_2. Действительная и мнимая части аналитич. функции являются сопряжёнными Г. ф., т. е. они связаны уравнениями Коши — Римана.

Важное значение Г. ф. в физике и технике обусловлено тем, что во многих вопросах, где речь идёт о состоянии части пространства, зависящем от положения точки, но не от времени (равновесие, установившееся движение и т. п.), соответствующее состояние описывается Г. ф. от координат точки. Иначе говоря, часто встречаются потенциальные векторные поля вида $\boldsymbol{s}=-\operatorname{grad} u(x)$. Такие поля в областях, свободных от источников поля, удовлетворяют уравнению сохранения $\operatorname{div}\boldsymbol{s}=-\Delta u(x)=0$, т. е. уравнению Лапласа, а значит в таких областях потенциал $u(x)$ есть Г. ф.

Примеры: если $\boldsymbol{s}$ — силовой вектор гравитационного поля, то $u(x)$ — ньютонов потенциал сил тяготения; если $\boldsymbol{s}$ — поле скоростей установившегося движения несжимаемой жидкости или газа, то $u(x)$ — потенциал скоростей; если $\boldsymbol{s}$ — напряжённость электростатич. поля в однородной и изотропной среде, то $u(x)$ — потенциал электростатич. поля. В случае стационарного распределения тепла в однородной и изотропной среде Г. ф. $u(x)$ является непосредственно температура среды.

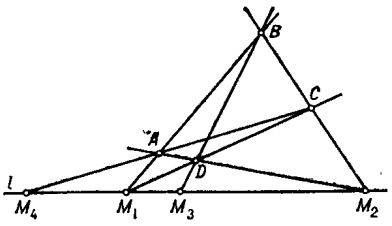
Важнейшее значение в теории Г. ф. имеют краевые задачи, в к-рых требуется найти Г. ф. $u(x)$ внутри области D на основании данных о поведении $u(x)$ на границе S этой области. *Дирихле задача*, или первая краевая задача, состоит в нахождении Г. ф. $u(x)$ по её значениям на границе S; напр., найти температуру внутри тела по температуре на его поверхности. *Неймана задача*, или вторая краевая задача, состоит в нахождении Г. ф. $u(x)$ по заданным на границе значениям её нормальной производной; напр., найти темп-ру внутри тела по заданному градиенту темп-ры на его поверхности.

Для решения этих и других краевых задач в теории Г. ф. разработаны различные методы. Важное значение имеют методы численного решения конкретных краевых задач с помощью ЭВМ.

● Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, 2 изд., т. 2, М., 1968; Тиман А. Ф., Трофимов В. Н., Введение в теорию гармонических функций, М., 1968.

Е. Д. Соломенцев.

ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЧЕТВЁРКА точек — четвёрка точек на прямой, обладающая тем свойством, что её двойное отношение равно -1. Если $(M_1M_2M_3M_4)$ есть Г. ч., то говорят, что пара точек M_1M_2 гармонически разделяет пару M_3M_4 (гармонически расположены). Г. ч. может быть определена без привлечения метрич. понятий. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник (рис.), M_1 и M_2 — точки пересечения противоположных сторон, а M_3 и M_4 — точки пересечения диагоналей BD и AC четырёхугольника $ABCD$ с прямой l. Тогда четвёрка точек $(M_1M_2M_3M_4)$ представляет собой Г. ч. Четвёрка прямых (или плоскостей), проходящих через одну точку (прямую), наз. гармонической четвёркой прямых (плоскостей), если она проектирует Г. ч. точек.



ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ — раздел математики, объединяющий методы теории *Фурье рядов* и *Фурье интегралов*. Сущность Г. а. заключается в представлении функций в виде суммы гармонич. колебаний. Классич. Г. а. состоит в разложении периодич. функций в сходящийся ряд Фурье. В этом случае практич. проведение Г. а. связано с вычислением коэффициентов Фурье. Для нек-рых функций вычисление проводится непосредственно по формулам Эйлера — Фурье. В большинстве случаев, напр. когда анализируемая функция задана сложным аналитич. выражением, таблицей или графиком, для определения коэффициентов ряда используются либо численные методы, основанные на квадратурных формулах, либо графич. приёмы, либо специальные приборы (гармонич. анализаторы).

Аналогично исследуются почти периодич. функции. Непериодич. функции при довольно общих дополнительных условиях могут быть представлены в виде интеграла Фурье. Это представление описывает функцию как сумму бесконечно малых гармонич. компонент, параметры к-рых определяются *Фурье преобразованием*.

Классич. Г. а. развивался в 18—19 вв. под влиянием физич. задач и оформился в самостоятельную математич.

дисциплину в кон. 19 — 1-й пол. 20 вв. Дальнейшее развитие Г. а. привело к установлению тесной связи с общими проблемами теории функций и функционального анализа. Методы Г. а. используются во многих разделах математики. Напр., с помощью характеристич. функций изучаются свойства распределений случайных величин в теории вероятностей; Г. а. служит основой метода Фурье решения задач в теории дифференциальных и интегральных уравнений.

ГАРМОНИ́ЧЕСКИЙ РЯД — числовой ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots .$$

Каждый член Г. р., начиная со второго, является гармоническим средним двух соседних — этим объясняется название Г. р. Члены Г. р. стремятся к нулю, но Г. р. расходится, что было доказано Н. Оремом (ок. 1350), П. Менголи (1650), братьями И. и Я. Бернулли в конце 17 в. и Г. Лейбницем (1673). Л. Эйлером (1740) было получено асимптотическое выражение для суммы первых n членов Г. р.:

$$s_n=\ln n+C+\varepsilon_n,$$

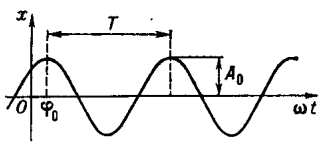
где $C=0{,}5772156649\ldots$ — постоянная Эйлера, а $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$. Обобщённый Г. р.

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots$$

сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$.

ГАРМОНИ́ЧЕСКОЕ ДЕЛЕ́НИЕ — см. *Гармоническая пропорция.*

ГАРМОНИ́ЧЕСКОЕ КОЛЕБА́НИЕ — периодическое изменение во времени физической величины, происходящее по закону косинуса или синуса. Графически Г. к. представляется общей синусоидой (рис.), аналитически — в виде



$$x=x(t)=A_0\cos(\omega t-\varphi_0),$$

где $x=x(t)$ — значение колеблющейся величины в момент времени t, A_0 — её максимальное значение (амплитуда), ω — круговая частота, т. е. число колебаний за 2π единиц времени, $\omega t-\varphi_0$ — фаза Г. к., постоянная φ_0 — его начальная фаза. Продолжительность одного полного колебания наз. его периодом $T=2\pi/\omega$, обратная величина, соответствующая числу полных колебаний в единицу времени, наз. частотой Г. к. $\nu=1/T=\omega/2\pi$.

Период Г. к. не зависит от амплитуды (изохронность Г. к.). Скорость, ускорение и все высшие производные гармонически колеблющейся величины изменяются гармонически с той же частотой. В природе из-за диссипации энергии абсолютно точные Г. к. осуществить невозможно. Однако встречается много важных процессов колебательного характера, близких к Г. к. Таковы, напр., малые колебания механич. систем относительно их устойчивого положения равновесия.

Величины, меняющиеся периодически и почти периодически, могут быть с любой степенью точности представлены суммой различных Г. к., что составляет задачу *гармонического анализа.*

ГАРМОНИ́ЧЕСКОЕ ПО́ЛЕ — см. *Векторный анализ.*

ГАРМОНИ́ЧЕСКОЕ СРЕ́ДНЕЕ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — число h, обратное которому есть среднее арифметическое чисел, обратных данным числам $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$h=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}.$$

ГАРНА́КА ТЕОРЕ́МЫ — две теоремы о сходимости последовательности *гармонических функций.* Доказаны К. Гарнаком (1887).

ГАТО́ ДИФФЕРЕНЦИА́Л, слабый дифференциал,— см. *Дифференциал.*

ГАТО́ ПРОИЗВО́ДНАЯ, слабая производная,— один из видов *производной* отображения. Введена Р. Гато (1913—14) как обобщение производной Фреше.

ГА́УССА ЗАДА́ЧА о восьми ферзях: можно ли на шахматной доске расставить восемь ферзей так, чтобы ни один из них не находился под ударом какого-либо другого? Г. з. сводится к нахождению наибольшего внутренне устойчивого множества в симметрич. графе с 64 вершинами (клетки шахматной доски), при этом две вершины инцидентны, если соответствующие им клетки расположены на одной и той же горизонтали, вертикали или диагонали. К. Гаусс, рассматривавший эту задачу, предполагал существование 76 решений её. На деле их оказалось 92. При наличии хорошего алгоритма для нахождения наименьшего внешне устойчивого множества в графе Г. з. решается во много раз быстрее, чем при непосредственной расстановке фигур.

ГА́УССА ЗАКО́Н — употребительное название *нормального распределения.* Название связано с той ролью, к-рую это распределение играет в теории ошибок. Плотности вероятности

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2},\quad h>0 \qquad (*)$$

(именно они первоначально назывались Г. з.) появились у К. Гаусса в соч. «Теория движения небесных тел» (1809). В книге 2 (раздел 3, § 177) был сформулирован принцип: «Если какая-нибудь величина будет определена из многих непосредственных наблюдений, произведенных при одинаковых обстоятельствах и с одинаковой тщательностью, то среднее арифметическое из всех наблюдавшихся значений окажется наиболее вероятным значением...». Это положение интерпретируется следующим образом: пусть истинное значение наблюдаемой величины будет z, и пусть плотность вероятности получить результат x равна $\varphi(x-z)$. Тогда при любом n и любых $x_1, \ldots, x_n$ совместная плотность $\varphi(x_1-z)\ldots\varphi(x_n-z)$ достигает максимума (как функция z) при

$$z=\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}.$$

Отсюда легко получить сначала, что отношение $\varphi'(x)/x\varphi(x)$ не зависит от x, а затем, что $\varphi(x)$ имеет вид (*). Следует отметить, что указанный выше принцип неоднократно подвергался критике.

ГА́УССА ИНТЕГРА́Л ВЕРОЯ́ТНОСТИ, функция нормального распределения,— см. *Интеграл вероятности.*

ГА́УССА ИНТЕРПОЛЯЦИО́ННАЯ ФО́РМУЛА — формула, использующая в качестве узлов интерполяции ближайшие к точке интерполирования x узлы. Если $x=x_0+th$, то формула

$$G_{2n+1}(x_0+th)=f_0+f^1_{1/2}t+f^2_0\frac{t(t-1)}{2!}+\ldots$$
$$\ldots+f^{2n}_0\frac{t(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2](t-n)}{(2n)!}, \qquad (1)$$

написанная по узлам $x_0, x_0+h, x_0-h, \ldots, x_0+nh, x_0-nh$, наз. формулой Гаусса для интерполирования вперёд, а формула

$$G_{2n+1}(x_0+th)=f_0+f^1_{-1/2}t+f^2_0\frac{t(t+1)}{2!}+\ldots$$
$$\ldots+f^{2n}_0\frac{t(t^2-1)\cdot\ldots\cdot[t^2-(n-1)^2](t+n)}{(2n)!}, \qquad (2)$$

написанная по узлам $x_0, x_0-h, x_0+h, \ldots, x_0-nh, x_0+nh$, наз. формулой Гаусса для интерполирования назад. В формулах (1) и (2) использованы конечные разности, определяемые следующим образом:

$$f^1_{i+1/2}=f_{i+1}-f_i,\quad f^m_i=f^{m-1}_{1+i/2}-f^{m-1}_{i-1/2}.$$

ГА́УССА КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — квадратурная формула вида

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx\approx\sum_{i=1}^n c_i f(x_i),$$

в к-рой узлы x_i и веса c_i подбираются так, чтобы формула была точна для функций

$$\sum_{k=0}^{2n-1} a_k \omega_k(x),$$

где $\omega_k(x)$ — заданные линейно независимые функции (пределы интегрирования могут быть и бесконечными). Г. к. ф. введены К. Гауссом (1816) для

$$a=-1,\ b=1,\ p(z)\equiv 1.$$

Г. к. ф. применяется в тех случаях, когда подинтегральная функция достаточно гладкая, а выигрыш в числе узлов крайне существен: напр., если $f(x)$ определяется из дорогостоящих экспериментов или при вычислении кратных интегралов как повторных. При практич. применении в таких случаях очень важен удачный подбор весовой функции $p(x)$ и функций $\omega_j(x)$.

Для широких классов $p(x)$ и $\omega_j(x)$ составлены таблицы узлов Г. к. ф., в частности при

$$p(x)\equiv 1,\ \omega_j(x)=x^j \text{ до } n=512.$$

При $p(x)\equiv 1$, $\omega_j(x)=x^j$ Г. к. ф. применяется в стандартных программах интегрирования с автоматич. выбором шага как метод вычисления интегралов по подотрезкам разбиения.

● Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, М., 1966.

ГА́УССА МЕ́ТОД — метод последовательного исключения неизвестных для нахождения решений системы линейных алгебраических уравнений, впервые описанный К. Гауссом (1849). Пусть дана система

$$a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n-a_j=0,\quad j=1,\ \ldots,\ m,\qquad (S^0)$$

где a_{ji}, a_j — элементы произвольного поля. Без ограничения общности можно считать, что $a_{11}\neq 0$. Г. м. состоит в следующем. Из второго уравнения системы S^0 вычитают первое её уравнение, умноженное на a_{21}/a_{11}, из третьего — первое, умноженное на a_{23}/a_{11}, и т. д. Пусть S^1 — система полученных уравнений-разностей. При наличии в системе S^1 ненулевого коэффициента (после возможного изменения порядка уравнений и неизвестных) поступают с ней так же, как с системой S^0, и т. д. Процесс оканчивается системой S^r ($r\leqslant m$) с нулевыми коэффициентами при всех неизвестных, если $r<m$; при $r=m$ система S^r считается пустой. Система S^0 тогда и только тогда совместна, когда система S^r либо совместна (т. е. не имеет отличных от нуля свободных членов), либо пуста.

Пусть система S^0 совместна и $(x_r^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ — к.-л. решение системы S^{r-1}. Подставляя его координаты вместо соответствующих неизвестных в к.-л. уравнение системы S^{r-2} с ненулевым коэффициентом при x_{r-1} (напр., в её первое уравнение), находят из него $x_{r-1}=x_{r-1}^0$ и получают её решение $(x_{r-1}^0, x_r^0,\ \ldots,\ x_n^0)$. Затем аналогично переходят к системе S^{r-3} и т. д. В заключение получается решение $(x_1^0,\ \ldots,\ x_{r-1}^0, x_r^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ системы S^0.

ГА́УССА РЯД — см. *Гипергеометрическая функция.*

ГА́УССА ТЕОРЕ́МА: *гауссова кривизна* регулярной поверхности в евклидовом пространстве не меняется при изгибании поверхности. Именно гауссова кривизна выражается через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и их производные. Г. т. отражает тот факт, что *внешняя кривизна* поверхности в евклидовом пространстве равна её *внутренней кривизне.*

Г. т. доказана К. Гауссом (1827) и оценена им как theorema egregium — «превосходная теорема».

ГА́УССА ФО́РМУЛА пасхалии — формула для вычисления дня празднования христианской пасхи (первого воскресенья вслед за первым весенним полнолунием после весеннего равноденствия). Поскольку правила вычисления дня пасхи требуют выполнения определённых условий, связанных с движением Земли вокруг Солнца, обращением Луны вокруг Земли, с семидневной неделей, даты празднования пасхи непостоянны и перемещаются от года к году. Для определения этой даты как по юлианскому, так и по григорианскому календарю К. Гаусс (1802) предложил весьма простые формулы. Ниже указана Г. ф. для юлианского календаря.

Пусть a, b и c — остатки от деления числа года на 19, 4 и 7, d — остаток от деления $19a+15$ на 30, e — остаток от деления $2b+4c+6d+6$ на 7. Пасха приходится на $22+(d+e)$ марта или $(d+e)$ — 9 апреля старого (юлианского) стиля.

ГА́УССА — БОННЕ́ ФО́РМУЛА — формула, связывающая *полную кривизну* области G регулярной поверхности с интегралом от *геодезической кривизны* k_g границы Г этой области:

$$\iint_G K\,dS+\oint_\Gamma k_g\,ds=2\pi,$$

где K — гауссова кривизна, dS — элемент площади области G, ds — элемент длины дуги границы Г.

Г.—Б. ф. обобщается в различных направлениях: напр., область G может быть многосвязной, граница Г — кусочно гладкой, поверхность — гладкой ограниченной кривизны.

Формула была опубликована О. Бонне (1848), однако она была ещё раньше получена К. Гауссом (1827; он опубликовал её частный случай).

ГА́УССА — ЛАПЛА́СА РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — одно из названий *нормального распределения*, которое наряду с другими названиями (Гаусса закон, второй закон Лапласа, Лапласа — Гаусса распределение и т. д.) связывает историю открытия и первых приложений этого распределения к различным задачам теории вероятностей с именами К. Гаусса и П. Лапласа. Нормальное распределение появилось у К. Гаусса (1809) и П. Лапласа (1812) в связи с исследованиями по теории ошибок и методу наименьших квадратов. Так, в развитой К. Гауссом для задач астрономии и геодезии теории ошибок наблюдений, плотность вероятности случайных ошибок выражалась функцией

$$\varphi(\Delta)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\Delta^2},\quad h>0$$

(см. *Гаусса закон*). П. Лаплас, кроме того, получил интеграл (функцию Лапласа)

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau e^{-t^2}dt$$

как приближённое значение (при больших n) вероятности того, что число «удач» в n *Бернулли испытаниях* с вероятностью «удачи» p будет заключено в пределах $np-\tau\sqrt{2np(1-p)}$ и $np+\tau\sqrt{2np(1-p)}$ (т. н. предельная формула Лапласа). Однако соотношение, где нормальное распределение появляется как предельная форма биномиального с $p=1/2$, было найдено А. Муавром (1733).

ГА́УССОВА КРИВИЗНА́ — кривизна поверхности в 3-мерном евклидовом пространстве. Она равна произведению главных кривизн, т. е. является *внешней кривизной*, и для поверхности в евклидовом пространстве совпадает с её *внутренней кривизной.* Формула, выражающая Г. к. через коэффициенты первой (метрической) квадратичной формы, впервые получена К. Гауссом (1827, отсюда и название; сам же К. Гаусс называл эту величину «мерой кривизны»).

ГА́УССОВО КОЛЬЦО́ — то же, что *факториальное кольцо.*

ГА́УССОВО ЧИСЛО́ — целое комплексное число $a+bi$, где a и b — любые целые рациональные числа. Г. ч. образуют на комплексной плоскости решётку всех точек с целыми координатами. Все Г. ч. образуют кольцо. В этом кольце делителями единичного элемента будут 1, -1, i, $-i$; простыми (т. е. неразложимыми в нетривиальное произведение) числами будут числа вида $\alpha=a+bi$, модули $N(\alpha)=a^2+b^2=p$ к-рых есть простые числа p вида $4n+1$ и $4n+3$. Любое Г. ч. однозначно раскладывается в произведение простых Г. ч. Кольца, характеризующиеся этим свойством, наз. гауссовыми кольцами или *факториальными кольцами.*

Г. ч. впервые были рассмотрены К. Гауссом (1832) в работе о биквадратичных вычетах. Они явились первым примером расширения поля рациональных чисел. К. Гауссом же были найдены основные свойства множества целых комплексных чисел.

ГА́УССОВСКИЙ ПРОЦЕ́СС — действительный случайный процесс $X=X(t)$, $t\in T$, любые конечномерные распределения которого являются гауссовскими, т. е. характеристические функции величин $X(t_1)$, ..., $X(t_n)$ при любых t_1, ..., $t_n\in T$ имеют вид

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ \ldots,\ u_n)=\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}A(t_k)\,u_k-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}B(t_k,\ t_j)\,u_k u_j\right\},$$

где $A(t)=\mathsf{E}X(t)$ — математическое ожидание и

$$B(t,s)=\mathsf{E}\,[X(t)-A(t)]\,[X(s)-A(s)]$$

— корреляционная функция. Распределение вероятностей Г. п. $X=X(t)$ полностью задаётся его математич. ожиданием $A(t)$ и корреляционной функцией $B(t,\ s)$, $s,\ t\in T$. Для любой $A(t)$ и любой положительно определённой функции $B(t,\ s)$ существует Г. п. $X(t)$, у к-рого среднее значение и корреляционная функция суть именно $A(t)$ и $B(t,\ s)$.

ГА́УССОВЫ ЛОГАРИ́ФМЫ — логарифмы сумм и разностей чисел. Открыты Дж. Леонелли (1802). Названы по имени К. Гаусса, к-рый издал (1812) пятизначные таблицы таких логарифмов.

ГЕ́ГЕНБАУЭ́РА МНОГОЧЛЕ́НЫ — то же, что *ультрасферические многочлены*. Рассматривались Л. Гегенбауэром (1877).

ГЁДЕЛЕВ НО́МЕР — см. *Арифметизация*.

ГЁДЕЛЯ ТЕОРЕ́МА О НЕПО́ЛНОТЕ́ — общее название двух теорем, доказанных К. Гёделем (1931). Первая Г. т. о н. утверждает, что если формальная система арифметики (см. *Формальная арифметика*) непротиворечива, то в ней найдётся формально неразрешимое предложение, т. е. такая замкнутая формула A, что ни A, ни $\neg A$ не являются теоремами этой системы. Вторая Г. т. о н. утверждает, что в качестве A можно взять формулу, к-рая естественным образом выражает непротиворечивость формальной арифметики.

Первая и вторая Г. т. о н. представляют собой важнейшие *метатеоремы*. Они показали неосуществимость в целом программы Гильберта (см. *Метаматематика*), к-рая предусматривала полную формализацию существенной части математики и обоснование полученной формальной системы путём доказательства её непротиворечивости финитными методами.

● Успенский В. А., Теорема Гёделя о неполноте, М., 1982.

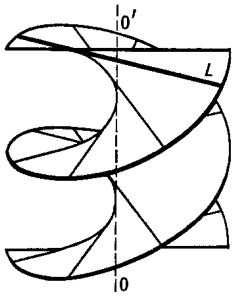
ГЁДЕЛЯ ТЕОРЕ́МА О ПО́ЛНОТЕ́ — утверждение о полноте классического *предикатов исчисления*: если предикатная формула истинна в любой *интерпретации*, то она выводима в исчислении предикатов. Доказана К. Гёделем (1930). Г. т. о п. является одной из важнейших теорем математич. логики. Она показывает, что классич. исчисление предикатов содержит все логич. законы, к-рые могут быть выражены посредством предикатных формул.

Известны многочисленные варианты и обобщения Г. т. о п. Напр., если из множества предикатных формул M нельзя вывести противоречие по правилам исчисления предикатов, то существует *модель* для M, т. е. такая интерпретация, в к-рой истинны все формулы из M. Этот результат послужил одной из отправных точек при построении теории моделей.

ГЕ́ЙНЕ — БОРЕ́ЛЯ ЛЕ́ММА — установленная Г. Гейне (70-е гг. 19 в.) и Э. Борелем (1898) лемма о покрытии отрезка. См. *Топология*.

ГЕКСАЭ́ДР (от греч. ἑξάεδρον, от ἕξ — шесть и ἕδρα — основание, грань) — шестигранник; правильный Г.— куб. Термин «Г.» приписывают Паппу Александрийскому (3 в.).

ГЕЛИКО́ИД (от греч. ἑλικοειδής — винтовой, от ἕλιξ, здесь — спираль, винт и εἶδος — форма, вид) — винтовая поверхность (рис.), описываемая прямой L, которая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси OO', пересекает ось движения под постоянным углом α и одновременно перемещается поступательно с постоянной скоростью вдоль этой оси. При $\alpha=\pi/2$ Г. наз. прямым или минимальным. При $\alpha\neq\pi/2$ Г. наз. косым.



Уравнение прямого Г. в параметрич. форме имеет вид

$$x=\rho\cos t,\ y=\rho\sin t,\ z=kt.$$

ГЁЛЬДЕРА НЕРА́ВЕНСТВО — неравенство для конечных сумм действительных или комплексных чисел a_i и b_i:

$$|a_1b_1+\ldots+a_nb_n|\leqslant$$
$$\leqslant(|a_1|^p+\ldots+|a_n|^p)^{1/p}\,(|b_1|^q+$$
$$+\ldots+|b_n|^q)^{1/q},$$

где $p>1$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Г. н. имеет аналоги для бесконечных рядов

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_ib_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{1/q}$$

и для интегралов

$$\left|\int f(x)\,g(x)\,dx\right|\leqslant\left[\int|f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}\left[\int|g(x)|^q\,dx\right]^{1/q},$$

если стоящие в правых частях ряды и интегралы сходятся. Г. н. установлено О. Гёльдером (1889). При $p=q=2$ Г. н. для бесконечных сумм и бесконечных рядов превращается в неравенство Коши, а для интегралов — в неравенство Буняковского.

ГЁЛЬДЕРА УСЛО́ВИЕ — неравенство, в котором приращение функции оценивается через приращение её аргумента. Функция $f(x)$, определённая в области E n-мерного евклидова пространства, удовлетворяет в точке $y\in E$ Г. у. с показателем α (Г. у. порядка α), где $0<\alpha\leqslant1$, и коэффициентом $A(y)$, если

$$|f(x)-f(y)|\leqslant A(y)\,|x-y|^{\alpha}\qquad(*)$$

для всех $x\in E$, достаточно близких к y.

Для числовых функций одного действительного переменного условие вида (*) было введено Р. Липшицем (1864) в связи с исследованиями по тригонометрич. рядам. В этом случае Г. у. правильнее называть условием Липшица порядка α с константой A. Для числовых функций n ($n\geqslant2$) действительных переменных Г. у. было введено О. Гёльдером при исследовании дифференциальных свойств ньютонова потенциала.

ГЕ́ЛЬМГО́ЛЬЦА УРАВНЕ́НИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными вида

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}+cu=0,$$

где c — постоянное число. К Г. у. приводит изучение установившихся колебательных процессов. При $c=0$ Г. у. переходит в уравнение Лапласа. В случае если в правой части Г. у. стоит функция $f(x)$, это уравнение наз. неоднородным Г. у.

Для Г. у., являющегося уравнением эллиптич. типа, в ограниченной области ставятся обычные краевые задачи (Дирихле, Неймана и др.). Те значения c, для к-рых существует не равное тождественно нулю решение однородного Г. у., удовлетворяющее соответствующему однородному краевому условию, наз. собственными значениями оператора Лапласа (соответствующей краевой задачи). В частности, для задачи Дирихле все собственные значения положительны, а для задачи Неймана — неотрицательны. Для значений c, совпадающих с собственными значениями, решение краевой задачи для Г. у. заведомо неединственно. Если же значения c отличны от собственных, то теорема единственности справедлива.

При решении краевых задач для Г. у. применяются обычные методы теории эллиптич. уравнений (сведение к интегральному уравнению, вариационный метод, метод конечных разностей).

В случае неограниченной области с компактной границей для Г. у. ставятся внешние краевые задачи, к-рые при $c<0$ имеют единственное решение, стремящееся к нулю на бесконечности решение Г. у., вообще говоря, не является единственным. В этом случае для выделения единственного решения ставят дополнительные условия.

Г. у. рассматривалось Г. Гельмгольцем, к-рый получил первые теоремы о решении краевых задач для этого уравнения в 1860.

● Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977.

ГЕНЕРА́ЛЬНАЯ СОВОКУ́ПНОСТЬ — понятие теории статистического *выборочного метода*. В математич. статистике Г. с. наз. множество к.-л. однородных элементов, из к-рого по определённому правилу выделяется нек-рое подмножество, наз. выборкой. Напр., при приёмочном статистич. контроле, связанном с уничтожением контролируемых изделий, в роли Г. с. выступает множество всех изделий, подлежащее общей характеризации. В простейших случаях контролируемая выборка извлекается из Г. с. случайно (наугад), что с точки зрения теории вероятностей означает: если Г. с. содержит N элементов и отбирается выборка из n элементов ($n<N$), то выбор должен быть осуществлён таким образом, чтобы для любой группы из n элементов вероятность быть извлечённой равнялась $n!(N-n)!/N!$.

В математич. статистике принято результаты однородных наблюдений называть в ы б о р к о й даже в том случае, когда эти результаты не соответствуют понятию Г. с., указанному выше. Напр., результаты измерения к.-л. физич. постоянной, подверженные случайным ошибкам, часто наз. выборкой из бесконечной Г. с. При этом предполагают, что правило отбора задаётся функцией распределения $F(x)$, так что вероятность получить результат измерения, принадлежащий полуинтервалу $[a, b)$, выражается разностью $F(b)-F(a)$.

Понятие бесконечной Г. с. не является логически безупречным и необходимым. Для решения статистич. задач нужна не сама Г. с., а лишь те или иные характеристики соответствующей функции распределения $F(x)$. С точки зрения теории вероятностей выборка из бесконечной Г. с. представляет собой наблюдаемые значения нескольких случайных величин (обычно независимых, одинаково распределённых), имеющих заданный закон распределения. При таком истолковании термина «выборка» введение понятия Г. с. оказывается излишним. *Л. Н. Большев.*

ГЕНЕРАТРИ́СА (от лат. generatrix — родительница, родоначальница) — то же, что *производящая функция*.

ГЕОДЕЗИ́ЧЕСКАЯ (греч. γεωδαισία, букв.— деление земли, от γῆ — Земля и δαίω — разделяю) — то же, что *геодезическая линия*.

ГЕОДЕЗИ́ЧЕСКАЯ КРИВИЗНА́ — величина, характеризующая отклонение линии на поверхности от геодезической линии. Г. к. линии $\boldsymbol{r}(t)$ на поверхности — скорость вращения касательной к линии вокруг нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности. Г. к. вычисляется по формуле

$$k_g=\frac{(\boldsymbol{r}',\ \boldsymbol{r}'',\ \boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{r}'|^3}.$$

ГЕОДЕЗИ́ЧЕСКАЯ ЛИ́НИЯ, г е о д е з и ч е с к а я, — геометрическое понятие, обобщающее понятие прямой (или отрезка прямой) евклидовой геометрии на случай пространств более общего вида. Так, Г. л. на поверхности — линии на поверхности, достаточно малые дуги к-рых являются на этой поверхности кратчайшими путями между их концами. На плоскости Г. л. суть прямые, на круговом цилиндре — винтовые линии, на сфере — большие круги. Не всякая дуга Г. л. является на поверхности кратчайшим путём. Напр, на сфере дуга большого круга, бо́льшая полуокружности, не будет на этой сфере кратчайшей между своими концами. Г. л. обладает тем свойством, что их главные нормали являются нормалями к поверхности. Г. л. впервые появились (1697—98) в работах Я. Бернулли, И. Бернулли и Л. Эйлера (1728—32). Термин «геодезическая» введён П. Лапласом (1798—99) применительно к «кратчайшим линиям» на земной поверхности. Г. л. на произвольной поверхности изучал Ж. Лиувилль (1844).

Так как определение Г. л. связано только с измерениями на поверхности, они относятся к объектам *внутренней геометрии* поверхности. Понятие «Г. л.» широко применяется в теоретич. и практич. вопросах геодезии.

● Люстерник Л. А., Геодезические линии, 2 изд., М.— Л., 1940; Погорелов А. В., Дифференциальная геометрия, 5 изд., М., 1969.

ГЕОМЕТРИ́ЧЕСКАЯ КРА́ТНОСТЬ с о б с т в е н н о г о з н а ч е н и я — см. *Собственное значение*.

ГЕОМЕТРИ́ЧЕСКАЯ ПРОГРЕ́ССИЯ — последовательность чисел, каждое из которых (начиная со второго) равно предыдущему, умноженному на некоторое постоянное для данной прогрессии число $q\neq 0$ (з н а м е н а т е л ь этой Г. п.). Г. п.- наз. в о з р а с т а ю щ е й, если $q>1$, у б ы в а ю щ е й, если $0<q<1$; если $q<0$, то Г. п.— з н а к о ч е р е д у ю щ а я с я. Любой член Г. п. a_j выражается через её первый член a_1 и знаменатель q формулой

$$a_k=a_1q^{k-1},$$

а сумма S_n первых n членов Г. п. (знаменатель к-рой не равен 1) — формулой

$$S_n=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\frac{a_1q^n-a_1}{q-1}.$$

Если $|q|\leqslant 1$, то при неограниченном возрастании числа n сумма S_n стремится к пределу

$$S=\frac{a_1}{1-q}.$$

Это число S наз. с у м м о й б е с к о н е ч н о у б ы в а ю щ е й г е о м е т р и ч е с к о й п р о г р е с с и и.

Выражение

$$a_1+a_1q+\ldots+a_1q^n+\ldots \quad (\text{при } |q|<1)$$

является простейшим примером сходящегося ряда — т. н. г е о м е т р и ч е с к о г о р я д а; число $a_1/(1-q)$ — суммой геометрич. ряда.

Термин «Г. п.» связан со свойством любого члена Г. п. с положительными членами: $a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$, т. е. любой член есть среднее геометрическое между предыдущим и последующим её членами.

ГЕОМЕ́ТРИЧЕСКАЯ ТЕО́РИЯ ЧИ́СЕЛ — то же, что *геометрия чисел*.

ГЕОМЕТРИ́ЧЕСКИЕ ПОСТРОЕ́НИЯ — решение некоторых геометрических задач при помощи различных инструментов (линейки, циркуля и др.), которые предполагаются абсолютно точными. В зависимости от выбора инструментов определяется цикл задач, к-рые могут быть разрешены этими средствами. Основным набором инструментов для Г. п. являются циркуль и линейка (односторонняя, без делений). Задача на построение разрешима при помощи циркуля и линейки, если координаты искомой точки могут быть записаны в виде выражений, содержащих конечное число операций сложения, умножения, деления и извлечения квадратного корня, применённых к координатам заданных точек. Если таких выражений не существует, то задача не может быть решена при помощи циркуля и линейки. К этим задачам относятся, напр., *удвоение куба*, *трисекция угла*, *квадратура круга*. Любая задача на построение, разрешимая при помощи циркуля и линейки, может быть решена при помощи и др. наборов инструментов: одним циркулем; линейкой с двумя параллельными корнями, к-рая может быть заменена угольником; линейкой и окружностью, заданной в плоскости чертежа с отмеченным центром.

● Александров И. И., Сборник геометрических задач на построение с решениями, 18 изд., М., 1950.

ГЕОМЕТРИ́ЧЕСКИЙ РЯД — см. *Геометрическая прогрессия*.

ГЕОМЕТРИ́ЧЕСКОЕ MÉСТО — термин, применявшийся в учебной литературе для обозначения множества точек, прямых и др.

ГЕОМЕТРИ́ЧЕСКОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — см. *Нелинейное программирование.*

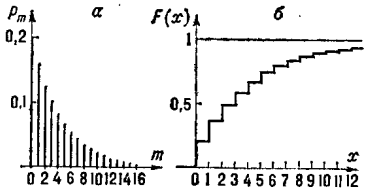
ГЕОМЕТРИ́ЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — распределение вероятностей случайной величины X с целочисленными неотрицательными значениями, заданное формулой (рис.)

$$\mathrm{P}\{X=m\}=p_m=p(1-p)^m,\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (*)$$

где $0<p<1$ — параметр. Вероятности (*) образуют геометрич. прогрессию (отсюда назв. «Г. р.»). Математич. ожидание и дисперсия Г. р. равны

$$\mathrm{E}X=\frac{1-p}{p}\ \text{и}\ \mathrm{D}X=\frac{1-p}{p^2}.$$

Обычно Г. р. возникает в схеме *Бернулли испытаний* и интерпретируется как распределение времени ожидания до первого успеха. Точнее, если число испытаний Бернулли заранее не ограничено и p — вероятность успеха, то случайная величина X — число испытаний, предшествующих наступлению первого успеха, — имеет Г. р. (*). Если $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие одинаковое Г. р. с параметром p, то сумма имеет *Паскаля распределение*. Г. р. является единственным дискретным распределением, обладающим свойством «отсутствия последействия» (см. *Марковский процесс*), и в этом смысле аналогично *показательному распределению*.



Геометрическое распределение ($p=0{,}2$): *а* — вероятности p_m, *б* — функция распределения $F(x)$.

ГЕОМЕТРИ́ЧЕСКОЕ СРЕ́ДНЕЕ n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — число g, равное корню n-й степени из их произведения:

$$g=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Г. с. двух чисел a, b, равное $\sqrt{ab}$, наз. также средним пропорциональным между a и b.

ГЕОМЕ́ТРИЯ.

СОДЕРЖАНИЕ:

Развитие геометрии 143
Обобщение предмета геометрии 145
Истолкования геометрии 146
Современная геометрия 147
Значение геометрии 149

Геометрия (греч. γεωμετρία — землемерие, от γῆ — Земля и μετρέω — измеряю) — часть математики, изучающая пространственные отношения и формы, а также другие отношения и формы, сходные с пространственными по своей структуре.

Происхождение термина «Г.», что буквально означает «землемерие», можно объяснить следующими словами, приписываемыми Евдему Родосскому (4 в. до н. э.): «Геометрия была открыта египтянами и возникла при измерении Земли. Это измерение было им необходимо вследствие разлития р. Нила, постоянно смывавшего границы». Уже у древних греков Г. означала математич. науку, в то время как для науки об измерении Земли был введён термин «геодезия». Судя по сохранившимся отрывкам древнеегипетских сочинений, Г. развилась не только из измерений Земли, но также из измерений объёмов и площадей при земляных и строительных работах и т. п.

Первоначальные понятия Г. возникли в результате отвлечения от всяких свойств и отношений тел, кроме взаимного расположения и величины. Первые выражаются в прикосновении или прилегании тел друг к другу, в том, что одно тело есть часть другого, в расположении «между», «внутри» и т. п. Вторые выражаются в понятиях «больше», «меньше», в понятии о равенстве тел.

Путём такого же отвлечения возникает понятие геометрич. тела. Геометрич. тело есть абстракция, в к-рой сохраняются лишь форма и размеры в полном отвлечении от всех других свойств. При этом Г., как свойственно математике вообще, совершенно отвлекается от неопределённости и подвижности реальных форм и размеров и считает все исследуемые ею отношения и формы абсолютно точными и определёнными. Отвлечение от протяжения тел приводит к понятиям поверхности, линии и точки. Это явно выражено, напр., в определениях, данных Евклидом: «линия есть длина без ширины», «поверхность есть то, что имеет длину и ширину». Точка без всякого протяжения есть абстракция, отражающая возможность неограниченного уменьшения всех размеров тела, воображаемый предел его бесконечного деления. Дальше возникает общее понятие о геометрич. фигуре, под к-рой понимают не только тело, поверхность, линию или точку, но и любую их совокупность.

Г. в первоначальном значении есть наука о фигурах, взаимном расположении и размерах их частей, а также о преобразованиях фигур. Это определение вполне согласуется с определением Г. как науки о пространственных формах и отношениях. Действительно, фигура, как она рассматривается в Г., и есть пространственная форма (поэтому в Г. говорят, напр., «шар», а не «тело шарообразной формы»); расположение и размеры определяются пространственными отношениями; наконец, преобразование, как его понимают в Г., также есть нек-рое отношение между двумя фигурами — данной и той, в к-рую она преобразуется. В современном, более общем смысле Г. объемлет разнообразные математич. теории, принадлежность к-рых к Г. определяется не только сходством (хотя порой и весьма отдалённым) их предмета с обычными пространственными формами и отношениями, но также тем, что они исторически сложились и складываются на основе Г. в первоначальном её значении и в своих построениях исходят из анализа, обобщения и видоизменения её понятий. Г. в этом общем смысле тесно переплетается с другими разделами математики и её границы не являются точными. См. ниже — разделы Обобщение предмета геометрии и Современная геометрия.

Развитие геометрии

В развитии Г. можно указать четыре основных периода, переходы между к-рыми обозначали качественное изменение Г.

Первый период — зарождение Г. как математич. науки — протекал в Др. Египте, Вавилоне и Греции примерно до 5 в. до н. э. Первичные геометрич. сведения появляются на самых ранних ступенях развития общества. Зачатками науки следует считать установление первых общих закономерностей, в данном случае — зависимостей между геометрич. величинами. Этот момент не может быть датирован. Самое раннее сочинение, содержащее зачатки Г., дошло до нас из Др. Египта и относится примерно к 17 в. до н. э., но и оно, несомненно, не первое. Геометрич. сведения того периода были немногочисленны и сводились прежде всего к вычислению нек-рых площадей и объёмов. Они излагались в виде правил, по-видимому в большей мере эмпирич. происхождения, логические же доказательства были, вероятно, ещё очень примитивными. Г., по свидетельству греческих историков, была перенесена в Грецию из Египта в 7 в. до н. э. Здесь на протяжении нескольких поколений она складывалась в стройную систему. Процесс этот происходил путём накопления новых геометрич. знаний, выяснения связей между разными геометрич. фактами, выработки приёмов доказательств и, наконец, формирования понятий о фигуре, о геометрич. предложении и о доказательстве.

Этот процесс привёл, наконец, к качественному скачку. Г. превратилась в самостоятельную математич. науку; появились систематич. её изложения, где её предложения последовательно доказывались. С этого времени начинается второй период развития Г. Известны упоминания систематич. изложения Г., среди к-рых данное в 5 в. до н. э. Гиппократом Хиосским. Сохранились же и сыграли в дальнейшем решающую роль появившиеся ок. 300 до н. э. *«Начала» Евклида*. Здесь Г. представлена так, как её

в основном понимают и теперь, если ограничиваться *элементарной геометрией*: это — наука о простейших пространственных формах и отношениях, развиваемая в логич. последовательности, исходя из явно формулированных основных положений — аксиом и основных пространственных представлений. Г., развиваемую на тех же основаниях (аксиомах), даже уточнённую и обогащённую как в предмете, так и в методах исследования, наз. *евклидовой геометрией*. Ещё в Греции к ней добавляются новые результаты, возникают новые методы определения площадей и объёмов (Архимед, 3 в. до н. э.), учение о конич. сечениях (Аполлоний Пергский, 3 в. до н. э.), присоединяются начатки тригонометрии (Гиппарх, 2 в. до н. э.) и Г. на сфере (Менелай, 1 в. н. э.). Упадок античного общества привёл к сравнительному застою в развитии Г., однако она продолжала развиваться в Индии, в Ср. Азии, в странах арабского Востока.

Возрождение наук и искусств в Европе повлекло дальнейший расцвет Г. Принципиально новый шаг был сделан в 1-й пол. 17 в. Р. Декартом, к-рый ввёл в Г. м е т о д к о о р д и н а т, позволивший связать Г. с развивавшейся тогда алгеброй и зарождающимся анализом. Применение методов этих наук в Г. породило аналитич. Г., а потом и дифференциальную. Г. перешла на качественно новую ступень по сравнению с Г. древних: в ней рассматриваются гораздо более общие фигуры и используются существенно новые методы. С этого времени начинается т р е т и й п е р и о д развития Г. *Аналитическая геометрия* изучает фигуры и преобразования, задаваемые алгебраич. уравнениями в прямоугольных координатах, используя при этом методы алгебры. *Дифференциальная геометрия*, возникшая в 18 в. в результате работ Л. Эйлера, Г. Монжа и др., исследует уже любые достаточно гладкие кривые линии и поверхности, их семейства (т. е. их непрерывные совокупности) и преобразования (понятию «дифференциальная Г.» придаётся теперь часто более общий смысл, о чём см. в разделе Современная геометрия). Её название связано в основном с её методом, исходящим из дифференциального исчисления. К 1-й пол. 17 в. относится зарождение *проективной геометрии* в работах Ж. Дезарга и Б. Паскаля. Она возникла из задач изображения тел на плоскости; её первый предмет составляют те свойства плоских фигур, к-рые сохраняются при проектировании с одной плоскости на другую из любой точки. Окончательное оформление и систематич. изложение этих новых направлений Г. были даны в 18 — нач. 19 вв. Л. Эйлером для аналитич. Г. (1748), Г. Монжем для дифференциальной Г. (1795), Ж. Понселе для проективной Г. (1822), причём само учение о геометрич. изображении (в прямой связи с задачами черчения) было ещё раньше (1799) развито и приведено в систему Г. Монжем в виде *начертательной геометрии*. Во всех этих новых дисциплинах основы (аксиомы, исходные понятия) Г. оставались неизменными, круг же изучаемых фигур и их свойств, а также применяемых методов расширялся.

Ч е т в ё р т ы й п е р и о д в развитии Г. открывается построением Н. И. Лобачевским в 1826 новой, неевклидовой Г., наз. теперь *Лобачевского геометрией*. Независимо от Н. И. Лобачевского в 1832 ту же Г. построил Я. Больяй (те же идеи развивал К. Гаусс, но он не опубликовал их). Источник, сущность и значение идей Н. И. Лобачевского сводятся к следующему. В геометрии Евклида имеется аксиома о параллельных, утверждающая: «через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не более чем одну прямую, параллельную данной». Многие геометры пытались доказать эту аксиому, исходя из других основных посылок геометрии Евклида, но безуспешно. Н. И. Лобачевский пришёл к мысли, что такое доказательство невозможно. Утверждение, противоположное аксиоме Евклида, гласит: «через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не одну, а, по крайней мере, две параллельные ей прямые». Это и есть аксиома Лобачевского. По мысли Н. И. Лобачевского, присоединение этого положения к другим основным положениям Г. приводит к логически безупречным выводам. Система этих выводов и образует новую, неевклидову Г. Заслуга Н. И. Лобачевского состоит в том, что он не только высказал эту идею, но действительно построил и всесторонне развил новую Г., логически столь же совершенную и богатую выводами, как евклидова, несмотря на её несоответствие обычным наглядным представлениям. Н. И. Лобачевский рассматривал свою Г. как возможную теорию пространственных отношений; однако она оставалась гипотетической, пока не был выяснен (в 1868) её реальный смысл и тем самым было дано её полное обоснование (см. раздел Истолкования геометрии).

Переворот в Г., произведённый Н. И. Лобачевским, по своему значению не уступает ни одному из переворотов в естествознании, недаром Н. И. Лобачевский был назван «Коперником геометрии». В его идеях были намечены три принципа, определившие новое развитие Г. Первый принцип заключается в том, что логически мыслима не одна евклидова Г., но и другие геометрии. Второй принцип — это принцип самого построения новых геометрич. теорий путём видоизменения и обобщения основных положений евклидовой Г. Третий принцип состоит в том, что истинность геометрич. теории, в смысле соответствия реальным свойствам пространства, может быть проверена лишь физич. исследованием и не исключено, что такие исследования установят, в этом смысле, неточность евклидовой Г. Современная физика подтвердила это. Однако от этого не теряется математич. точность евклидовой Г., т. к. она определяется логич. состоятельностью (непротиворечивостью) этой Г. Точно так же в отношении любой геометрич. теории нужно различать их физич. и математич. истинность; первая состоит в проверяемом опытом соответствии действительности, вторая — в логич. непротиворечивости. Н. И. Лобачевский дал, таким образом, материалистич. установку философии математики. Перечисленные общие принципы сыграли важную роль не только в Г., но и в математике вообще, в развитии её аксиоматич. метода, в понимании её отношения к действительности.

Главная особенность нового периода в истории Г., начатого Н. И. Лобачевским, состоит в развитии новых геометрич. теорий — новых «геометрий» и в соответствующем обобщении предмета Г.; возникает понятие о разного рода *пространствах* (термин «пространство» имеет в науке два смысла; с одной стороны, это обычное реальное пространство, с другой — абстрактное «математическое пространство»). При этом одни теории складывались внутри евклидовой Г. в виде её особых глав и лишь потом получали самостоятельное значение. (Так складывались проективная, аффинная, конформная Г. и др., предметом к-рых служат свойства фигур, сохраняющиеся при соответствующих — проективных, аффинных, конформных и др.— преобразованиях.) Возникло понятие проективного, аффинного и конформного пространства; сама евклидова Г. стала рассматриваться в известном смысле как глава проективной Г. Другие теории, подобно геометрии Лобачевского, с самого начала строились на основе изменения и обобщения понятий евклидовой Г. Так создавалась, напр., *многомерная геометрия*; первые относящиеся к ней работы (Г. Грассман и А. Кэли, 1844) представляли формальное обобщение обычной аналитич. Г. с трёх координат на n. Нек-рый итог развития всех этих новых «геометрий» подвёл Ф. Клейн в 1872, указав общий принцип их построения (см. *Эрлангенская программа*).

Принципиальный шаг был сделан Б. Риманом (лекция 1854, опубл. 1867). Во-первых, он ясно сформулировал обобщённое понятие пространства как непрерывной совокупности любых однородных объектов или явлений (см. раздел Обобщение предмета геометрии). Во-вторых, он ввёл понятие пространства с любым законом измерения расстояний бесконечно малыми шагами (подобно измерению длины линии очень малым масштабом). Отсюда развилась обширная область Г., т. н. *риманова геометрия* и её обобщения, нашедшая важные приложения в теории относительности, в механике и др.

В тот же период зародилась *топология* как учение о тех свойствах фигур, к-рые зависят лишь от взаимного прикосновения их частей и к-рые тем самым сохраняются при любых преобразованиях, не нарушающих и не вводящих новых прикосновений, т. е. происходящих без разрывов и склеиваний. В 20 в. топология развилась в самостоятельную дисциплину.

Так Г. превратилась в разветвлённую и быстро развивающуюся в разных направлениях совокупность математич. теорий, изучающих разные пространства (евклидово, Лобачевского, проективное, римановы и т. д.) и фигуры в этих пространствах.

Одновременно с развитием новых геометрич. теорий велась разработка уже сложившихся областей евклидовой Г.— элементарной, аналитической и дифференциальной Г. Вместе с тем в евклидовой Г. появились новые направления. Предмет Г. расширился и в том смысле, что расширился круг исследуемых фигур, круг изучаемых их свойств, расширилось само понятие о фигуре. На стыке анализа и Г. возникла в 70-х гг. 19 в. общая теория точечных множеств, к-рая, однако, уже не причисляется к Г., а составляет особую дисциплину *множеств теорию*. Фигура стала определяться в Г. как множество точек. Развитие Г. было тесно связано с глубоким анализом тех свойств пространства, к-рые лежат в основе евклидовой Г. Иными словами, оно было связано с уточнением оснований самой евклидовой Г. Эта работа привела в кон. 19 в. (Д. Гильберт и др.) к точной формулировке аксиом евклидовой Г., а также других «геометрий».

Обобщение предмета геометрии

Возможность обобщения и видоизменения геометрич. понятий легче всего уяснить на примере. Так, на поверхности шара можно соединять точки кратчайшими линиями — дугами больших кругов, можно измерять углы и площади, строить различные фигуры. Их изучение составляет предмет Г. на сфере, подобно тому как планиметрия есть Г. на плоскости; Г. на земной поверхности близка к Г. на сфере. Законы Г. на сфере отличны от законов планиметрии; так, напр., длина окружности здесь не пропорциональна радиусу, а растёт медленнее и достигает максимума для экватора; сумма углов треугольника на сфере непостоянна и всегда больше двух прямых. Аналогично можно на любой поверхности проводить линии, измерять их длины, углы между ними, определять ограниченные ими площади. Развиваемая так Г. на поверхности наз. её *внутренней геометрией* (К. Гаусс, 1827). На неравномерно изогнутой поверхности соотношения длин и углов будут различными в разных местах, следовательно, она будет геометрически неоднородной в отличие от плоскости и сферы. Возможность получения разных геометрич. соотношений наводит на мысль, что свойства реального пространства могут лишь приближённо описываться обычной Г. Эта идея, впервые высказанная Н. И. Лобачевским, нашла подтверждение в общей теории относительности.

Более широкая возможность обобщения понятий Г. выясняется из следующего рассуждения. Обычное реальное пространство понимают в Г. как непрерывную совокупность точек, т. е. всех возможных предельно точно определённых местоположений предельно малого тела. Аналогично непрерывную совокупность возможных состояний к.-л. материальной системы, непрерывную совокупность к.-л. однородных явлений можно трактовать как своего рода «пространство». Вот один из примеров. Опыт показывает, что нормальное человеческое зрение трёхцветно, т. е. всякое цветовое ощущение Ц есть комбинация — сумма трёх основных ощущений: красного К, зелёного З и синего С с определёнными интенсивностями. Обозначая эти интенсивности в нек-рых единицах через x, y, z, можно написать $Ц = xК + yЗ + zС$. Подобно тому как точку можно двигать в пространстве вверх и вниз, вправо и влево, вперёд и назад, так и ощущение цвета Ц может непрерывно меняться в трёх направлениях с изменением составляющих его частей— красного, зелёного и синего. По аналогии можно сказать, что совокупность всех цветов есть трёхмерное пространство — «пространство цветов». Непрерывное изменение цвета можно изображать как линию в этом пространстве. Далее, если даны два цвета, напр. красный К и белый Б, то смешивая их в разных пропорциях, получают непрерывную последовательность цветов, к-рую можно назвать прямолинейным отрезком КБ. Представление о том, что розовый цвет Р лежит между красным и белым и что более густой розовый лежит ближе к красному, не требует разъяснения. Таким образом, возникают понятия о простейших «пространственных» формах (линия, отрезок) и отношениях (между, ближе) в пространстве цветов. Далее, можно ввести точное определение расстояния (напр., по числу порогов различения, к-рое можно проложить между двумя цветами), определить поверхности и области цветов, подобно обычным поверхностям и геометрич. телам, и т. д. Так возникает учение о пространстве цветов, к-рое путём обобщения геометрич. понятий отражает реальные свойства цветового зрения человека.

Другой пример. Состояние газа, находящегося в цилиндре под поршнем, определяется давлением и температурой. Совокупность всех возможных состояний газа можно представлять поэтому как двумерное пространство. «Точками» этого «пространства» служат состояния газа; «точки» различаются двумя «координатами» — давлением и температурой, подобно тому как точки на плоскости различаются значениями их координат. Непрерывное изменение состояния изображается линией в этом пространстве.

Далее, можно представить себе любую материальную систему — механическую или физико-химическую. Совокупность всех возможных состояний этой системы называют «фазовым пространством». «Точками» этого пространства являются сами состояния. Если состояние системы определяется n величинами, то говорят, что система имеет n степеней свободы. Эти величины играют роль координат точки — состояния, как в примере с газом роль координат играли давление и температура. В соответствии с этим такое фазовое пространство системы наз. n-мерным. Изменение состояния изображается линией в этом пространстве; отдельные области состояний, выделяемые по тем или иным признакам, будут областями фазового пространства, а границы областей — поверхностями в этом пространстве. Если система имеет только две степени свободы, то её состояния можно изображать точками на плоскости. Так, состояние газа с давлением p и температурой T изобразится точкой с координатами p и T, а процессы, происходящие с газом, изобразятся линиями на плоскости. Этот метод графич. изображения общеизвестен и постоянно используется в физике и технике для наглядного представления процессов и их закономерностей. Но если число степеней свободы больше трёх, то простое графич. изображение (даже в пространстве) становится невозможным. Тогда, чтобы сохранить полезные геометрич. аналогии, прибегают к представлению об абстрактном фазовом пространстве. Так наглядные графич. методы перерастают в это абстрактное представление.

Метод фазовых пространств широко применяется в механике, теоретич. физике и физич. химии. В механике движение механич. системы изображают движением точки в её фазовом пространстве. В физич. химии особенно важно рассматривать форму и взаимное прилегание тех областей фазового пространства системы из нескольких веществ, к-рые соответствуют качественно различным состояниям. Поверхности, разделяющие эти области, суть поверхности переходов от одного качества к другому (плавление, кристаллизация и т. п.). В самой Г. также рассматривают абстрактные пространства, «точками» к-рых служат фигуры; так определяют «пространства» кругов, сфер, прямых и т. п. В механике и теории относительности вводят также абстрактное четырёхмерное пространство, присоединяя к трём пространственным координатам время в качестве четвёртой координаты. Это означает, что события

нужно различать не только по положению в пространстве, но и во времени.

Таким образом, становится понятным, как непрерывные совокупности тех или иных объектов, явлений, состояний могут подводиться под обобщённое понятие пространства. В таком пространстве можно проводить «линии», изображающие непрерывные последовательности явлений (состояний), проводить «поверхности» и определять подходящим образом «расстояния» между «точками», давая тем самым количественное выражение физич. понятия о степени различия соответствующих явлений (состояний), и т. п. Так по аналогии с обычной Г. возникает «геометрия» абстрактного пространства; последнее может даже мало походить на обычное пространство, будучи, напр., неоднородным по своим геометрич. свойствам и конечным, подобно неравномерно искривлённой замкнутой поверхности.

Предметом Г. в обобщённом смысле оказываются не только пространственные формы и отношения, но любые формы и отношения, к-рые, будучи взяты в отвлечении от своего содержания, оказываются сходными с обычными пространственными формами и отношениями. Эти пространственно-подобные формы действительности называют «пространствами» и «фигурами». Пространство в этом смысле есть непрерывная совокупность однородных объектов, явлений, состояний, к-рые играют роль точек пространства, причём в этой совокупности имеются отношения, сходные с обычными пространственными отношениями, как, напр., расстояние между точками, равенство фигур и т. п. (фигура — вообще часть пространства). Г. рассматривает эти формы действительности в отвлечении от конкретного содержания, изучение же конкретных форм и отношений в связи с их качественно своеобразным содержанием составляет предмет других наук, а Г. служит для них методом. Примером может служить любое приложение абстрактной Г., хотя бы указанное выше применение n-мерного пространства в физич. химии. Для Г. характерен такой подход к объекту, к-рый состоит в обобщении и перенесении на новые объекты обычных геометрич. понятий и наглядных представлений. Именно это и делается в приведённых выше примерах пространства цветов и др. Этот геометрич. подход вовсе не является чистой условностью, а соответствует самой природе явлений. Но часто одни и те же реальные факты можно изображать или аналитически, или геометрически, так же, как одну и ту же зависимость можно задавать уравнением или линией на графике.

Не следует, однако, представлять развитие Г. так, что она лишь регистрирует и описывает на геометрич. языке уже встретившиеся на практике формы и отношения, подобные пространственным. В действительности Г. определяет широкие классы новых пространств и фигур в них, исходя из анализа и обобщения данных наглядной Г. и уже сложившихся геометрич. теорий. При абстрактном определении эти пространства и фигуры выступают как возможные формы действительности. Они, стало быть, не являются чисто умозрительными конструкциями, а должны служить, в конечном счёте, средством исследования и описания реальных фактов. Н. И. Лобачевский, создавая свою Г., считал её возможной теорией пространственных отношений. И так же как его Г. получила обоснование в смысле её логич. состоятельности и применимости к явлениям природы, так и всякая абстрактная геометрич. теория проходит такую же двойную проверку. Для проверки логич. состоятельности существенное значение имеет метод построения математич. моделей новых пространств. Однако окончательно укореняются в науке только те абстрактные понятия, к-рые оправданы и построением искусственной модели, и применениями, если не прямо в естествознании и технике, то хотя бы в других математич. теориях, через к-рые эти понятия так или иначе связываются с действительностью. Лёгкость, с к-рой математики и физики оперируют теперь разными «пространствами», достигнута в результате долгого развития Г. в тесной связи с развитием математики в целом и других точных наук. Именно вследствие этого развития сложилась и приобрела большое значение вторая сторона Г., указанная в общем определении, данном в начале статьи: включение в Г. исследования форм и отношений, сходных с формами и отношениями в обычном пространстве.

В качестве примера абстрактной геометрич. теории можно рассмотреть Г. n-мерного евклидова пространства. Она строится путём простого обобщения основных положений обычной Г., причём для этого имеется несколько возможностей: можно, напр., обобщать аксиомы обычной Г., но можно исходить и из задания точек координатами. При втором подходе n-мерное пространство определяют как множество к.-л. элементов-точек, задаваемых (каждая) n числами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расположенными в определённом порядке,— координатами точек. Далее, расстояние между точками $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ определяется формулой

$$XY = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2},$$

что является прямым обобщением известной формулы для расстояния в трёхмерном пространстве. Движение определяют как преобразование фигуры, к-рое не изменяет расстояния между её точками. Тогда предмет n-мерной геометрии определяется как исследование тех свойств фигур, к-рые не меняются при движениях. На этой основе легко вводятся понятия о прямой, о плоскостях различного числа измерений от двух до $n-1$, о шаре и т. д. Таким образом складывается богатая содержанием теория, во многом аналогичная обычной евклидовой Г., но во многом и отличная от неё. Нередко бывает, что результаты, полученные для трёхмерного пространства, легко переносятся с соответствующими изменениями на пространство любого числа измерений. Напр., теорема о том, что среди всех тел одинакового объёма наименьшую площадь поверхности имеет шар, читается дословно также в пространстве любого числа измерений [нужно лишь иметь в виду n-мерный объём, $(n-1)$-мерную площадь и n-мерный шар, к-рые определяются вполне аналогично соответствующим понятиям обычной Г.]. Далее, в n-мерном пространстве объём призмы равен произведению площади основания на высоту, а объём пирамиды — такому произведению, делённому на n. Такие примеры можно продолжить. С другой стороны, в многомерных пространствах обнаруживаются также качественно новые факты.

Истолкования геометрии

Одна и та же геометрич. теория допускает разные приложения, разные истолкования (осуществления, модели или интерпретации). Всякое приложение теории и есть не что иное, как осуществление нек-рых её выводов в соответствующей области явлений.

Возможность разных осуществлений является общим свойством всякой математич. теории. Так, арифметич. соотношения реализуются на самых различных наборах предметов; одно и то же уравнение описывает часто совсем разные явления. Математика рассматривает лишь форму явления, отвлекаясь от его содержания, а с точки зрения формы многие качественно различные явления оказываются часто сходными. Разнообразие приложений математики, и в частности Г., обеспечивается именно её абстрактным характером. Считают, что нек-рая система объектов (область явлений) даёт осуществление теории, если отношения в этой области объектов могут быть описаны на языке теории так, что каждое утверждение теории выражает тот или иной факт, имеющий место в рассматриваемой области. В частности, если теория строится на основе нек-рой системы аксиом, то истолкование этой теории состоит в таком сопоставлении её понятий с нек-рыми объектами и их отношениями, при к-ром аксиомы оказываются выполненными для этих объектов.

Евклидова Г. возникла как отражение фактов действительности. Её обычная интерпретация, в к-рой прямыми считаются натянутые нити, движением — механич. перемещение и т. д., предшествует Г. как математич. теории

Вопрос о других интерпретациях не ставился и не мог быть поставлен, пока не выявилось более абстрактное понимание геометрии. Н. И. Лобачевский создал неевклидову Г. как возможную геометрию, и тогда возник вопрос о её реальном истолковании. Эта задача была решена Э. Бельтрами (1868), к-рый заметил, что геометрия Лобачевского совпадает с внутренней Г. поверхностей постоянной отрицательной кривизны, т. е. теоремы геометрии Лобачевского описывают геометрич. факты на таких поверхностях (при этом роль прямых выполняют геодезич. линии, а роль движений — изгибания поверхностей на себя). Поскольку вместе с тем такая поверхность есть объект евклидовой Г., оказалось, что геометрия Лобачевского истолковывается в понятиях геометрии Евклида. Тем самым была доказана непротиворечивость геометрии Лобачевского, т. к. противоречие в ней в силу указанного истолкования влекло бы противоречие в геометрии Евклида.

Таким образом, выясняется двоякое значение истолкования геометрич. теории — физическое и математическое. Если речь идёт об истолковании на конкретных объектах, то получается опытное доказательство истинности теории (конечно, с соответствующей точностью); если же сами объекты имеют абстрактный характер (как геометрич. поверхность в рамках геометрии Евклида), то теория связывается с другой математич. теорией, в данном случае с евклидовой Г., а через неё — с суммированными в ней опытными данными. Такое истолкование одной математич. теории посредством другой стало математич. методом обоснования новых теорий, приёмом доказательства их непротиворечивости, поскольку противоречие в новой теории порождало бы противоречие в той теории, в к-рой она интерпретируется. Но теория, посредством к-рой производится истолкование, в свою очередь нуждается в обосновании. Поэтому указанный математич. метод не снимает того, что окончательным критерием истины для математич. теорий остаётся практика. В настоящее время геометрич. теории чаще всего истолковывают аналитически; напр., точки на плоскости Лобачевского можно связывать с парами чисел x и y, прямые — определять уравнениями и т. п. Этот приём даёт обоснование теории потому, что сам математич. анализ обоснован в конечном счёте огромной практикой его применения.

Современная геометрия

Принятое в современной математике формально-математич. определение понятий пространства и фигуры исходит из понятия множества. Пространство определяется как множество к.-л. элементов («точек») с условием, что в этом множестве установлены нек-рые отношения, сходные с обычными пространственными отношениями. Множество цветов, множество состояний физич. системы, множество непрерывных функций, заданных на отрезке [0, 1], и т. п. образуют пространства, где точками будут цвета, состояния, функции. Точнее, эти множества понимаются как пространства, если в них фиксируются только соответствующие отношения, напр. расстояние между точками, и те свойства и отношения, к-рые через них определяются. Так, расстояние между функциями можно определить как максимум абсолютной величины их разности: $\max|f(x)-g(x)|$. Фигура определяется как произвольное множество точек в данном пространстве. Иногда пространство — это система из множеств элементов. Напр., в проективной Г. принято рассматривать точки, прямые и плоскости как равноправные исходные геометрич. объекты, связанные отношениями «принадлежности».

Основные типы отношений, к-рые в разных комбинациях приводят ко всему разнообразию «пространств» современной Г., следующие.

1) Общими отношениями, имеющимися во всяком множестве, являются отношения принадлежности и включения: точка принадлежит множеству, и одно множество есть часть другого. Если приняты во внимание только эти отношения, то в множестве не определяется ещё никакой «геометрии», оно не становится пространством. Однако если выделены нек-рые специальные фигуры (множества точек), то «геометрия» пространства может определяться законами связи точек с этими фигурами. Такую роль играют аксиомы принадлежности в элементарной, аффинной, проективной Г.; здесь специальными множествами служат прямые и плоскости.

Тот же принцип выделения нек-рых специальных множеств позволяет определить понятие топологич. пространства — пространства, в к-ром в качестве специальных множеств выделены «окрестности» точек (с условием, что точка принадлежит своей окрестности и каждая точка имеет хотя бы одну окрестность; наложение на окрестности дальнейших требований определяет тот или иной тип топологич. пространств). Если всякая окрестность заданной точки имеет общие точки с нек-рым множеством, то такая точка наз. точкой прикосновения этого множества. Два множества можно назвать соприкасающимися, если хотя бы одно из них содержит точки прикосновения другого; пространство или фигура будет непрерывной, или, как говорят, свя́зной, если её нельзя разбить на две несоприкасающиеся части; преобразование непрерывно, если оно не нарушает соприкосновений. Таким образом, понятие топологич. пространства служит для математич. выражения понятия непрерывности. [Топологич. пространство можно определить также другими специальными множествами (замкнутыми, открытыми) или непосредственно отношением прикосновения, при к-ром любому множеству точек ставятся в соответствие его точки прикосновения.] Топологич. пространства как таковые, множества в них и их преобразования служат предметом топологии. Предмет собственно Г. (в значительной её части) составляет исследование топологич. пространств и фигур в них, наделённых ещё дополнительными свойствами.

2) Второй важнейший принцип определения тех или иных пространств и их исследования представляет введение координат. Многообразием наз. такое (связное) топологич. пространство, в окрестности каждой точки к-рого можно ввести координаты, поставив точки окрестности во взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие с системами из n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Число n есть число измерений многообразия. Пространства, изучаемые в большинстве геометрич. теорий, являются многообразиями; простейшие геометрич. фигуры (отрезки, части поверхностей, ограниченные кривыми, и т. п.) обычно — куски многообразий. Если среди всех систем координат, к-рые можно ввести в кусках многообразия, выделяются системы координат такого рода, что одни координаты выражаются через другие дифференцируемыми (то или иное число раз) или аналитич. функциями, то получают т. н. гладкое (аналитическое) многообразие. Это понятие обобщает наглядное представление о гладкой поверхности. Гладкие многообразия как таковые составляют предмет дифференциальной топологии. В собственно Г. они наделяются дополнительными свойствами. Координаты с принятым условием дифференцируемости их преобразований дают почву для широкого применения аналитич. методов — дифференциального и интегрального исчисления, а также векторного и тензорного анализа. Совокупность теорий Г., развиваемых этими методами, образует общую дифференциальную Г.; простейшим случаем её служит классич. теория гладких кривых и поверхностей, к-рые представляют собой не что иное, как одно- и двумерные дифференцируемые многообразия.

3) Обобщение понятия движения как преобразования одной фигуры в другую приводит к общему принципу определения разных пространств, когда пространством считается множество элементов (точек), в к-ром задана группа взаимно однозначных преобразований этого множества на себя. «Геометрия» такого пространства состоит в изучении тех свойств фигур, к-рые сохраняются при преобразованиях из этой группы. Поэтому с точки зрения такой Г. фигуры можно считать «равными», если одна переходит в другую посредством преобразования из данной группы.

Напр., евклидова Г. изучает свойства фигур, сохраняющиеся при движениях, аффинная Г.— свойства фигур, сохраняющиеся при аффинных преобразованиях, топология — свойства фигур, сохраняющиеся при любых взаимно однозначных и непрерывных преобразованиях. В эту же схему включаются геометрия Лобачевского, проективная Г. и др. Фактически этот принцип соединяется с введением координат. Пространство определяется как гладкое многообразие, в к-ром преобразования задаются функциями, связывающими координаты каждой данной точки и той, в к-рую она переходит (координаты образа точки задаются как функции координат самой точки и параметров, от к-рых зависит преобразование).

Поэтому общим аппаратом разработки таких «геометрий» служит теория непрерывных групп преобразований. Возможна другая, по существу эквивалентная, точка зрения, согласно к-рой задаются не преобразования пространства, а преобразования координат в нём, причём изучаются те свойства фигур, к-рые одинаково выражаются в разных системах координат. Эта точка зрения нашла применение в теории относительности, к-рая требует одинакового выражения физич. законов в разных системах координат, наз. в физике системами отсчёта.

4) Другой общий принцип определения пространств, указанный Б. Риманом (1854), исходит из обобщения понятия «расстояние». По Б. Риману, пространство — это гладкое многообразие, в к-ром задан закон измерения расстояний, точнее длин, бесконечно малыми шагами, т. е. задаётся дифференциал длины дуги кривой как функция координат точки кривой и их дифференциалов. Это есть обобщение внутренней Г. поверхностей, определённой К. Гауссом как учение о свойствах поверхностей, к-рые могут быть установлены измерением длин кривых на ней. Простейший случай представляют т. н. римановы пространства, в к-рых в бесконечно малом имеет место теорема Пифагора (т. е. в окрестности каждой точки можно ввести координаты так, что в этой точке квадрат дифференциала длины дуги будет равен сумме квадратов дифференциалов координат; в произвольных же координатах он выражается общей положительной квадратичной формой). Такое пространство, следовательно, евклидово в бесконечно малом, но в целом оно может быть не евклидовым, подобно тому как кривая поверхность лишь в бесконечно малом может быть сведена к плоскости с соответствующей точностью. Геометрии Евклида и Лобачевского оказываются частным случаем этой римановой Г. Наиболее широкое обобщение понятия расстояния привело к понятию общего метрич. пространства как такого множества элементов, в к-ром задана «метрика», т. е. каждой паре элементов отнесено число — расстояние между ними, подчинённое только общим условиям. Эта идея играет важную роль в функциональном анализе и лежит в основе нек-рых важнейших геометрич. теорий, таких, как внутренняя Г. негладких поверхностей и соответствующие обобщения римановой Г.

5) Соединение идеи Б. Римана об определении «геометрии» в бесконечно малых областях многообразия с определением «геометрии» посредством группы преобразований привело (Э. Картан, 1922—25) к понятию о таком пространстве, в к-ром преобразования задаются лишь в бесконечно малых областях; иными словами, здесь преобразования устанавливают связь только бесконечно близких кусков многообразия: один кусок преобразуется в другой, бесконечно близкий. Поэтому говорят о пространствах со «связностью» того или иного типа. В частности, пространства с «евклидовой связностью» суть римановы. Дальнейшие обобщения восходят к понятию о пространстве как о гладком многообразии, на к-ром заданы вообще «поле» к.-л. «объекта», к-рым может служить квадратичная форма, как в римановой Г., совокупность величин, определяющих связность, тот или иной тензор и др. Сюда же можно отнести так называемые расслоенные пространства. Эти концепции включают, в частности, связанное с теорией относительности обобщение римановой Г., когда рассматриваются пространства, где метрика задаётся уже не положительной, а знакопеременной квадратичной формой (такие пространства также называются римановыми или псевдоримановыми, если хотят отличить их от римановых в первоначальном смысле). Эти пространства являются пространствами со связностью, определённой соответствующей группой, отличной от группы евклидовых движений.

На почве теории относительности возникла теория пространств, в к-рых определено понятие следования точек, так что каждой точке X отвечает множество $V(X)$ следующих за нею точек. (Это является естественным математич. обобщением следования событий, определённого тем, что событие Y следует за событием X, если X воздействует на Y, и тогда Y следует за X во времени в любой системе отсчёта.) Т. к. само задание множеств Y определяет точки, следующие за X, как принадлежащие множеству $V(X)$, то определение этого типа пространств оказывается применением первого из перечисленных выше принципов, когда «геометрия» пространства определяется выделением специальных множеств. Конечно, при этом множества V должны быть подчинены соответствующим условиям; в простейшем случае — это выпуклые конусы. Эта теория включает теорию соответствующих псевдоримановых пространств.

6) Аксиоматич. метод в его чистом виде служит теперь либо для оформления уже готовых теорий, либо для определения общих типов пространств с выделенными специальными множествами. Если же тот или иной тип более конкретных пространств определяют, формулируя их свойства как аксиомы, то используют либо координаты, либо метрику и др. Непротиворечивость и тем самым осмысленность аксиоматич. теории проверяется указанием модели, на к-рой она реализуется, как это впервые было сделано для геометрии Лобачевского. Сама модель строится из абстрактных математич. объектов, поэтому «окончательное обоснование» любой геометрич. теории уходит в область оснований математики вообще, к-рые не могут быть окончательными в полном смысле, но требуют углубления (см. *Аксиоматический метод*).

Перечисленные принципы в разных сочетаниях и вариациях порождают обширное разнообразие геометрич. теорий. Значение каждой из них и степень внимания к её задачам определяются содержательностью этих задач и получаемых результатов, её связями с др. теориями Г., с др. областями математики, с точным естествознанием и задачами техники. Каждая данная геометрич. теория определяется среди других геометрич. теорий, во-первых, тем, какое пространство или какого типа пространства в ней рассматриваются. Во-вторых, в определение теории входит указание на исследуемые фигуры. Так различают теории многогранников, кривых, поверхностей, выпуклых тел и т. д. Каждая из этих теорий может развиваться в том или ином пространстве. Напр., можно рассматривать теорию многогранников в обычном евклидовом пространстве, в n-мерном евклидовом пространстве, в пространстве Лобачевского и др. Можно развивать обычную теорию поверхностей, проективную, в пространстве Лобачевского и т. д. В-третьих, имеет значение характер рассматриваемых свойств фигур. Так, можно изучать свойства поверхностей, сохраняющиеся при тех или иных преобразованиях; можно различать учение о кривизне поверхностей, учение об изгибаниях (т. е. о деформациях, не меняющих длин кривых на поверхности), внутреннюю Г. Наконец, в определение теории можно включать её основной метод и характер постановки задач. Так различают Г.: элементарную, аналитическую, дифференциальную; напр., можно говорить об элементарной или аналитич. Г. пространства Лобачевского. Различают Г. «в малом», рассматривающую лишь свойства сколь угодно малых кусков геометрич. образа (кривой, поверхности, многообразия), от Г. «в целом», изучающей, как ясно из её названия, геометрич. образы в целом на всём их протяжении. Очень общим является различение аналитич. методов и методов синтетич. Г. (или собственно геометрич. методов); первые используют средства соответст-

вующих исчислений: дифференциального, тензорного и др., вторые оперируют непосредственно геометрич. образами.

Из всего разнообразия геометрич. теорий фактически более всего развиваются n-мерная евклидова Г. и риманова (включая псевдориманову) Г. В первой разрабатывается, в особенности, теория кривых и поверхностей (и гиперповерхностей разного числа измерений), причём особое развитие получает исследование поверхностей в целом и поверхностей, существенно более общих, чем гладкие, изучавшиеся в классич. дифференциальной Г.; сюда же включаются многогранники (многогранные поверхности). Затем нужно назвать теорию выпуклых тел, к-рая, впрочем, в большей части может быть отнесена к теории поверхностей в целом, т. к. тело определяется своей поверхностью. Далее — теория правильных систем фигур, т. е. допускающих движения, переводящие всю систему саму в себя и к.-л. её фигуру в любую другую.

В теории римановых пространств исследуются вопросы, касающиеся связи их метрич. свойств с топологич. строением, поведения геодезических (кратчайших на малых участках) линий в целом, как, напр., вопрос о существовании замкнутых геодезических, вопросы «погружения», т. е. реализации данного m-мерного риманова пространства в виде m-мерной поверхности в евклидовом пространстве к.-л. числа измерений, вопросы псевдоримановой Г., связанные с общей теорией относительности, и др. К этому можно добавить развитие разнообразных обобщений римановой Г. как в духе общей дифференциальной Г., так и в духе обобщений синтетич. Г.

В дополнение следует упомянуть *алгебраическую геометрию*, развившуюся из аналитич. Г. и исследующую прежде всего геометрич. образы, задаваемые алгебраич. уравнениями; она занимает особое место, т. к. включает не только геометрические, но также алгебраич. и арифметич. проблемы. Существует также обширная и важная область исследования бесконечномерных пространств, к-рая, однако, не причисляется к Г., а включается в функциональный анализ, т. к. бесконечномерные пространства конкретно определяются как пространства, точками к-рых служат те или иные функции. Тем не менее в этой области есть много результатов и проблем носящих подлинно геометрический характер и которые поэтому следует относить к Г.

Значение геометрии

Применение евклидовой Г. представляет самое обычное явление всюду, где определяются площади, объёмы и т. п. Вся техника, поскольку в ней играют роль формы и размеры тел, пользуется евклидовой Г. Картография, геодезия, астрономия, все графич. методы, механика немыслимы без Г. Ярким примером является открытие И. Кеплером факта вращения планет по эллипсам; он мог воспользоваться тем, что эллипс был изучен ещё древними геометрами. Глубокое применение Г. представляет геометрич. кристаллография, послужившая источником и областью приложения теории правильных систем фигур.

Более отвлечённые геометрич. теории находят широкое применение в механике и физике, когда совокупность состояний к.-л. системы рассматривается как нек-рое пространство (см. раздел Обобщение предмета геометрии). Так, все возможные конфигурации (взаимное расположение элементов) механич. системы образуют «конфигурационное пространство»; движение системы изображается движением точки в этом пространстве. Совокупность всех состояний физич. системы (в простейшем случае — положения и скорости образующих систему материальных точек, напр. молекул газа) рассматривается как «фазовое пространство» системы. Эта точка зрения находит, в частности, применение в статистич. физике и др.

Впервые понятие многомерных пространств зародилось в связи с механикой ещё у Ж. Лагранжа, когда к трём пространственным координатам x, y, z в качестве четвёртой координаты было присоединено время t. Так появляется четырёхмерное «пространство - время», где точка определяется четырьмя координатами x, y, z, t. Каждое событие характеризуется этими четырьмя координатами, и, отвлечённо, множество всех событий в мире оказывается четырёхмерным пространством. Этот взгляд получил развитие в геометрич. трактовке теории относительности, данной Г. Минковским. В ней он воспользовался четырёхмерной римановой (псевдоримановой) Г. Так геометрические теории, развившиеся из обобщения данных пространственного опыта, оказались математич. методом построения более глубокой теории пространства и времени. В свою очередь теория относительности дала мощный толчок развитию общих геометрич. теорий. Возникнув из практики, Г. через ряд абстракций и обобщений возвращается к естествознанию и практике на более высокой ступени в качестве метода.

С геометрич. точки зрения многообразие пространства-времени обычно трактуется в общей теории относительности как неоднородное римановского типа, но с метрикой, определяемой знакопеременной формой, приводимой в бесконечно малой области к виду

$$dx^2+dy^2+dz^2-c^2\,dt^2$$

(c — скорость света в вакууме). Само пространство, поскольку его можно отделить от времени, оказывается также неоднородным римановым. С современной геометрич. точки зрения лучше смотреть на теорию относительности следующим образом. Специальная теория относительности утверждает, что многообразие пространства - времени есть псевдоевклидово пространство, т. е. такое, в к-ром роль «движений» играют преобразования, сохраняющие квадратичную форму:

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2,$$

точнее, это есть пространство с группой преобразований, сохраняющих указанную квадратичную форму. От всякой формулы, выражающей физич. закон, требуется, чтобы она не менялась при преобразованиях группы этого пространства, к-рые суть т. н. преобразования Лоренца. Согласно же общей теории относительности, многообразие пространства - времени неоднородно и лишь в каждой «бесконечно малой» области сводится к псевдоевклидову, т. е. оно есть пространство картановского типа (см. раздел Современная геометрия). Однако такое понимание стало возможно лишь позже, т. к. само понятие о пространствах такого типа появилось после теории относительности и было развито под её прямым влиянием.

В самой математике положение и роль Г. определяются прежде всего тем, что через неё в математику вводилась непрерывность. Математика как наука о формах действительности сталкивается прежде всего с двумя общими формами — дискретностью и непрерывностью. Счёт отдельных (дискретных) предметов даёт арифметика, пространственную непрерывность изучает Г. Одним из основных противоречий, движущих развитие математики, является столкновение дискретного и непрерывного. Уже деление непрерывных величин на части и измерение представляют сопоставление дискретного и непрерывного; напр., масштаб откладывается вдоль измеряемого отрезка отдельными шагами. Противоречие выявилось с особой ясностью, когда в Др. Греции (вероятно, в 5 в. до н. э.) была открыта несоизмеримость стороны и диагонали квадрата: длина диагонали квадрата со стороной 1 не выражалась никаким числом, т. к. понятие иррационального числа не существовало. Потребовалось обобщение понятия числа — создание понятия иррационального числа (что было сделано лишь много позже в Индии). Общая же теория иррациональных чисел была создана лишь в 70-х гг. 19 в. Прямая (а вместе с нею и всякая фигура) стала рассматриваться как множество точек. Теперь эта точка зрения является господствующей. Однако затруднения теории множеств показали её ограниченность. Противоречие дискретного и непрерывного не может быть полностью снято.

Общая роль Г. в математике состоит также в том, что с нею связано идущее от пространственных представлений точное синтетич. мышление, часто позволяющее охватить в целом то, что достигается анализом и выкладками лишь через длинную цепь шагов. Так, Г. характеризуется не только своим предметом, но и методом, идущим от наглядных представлений и оказывающимся плодотворным в решении многих проблем др. областей математики. В свою очередь Г. широко использует их методы. Таким образом, одна и та же математич. проблема может сплошь и рядом трактоваться либо аналитически, либо геометрически, или в соединении обоих методов.

В известном смысле почти всю математику можно рассматривать как развивающуюся из взаимодействия алгебры (первоначально арифметики) и Г., а в смысле метода — из сочетания выкладок и геометрич. представлений. Это видно уже в понятии совокупности всех действительных чисел как числовой прямой, соединяющей арифметич. свойства чисел с непрерывностью. Вот нек-рые основные моменты влияния Г. в математике.

1) Г., наряду с механикой, имела решающее значение в возникновении и развитии анализа. Интегрирование происходит от нахождения площадей и объёмов, начатого ещё древними учёными, причём площадь и объём как величины считались определёнными; никакое аналитич. определение интеграла не давалось до 1-й пол. 19 в. Проведение касательных было одной из задач, породивших дифференцирование. Графич. представление функций сыграло важную роль в выработке понятий анализа и сохраняет своё значение. В самой терминологии анализа виден геометрич. источник его понятий, как, напр., в терминах «точка разрыва», «область изменения переменной» и т. д. Первый курс анализа, написанный в 1696 Г. Лопиталем, назывался «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий». Теория дифференциальных уравнений в большей части трактуется геометрически (интегральные кривые и т. п.). Вариационное исчисление возникло и развивается в большей мере на задачах Г., и её понятия играют в нём важную роль.

2) Комплексные числа окончательно утвердились в математике на рубеже 18—19 вв. только вследствие сопоставления их с точками плоскости, т. е. путём построения «комплексной плоскости». В теории функций комплексного переменного геометрич. методам отводится существенная роль. Само понятие аналитич. функции $w=f(z)$ комплексного переменного может быть определено чисто геометрически: такая функция есть конформное отображение плоскости z (или области плоскости z) в плоскость w. Понятия и методы римановой Г. находят применение в теории функций нескольких комплексных переменных.

3) Основная идея функционального анализа состоит в том, что функции данного класса (напр., все непрерывные функции, заданные на отрезке [0, 1]) рассматриваются как точки «функционального пространства», причём отношения между функциями истолковываются как геометрич. отношения между соответствующими точками (напр., сходимость функций истолковывается как сходимость точек, максимум абсолютной величины разности функций — как расстояние и т. п.). Тогда многие вопросы анализа получают геометрич. освещение, оказывающееся во многих случаях очень плодотворным. Вообще, представление тех или иных математич. объектов (функций, фигур и др.) как точек нек-рого пространства с соответствующим геометрич. толкованием отношений этих объектов является одной из наиболее общих и плодотворных идей современной математики, проникшей почти во все её разделы.

4) Г. оказывает влияние на алгебру и даже на арифметику — теорию чисел. В алгебре используют, напр., понятие векторного пространства. В теории чисел создано геометрич. направление, позволяющее решать многие задачи, едва поддающиеся вычислительному методу.

5) Логич. усовершенствование и анализ аксиоматики Г. играли определяющую роль в выработке абстрактной формы аксиоматич. метода с его полным отвлечением от природы объектов и отношений, фигурирующих в аксиоматизируемой теории. На том же материале вырабатывались понятия непротиворечивости, полноты и независимости аксиом.

В целом взаимопроникновение Г. и др. областей математики столь тесно, что часто границы оказываются условными и связанными лишь с традицией. Почти или вовсе не связанными с Г. остаются лишь такие разделы, как абстрактная алгебра, математич. логика и нек-рые др.

● **История геометрии.** История математики, т. 1—3, М., 1970—72; Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций, М., 1981; Стройк Д. Дж., Краткий очерк истории математики, пер. с англ., 4 изд., М., 1983; Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966.

Классики науки. Евклид, Начала, пер. с греч., кн. 1—15, М.— Л., 1948—50; Архимед, Сочинения, М., 1962; Декарт Р., Геометрия, пер. с франц. и лат., М.— Л., 1938; Монж Г., Приложение анализа к геометрии, пер. с франц., М.— Л., 1936; Гаусс К. Ф., Общие исследования о кривых поверхностях, пер. с лат., в сб.: Об основаниях геометрии, М., 1956; Лобачевский Н. И., Полн. собр. соч., т. 1—3, М.— Л., 1946—51; Больаи Я., Appendix. Приложение..., пер. с лат., М.— Л., 1950; Риман Б., О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии, пер. с нем., в сб.: Об основаниях геометрии, М., 1956; Клейн Ф., Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»), там же; Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948.

Учебная литература. Адамар Ж., Элементарная геометрия, пер. с франц., ч. 1, Планиметрия, 4 изд., М., 1957, ч. 2, Стереометрия, 3 изд., М., 1958; Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 3 изд., М., 1981; Берже М., Геометрия, т. 1—2, пер. с франц., М., 1984; Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1—2, М.— Л., 1949—56; Ефимов Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; Погорелов А. В., Геометрия, М., 1984; Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия. Методы и приложения, 2 изд., М., 1985.

Монографии по разделам геометрии см. при соответствующих статьях.

А. Д. Александров.

ГЕОМЕ́ТРИЯ В МА́ЛОМ — геометрические теории, в которых строение геометрического образа (кривой, поверхности и т. д.) или пространства изучается в достаточно малой окрестности каждой из его точек. Термин возник, когда обнаружилось, что методы классич. дифференциальной геометрии имеют по существу именно такой «локальный» характер и недостаточны для изучения геометрич. образов в целом.

ГЕОМЕ́ТРИЯ В ЦЕ́ЛОМ — геометрические теории, предметом изучения которых является полный геометрический образ (вся кривая, вся поверхность, всё пространство, аналогично — всё отображение одного геометрического образа на другой). Термин «Г. в ц.» возник в немецкой математич. литературе в нач. 20 в. в связи с противопоставлением Г. в ц. *геометрии в малом*. При отсутствии такого противопоставления, когда рассматривают только объекты в целом (напр., в элементарной геометрии), термин «Г. в ц.» не употребляется.

ГЕОМЕ́ТРИЯ ЧИСЕЛ, геометрическая теория чисел,— раздел теории чисел, изучающий теоретико-числовые проблемы с применением геометрических методов. Г. ч. в собственном смысле сформировалась с выходом основополагающей монографии Г. Минковского (1896). Исходным пунктом направления, развившегося в самостоятельный раздел теории чисел, явилось то обстоятельство (подмеченное Г. Минковским), что нек-рые предложения, почти очевидные при рассмотрении фигур в n-мерном евклидовом пространстве, имеют глубокие следствия в теории чисел. Основной и типичной задачей Г. ч. является задача об арифметич. минимуме $m(F)$ нек-рой действительной функции

$$F(x)=F(x_1, \ldots, x_n);$$

при этом под $m(F)$ понимается точная нижняя граница значений функции $F(x)$, когда x пробегает все целые точки (т. е. точки с целочисленными координатами), удовлетворяющие нек-рому дополнительному условию (напр., условию $x\neq 0$). В важнейших частных случаях эта задача решается теоремой Минковского о выпуклом теле, к-рая может быть сформулирована так: пусть $F(x)<1$

есть n-мерное выпуклое тело объёма V_F, причём $F(x)=F(-x)$, тогда

$$m(F) \leqslant 2V_F^{-1/n}.$$

Значение $m(F)$ позволяет судить об условиях существования решений диофантова неравенства $|F(x)| \leqslant c$; к этому вопросу сводятся многие задачи теории чисел. Особым разделом Г. ч. является геометрия квадратичных форм.

● Касселс Дж. В. С., Введение в геометрию чисел, пер. с англ., М., 1965.

ГЕРОНА ФОРМУЛА — формула, выражающая площадь S треугольника через длины трёх его сторон a, b и c:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p — полупериметр треугольника:

$$p = {}^1/_2(a+b+c).$$

Формула содержится в «Метрике» Герона Александрийского (1 в.); она была известна Архимеду (3 в. до н. э.).

ГЁССЕ ОПРЕДЕЛИ́ТЕЛЬ — см. *Гессиан.*

ГЕССИА́Н функции — квадратичная форма

$$H(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j$$

или

$$H(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}z_i\bar{z}_j,$$

где $a_{ij}=\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ (или $\partial^2 f(p)/\partial z_i \partial \bar{z}_j$) и $f(p)$ задана на n-мерном действительном пространстве $\mathbb{R}^n$ (или комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$) с координатами $x_1, \ldots, x_n$ (или $z_1, \ldots, z_n$). В обоих случаях Г.— квадратичная форма, заданная на касательном пространстве, не меняющаяся при линейных преобразованиях переменных. Г. или определителем Гессе наз. также определитель, элементы к-рого суть вторые частные производные от дважды дифференцируемой функции n переменных.

Введён О. Гессе (1844).

ГЕТЕРОГЕ́ННАЯ УНИВЕРСА́ЛЬНАЯ А́ЛГЕБРА (от греч. ἑτερογενής — разнородный) — то же, что *многоосновная алгебра.*

ГИ́ЛЬБЕРТА ПРОБЛЕ́МЫ — 23 проблемы математики, сформулированные Д. Гильбертом в докладе «Математические проблемы», прочитанном 8 августа 1900 на II Международном конгрессе математиков в Париже. Доклад Д. Гильберта — уникальное явление в истории математики и в математической литературе, т. к. ни до него, ни после математики не выступали с научными сообщениями, охватывавшими проблемы математики в целом. И сейчас, через 87 лет после того как был сделан доклад, он сохраняет свой интерес и значение.

На всё развитие современной математики Д. Гильберт оказал влияние исключительное, охватывающее почти все направления математич. мысли; это объясняется тем, что Д. Гильберт был математиком, в к-ром сила математич. мысли соединялась с редкой широтой и разносторонностью. Д. Гильберт постоянно делает упор на то, что математика едина, что различные её части находятся в постоянном взаимодействии между собой и с науками о природе и что в этом взаимодействии не только ключ к пониманию самой сущности математики, но и лучшее средство против расщепления математики на отдельные, не связанные друг с другом части,— опасности, к-рая в наше время огромного количественного роста и специализации математич. исследований постоянно заставляет о себе думать. С большой силой и убеждённостью говорит Д. Гильберт о целостном характере математики как основе всего точного естественнонаучного познания. Его убеждённость в этом служит путеводной нитью всего доклада в целом и, несомненно, во многих случаях руководила автором при отборе выдвигаемых им математич. задач.

Доклад начинается с интересно, вдохновенно написанной общей вводной части, в к-рой говорится не только о значении для математики «хорошо поставленной» специальной проблемы, но и высказываются суждения о математич. строгости, о связи математики с естествознанием и др. В заключение этой вводной части Д. Гильберт с поражающей силой и убеждённостью высказывает свой основной тезис — «аксиому» о разрешимости в широком смысле слова всякой математич. задачи — тезис, содержанием к-рого являются глубокая уверенность в неограниченном могуществе человеческого познания и непримиримая борьба со всяким агностицизмом:

«...вот проблема, или решение. Ты можешь найти его с помощью чистого мышления; ибо в математике не существует Ignorabimus! („мы не будем знать").

Неизмеримо множество проблем в математике, и как только одна проблема решена, на её место всплывают бесчисленные новые проблемы. Разрешите мне... назвать несколько определённых проблем из различных математических дисциплин, проблем, исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки.

Обратимся к основам анализа и геометрии. Наиболее значительными и важными событиями последнего столетия в этой области являются... арифметическое овладение понятием континуума... и открытие неевклидовой геометрии... Я привлекаю поэтому Ваше внимание к некоторым проблемам, принадлежащим к этим областям.» («Проблемы Гильберта», М., 1969, с. 22—23).

Изложение проблем Д. Гильберт начинает с теории множеств («1. Проблема Кантора о мощности континуума») и обоснования математики («2. Непротиворечивость арифметических аксиом»), далее он переходит к основаниям геометрии («3. Равенство объёмов двух тетраэдров с равновеликими основаниями и равными высотами; 4. Проблема о прямой как о кратчайшем соединении двух точек»), к теории непрерывных групп (знаменитая 5-я проблема об освобождении понятия непрерывной группы от требования дифференцируемости), теории чисел («7. Иррациональность и трансцендентность некоторых чисел; 8. Проблема простых чисел; 9. Доказательство наиболее общего закона взаимности в любом числовом поле; 10. Задача о разрешимости диофантова уравнения»), затем ставятся проблемы из алгебры («11. Квадратичные формы с произвольными алгебраическими числовыми коэффициентами; 12. Распространение теоремы Кронекера об абелевых полях на произвольную алгебраическую область рациональности; 13. Невозможность решения общего уравнения 7-й степени с помощью функций, зависящих только от двух аргументов; 14. Доказательство конечности некоторой полной системы функций»), алгебраической геометрии («15. Строгое обоснование исчислительной геометрии Шуберта; 16. Проблема топологии алгебраических кривых и поверхностей; 17. Представление определенных форм в виде суммы квадратов») и геометрии («18. Построение пространства из конгруэнтных многогранников») и, наконец, из анализа («19. Являются ли решения регулярной вариационной задачи необходимо аналитическими?; 20. Общая задача о граничных условиях; 21. Доказательство существования линейных дифференциальных уравнений с заданной группой монодромии; 22. Униформизация аналитических зависимостей с помощью автоморфных функций; 23. Развитие методов вариационного исчисления»). Особое место занимает 6-я проблема («6. Математическое изложение аксиом физики») об аксиоматике теории вероятностей и механики.

По своему характеру Г. п. очень разнородны. Иногда это — конкретно поставленный вопрос, на к-рый ищется однозначный ответ — «да или нет», такова, напр., геометрическая 3-я проблема или арифметическая 7-я проблема о трансцендентных числах. Иногда задача ставится менее определённо, как, напр., в 12-й проблеме (ей Д. Гильберт придавал особо важное значение), в к-рой требуется найти как само обобщение теоремы Кронекера, так и соответствующий класс функций, к-рые должны заменить показательную и модулярную. 15-я проблема есть, в сущности, проблема обоснования всей теории алгебраич. многообразий. Иногда проблема под данным номером в действительности содержит в себе несколько различных, хотя и тесно связанных между собой задач. 23-я проблема есть, в сущ-

ности, проблема дальнейшего развития вариационного исчисления.

Сейчас, много лет после того как Д. Гильберт поставил свои проблемы, можно сказать, что они были поставлены хорошо. Они оказались подходящими объектами для того, чтобы сосредоточить вокруг себя творческие усилия математиков различных научных направлений. Развитие идей, связанных с содержанием Г. п., составило значительную часть математики 20 в.

● Проблемы Гильберта, М., 1969. *С. С. Демидов.*

ГИЛЬБЕРТА СИСТЕ́МА АКСИО́М е в к л и д о в о й г е о м е т р и и — система аксиом, предложенная Д. Гильбертом (1899).

Набор основных понятий в Г. с. а. был заимствован (и уточнён) из «*Начал*» *Евклида*, именно: точки, прямые и плоскости и отношения между ними, выражаемые словами «принадлежит», «между», «конгруэнтен». Г. с. а. содержит 20 аксиом, к-рые разбиты на 5 групп: принадлежности, порядка, конгруэнтности, непрерывности, параллельных. Д. Гильберт показал их необходимость и достаточность для построения всей евклидовой геометрии. Вместе с этим впервые была проведена логич. обработка всей системы, выяснена непротиворечивость системы с помощью построения числовой модели, установлена независимость групп аксиом, а также полнота системы. Г. с. а. явилась первым достаточно строгим обоснованием евклидовой геометрии.

ГИЛЬБЕРТА ТЕОРЕ́МА — 1) Г. т. о б а з и с е — установленная Д. Гильбертом (1890) теорема о конечности базиса кольца многочленов над *нётеровым кольцом*.

2) Г. т. о н у л я х — установленная Д. Гильбертом (1893) теорема о нулях многочлена. См. *Алгебраическая геометрия*.

3) Г. т. о п о в е р х н о с т я х о т р и ц а т е л ь н о й к р и в и з н ы — установленная Д. Гильбертом (1901) теорема о том, что в трёхмерном евклидовом пространстве не существует полной регулярной поверхности постоянной отрицательной кривизны.

ГИЛЬБЕРТА ФИНИТИ́ЗМ — см. *Математическая логика*.

ГИЛЬБЕРТА — ШМИ́ДТА ОПЕРА́ТОР — обобщение рассмотренного в 1907 Д. Гильбертом и Э. Шмидтом интегрального оператора специального вида. См. *Ядерный оператор*.

ГИЛЬБЕРТОВ КИРПИ́Ч — подпространство гильбертова пространства l_2, состоящее из всех точек $a=(x_1, x_2, \ldots)$, для к-рых $0 \leqslant x_n \leqslant (1/2)^n$, $n=1, 2, \ldots$. Г. к. является компактом; он гомеоморфен произведению счётной системы отрезков.

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРА́НСТВО — обобщение понятия евклидова пространства на бесконечномерный случай. Возникло на рубеже 19 и 20 вв. в виде естественного логич. вывода из работ Д. Гильберта в результате обобщения фактов и методов, относящихся к разложениям функций в ортогональные ряды и к исследованию интегральных уравнений. Постепенно понятие Г. п. находило всё более широкие приложения в различных разделах математики и теоретич. физики; оно принадлежит к числу важнейших понятий математики.

Первоначально Г. п. понималось как пространство последовательностей со сходящимся рядом квадратов (т. н. п р о с т р а н с т в о l_2). Элементами (векторами) такого пространства являются бесконечные числовые последовательности $x=(x_1, x_2, \ldots)$ такие, что ряд $x_1^2+x_2^2+\ldots$ сходится. Сумму двух векторов $x+y$ и вектор λx, где λ — действительное число, определяют естественным образом:

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots),$$

$$\lambda x=(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots).$$

Для любых векторов $x, y \in l_2$ формула

$$(x, y)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots$$

определяет их скалярное произведение, а под д л и н о й (н о р м о й) вектора x понимается неотрицательное число

$$\|x\|=\sqrt{(x, x)}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots}.$$

Скалярное произведение всегда конечно и удовлетворяет неравенству

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|.$$

Последовательность векторов x_k наз. с х о д я щ е й с я к вектору x, если $\|x_k-x\| \to 0$ при $k \to \infty$. Пространство l_2 п о л н о: всякая фундаментальная последовательность элементов этого пространства (т. е. последовательность x_n, удовлетворяющая условию $\|x_m-x_n\| \to 0$ при $m, n \to \infty$) имеет предел, принадлежащий l_2. В отличие от евклидовых пространств, Г. п. l_2 бесконечномерно, т. е. в нём существуют бесконечные системы линейно независимых векторов; напр., такую систему в l_2 образуют единичные векторы

$$e_1=(1, 0, 0, \ldots), e_2=(0, 1, 0, \ldots), \ldots$$

При этом для любого вектора x из l_2 имеет место однозначное разложение $x=x_1e_1+x_2e_2+\ldots$ по системе $\{e_n\}$.

Другим важным примером Г. п. служит пространство $L_2[a, b]$ всех измеримых функций, заданных на отрезке $[a, b]$, для к-рых конечен интеграл

$$\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

понимаемый в смысле Лебега. Сложение функций и умножение их на число определяются обычным способом, а под скалярным произведением понимается интеграл

$$(f, g)=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

Норма в этом случае равна

$$\|f\|=\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}.$$

Роль базиса единичных векторов здесь могут играть любые функции $\varphi_i(x)$ из L_2, обладающие свойством ортогональности

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx=0, \quad i \neq j,$$

и нормированности

$$\int_a^b \varphi_i^2(x)\,dx=1,$$

а также следующим свойством замкнутости (эквивалент п о л н о т ы): если $f(x)$ принадлежит L_2 и

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx=0,$$

то $f(x)=0$ всюду, кроме множества меры нуль.

В более широком смысле под Г. п. понимается произвольное бесконечномерное векторное пространство (действительное или комплексное), в к-ром задано скалярное произведение и к-рое является полным относительно нормы, порождаемой этим скалярным произведением. В комплексном случае под скалярным произведением понимают комплексную функцию (x, y), определённую для любой пары x, y элементов из H и обладающую следующими свойствами:

1) $(x, x) \geqslant 0$ и $(x, x)=0$ в том и только в том случае, если $x=0$;

2) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$;

3) $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$ для любого комплексного числа λ;

4) $(x, y)=\overline{(y, x)}$,

где черта означает комплексно сопряжённую величину. Норма элемента x определяется равенством

$$\|x\|=\sqrt{(x, x)}.$$

Комплексные Г. п. играют в математике и в её приложениях значительно большую роль, чем действительные Г. п. Одним из важнейших направлений теории Г. п. является изучение линейных операторов в Г. п. Именно с этим кругом вопросов связаны многочисленные применения Г. п. в теории дифференциальных и интегральных уравнений, теории вероятностей, квантовой механике и т. д.

● К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; Л ю с т е р н и к Л. А., С о б о л е в В. И., Краткий курс функционального-

анализа, М., 1982; Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, пер. с франц., 2 изд., М., 1979; Халмош П., Гильбертово пространство в задачах, пер. с англ., М., 1970.

ГИПЕ́РБОЛА (греч. ὑπερβολή — избыток, преувеличение) — линия пересечения прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса и пересекающей обе его полости.

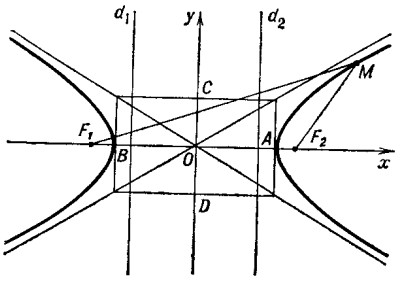


Рис. 1.

Гипербола — множество точек M (рис. 1) плоскости, разность (по абсолютной величине) расстояний $r_1=F_1M$ и $r_2=F_2M$ к-рых до двух определённых точек $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ этой плоскости (фокусов гиперболы) постоянна: $|r_1-r_2|=2a<2c$. Середина O отрезка F_1F_2 (фокусного расстояния) наз. центром гиперболы.

В прямоугольной системе координат Oxy с началом в центре Г., на оси Ox к-рой лежат фокусы Г., уравнение Г. имеет т. н. канонический вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad b^2=c^2-a^2,$$

где $a=OA=OB$ и $b=OC=OD$ — длины полуосей гиперболы.

Г.— центральная *линия второго порядка*. Она состоит из двух бесконечных ветвей, симметрична относительно осей Ox и Oy — главных (действительной, или фокальной, и мнимой) осей; точки A и B пересечения Г. с действительной осью наз. вершинами гиперболы. Прямые, к к-рым ветви Г. неограниченно приближаются при удалении в бесконечность, наз. асимптотами гиперболы; их уравнения $y=\pm\frac{b}{a}x$. Угол α между асимптотами зависит от значения эксцентриситета гиперболы $e=c/a>1$; он определяется из уравнения $\operatorname{tg}\alpha/2=b/a$. При $a=b$ Г. наз. равнобочной, её асимптоты взаимно перпендикулярны, уравнение Г. имеет вид $x^2-y^2=a^2$. Если принять асимптоты за оси координат, то уравнение Г. примет вид $xy=a^2/2$, т. е. равнобочная Г. является графиком обратной пропорциональности. Прямые d_1 и d_2, перпендикулярные действительной оси Г. и отстоящие от её центра на расстояниях $d=\mp a/e$, наз. директрисами гиперболы, соответствующими фокусам F_1 и F_2. Отношение расстояния любой точки Г. до фокуса к расстоянию её до соответствующей директрисы постоянно и равно эксцентриситету: $r_1/d_1=r_2/d_2=e$.

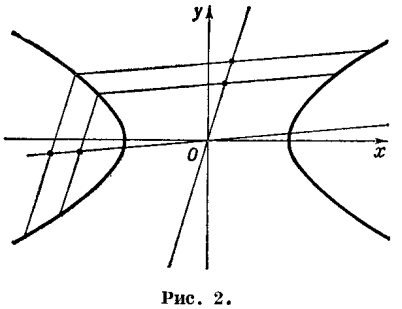


Рис. 2.

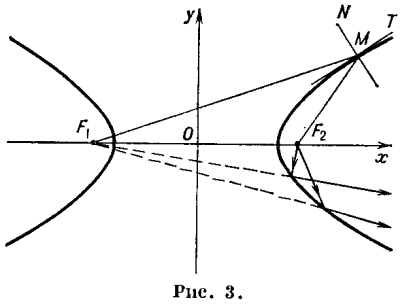


Рис. 3.

Диаметр гиперболы — прямая (рис. 2), проходящая через середины хорд, параллельных данной. Каждый из сопряжённых диаметров делит пополам хорды, параллельные другому (рис. 2).

Касательная T и нормаль N к Г. в точке M (рис. 3) являются биссектрисами углов между фокальными радиус-векторами F_1M и F_2M точки M. Поэтому если в одном фокусе (F_2) Г. поместить источник света, то исходящие из него лучи после зеркального отражения от кривой кажутся исходящими из другого фокуса (F_1).

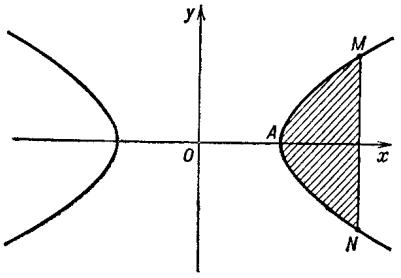


Рис. 4.

Радиус кривизны Г. в точке $M(x, y)$:

$$R=a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2}=\frac{(r_1r_2)^{3/2}}{ab}.$$

Площадь сегмента (рис. 4):

$$S_{AMN}=xy-ab\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=xy-ab\operatorname{arch}\frac{x}{a}.$$

В полярной системе координат (полюс — в фокусе, и полярная ось направлена по действительной оси Г.) уравнение Г. имеет вид

$$\rho=\frac{\pm p}{1\mp e\cos\varphi},$$

где $p=b^2/a$ — фокальный параметр гиперболы — половина длины хорды, проходящей через фокус перпендикулярно действительной оси, равный произведению эксцентриситета на расстояние от фокуса до соответствующей директрисы.

Название «гипербола» ввёл Аполлоний Пергский (ок. 200 до н. э.), рассматривавший Г. как одно из *конических сечений*.

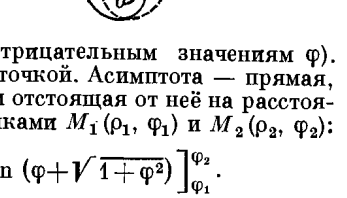
ГИПЕРБОЛИ́ЧЕСКАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ — то же, что *Лобачевского геометрия*, а также её многомерное обобщение.

ГИПЕРБОЛИ́ЧЕСКАЯ ГОМОЛО́ГИЯ — см. *Гомология*.

ГИПЕРБОЛИ́ЧЕСКАЯ ИНВЕ́РСИЯ — см. *Инверсия*.

ГИПЕРБОЛИ́ЧЕСКАЯ СПИРА́ЛЬ — плоская трансцендентная кривая; траектория точки, движущейся к точке O с постоянной скоростью v по лучу, вращающемуся около полюса O с постоянной угловой скоростью w (рис.). Уравнение в полярных координатах:

$$\rho=\frac{a}{\varphi},$$



где $a=v/w$. Кривая состоит из двух ветвей (соответствующих положительным и отрицательным значениям φ). Полюс является асимптотич. точкой. Асимптота — прямая, параллельная полярной оси и отстоящая от неё на расстоянии a. Длина дуги между точками $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ и $M_2(\rho_2, \varphi_2)$:

$$l=a\left[-\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}+\ln\left(\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right)\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Площадь сектора, соответствующего дуге M_1M_2:

$$S=\frac{a^2(\rho_1-\rho_2)}{2}.$$

Радиус кривизны: $R=a/\varphi$. Г. с. относится к алгебраич. спиралям.

Г. с. рассмотрена П. Вариньоном (1704).

ГИПЕРБОЛИ́ЧЕСКАЯ ТО́ЧКА поверхности — точка, в которой гауссова кривизна поверхности отрицательна. См. *Поверхностей теория*.

ГИПЕРБОЛИ́ЧЕСКИЕ ФУ́НКЦИИ — функции, определяемые формулами

$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ — гиперболический синус,

$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ — гиперболический косинус,

$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ — гиперболический тангенс,

$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ — гиперболический котангенс.

Другие обозначения: sinh x, Sh x, $\mathfrak{Sin}\, x$; cosh x, Ch x, $\mathfrak{Cos}\, x$; tanh x, Th x, $\mathfrak{Tg}\, x$; coth x, Cth x, $\mathfrak{Ctg}\, x$.

Г. ф. были известны А. Муавру (1707, 1722), определяющие соотношения даны В. Риккати (1757), названия дал И. Ламберт (1768).

Таблица 1 — СВОЙСТВА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Функция	Область определения	Множество значений	Чётность	Участки монотонности
$\operatorname{sh} x$	$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty, +\infty)$	Нечётная	Возрастающая
$\operatorname{ch} x$	$-\infty < x < +\infty$	$[1, +\infty)$	Чётная	Убывает при $x \leqslant 0$, возрастает при $x \geqslant 0$
$\operatorname{th} x$	$-\infty < x < +\infty$, $x \neq 0$	$(-1, 1)$	Нечётная	Возрастающая
$\operatorname{cth} x$	$x \neq 0$	$(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$	Нечётная	Убывает при $x < 0$ и при $x > 0$

Гиперболические функции действительного переменного. Свойства Г. ф. выводятся непосредственно из их представления через показательную функцию e^x. Области определения, множества значений, чётность и участки монотонности Г. ф. даны в табл. 1. Графики Г. ф. приведены на рис. 1—2. Каждая Г. ф.

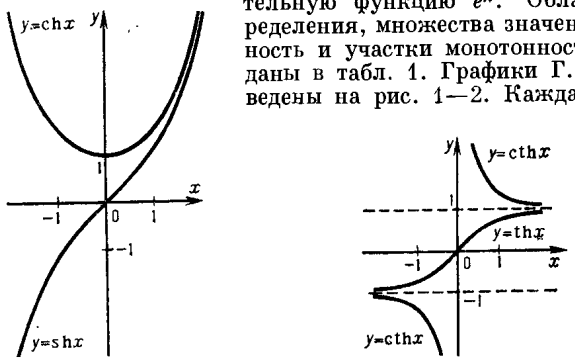


Рис. 1—2. Графики гиперболических функций.

в каждой точке своей области определения непрерывна, бесконечно дифференцируема и даже аналитична в нек-рой окрестности этой точки. Производные, интегралы и разложения в степенные ряды Г. ф. приведены в табл. 2.

Таблица 2 — ПРОИЗВОДНЫЕ, ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$$

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C, \quad \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \operatorname{th} x\, dx = \ln \operatorname{ch} x + C, \quad \int \operatorname{cth} x\, dx = \ln |\operatorname{sh} x| + C,$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{th} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} |B_{2n}|}{(2n)!} x^{2n-1},$$

где B_n — числа Бернулли.

Геометрич. интерпретация Г. ф. такова. Пусть заданы параметрич. уравнения

$$x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t$$

равнобочной гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ (рис. 3). Они позволяют истолковать абсциссу $x = OP$ и ординату $y = PM$ точки M как гиперболич. косинус и гиперболич. синус; отрезок AB — гиперболич. тангенс, отрезок OA — гиперболич. котангенс. Параметр t равен удвоенной площади сектора OAM, где AM — дуга гиперболы. Для точки M' (при $y < 0$) параметр t отрицателен.

Основные соотношения между Г. ф.:

$$\left.\begin{gathered} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{th} x \operatorname{cth} x = 1, \\ \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x, \\ \operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}, \quad \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}} \end{gathered}\right\} \quad (*)$$

(при $x > 0$ знак +, при $x < 0$ знак —),

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y},$$

$$(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2}.$$

Решениями уравнений $\operatorname{sh} x = a$, $\operatorname{ch} x = a$, $\operatorname{th} x = a$, $\operatorname{cth} x = a$ являются соответственно *обратные гиперболические функции*:

$$x = \operatorname{Arsh} a = \ln\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right), \quad -\infty < a < +\infty,$$

$$x = \operatorname{Arch} a = \pm \ln\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right), \quad a \geqslant 1,$$

$$x = \operatorname{Arth} a = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + a}{1 - a}, \quad |a| < 1,$$

$$x = \operatorname{Arcth} a = \frac{1}{2} \ln \frac{a + 1}{a - 1}, \quad |a| > 1.$$

Г. ф. возникают из многих задач уравнений математич. физики, как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений с частными производными. Они широко используются в приложениях, напр. в электротехнике, сопротивлении материалов, строительной механике и др. дисциплинах. Важную роль играют Г. ф. в геометрии Лобачевского.

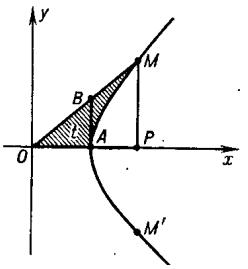


Рис. 3. Геометрическая интерпретация гиперболических функций.

Гиперболические функции w комплексного переменного $z = x + iy$ являются аналитич. продолжениями соответствующих Г. ф. действительного переменного в комплексную плоскость. Основные соотношения остаются справедливыми и для Г. ф. комплексного переменного.

Г. ф. выражаются через тригонометрич. функции по формулам

$$\operatorname{sh} x = -i \sin ix, \quad \operatorname{ch} x = \cos ix,$$
$$\operatorname{th} x = -i \operatorname{tg} ix, \quad \operatorname{cth} x = i \operatorname{ctg} ix,$$

обратно,

$$\sin x = -i \operatorname{sh} ix, \quad \cos x = \operatorname{ch} ix,$$
$$\operatorname{tg} x = -i \operatorname{th} ix, \quad \operatorname{ctg} x = i \operatorname{cth} ix.$$

Г. ф. комплексного переменного периодичны:

$$\operatorname{sh}(z + 2\pi i) = \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}(z + 2\pi i) = \operatorname{ch} z,$$
$$\operatorname{th}(z + \pi i) = \operatorname{th} z, \quad \operatorname{cth}(z + \pi i) = \operatorname{cth} z.$$

Г. ф. $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ принимают все комплексные значения, т. е. уравнения $\operatorname{sh} z = a$ и $\operatorname{ch} z = a$ имеют решения при любом комплексном a. Г. ф. $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ принимают все комплекс-

ные значения, кроме ± 1, т. е. уравнения $\operatorname{th} z = a$ и $\operatorname{cth} z = a$ имеют решения при любом комплексном $a \neq \pm 1$. Решения этих уравнений находятся по тем же формулам, что и для Г. ф. действительного переменного, только символ логарифма в них означает многозначную логарифмическую функцию.

Г. ф. $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ — целые функции. Г. ф. $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ — мероморфные функции. Полюсы $\operatorname{th} z$ — простые 1-го порядка и находятся в точках $z = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right)i$, полюсы $\operatorname{cth} z$ — также простые и находятся в точках $z = \pi n i$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Г. ф. $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ представляются бесконечными произведениями элементарных множителей:

$$\operatorname{sh} z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),$$

$$\operatorname{ch} z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

Г. ф. $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ представляются рядами элементарных дробей:

$$\operatorname{th} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + (2n-1)^2\pi^2/4},$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + \pi^2 n^2}.$$

Примеры конформных отображений при помощи Г. ф. приведены на рис. 4.

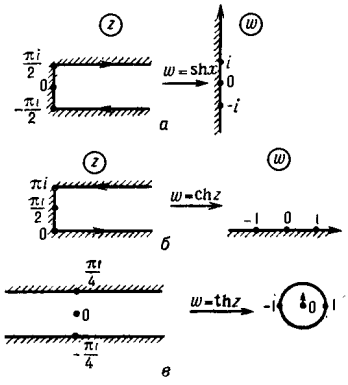


Рис. 4. Конформные отображения, осуществляемые гиперболическими функциями: а) $w = \operatorname{sh} z$ отображает полуполосу $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re} z > 0$ на правую полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$; б) $w = \operatorname{ch} z$ отображает полуполосу $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$; в) $w = \operatorname{th} z$ отображает полосу $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}$ на круг $|w| < 1$.

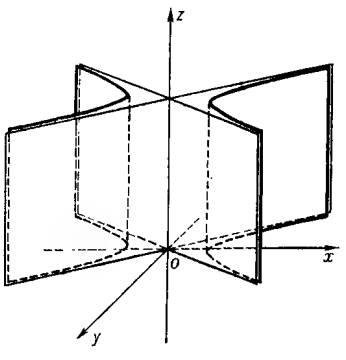
● Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, 5 изд., М., 1971; Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, пер. с нем., 3 изд., М., 1977.

Ю. В. Сидоров.

ГИПЕРБОЛИ́ЧЕСКИЙ ЛОГАРИ́ФМ — то же, что *натуральный логарифм*.

ГИПЕРБОЛИ́ЧЕСКИЙ ПАРАБОЛО́ИД — незамкнутая нецентральная *поверхность второго порядка*. См. *Параболоид*.

ГИПЕРБОЛИ́ЧЕСКИЙ ЦИЛИ́НДР — цилиндрическая поверхность, направляющая линия которой — гипербола (рис.). Г. ц.— незамкнутая центральная *поверхность второго порядка*, канонич. уравнение:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

ГИПЕРБОЛИ́ЧЕСКОГО ТИ́ПА УРАВНЕ́НИЕ в данной точке — дифференциальное уравнение с частными производными, для которого однозначно разрешима задача Коши при начальных данных, заданных в окрестности точки M на любой нехарактеристич. поверхности (см. *Характеристика*). Любое уравнение 1-го порядка с действительными коэффициентами есть Г. т. у.

Для уравнений 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) D_i D_j u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t) D_i u = f(x, t),$$

где $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, гиперболичность гарантируется положительной определённостью квадратичной формы:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j.$$

Различные математич. модели во многих случаях приводят к дифференциальным уравнениям гиперболич. типа. Такие уравнения имеют точные аналитич. решения только в редких случаях. Наиболее распространёнными являются численные методы. Они находят широкое применение при решениях задач механики сплошной среды и, в частности, уравнений газовой динамики, к-рые по своей структуре являются квазилинейными.

Численные методы решения уравнений гиперболич. типа можно разделить на две группы: 1) методы с явным выделением особенностей решения; 2) методы сквозного счёта, в к-рых особенности решения явно не выделяются, а получаются в процессе счёта как области с резким изменением решений.

К первой группе относится, напр., метод характеристик, к-рый используется только для решения уравнений гиперболич. типа (он нашёл широкое применение при решении задач газовой динамики).

Методы второй группы дают собственно разностные схемы. Пусть, напр., имеется гиперболич. система ур-ний

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad (1)$$

где A есть $(m \times m)$-матрица, имеющая m различных действительных собственных значений, $w = w(x, t)$ — вектор-функция с m компонентами. Матрица A может быть либо функцией от x, t, и тогда (1) есть линейная гиперболич. система, либо зависеть также от $w = w(x, t)$ (квазилинейная система). Пусть в последнем случае система уравнений (1) приводима к дивергентному виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} + \psi,$$

где F есть вектор-функция от w, x, t такая, что $A = dF/dw$, ψ — вектор-функция от w, x, t. В наиболее важном случае A, F и ψ зависят только от w. Для системы уравнений (1) может быть поставлена задача Коши:

$$w(x, 0) = w_0(x)$$

с соответствующими краевыми условиями.

Как правило, основой построения разностных схем является аппроксимация соответствующего дифференциальному уравнению интегрального закона сохранения с помощью нек-рых квадратурных формул на контуре интегрирования разностной ячейки. В случае гладких решений аппроксимация интегрального закона сохранения равносильна прямой аппроксимации соответствующего дифференциального уравнения. Разностные схемы должны удовлетворять требованиям аппроксимации и устойчивости. Эти требования независимы и в определённом смысле вступают в противоречие одно с другим. Для случая дивергентных систем дифференциальных уравнений существенным является условие дивергентности (или консервативности) разностной схемы. Кроме того, разностные схемы должны удовлетворять ещё ряду необходимых требований — диссипативности, экономичности и т. д. Двухслойная явная схема для линейного уравнения типа (1) имеет вид:

$$w_j^{n+1} = \Lambda w_j^n,$$

где Λ — финитный оператор, т. е. представляется в виде

$$\Lambda = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} B_\alpha T_1^\alpha,$$

где B_α есть $(m\times m)$-матрицы с коэффициентами, зависящими от τ, h, x, t; $t=n\tau$, $x=jh$; τ, h — шаги разностной сетки по осям t и x соответственно; числа q_1 и q_2 не зависят от τ, h; $\varkappa=\tau/h$, T_1 — оператор сдвига по x.

Условия аппроксимации приводят к соотношениям:

$$\sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} B_\alpha = I, \quad \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} \alpha B_\alpha = \varkappa A,$$

I — единичная матрица.

Неявная разностная схема может быть записана в виде

$$\Lambda_1 w_j^{n+1} = \Lambda_0 w_j^n,$$

где Λ_1 и Λ_0 — финитные операторы:

$$\Lambda_k = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_2} B_\alpha^k T_1^\alpha, \quad k=0,1,$$

B_α есть $(m\times m)$-матрицы, зависящие от τ, h, x, t, причём оператор Λ_1 содержит по крайней мере две ненулевые матрицы B_α^1. Оператор Λ_1 предполагается обратимым, но его обратный не является финитным.

По свойствам аппроксимации разностные схемы можно подразделить на два класса: условно аппроксимирующие и абсолютно аппроксимирующие. Условно аппроксимирующие разностные схемы аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение при τ, h, стремящихся к нулю при нек-рой зависимости между τ и h: $\tau=\varphi(h)$. Абсолютно аппроксимирующие разностные схемы аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение при стремлении τ, h к нулю по любому закону.

В случае условной аппроксимации разностное уравнение может аппроксимировать различные дифференциальные уравнения при различных законах предельного перехода. Так, напр., для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a=\text{const}>0, \tag{2}$$

могут быть применены две разностные схемы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u_j^{n+1}-\overline{u}_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0,\\ &\overline{u}_j^n = \frac{(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0. \tag{4}$$

При законе предельного перехода

$$\frac{\tau}{h}=\text{const}$$

разностная схема (3) аппроксимирует уравнение (2), а при законе предельного перехода

$$\frac{\tau}{h^2}=\text{const}$$

— уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mu=\frac{h^2}{2\tau}.$$

Разностная схема (4) аппроксимирует уравнение (2) абсолютно.

Аналогично разностные схемы подразделяются на условно устойчивые и абсолютно устойчивые. Так, разностная схема (4) устойчива, если выполнено следующее условие:

$$\frac{\tau a}{h}\leqslant 1,$$

т. е. условно устойчива. С другой стороны, неявная разностная схема

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

устойчива при любых соотношениях τ и h, т. е. абсолютно устойчива.

Явные разностные схемы просты в реализации, но являются или условно устойчивыми, или условно аппроксимирующими. В случае абсолютно аппроксимирующей разностной схемы условие устойчивости явной схемы имеет, как правило, вид

$$\tau\leqslant \text{const}\cdot h^\beta, \quad \beta\geqslant 1,$$

что приводит к излишне мелкому шагу τ и неоправданному увеличению объёма вычислений. Абсолютно устойчивые и абсолютно аппроксимирующие схемы находятся только в классе неявных схем.

Неявные разностные схемы более сложны в реализации при переходе с одного временно́го слоя на другой, но зато шаг τ может быть выбран сколь угодно большим и тем самым может определяться исключительно требованиями точности.

Теоремы сходимости для разностных схем, аппроксимирующих линейные дифференциальные уравнения, позволяют сводить исследование сходимости разностной схемы к исследованию её устойчивости.

Исследование аппроксимации разностной схемы соответствующего гиперболич. уравнения сравнительно просто в случае гладких решений, носит локальный характер и по существу сводится к разложению в ряд Тейлора; в случае же разрывных решений это сложная задача, сводящаяся к проверке интегральных законов сохранения. Исследование устойчивости является значительно более сложной задачей.

Основой построения разностных схем в многомерных случаях являются методы расщепления (слабой аппроксимации) и дробных шагов, позволяющие сводить интегрирование исходного многомерного уравнения к интегрированию уравнений более простой структуры (см. *Дробных шагов метод*).

Получают развитие методы решения гиперболич. уравнений, основанные на методе конечных элементов, к-рый можно рассматривать как разностный метод на специальной нерегулярной сетке.

● Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы, 2 изд., М., 1977; Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н., Системы квазилинейных уравнений..., 2 изд., М., 1978; Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М., 1973; Шокин Ю. И., Яненко Н. Н., Метод дифференциального приближения, Новосиб., 1985.

Ю. И. Шокин.

ГИПЕРБОЛО́ИД (от *гипербола* и греч. εἶδος — форма, вид) — незамкнутая центральная *поверхность второго порядка*; существуют два вида Г.— однополостный гиперболоид (рис. 1) и двуполостный гиперболоид (рис. 2). В прямоугольной системе координат $Oxyz$ с началом в центре симметрии Г., осями координат, совпадающими с осями симметрии Г., и координатными плоскостями — с плоскостями симметрии Г., уравнение Г. принимает т. н. канонический вид:

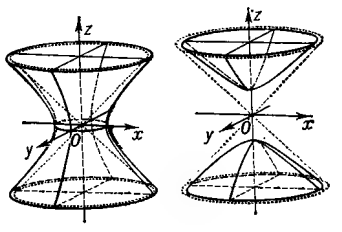


Рис. 1.

Рис. 2.

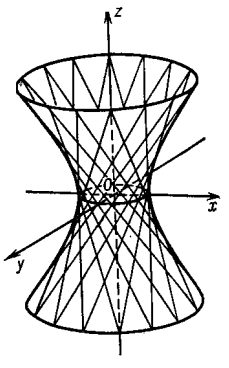


Рис. 3.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{(однополостный Г.)},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \text{(двуполостный Г.)},$$

где числа a, b и c (и отрезки такой длины) наз. полуосями гиперболоида.

Г. неограниченно приближается к поверхности

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

к-рая наз. асимптотическим конусом. Каждая плоскость, проходящая через ось Oz, пересекает Г. по гиперболам, а асимптотич. конус — по двум прямым, к-рые являются асимптотами этих гипербол. Сечение Г. плоскостью, параллельной плоскости Oxy, — эллипс (при $z=0$ эллипс наз. горловым); сечение плоскостью, параллельной оси Oz, — гипербола (для двуполостного Г.), гипербола, а также (при $y=\pm b$ или $x=\pm a$) пара пересекающихся прямых (для однополостного Г.). Если $a=b$, то Г. является гиперболоидом вращения, к-рый получается вращением гиперболы с полуосями a и c вокруг оси $2c$ (мнимой для однополостного Г. и действительной для двуполостного Г.). Если $a=b=c$, то Г. вращения наз. правильным; сечения плоскостями Oxz и Oyz — равнобочные гиперболы.

Через каждую точку однополостного Г. проходят две прямые, целиком лежащие на его поверхности, — прямолинейные образующие; таким образом, однополостный Г. — линейчатая поверхность, образованная двумя семействами прямых (рис. 3).

ГИПЕРГЕОМЕТРИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ (от греч. ὑπέρ — над, сверх и *геометрия*) — аналитическая функция, которая является решением т. н. гипергеометрического уравнения:

$$z(1-z)w''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]w'-\alpha\beta w=0.$$

Г. ф. может быть определена с помощью т. н. гипергеометрического ряда:

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ z)=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}z^n,$$

где α, β, γ — произвольные параметры. При $\alpha=1$, $\beta=\gamma$ этот ряд представляет собой геометрич. прогрессию. Через Г. ф. выражаются многие специальные функции.

Название «Г. ф.» было дано Дж. Валлисом (1650). Гипергеометрич. ряд был впервые рассмотрен Л. Эйлером (1778). Впоследствии теория этих рядов была развита К. Гауссом (1812), по имени к-рого гипергеометрич. ряд иногда наз. рядом Гаусса.

ГИПЕРГЕОМЕТРИ́ЧЕСКИЙ РЯД — см. *Гипергеометрическая функция*.

ГИПЕРГЕОМЕТРИ́ЧЕСКОЕ УРАВНЕ́НИЕ — см. *Гипергеометрическая функция*.

ГИПЕРКО́МПЛЕКСНАЯ СИСТЕ́МА — система *гиперкомплексных чисел*.

ГИПЕРКО́МПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО́ (от греч. ὑπέρ — над, сверх и лат. complexus — связь, сочетание) — обобщение понятия комплексного числа, возникшее в 19 в. при попытках построить числовую систему в многомерном (размерности >2) векторном пространстве. Как известно, комплексные числа геометрически изображаются точками плоскости и действия над ними соответствуют простейшим геометрич. преобразованиям плоскости (параллельному переносу, вращению, растяжению или сжатию и их комбинациям). Оказалось, что из векторных пространств над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел размерности $n>2$ устроить числовую систему с естественными свойствами умножения можно далеко не для всех размерностей, и даже в этом случае приходится отказываться от ряда свойств умножения комплексных чисел. Так, ни одна из систем таких Г. ч. (гиперкомплексная система) не является полем (в отличие от комплексных чисел), а именно, умножение Г. ч. не коммутативно.

В общем случае элемент гиперкомплексной системы ранга n представляет собой линейную комбинацию (с действительными коэффициентами $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$) нек-рой системы $1, e_1, \ldots, e_{n-1}$ базисных единиц:

$$x_0 1+x_1e_1+\ldots+x_{n-1}e_{n-1},$$

подобно тому как комплексные числа $x+iy$ являются линейными комбинациями двух базисных единиц: действительной единицы 1 и мнимой единицы i. Сложение и вычитание Г. ч. определяется, как и в любом векторном пространстве покомпонентно. Чтобы задать в этой системе умножение, надо определить $(n-1)^2$ значений для произведений базисных единиц e_ie_j (произведения на 1 определяются тривиально: $1\cdot e_i=e_i\cdot 1=e_i$), т. е. задать матрицу порядка $n-1$ т. н. структурных констант. Задача состоит в том, чтобы максимально сохранить по возможности естественные свойства умножения чисел.

Исторически первым примером Г. ч. были *кватернионы*, реализуемые в 4-мерном пространстве $\mathbb{R}^4$. Они образуют 4-мерную ассоциативную, но не коммутативную алгебру над $\mathbb{R}$ без делителей нуля. Отсутствие делителей нуля у конечномерной алгебры влечёт за собой наличие в этой алгебре однозначного деления. Таким образом, алгебра кватернионов есть тело. Кватернионы оказываются в некотором смысле самыми близкими из Г. ч. к действительным и комплексным числам. А именно, все конечномерные действительные ассоциативные алгебры без делителей нуля исчерпываются полями действительных чисел $\mathbb{R}$, комплексных чисел $\mathbb{C}$ и телом кватернионов $\mathbb{H}$ (теорема Фробениуса). Единственной неассоциативной, но альтернативной алгеброй конечной размерности над $\mathbb{R}$ и без делителей нуля является алгебра Кэли (*Кэли числа* образуют 8-мерную алгебру с делением над $\mathbb{R}$). Все остальные алгебры Г. ч. либо содержат делители нуля (напр., полные матричные алгебры над $\mathbb{R}$), либо не альтернативны. Размерность действительной алгебры без делителей нуля может принимать лишь значения 1, 2, 4 или 8.

● Кантор И. Л., Солодовников А. С., Гиперкомплексные числа, М., 1973; Калужнин Л. А., Введение в общую алгебру, М., 1973.

ГИПЕРПЛО́СКОСТЬ — см. *Гиперповерхность*.

ГИПЕРПОВЕ́РХНОСТЬ — обобщение понятия обычной поверхности 3-мерного пространства на случай евклидова n-мерного пространства. Обычно Г. задаётся одним уравнением $F(x_1, \ldots, x_n)=0$ между координатами, где F — дифференцируемая функция.

Примеры: уравнение $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=0$ задаёт гиперплоскость; уравнение $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2-1=0$ — гиперсферу.

Г. в проективном комплексном пространстве — см. *Алгебраическая геометрия*.

ГИПЕРСФЕ́РА — см. *Гиперповерхность*.

ГИПЕРЦИ́КЛ (от греч. ὑπέρ — над, сверх и κύκλος — круг, окружность), эквидистанта, — см. *Лобачевского геометрия*.

ГИПЕРЭЛЛИПТИ́ЧЕСКАЯ КРИВА́Я — см. *Алгебраическая кривая*.

ГИПЕРЭЛЛИПТИ́ЧЕСКИЙ ИНТЕГРА́Л — частный случай абелева интеграла

$$\int R(z,\ w)\,dz,$$

где R — рациональная функция от переменных z, w, связанных алгебраич. уравнением частного вида

$$w^2=P(z);$$

здесь $P(z)$ — многочлен степени $n\geqslant 5$ без кратных корней; при $n=3,\ 4$ получаются *эллиптические интегралы*.

ГИПОТЕНУ́ЗА [греч. ὑποτείνουσα, от ὑποτείνω — стягиваю (прямой угол)] — сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла.

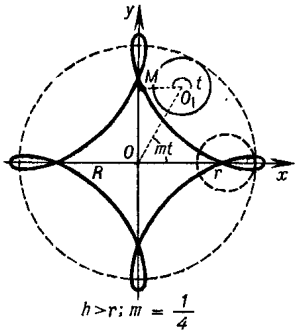
ГИПОТРОХО́ИДА (от греч. ὑπό — под, внизу и τροχοειδής — кругообразный, круглый) — плоская кривая, траектория точки, жёстко связанной с производящей окружностью радиуса r, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности радиуса R внутри её, причём вычерчивающая точка M находится на расстоянии h от центра производящей окружности радиуса r. При $h>r$ кривая наз. удлинённой гипоциклоидой (рис. 1), при $h<r$ — укороченной (рис. 2).

Параметрич. уравнения:

$$x=(R-mR)\cos mt+h\cos(t-mt),$$
$$y=(R-mR)\sin mt-h\sin(t-mt),$$

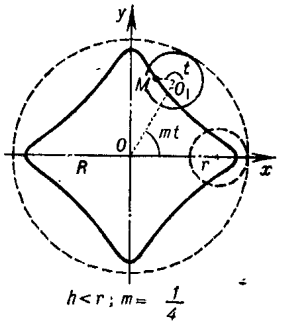
где $m=r/R$. Г. при $R=2r$ — эллипс. Г. при $h=R+r$ — розы.

Г. относится к *циклоидальным кривым*.



$h>r;\ m=\frac{1}{4}$

Рис. 1.



$h<r;\ m=\frac{1}{4}$

Рис. 2.

ГИПОЦИКЛО́ИДА (от греч. ὑπό — под, внизу и κυκλοειδής — круговидный, круглый) — плоская кривая, траектория точки производящей окружности радиуса r, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности радиуса R внутри её [см. рис. 1, где O и O_1 — центры неподвижной (радиуса R) и производящей (радиуса r) окружностей, N — точка их касания; M — вычерчивающая точка (A — её исходное положение), t — угол поворота производящей окружности, AM — участок кривой].

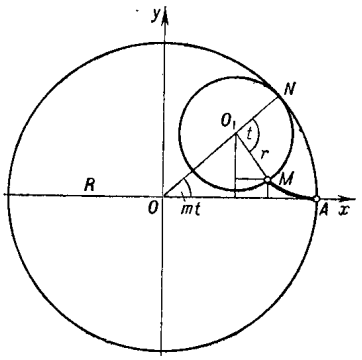


Рис. 1.

Параметрич. уравнения:

$$x=(R-mR)\cos mt+mR\cos(t-mt),$$
$$y=(R-mR)\sin mt-mR\sin(t-mt),$$

где $m=r/R$. Форма кривой зависит от значения m. Если $m=\frac{p}{q}$ (p и q — взаимно простые числа), то M после q полных оборотов производящей окружности возвращается в

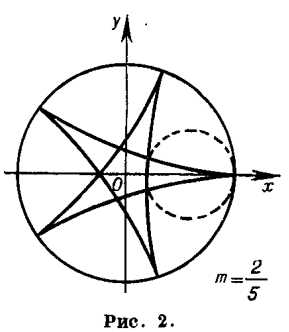


Рис. 2.

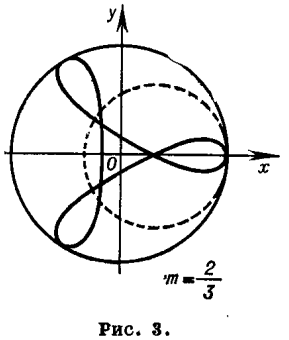
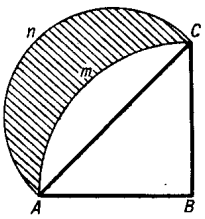


Рис. 3.

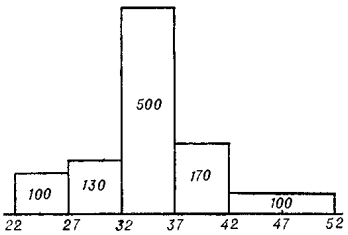
исходное положение и Г.— замкнутая кривая, состоящая из q ветвей с q точками возврата при $m<\frac{1}{2}$ (рис. 2), при $m>\frac{1}{2}$ вместо q точек возврата имеет q угловых точек (рис. 3). При $m=\frac{1}{2}$ Г. вырождается в диаметр неподвижной окружности, при $m=\frac{1}{4}$ является *астроидой*. При m иррациональном число ветвей бесконечно, точка M в исходное положение не возвращается. Обобщением Г. является *гипотрохоида*.

ГИППОКРА́ТОВЫ ЛУ́НОЧКИ — три фигуры, ограниченные дугами и хордами окружностей, найденные Гиппократом Хиосским (при попытке решить задачу о квадратуре круга), для которых при помощи циркуля и линейки можно построить равновеликие им прямолинейные фигуры. Площади таких луночек выражаются в виде квадратичных иррациональностей входящих в их построение хорд.



В частности, первая луночка, ограниченная четвертью окружности AmC радиуса r и полуокружностью AnC, строится на хорде AC (рис.): здесь $AB=r$, $AC=r\sqrt{2}$; площадь этой луночки равна площади треугольника ABC. Другие две луночки получаются более сложными построениями.

ГИСТОГРА́ММА (от греч. ἱστός, здесь — столб, и γράμμα — написание, буква), столбчатая диаграмма,— один из видов графического представления эмпирического распределения.



Для построения Г. всё множество значений результатов наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ делится на k интервалов группировки точками $x_0, \ldots, x_k$ (обычно интервалы выбираются равными), затем подсчитывается число m_i наблюдений, попавших в интервал $[x_{i-1}, x_i)$, и частота $h_i=m_i/n$. На оси абсцисс отмечаются точки $x_0, \ldots, x_k$ и строятся прямоугольники с основаниями, равными отрезкам $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, \ldots, k$, и высотами, равными $h_i/(x_i-x_{i-1})$. В случае равных интервалов $[x_{i-1}, x_i)$ высоты прямоугольников иногда принимаются равными либо h_i, либо m_i. Пусть, напр., изменение стволов 1000 елей дало результаты:

диаметр в см	22—27	27—32	32—37	37—42	42—52
число стволов	100	130	500	170	100

Г. для этого примера изображена на рисунке.

ГЛА́ВНАЯ ДИАГОНА́ЛЬ квадратной матрицы — см. *Матрица*.

ГЛА́ВНАЯ КРИВИЗНА́ поверхности — наибольшее или наименьшее значение кривизны её нормального сечения.

ГЛА́ВНАЯ НОРМА́ЛЬ — см. *Дифференциальная геометрия, Нормаль, Триэдр*. Термин введён О. Коши (1826).

ГЛА́ВНОЕ ЗНАЧЕ́НИЕ — 1) Г. з. логарифмической функции — см. *Логарифмическая функция*.

2) Г. з. несобственного интеграла — см. *Несобственный интеграл*.

ГЛА́ВНОЕ НАПРАВЛЕ́НИЕ — направление на поверхности, вдоль которого кривизна нормального сечения имеет наибольшее или наименьшее значения.

ГЛА́ВНЫЕ ВЕ́ТВИ обратных тригонометрических функций — см. *Обратные тригонометрические функции*.

ГЛА́ВНЫЙ ДИА́МЕТР линии второго порядка — см. *Диаметр* линии второго порядка.

ГЛА́ВНЫЙ ИДЕА́Л — см. *Идеал, Главных идеалов кольцо*.

ГЛА́ВНЫЙ МАСШТА́Б — см. *Картографическая проекция*.

ГЛА́ВНЫЙ МИНО́Р — см. *Минор*.

ГЛА́ВНЫХ ИДЕА́ЛОВ КОЛЬЦО́ — ассоциативное кольцо R с единицей, в к-ром все левые и правые идеалы являются главными, т. е. имеют вид Ra и aR соответственно, где $a\in R$. Примеры Г. и. к.: кольцо целых чисел, кольцо многочленов $F[x]$ над полем F. В Г. и. к. без делителей

нуля для любой пары элементов имеются наибольший общий левый делитель и наименьшее общее правое кратное, определяемые однозначно с точностью до обратимого правого множителя. Коммутативное Г. и. к. без делителей нуля является *факториальным кольцом*.

ГЛА́ДКАЯ ГИПЕРПОВЕ́РХНОСТЬ — см. *Алгебраическая геометрия*.

ГЛА́ДКОЕ ПРОЕКТИ́ВНОЕ АЛГЕБРАИ́ЧЕСКОЕ МНОГООБРА́ЗИЕ — см. *Алгебраическая геометрия*.

ГЛА́ДКОСТЬ — свойство функции или геометрической фигуры (кривой, поверхности и т. д.), состоящее в том, что эта функция дифференцируема или у каждой точки данной фигуры имеется окрестность, допускающая дифференцируемую параметризацию, т. е. задание с помощью дифференцируемых функций. В этом смысле говорят о гладкой функции, гладкой кривой или гладкой поверхности и т. д. Если рассматриваемые функции k раз дифференцируемы, то говорят о гладкости порядка k.

ГОДО́ГРАФ (от греч. ὁδός — путь, движение, направление и γράφω — пишу) вектор-функции $x(t)$ — кривая, представляющая собой множество концов переменного вектора $x(t)$ (t — действительная переменная, напр. время), начало которого для всех t есть произвольная фиксированная точка O. Г. даёт наглядное представление об изменении (с изменением t) величины, изображаемой переменным вектором, и о скорости этого изменения, имеющей направление касательной к Г. Напр., если скорость точки является величиной, изображаемой переменным вектором v, то, отложив значения, к-рые имеет вектор v в разные моменты времени, от начала O, получают Г. скорости. При этом величина, характеризующая быстроту изменения скорости в нек-рой точке M, т. е. ускорение ω в этой точке, имеет для любого момента времени направление касательной к Г. скорости в соответствующий его точке.

ГОЛОМО́РФНАЯ ФУ́НКЦИЯ (от греч. ὅλος — весь и μορφή — форма, образ) — то же, что *аналитическая функция*.

ГО́ЛЬДБАХА ПРОБЛЕ́МА в теории чисел: всякое ли целое число, большее или равное шести, может быть представлено в виде суммы трёх простых чисел? Эту проблему выдвинул в 1742 Х. Гольдбах в письме к Л. Эйлеру. В ответ Л. Эйлер заметил, что для решения проблемы достаточно доказать, что каждое чётное число есть сумма двух простых. В течение долгого времени не удавалось найти никаких путей исследования Г. п. В 1923 Г. Харди и Дж. Литлвуду удалось показать, что если верны нек-рые теоремы (не доказанные и сейчас) относительно т. н. L-рядов Дирихле, то всякое достаточно большое нечётное число есть сумма трёх простых чисел. Крупным успехом на пути решения Г. п. была доказанная Л. Г. Шнирельманом (1930) теорема о том, что всякое целое число, большее единицы, есть сумма ограниченного числа простых чисел. В 1937 И. М. Виноградов доказал, что всякое достаточно большое нечётное число представляется суммой трёх простых чисел, т. е., по существу, решил Г. п. для нечётных чисел. Это — одно из крупнейших достижений современной математики. Метод И. М. Виноградова позволяет решать и ряд существенно более общих задач. Другое доказательство теоремы о представлении достаточно большого нечётного числа в виде суммы трёх простых было дано в 1945 Ю. В. Линником. Задача о разбиении чётного числа на сумму двух простых ещё не решена (1987).

ГОМЕОМО́РФИЗМ, гомеоморфное отображение (от греч. ὅμοιος — подобный и μορφή — форма, образ),— одно из основных понятий топологии. Два топологич. пространства наз. гомеоморфными, если существует взаимно однозначное непрерывное отображение одного из них на другое, для к-рого обратное отображение тоже непрерывно; при этом само отображение наз. гомеоморфизмом. Напр., любой круг гомеоморфен любому квадрату, любые два отрезка гомеоморфны, но отрезок не гомеоморфен ни окружности, ни прямой. Прямая гомеоморфна любому интервалу. Свойства фигур, к-рые не меняются при переходе к гомеоморфным фигурам, наз. топологическими. Примеры топологич. свойств: компактность (бикомпактность) и связность.

ГОМЕОМО́РФНОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — то же, что *гомеоморфизм*.

ГОМОЛОГИ́ЧЕСКАЯ А́ЛГЕБРА — раздел алгебры, основным объектом изучения которого являются производные *функторы* на различных *категориях* алгебраических объектов. Один из истоков Г. а.— теория гомологий топологич. пространств, в к-рой каждому топологич. пространству X сопоставляется последовательность абелевых групп $H_n(X)$ (групп гомологий), а непрерывному отображению $f: X \to Y$ пространств — набор гомоморфизмов $f_n : H_n(X) \to H_n(Y)$. В ряде случаев это позволяет свести изучение топологич. объектов к изучению нек-рых алгебраич. объектов, подобно тому как это делается в аналитич. геометрии.

В свою очередь, в алгебре в связи с изучением расширений групп фактически рассматривались первая и вторая группы гомологий и когомологий. Значительный подготовительный материал был разработан в теории ассоциативных алгебр, алгебр Ли, теории конечномерных алгебр, теории колец, теории квадратичных форм. К сер. 40-х гг. 20 в. Г. а. выделяется в самостоятельную область алгебры. Методы Г. а. широко используются в настоящее время в самых различных разделах математики — в функциональном анализе, дифференциальных уравнениях, алгебраич. теории чисел.

● Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, пер. с англ., М., 1960; Маклейн С., Гомология, пер. с англ., М., 1966; Гротендик А., О некоторых вопросах гомологической алгебры, пер. с франц., М., 1961.

ГОМОЛОГИ́ЧЕСКАЯ ТЕО́РИЯ РАЗМЕ́РНОСТИ — см. *Размерности теория*.

ГОМОЛОГИ́ЧНОСТЬ — см. *Гомология*.

ГОМОЛО́ГИЯ (греч. ὁμολογία — согласие, соответствие; от ὁμός — равный, одинаковый и λόγος — слово, учение) — взаимно однозначное проективное преобразование проективной плоскости в себя, переводящее все точки

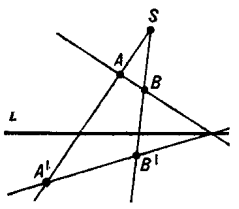


Рис. 1.

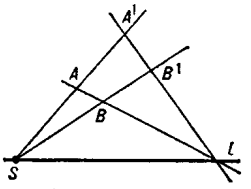


Рис. 2.

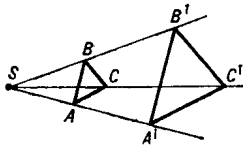


Рис. 3.

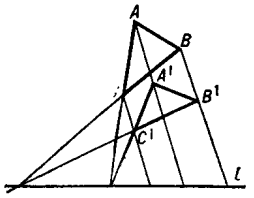


Рис. 4.

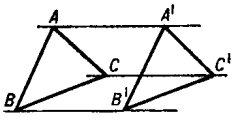


Рис. 5.

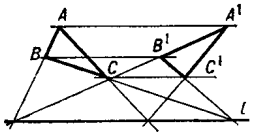


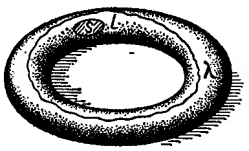
Рис. 6.

некоторой прямой l (оси Г.) в себя и имеющее точно одну неподвижную точку S (центр Г.). Если центр Г. не лежит на оси Г., то Г. наз. неособенной или гиперболической Г. (рис. 1); если центр Г. лежит на оси Г., то — особенной или парабо-

лической Г. (рис. 2); с собственным (конечным) центром и несобственной (бесконечно удалённой) осью есть гомотетия (рис. 3); с несобственным центром и собственной осью — растяжение или сжатие к оси (рис. 4); с несобственной осью и с несобственным центром — параллельный перенос (рис. 5); параболическая Г. с бесконечно удалённым центром и с собственной осью — сдвиг (рис. 6).

Всякое проективное преобразование есть результат последовательного произведения двух преобразований: Г. и движения.

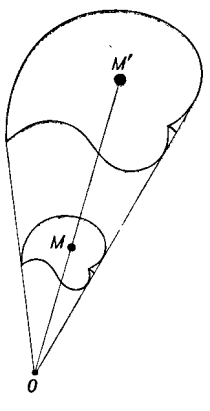
ГОМОЛО́ГИЯ, гомологичность,— формализация интуитивного представления об ограничивании множеств. Напр., кривая l на поверхности тора (рис.) ограничивает часть S этой поверхности; она наз. гомологичной нулю. Кривая λ не гомологична нулю, так как не ограничивает никакой части поверхности (разрез вдоль неё не влечёт выпадения из тора какого-либо его куска).



ГОМОМОРФИ́ЗМ (от греч. ὁμός — равный, одинаковый и μορφή — форма, образ), гомоморфное отображение,— понятие современной математики, обобщающее понятие *изоморфизма*; возникло первоначально в алгебре (гомоморфизм групп). Термин «Г.» ввёл Г. Фробениус, общее определение дано Э. Нётер в 1929. Понятие «Г.» относится к паре алгебраич. систем — паре объектов с заданными на них операциями и (или) отношениями и определяется для них как отображение множества элементов одной системы в другую, сохраняющее все операции и отношения. Напр., Г. группы G в группу H есть такое отображение φ, при к-ром каждому элементу $g \in G$ поставлен в соответствие определённый элемент $h=\varphi(g) \in H$ (образ g), причём произведению двух элементов g_1 и g_2 из G соответствует произведение их образов: $\varphi(g_1 \cdot g_2)=\varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2)$. Если, как и в случае групп, алгебраич. система имеет нулевую подсистему (в группе это единица), то множество элементов первой системы, отображающихся при φ в нулевую подсистему второй, наз. ядром Г. С каждым Г. $\varphi : G \to H$ связана однозначно определённая *конгруэнция* системы G. Обобщением понятия «Г.» служит понятие *морфизма* в теории категорий. В нек-рых разделах математики термин «Г.» употребляется вместо термина «морфизм» и наоборот.

ГОМОТЕ́ТИЯ (от греч. ὁμός — равный, одинаковый и θετός — установленный, расположенный) — преобразование евклидова пространства, ставящее в соответствие (рис.) каждой точке M точку M', лежащую на прямой OM, по правилу

$$OM' = k \cdot OM,$$



где k — постоянное, отличное от нуля число, называемое коэффициентом Г., O — фиксированная точка, наз. центром Г. При $k<0$ Г. наз. обратной: точки M и M' лежат по разные стороны от центра O; при $k>0$ — на одном луче. При $k=1$ Г. есть тождественное преобразование, при $k=-1$ — симметрия относительно центра. При Г. прямая переходит в прямую, сохраняется параллельность прямых и плоскостей. Г. есть частный случай подобия.

ГОМОТОПИ́ЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЁНТНОСТЬ — см. *Топология*.

ГОМОТОПИ́ЧЕСКИЙ КЛАСС — см. *Гомотопия*.

ГОМОТО́ПИЯ (от греч. ὁμός — равный, одинаковый и τόπος — место) — формализация интуитивного представления о деформируемости одного отображения в другое. Точнее, отображения f и g пространства X в пространство Y наз. гомотопными (обозначение $f \sim g$), если существует такое семейство непрерывных отображений $f_t : X \to Y$, непрерывно зависящих от параметра $t \in [0, 1]$, что $f_0=f$, $f_1=g$. Это семейство, называемое гомотопией, связывающей f с g, является путём в пространстве $\Phi(X, Y)$ всех непрерывных отображений $X \to Y$, связывающим точку f с точкой g, так что гомотопность отображений является специализацией на случай пространств отображений общего отношения «быть связанным непрерывным путём». Поэтому, в частности, отношение гомотопности является отношением эквивалентности, а соответствующие классы (они наз. гомотопическими классами) представляют собой компоненты линейной связности пространства $\Phi(X, Y)$. Для придания сказанному точного смысла необходимо уточнить, что означает выражение «отображения $f_t(x)$ непрерывно зависят от t». По традиции считается, что $f_t(x)$ непрерывно зависит от t, если функция $f_t(x)$ непрерывна по совокупности переменных, т. е. если непрерывно отображение $F(x, t)=f_t(x)$, определённое формулой $F : X \times [0, 1] \to Y$ (это отображение также часто наз. гомотопией, связывающей f с g).

ГОМОТО́ПНЫЕ ОТОБРАЖЕ́НИЯ — см. *Гомотопия*.

ГОРИЗОНТА́ЛЬНАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Начертательная геометрия*.

ГОРЛО́ВОЙ ЭЛЛИПС — сечение однополостного *гиперболоида*.

ГО́РНЕРА СХЕ́МА — приём для нахождения неполного частного и остатка при делении многочлена

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

на двучлен $x-c$, где все коэффициенты c, a_0, a_1, ..., a_n лежат в некотором поле, напр. в поле комплексных чисел. Всякий многочлен $P_n(x)$ единственным способом представим в виде

$$P_n(x) = (x-c)\, Q_{n-1}(x) + R,$$

где $Q_{n-1}(x)=b_0 x^{n-1}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$ есть неполное частное, а R — остаток, равный по *Безу теореме* $P_n(c)$. Коэффициенты многочлена Q_{n-1} и R вычисляются по рекуррентным формулам

$$\left.\begin{aligned} &b_0 = a_0,\ b_1 = a_1 + cb_0,\ \ldots,\ b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2},\\ &R = a_n + cb_{n-1}. \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

При вычислениях применяют таблицу, верхняя строка которой задана, а нижняя заполняется по формулам (*). По существу, этот же способ применялся математиками средневекового Китая. В нач. 19 в. он был заново открыт независимо У. Горнером (1819) и П. Руффини (1802).

	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
c	b_0	b_1	...	b_{n-1}	R

В вычислительной практике алгоритм Г. с. осуществляется при помощи формулы

$$P_n(x) = a_0 + x\,(a_1 + x\,(a_2 + \ldots + x\,(a_{n-1} + xa_n)\ldots)).$$

Полагая $u_n=a_n$, находят u_k по формуле

$$u_k = xu_{k+1} + a_k,\ k = n-1,\ \ldots,\ 1,\ 0.$$

Таким образом, $u_0=P_n(x)$. Вычислительная погрешность такого алгоритма имеет оценку

$$O\left(2^{-t} \sum_{j=0}^{n} \overline{j}\,|\,a_j\,|\,|\,x\,|^j\right),$$

где $\overline{j}=\max(1, j)$, t — число двоичных разрядов мантиссы в системе с плавающей запятой.

ГРАДИЕ́НТ (от лат. gradiens, род. падеж gradientis — шагающий) — вектор, показывающий направление наибольшего роста скалярной функции $\varphi(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,k,$$

где i, j, k — координатные орты. Г. в нек-рой точке направлен по нормали к поверхности (линии) уровня в этой точке, длина Г. равна

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Свойства Г.:

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi,$$
$$\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi,$$
$$\operatorname{grad} f(\varphi)=f'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi.$$

См. также *Векторный анализ.*

Термин «Г.» ввёл Дж. Максвелл (1873); ему же принадлежит обозначение grad.

ГРАДИЕ́НТНОЕ ПО́ЛЕ — то же, что *потенциальное поле.*

ГРАДИЕ́НТНЫЙ МЕ́ТОД — метод минимизации функций многих переменных. Г. м. состоит в том, что последующее приближение функции $F(x)$ получается из предыдущего смещением в направлении градиента функции:

$$x^{n+1}=x^n-\delta_n\operatorname{grad}F(x^n).$$

Параметр δ_n может быть определён, напр., из условия минимума величины

$$F(x^n-\delta_n\operatorname{grad}F(x^n)).$$

См. *Спуска метод, Наискорейшего спуска метод.*

ГРАДУ́ИРОВАННАЯ А́ЛГЕБРА — алгебра A, разложенная в прямую сумму $A=\bigoplus_{r=-\infty}^{\infty}A_r$ своих подпространств A_r таким способом, что выполняется условие $A_rA_s\subset A_{r+s}$ ($r, s\in\mathbb{Z}$); такая Г. а. наз. также $\mathbb{Z}$-**градуированной**. Аналогично определяется Γ-**градуированная алгебра**, где Γ — любая группа (и даже полугруппа). $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра наз. также **супералгеброй** ($\mathbb{Z}_2=\{\bar{0},\bar{1}\}$ — группа из двух элементов).

Г. а. наз. коммутативной, если $ab=(-1)^{rs}ba$ для любых $a\in A_r$, $b\in A_s$. Примером некоммутативной Г. а. служит алгебра $A=k[x_1, \ldots, x_n]$ многочленов от n переменных над нек-рым полем k, здесь A_r — пространство всех однородных многочленов степени r при $r\geqslant 0$ и $A_r=0$ при $r<0$. Пример коммутативной Г. а.— *Грассмана алгебра.*

ГРА́ДУС (от лат. gradus — шаг, ступень) — единица измерения плоского угла, равная 1/90 части прямого угла. Обозначается знаком °. Г. делится на 60 минут (60′) или 3600 секунд (3600″). Развёрнутый угол составляет 180°. Г. употребляется также для измерения дуг окружности (полная окружность равна 360°).

ГРА́МА МА́ТРИЦА — квадратная матрица $\|g_{ik}\|^n$, составленная из скалярных произведений $g_{ik}=(a_i, a_k)$, $i, k=1, 2, \ldots, n$, векторов a_i и a_k евклидова (или унитарного) пространства. В евклидовом (унитарном) пространстве Г. м. является симметрической (соответственно, эрмитовой) положительно полуопределённой матрицей, т. е. матрицей, все главные миноры к-рой неотрицательны. Справедливо обратное утверждение: любая действительная положительно полуопределённая симметрическая (соответственно эрмитова) матрица является Г. м. нек-рой системы векторов евклидова (соответственно унитарного) пространства. Система векторов $a_1, \ldots, a_n$ является линейно независимой тогда и только тогда, когда её Г. м.— положительно определённая.

См. также *Грама определитель.*

ГРА́МА ОПРЕДЕЛИ́ТЕЛЬ — определитель *Грама матрицы* системы векторов $a_1, \ldots, a_n$ евклидова или унитарного пространства, т. е. определитель вида

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n)=\det\|(a_i, a_j)\|.$$

Г. о. равен квадрату объёма n-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $a_1, \ldots, a_n$. Для Г. о. справедливо неравенство

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n)\leqslant\Gamma(a_1)\ldots\Gamma(a_n). \qquad (*)$$

Знак равенства в (*) достигается тогда и только тогда, когда либо векторы $a_1, \ldots, a_n$ попарно ортогональны, либо хотя бы один из них нулевой. Это означает, что объём n-мерного параллелепипеда не превосходит произведения длин его рёбер и равен этому произведению лишь в случае, если параллелепипед прямоугольный.

Пусть система векторов $a_1, \ldots, a_n$ линейно независима. Длина h ортогональной составляющей произвольного вектора b относительно подпространства, натянутого на $a_1, \ldots, a_n$, находится по формуле

$$h^2=\Gamma(a_1, \ldots, a_n, b)/\Gamma(a_1, \ldots, a_n).$$

Г. о. впервые рассматривались Й. Грамом (1879).

ГРА́МА — ШМИ́ДТА ПРОЦЕ́СС — процесс *ортогонализации* системы векторов, разработанный Й. Грамом (1879—83) и Э. Шмидтом (1905).

ГРАММА́ТИКА (греч. γραμματική, от γράμμα — буква, написание) — см. *Математическая лингвистика.*

ГРАММА́ТИКА формальная — общее название нескольких типов исчислений, используемых в *математической лингвистике* для описания строения естественных языков (а также нек-рых искусственных языков, в частности *программирования языков*). Различают Г. автоматные, бесконтекстные, порождающие и др.

ГРАММА́ТИКА СОСТАВЛЯ́ЮЩИХ — см. *Математическая лингвистика.*

ГРАНИ́ЦА множества — совокупность всех его *граничных точек.*

ГРАНИ́ЧНАЯ ТО́ЧКА множества X — точка топологического пространства, в котором расположено X, в любой окрестности которой есть точки как принадлежащие X, так и не принадлежащие ему; другими словами, это — *прикосновения точка* одновременно для множества X и его дополнения.

ГРАНИ́ЧНОЕ УСЛО́ВИЕ — см. *Математической физики уравнения, Краевая задача.*

ГРАНИ́ЧНЫЕ СВО́ЙСТВА конформных отображений — см. *Конформное отображение.*

ГРАНЬ многогранника — плоский многоугольник, являющийся частью поверхности многогранника, ограниченный рёбрами многогранника.

ГРА́ССМАНА А́ЛГЕБРА — ассоциативная алгебра с единицей над некоторым полем k с образующими $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и определяющими соотношениями $\xi_i\xi_j=-\xi_j\xi_i$, $i\neq j$, $\xi_i^2=0$. Г. а. обозначается $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ или $\Lambda_k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Одночлены $1, \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_r}$, $i_1<\ldots<i_r$, $1\leqslant r\leqslant n$, составляют базис Г. а., её размерность равна 2^n. Умножение в Г. а. часто обозначают знаком $\wedge$, т. е. пишут $a\wedge b$ вместо ab.

Г. а. является коммутативной *градуированной алгеброй* относительно разложения $\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}}\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n)_r$, где $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n)_r$ — подпространство размерности C_n^r, порождённое одночленами $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_r}$, $i_1<\ldots<i_r$, если $1\leqslant r\leqslant n$, нулевое подпространство, если $r<0$ или $r>n$, а $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n)_0=k$.

Г. а. $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называют также внешней алгеброй над векторным пространством $V=\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n)_1$, базис к-рого составляют $\xi_1, \ldots, \xi_n$, и обозначают ΛV. Подпространство $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_n)_r$ обозначается $\Lambda^r V$ и наз. r-й внешней степенью пространства V, а его элементы наз. r-**векторами** пространства V. Их можно интерпретировать (в случае поля k характеристики 0) как кососимметрические r раз контравариантные тензоры на V. r-векторы тесно связаны с r-мерными подпространствами в V. Элементы $x_1, \ldots, x_r\in V$ тогда и только тогда линейно независимы (т. е. порождают r-мерное подпространство), когда r-вектор $x_1\ldots x_r\neq 0$. Линейно независимые системы векторов $x_1, \ldots, x_r$ и $y_1, \ldots, y_r$ пространства V порождают одно и то же r-мерное подпространство тогда и только тогда, когда r-векторы $x_1\ldots x_r$ и $y_1\ldots y_r$ пропорциональны. В частности, все n-векторы пропорциональны элементу $\xi_1\ldots\xi_n$. Если $x_1, \ldots, x_n\in V$, то $x_1\ldots x_n=d\xi_1\ldots\xi_n$, где d — определитель матрицы, составленной из координат векторов $x_1, \ldots, x_n$ в базисе $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Отсюда выводятся основные факты теории определителей. Связь между r-векторами и подпространствами была одним из основных исходных пунктов в исследованиях Г. Грассмана, к-рый ввёл Г. а. как алгебраич. аппарат для описания порождения многомерных подпространств одномерными.

● Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980.

ГРАФ (от греч. γράφω — пишу) — множество V вершин и набор E неупорядоченных и упорядоченных пар вершин; обозначается Г. через $G(V, E)$. Неупорядоченная пара вершин наз. р е б р о м, упорядоченная пара — д у г о й. Г., содержащий только рёбра, наз. н е о р и е н т и р о в а н н ы м; Г., содержащий только дуги,— о р и е н т и р о в а н н ы м. Пара вершин может соединяться двумя или более рёбрами (дугами одного направления), такие рёбра (дуги) наз. к р а т н ы м и. Дуга (или ребро) может начинаться и кончаться в одной и той же вершине, такая дуга (ребро) наз. п е т л е й. Вершины, соединённые ребром или дугой, наз. с м е ж н ы м и. Рёбра, имеющие общую вершину, также наз. с м е ж н ы м и. Ребро (дуга) и любая из его двух вершин наз. и н ц и д е н т н ы м и. Говорят, что ребро (u, v) соединяет вершины u и v, а дуга (u, v) начинается в вершине u и кончается в вершине v.

Каждый Г. можно представить в евклидовом пространстве множеством точек, соответствующих вершинам, к-рые соединены линиями, соответствующими рёбрам (или дугам) Г.,— у к л а д к а Г. В 3-мерном пространстве любой Г. можно представить таким образом, что линии, соответствующие рёбрам (дугам), не пересекаются во внутренних точках. Класс Г., называемых плоскими, допускает представление в 2-мерном пространстве.

Существуют различные способы задания Г. Пусть v_1, v_2, . . ., v_n — вершины графа $G(V, E)$, а e_1, e_2, . . ., e_m — его рёбра. М а т р и ц е й с м е ж н о с т и, соответствующей графу G, наз. матрица $A=||a_{ij}||$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, m$, у к-рой элемент a_{ij} равен числу рёбер (дуг), соединяющих вершины v_i и v_j (идущих из v_i в v_j), и $a_{ij}=0$, если соответствующие вершины не смежны. В м а т р и ц е и н ц и д е н т н о с т и $B=||b_{ij}||$ графа G элемент $b_{ij}=1$, если вершина v_i инцидентна ребру e_j, и $b_{ij}=0$, если вершина v_i и ребро e_j не инцидентны. Г. можно задать посредством с п и с к о в, напр. указанием пар вершин, соединённых рёбрами (дугами), или заданием для каждой вершины множества смежных с ней вершин.

Два графа $G(V, E)$ и $H(W, I)$ наз. и з о м о р ф н ы м и, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами вершин V, W и множествами рёбер E, I, сохраняющее отношение инцидентности. П о д г р а ф о м $G'(V', E')$ графа $G(V, E)$ наз. Г. с множеством вершин $V' \subseteq V$ и множеством рёбер (дуг) $E' \subseteq E$, каждое из к-рых инцидентно только вершинам из V'. Последовательность рёбер $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{i-1}, v_i), (v_i, v_{i+1}), \ldots, (v_{r-1}, v_r)$ наз. м а р ш р у т о м, соединяющим вершины v_0 и v_r. Маршрут замкнут, если $v_0=v_r$. Маршрут наз. ц е п ь ю, если все его рёбра различны, и п р о с т о й ц е п ь ю, если все его вершины различны. Замкнутая (простая) цепь наз. (п р о с т ы м) ц и к л о м. Г. наз. с в я з н ы м, если любая пара его вершин соединена маршрутом. Максимальный связный подграф графа G наз. к о м п о н е н т о й с в я з н о с т и. Несвязный Г. имеет, по крайней мере, две компоненты связности. Связный Г. с наименьшим числом рёбер (или связный Г. без циклов) наз. д е р е в о м. Г. наз. k-с в я з н ы м (k-р ё б е р н о-с в я з н ы м), если удаление не менее k вершин (рёбер) приводит к потере свойства связности.

Маршрут, содержащий все вершины или рёбра Г. и обладающий определёнными свойствами, наз. о б х о д о м Г.

Д л и н а м а р ш р у т а (цепи, простой цепи) равна количеству рёбер в порядке их прохождения. Длина кратчайшей простой цепи, соединяющей вершины v_i и v_j в графе G, наз. р а с с т о я н и е м $d(v_i, v_j)$ между v_i и v_j. В связном неориентированном Г. расстояние удовлетворяет аксиомам метрики.

С помощью различных операций можно строить Г. из более простых, переходить от одного Г. к более простому, разбивать Г. на более простые и т. д. Среди одноместных операций наиболее употребительны: удаление и добавление ребра или вершины, стягивание ребра (отождествление пары смежных вершин), подразбиение ребра [т. е. замена ребра (u, v) на пару (u, w), (w, v), где w — новая вершина] и др. Известны двуместные операции: соединение, сложение, различные виды умножений графов и др. Такие операции используются для анализа и синтеза Г. с заданными свойствами.

Первые задачи теории Г. были связаны с решением математич. развлекательных задач и головоломок — з а д а ч а о к ё н и г с б е р г с к и х м о с т а х (см. *Эйлера задача*), развитие к-рой привело к циклу задач об обходах графов; задачи о перевозках, решение к-рых привело к созданию эффективных методов решения *транспортных задач*, и др. Попытки решить сформулированную в сер. 19 в. *четырёх красок задачу* привели к появлению нек-рых исследований Г., имеющих теоретическое и прикладное значение. Многие результаты сер. 19 в., относящиеся к теории Г., были получены при решении практических проблем. Так, Г. Кирхгоф при составлении полной системы уравнений для токов и напряжений в электрич. схеме предложил, по существу, представлять такую схему графом и находить в нём деревья, с помощью к-рых выделяются линейно независимые системы контуров. А. Кэли, исходя из задач подсчёта числа изомеров предельных углеводородов, пришёл к задачам перечисления и подсчёта деревьев, обладающих заданными свойствами, и решил нек-рые из них. В 20 в. задачи, связанные с Г., начали возникать не только в физике, электротехнике, химии, биологии, экономике, социологии и т. д., но и внутри математики, в таких её разделах, как алгебра, топология, теория вероятностей, теория чисел и др. Методы этих разделов стали успешно использоваться для решения задач теории Г. Наряду с термином «Г.» в нач. 20 в. употреблялись в качестве синонимов и другие термины, напр. карта, комплекс, диаграмма, сеть, лабиринт.

В проблематике теории Г. можно выделить направления, носящие более комбинаторный или более геометрический характер. К первым относятся, напр., задачи о построении Г. с заданными свойствами, задачи о подсчёте и перечислении Г. с фиксированными свойствами. Геометрический (топологический) характер носят, напр., задачи, связанные с обходами Г., и задачи, возникающие при укладке Г. на различных поверхностях. Примером результата о существовании Г. с фиксированными свойствами может служить критерий существования Г. с заданными степенями вершин (с т е п е н ь в е р ш и н ы v есть число рёбер, инцидентных v): набор целых чисел $0 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$, сумма к-рых чётна, является набором степеней вершин Г. без петель и кратных рёбер тогда и только тогда, когда для любого числа r, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{r} d_i \leqslant r(r-1) + \sum_{i=r+1}^{n} \min(r, d_i).$$

Примерами задач о подсчёте являются задачи о нахождении количеств неизоморфных Г. с одинаковым числом вершин и (или) рёбер. Получены асимптотич. формулы для числа неизоморфных деревьев с n вершинами и для числа неизоморфных Г. без петель и кратных рёбер с n вершинами.

Примером результатов геометрич. направления является выделение маршрутов, содержащих все вершины или все рёбра Г. Известен критерий существования обхода всех рёбер Г.: в связном Г. цикл, содержащий все рёбра и проходящий по каждому ребру только один раз, существует тогда и только тогда, когда все вершины Г. имеют чётные степени. Для аналогичного обхода вершин известен только ряд достаточных условий существования цикла. Таковы, напр., все плоские 4-связные Г. Получено необходимое и достаточное условие вложения Г. в плоскость: Г. является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, получаемых с помощью подразбиения рёбер из полного 5-вершинного Г. и полного двудольного Г. с тремя вершинами в каждой доле.

Наряду с проблемами, носящими общий математич. характер, в теории Г. имеются специфич. задачи. Напр., изучаются различные свойства связности Г., исследуется

строение Г. по свойствам связности. При анализе надёжности сетей связи, электронных схем, коммуникационных сетей возникает задача о нахождении количеств непересекающихся цепей, соединяющих различные вершины Г. Так, напр., наименьшее число вершин, разделяющих две несмежные вершины Г., равно наибольшему числу непересекающихся по вершинам простых цепей, соединяющих эту пару вершин. Найдены критерии и построены эффективные алгоритмы установления k-связности Г.

Характерным специфич. направлением теории Г. является цикл проблем, связанных с раскрасками Г., в к-рых изучаются разбиения множества вершин (рёбер), обладающие определёнными свойствами, напр. смежные вершины (рёбра) должны принадлежать различным множествам (вершины или рёбра из одного множества окрашиваются одним цветом). Так, было доказано, что наименьшее число цветов, достаточное для раскраски рёбер любого Г. без петель с максимальной степенью вершин σ, равно $[3\sigma/2]$, а для раскраски вершин любого Г. без петель и кратных рёбер достаточно $\sigma+1$ цветов.

С привлечением методов топологии изучаются вложения Г. в различные поверхности. Построены алгоритмы нахождения минимального рода (при условии, что он ограничен константой) ориентируемой поверхности, на к-рой можно расположить Г. Для решения задач, связанных с печатным монтажом электронных схем, модельной является задача о разбиении данного Г. на минимальное число плоских Г.

Средствами алгебры изучаются группы автоморфизмов Г. (т. е. изоморфных отображений Г. на себя). Было доказано, что каждая конечная абстрактная группа есть группа автоморфизмов (симметрий) нек-рого Г. Построены алгоритмы установления изоморфизма Г.: Г., у к-рых степени вершин ограничены константой; Г., у к-рых собственные значения матрицы смежности ограничены константой; Г., допускающих вложение в поверхность ограниченного константой рода.

Как одна из математич. моделей теории вероятностей изучаются *случайные* Г. Это понятие возникает, напр., в результате задания для каждой пары вершин v_i, v_j вероятности p_{ij} существования ребра между ними (с вероятностью $q_{ij}=1-p_{ij}$ этого ребра нет). Многие свойства были изучены для «почти всех» Г., то есть когда все $p_{ij}={}^1/_2$.

● Харари Ф., Теория графов, пер. с англ., М., 1973; Козырев В. П., Юшманов С. В., в кн.: Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, М., 1985, т. 23, с. 68—117. *В. П. Козырев.*

ГРАФИК ФУНКЦИИ (от греч. γραφικός — начертанный) — множество точек плоскости с прямоугольными координатами (x, y), где $y=f(x)$, $x\in E$, E — область определения данной функции (рис. 1). Здесь $y=f(x)$ — действительная функция одного действительного переменного x.

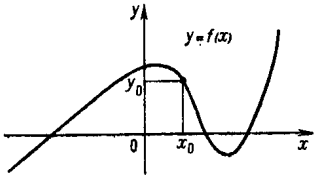


Рис. 1.

Для построения Г. ф. нужно нарисовать «кривую» — множество точек, координаты к-рых (x, y) связаны соотношением $y=f(x)$, $x\in E$. Строго говоря, точное построение Г. ф. невозможно, т. к. любое геометрич. изображение точек, отрезков, кривых и др. объектов можно сделать только приближённо. Поэтому рисунок на самом деле является только эскизом графика, однако если кривая нарисована с достаточной точностью, то её также наз. Г. ф.

Простейшим способом является построение графика функции по точкам. Он состоит в том, что для нескольких значений аргумента находятся значения функции, по к-рым строятся соответствующие точки Г. ф., и затем через эти точки проводится плавная кривая. Так строятся, напр., всевозможные экспериментальные кривые после проведения нескольких опытов. Точность Г. ф., построенного по точкам, зависит от того, насколько часто выбраны значения аргумента, для к-рых построены точки Г. ф.

Для построения графика функции $y=f(x)$, заданной аналитически (формулой), обычно изучают следующие её свойства.

1) Находят область определения функции: те значения x, при к-рых выполнимы все операции, указанные в формуле.

2) Находят интервалы, на к-рых функция непрерывна, имеет первую производную, имеет вторую производную; вычисляют первую и вторую производные.

3) Исследуя знаки производных, находят интервалы монотонности функции, интервалы выпуклости вверх или вниз, точки экстремума и точки перегиба.

4) Изучают поведение функции при стремлении аргумента к граничным точкам области определения, в частности находят пределы функции и асимптоты, если они существуют.

5) Находят значения функции в точках экстремума, в точках перегиба и ещё в нескольких точках в зависимости от нужной точности построения Г. ф.

Учитывая изученные свойства, строят Г. ф., проходящий через найденные точки.

Пример. Построение графика функции $y=(x^3+3x+1)x^{-2}$.

1) Область определения: $x\neq 0$.

2) При $x\neq 0$ функция непрерывна и бесконечно дифференцируема, причём $y'=(x+1)^2(x-2)x^{-3}$, $y''=6(x+1)x^{-4}$.

3) Знаки производных указаны в следующей таблице:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+	0	+	—	0	1
y''	—	0	+	+	+	+

Из этой таблицы вытекает следующее:

а) функция строго возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$; строго убывает на интервале $(0; 2)$;

б) функция выпукла вверх на интервале $(-\infty, -1)$, выпукла вниз на интервалах $(-1, 0)$ и $(0, +\infty)$;

в) точка перегиба $x=-1$; точка локального минимума $x=2$.

4) Так как $\lim\limits_{x\to 0} y=+\infty$, то ось ординат является вертикальной асимптотой. Т. к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1$ и $\lim(y-x)=0$, то прямая $y=x$ является асимптотой при $x\to\pm\infty$. При $x<-1$ функция выпукла вверх, поэтому Г. ф. при $x<-1$ лежит ниже асимптоты $y=x$. При $x>0$ функция выпукла вниз, поэтому график функции при $x>0$ лежит выше асимптоты $y=x$.

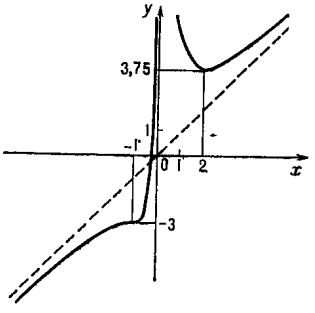


Рис. 2.

5) Таблица значений функции

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$-\frac{35}{9}$	$-\frac{13}{4}$	-3	5	$\frac{15}{4}$	$\frac{37}{9}$

На рис. 2 построен Г. ф., проходящий через найденные точки, с учётом изученных свойств данной функции.

Линейные преобразования графиков. В нек-рых случаях Г. ф. можно построить по заданной его части или по графику другой функции с помощью линейных преобразований: параллельного переноса, растяжения (или сжатия), преобразования симметрии.

С помощью параллельного переноса вдоль оси Ox или оси Oy по заданному графику функции $y=f(x)$ можно пост-

роить графики функций $y=f(x+a)$ (рис. 3) и $y=f(x)+b$ (рис. 4). С помощью растяжения или сжатия по оси Ox или оси Oy можно построить Г. ф. $y=f(kx)$ (рис. 5) и

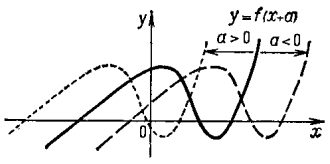


Рис. 3.

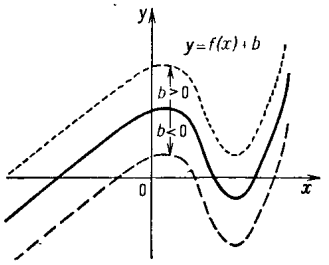


Рис. 4.

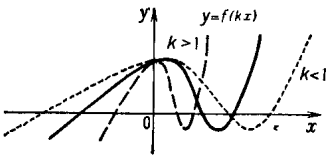


Рис. 5.

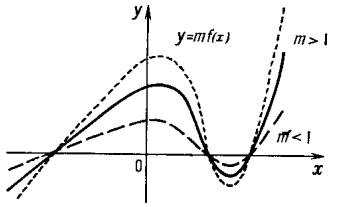


Рис. 6.

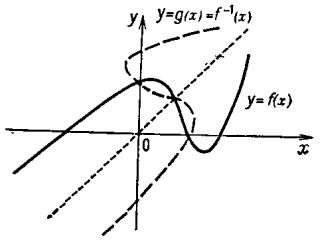


Рис. 7.

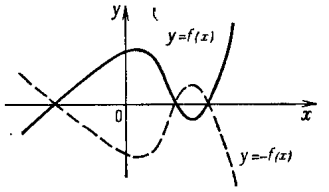


Рис. 8.

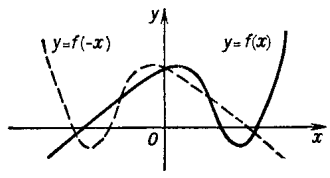


Рис. 9.

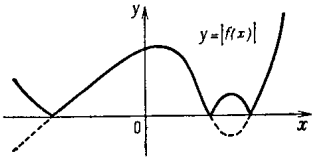


Рис. 10.

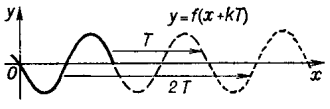


Рис. 11.

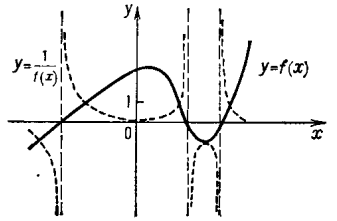


Рис. 12.

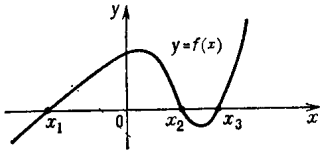


Рис. 13.

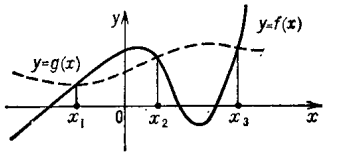


Рис. 14.

$y=mf(x)$ (рис. 6). Для построения графика функции $y=mf(kx+a)+b$ последовательно применяют вышеуказанные преобразования. Г. ф. $y=g(x)=f^{-1}(x)$, обратной функции $y=f(x)$, симметричен относительно биссектрисы первого координатного угла (рис. 7). График функции $y=-f(x)$ может быть получен из графика функции $y=f(x)$ отражением относительно оси Ox (рис. 8), а график функции $f(-x)$ — из графика функции $f(x)$ отражением относительно оси Oy (рис. 9). Г. ф. $y=|f(x)|$ получается отражением относительно оси Ox частей графика $y=f(x)$ при $y<0$ (рис. 10).

Если $y=f(x)$ — периодическая функция с периодом T, то достаточно построить часть её графика для $0\leqslant x\leqslant T$, и тогда весь Г. ф. получается переносом построенной части вдоль оси абсцисс на отрезки kT (рис. 11). Г. ф. $y=\frac{1}{f(x)}$ получается из Г. ф. $y=f(x)$ заменой каждой ординаты y величиной ей обратной $\frac{1}{y}$ (рис. 12). Г. ф. часто используются для приближённого решения уравнений (напр., $f(x)=0$ в точках x_1, x_2 и x_3, рис. 13), систем уравнений и неравенств. Напр., при решении уравнения вида $f(x)=g(x)$ строятся Г. ф. $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Абсциссы точек пересечения этих графиков являются корнями уравнения (рис. 14). Те участки оси Ox, на к-рых график $y=f(x)$ лежит выше графика $y=g(x)$, являются решениями неравенства $f(x)>g(x)$ (на рис. 14: $(x_1, x_2)\cup(x_3, \infty)$).

Понятие графика функции в общем случае. Если $f: F\to F_1$ — отображение множества E в множестве E_1, то графиком отображения (функции) f наз. подмножество

$$G_f=\{(x, f(x)): x\in E\}\subset E\times E_1.$$

Напр., графиком функции $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ наз. множество точек $(n+1)$-мерного пространства с координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ для всех значений x_1, $x_2, \ldots, x_n$ из области определения данной функции. Так, графиком функции от двух переменных $y=f(x_1, x_2)$ является поверхность в 3-мерном пространстве.

Графиком комплекснозначной функции $w=f(z)$, где $z=x+iy$, $w=u+iv$, является двумерная поверхность в 4-мерном пространстве точек с координатами (x, y, u, w).

● Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э., Функции и графики (Основные приемы), 5 изд., М., 1973.

Ю. В. Сидоров.

ГРАФИ́ЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕ́НИЯ — методы получения численных решений различных задач путём графических построений. Г. в. (графич. умножение, графич. решение уравнений, графич. интегрирование и т. д.) представляют систему построений, повторяющих или заменяющих с известным приближением соответствующие аналитич. операции. Графич. выполнение этих операций требует каждый раз последовательности построений, приводящих в результате к графич. определению искомой величины. При Г. в. используются *графики функций*. Г. в. находят применение в приложениях математики. Достоинства Г. в.— простота их выполнения и наглядность. Недостаток — малая точность получаемых ответов. Однако в большом числе задач, особенно в инженерной практике, точность Г. в. вполне достаточна. Графич. методы с успехом могут быть использованы для получения первых приближений, уточняемых затем аналитически. Иногда Г. в. наз. вычисления, производимые при помощи номограмм. Это не совсем правильно, т. к. номограммы являются геометрич. изображениями функциональных зависимостей и не требуют для нахождения численных значений функции к.-л. построений (см. *Номография*).

Вычисление алгебраических выражений. Числа при Г. в. обычно изображаются направленными отрезками на прямой. Для этого выбирают единичный отрезок (длина его наз. масштабом построения). Одно из направлений на прямой принимают за положительное. В этом направлении откладывают отрезки, изображающие положительные числа; отрицательные числа изображаются отрезками, имеющими противоположное направление. На рис. 1 показаны отрезки M_0M, A_0A и B_0B, соответствующие числам 1,3 и и -4 (положительное направление здесь слева направо).

Для нахождения суммы чисел соответствующие им отрезки откладывают на прямой один за другим так, чтобы начало следующего совпадало с концом предыдущего. Отрезок, началом к-рого является начало первого отрезка

и концом — конец последнего, будет изображать сумму. Разность чисел находят, строя сумму отрезка, изображающего первое число, и отрезка, изображающего число, противоположное второму.

Умножение и деление осуществляются построением пропорциональных отрезков, к-рые отсекают на сторонах

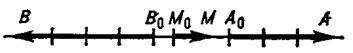


Рис. 1. Изображение чисел 1,3 и —4 направленными отрезками на прямой.

угла параллельные прямые (MA и BC на рис. 2). Так построены отрезки 1, a, b и c, длины к-рых удовлетворяют соотношению $a : 1 = c : b$, откуда $c = ab$ или $b = c/a$; следовательно, зная два из трёх отрезков a, b и c, всегда можно найти третий, т. е. можно построить произведение или частное двух чисел. При этом построении единичные отрезки на прямых OB и OC могут быть различными.

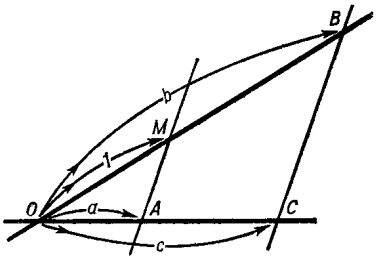


Рис. 2. Графическое умножение и деление: $c = ab$, $b = c/a$.

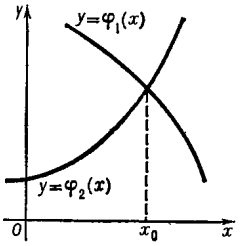


Рис. 3. Графическое решение уравнения $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.

Комбинируя действия умножения и сложения, графически вычисляют суммы произведений вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

и взвешенное среднее

$$(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)/(a_1 + \ldots + a_n).$$

Графич. возведение в целую степень заключается в последовательном повторении умножения.

Построение значений многочлена

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

основано на представлении его в виде

$$f(x) = \{[(a_0x + a_1)x + a_2]x + \ldots\}x + a_n$$

и последовательном графич. выполнении действий, начиная с выражения, заключённого во внутренние скобки.

Графич. решение уравнения $f(x) = 0$ заключается в вычерчивании графика функции $y = f(x)$ и нахождении абсцисс точек пересечения кривой с осью Ox, к-рые и дают значения корней уравнения. Иногда решение можно значительно упростить, если представить уравнение в виде $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ и вычертить кривые $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$. Корнями уравнения будут значения абсцисс точек пересечения этих кривых (на рис. 3 показано нахождение корня x_0).

Так, для решения уравнения 3-й степени $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ его приводят к виду $x^3 + px + q = 0$ заменой $z = x - a/3$, затем уравнение представляют в виде $x^3 = -px - q$ и вычерчивают кривую $y = x^3$ и прямую $y = -px - q$. Точки их пересечения определяют корни x_1, x_2, x_3 уравнения. Построение удобно тем, что кубич. парабола $y = x^3$ остаётся одной и той же для всех уравнений 3-й степени. На рис. 4 решено уравнение $x^3 - 2{,}67x - 1 = 0$. Его корни $x_1 = -1{,}40$, $x_2 = -0{,}40$, $x_3 = 1{,}80$. Аналогично решается уравнение 4-й степени $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$. Подстановкой $z = x - a/4$ его приводят к виду $x^4 + px^2 + qx + s = 0$ и затем переходят к системе уравнений $y = x^2$, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, вводя переменное y. Здесь $x_0 = -q/2$, $y_0 = (1 - p)/2$ и $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - s}$. Первое уравнение даёт на плоскости параболу, одну и ту же для всех уравнений 4-й степени, второе — окружность радиуса r, координаты центра x_0, y_0 к-рой легко подсчитать по коэффициентам данного уравнения. На рис. 5 решено уравнение $x^4 - 2{,}6x^2 - 0{,}8x - 0{,}6 = 0$ (для него $x_0 = 0{,}4$; $y_0 = 1{,}8$; $r = 2$). Его корни $x_1 = -1{,}55$; $x_2 = 1{,}80$. Как видно из рисунка, уравнение других действительных корней не имеет.

Графическое интегрирование. Вычисление определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ основано на замене графика подинтегральной функции $y = f(x)$ ступенчатой ломаной. На рис. 6 изображена криволинейная трапеция $aABb$, площадь к-рой численно равна вычисляемому интегралу. Для построения ломаной криволинейную трапецию разрезают прямыми, параллельными оси Oy, на ряд полос —

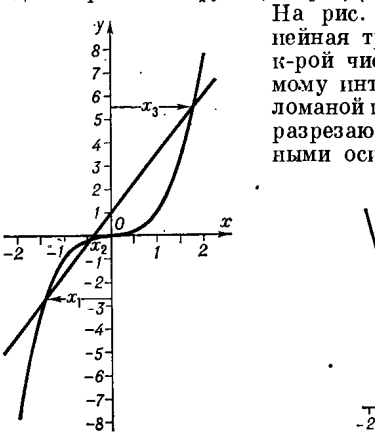


Рис. 4. Графическое решение уравнения 3-й степени: $x^3 - 2{,}67x - 1 = 0$.

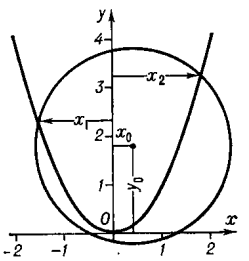


Рис. 5. Графическое решение уравнения 4-й степени: $x^4 - 2{,}6x^2 - 0{,}8x - 0{,}6 = 0$.

элементарных криволинейных трапеций. В каждой из них отрезок кривой заменяют отрезком, параллельным оси Ox так, чтобы получающиеся прямоугольники имели примерно ту же площадь, что и соответствующие элементарные криволинейные трапеции (ломаная изображена на рис. 6 жирной линией). Площадь, ограниченная ломаной,

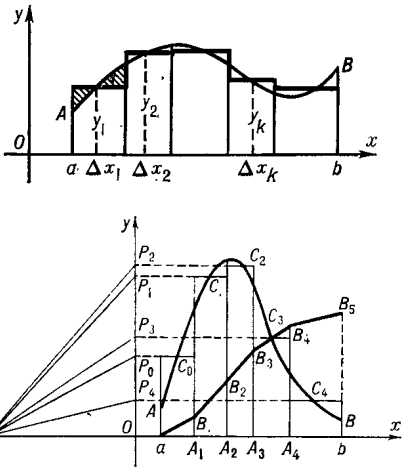


Рис. 6—7. Графическое интегрирование.

равна сумме площадей построенных прямоугольников, т. е. $\sum_{k=1}^{n} y_k \Delta x_k$, Δx_k — длина основания k-го прямоугольника, y_k — одно из значений функции $y = f(x)$ на отрезке Δx_k, равное высоте прямоугольника. Это выражение принимают за приближённое значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Сумму $\sum_{k=1}^{n} y_k \Delta x_k$ вычисляют графически так, как уже было указано. На рис. 7 выполнены все построения, необходимые для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$, где функция $y = f(x)$ задана графиком $AC_0 \ldots$

$..C_4B$. После разбиения криволинейной трапеции на части прямыми, проходящими через точки $A_1, \ldots, A_4$, построены прямоугольники. Высоты их, ординаты точек $C_0, \ldots, C_4$, снесены на ось Oy. Полученные точки $P_0, \ldots, P_4$ соединены с точкой $P(OP=1)$. Затем, начиная от точки a, построена ломаная $aB_1 \ldots B_5$, звенья к-рой параллельны соответствующим отрезкам PP_0, PP_1, ..., PP_4. Величина интеграла численно равна ординате точки B_5. Для построения графика первообразной функции $y=f(x)$, т. е. $\int f(x)dx$, достаточно соединить плавной кривой вершины ломаной, получаемой при вычислении $\sum_{k=1}^{n} y_k \Delta x_k$ (на рис. 7 точки $B_0, B_1, \ldots, B_5$).

Графическое дифференцирование. График производной можно построить по значениям тангенса угла наклона касательной к графику данной функции в различных его точках. Точность такого построения мала из-за больших погрешностей при определении направлений касательных. График производной строят также по секущим, повторяя в обратном порядке процесс графич. интегрирования, изображённый на рис. 7. Для этого график функции (рис. 8) разбивают на части прямыми, параллельными оси Oy и проведёнными через равные расстояния Δx. Через точки деления A_1, A_2, ... проводят отрезки AB_1, A_1B_2, ..., параллельные оси Ox. Отрезки B_1A_1, B_2A_2, ... равны соответствующим приращениям функции. Их откладывают от оси Ox. По полученным точкам A_1', A_2', ... строят ломаную. Затем проводят кривую, следя за тем, чтобы криволинейные треугольники в пределах одной ступени ломаной имели равные площади. Эта кривая и является графиком производной.

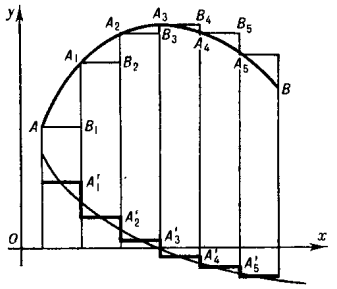


Рис. 8. Графическое дифференцирование.

Графическое интегрирование дифференциальных уравнений. Дифференциальное уравнение 1-го порядка $dy/dx=f(x, y)$ определяет на плоскости поле направлений. Задача интегрирования уравнения заключается в проведении кривых, касательные к к-рым имеют направления поля. Различные приёмы графич. интегрирования состоят в последовательном построении интегральных кривых по касательным, направления к-рых заданы, и в известной мере повторяют численные методы интегрирования.

М. В. Пентковский.

ГРАФОВ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ — функции, заданные на множестве графов и принимающие значения из некоторого множества чисел. Ниже приведены нек-рые Г. ч. х.

Наиболее простыми Г. ч. х. являются число вершин и число рёбер (дуг) графа G. Цикломатическим числом $\nu(G)$ графа G наз. наименьшее число рёбер, удаление к-рых приводит к графу без циклов:

$$\nu(G)=m-n+k,$$

где m — число рёбер, n — число вершин, k — число компонент связности графа G.

Числом вершинной связности $\varkappa(G)$ [числом рёберной связности $\lambda(G)$] наз. наименьшее количество вершин (рёбер) графа G, удаление к-рых приводит к несвязному графу или тривиальному графу (т. е. графу, состоящему из одной вершины). Плотность $\varphi(G)$ есть наибольшее число вершин в полном подграфе графа G; число независимости, или число внутренней устойчивости, $\varepsilon(G)$ есть наибольшее число попарно несмежных вершин графа G (при этом попарно несмежные вершины графа G образуют внутреннее устойчивое множество). Хроматическим числом $\chi(G)$ [рёберным хроматическим числом $\chi'(G)$] наз. наименьшее количество цветов, к-рыми можно раскрасить вершины (рёбра) графа G так, чтобы любые смежные вершины (рёбра) были окрашены разными цветами. Числом внешней устойчивости $\beta(G)$ наз. наименьшее количество вершин такого подмножества W множества вершин графа G, что любая вершина, не принадлежащая W, смежна, по крайней мере, с одной вершиной из W.

Имеются и другие Г. ч. х., напр.: древесность, крупность, толщина, род и др. При решении задач теории графов часто возникает необходимость изучения взаимосвязи различных Г. ч. х. На нек-рых множествах Г. ч. х. достигают своих экстремальных значений, при нахождении к-рых часто удаётся описать графы, на к-рых они достигаются. Тогда нахождение экстремальных значений сводится к исследованию таких графов.

ГРЕГОРИ ФОРМУЛА приближённого интегрирования для функции $y=f(x)$ — формула, имеющая вид

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+nh} f(x)\,dx=\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+$$
$$+\frac{1}{2}y_n+A_2(\Delta^1y_{n-1}-\Delta^1y_0)-A_3(\Delta^2y_{n-2}-\Delta^2y_0)+$$
$$+A_4(\Delta^3y_{n-3}-\Delta^3y_0)-A_5(\Delta^4y_{n-4}+\Delta^4y_0)+\ldots+R,$$

где $y_j=f(a+jh)$, $\Delta^l y_j$ — разности функции y порядка $l=1, 2, \ldots$ в точках $a+jh$, $j=0, 1, \ldots, n$,

$$A_k=\int_0^1 t(t-1)\ldots(t-k+1)\cdot(k!)^{-1}\,dt,$$

$k=2, 3, \ldots$, в частности

$$A_2=\frac{1}{12},\quad A_3=\frac{1}{24},\quad A_4=\frac{19}{720},\quad A_5=\frac{3}{160},\quad \ldots$$

Г. ф. получается при интегрировании интерполяционного многочлена с узлами в точках a, $a+h$, ..., $a+nh$. Простейший вариант Г. ф. был предложен Дж. Грегори (1668).

ГРЕФФЕ МЕТОД — то же, что *Лобачевского метод*; был предложен К. Греффе в 1837 независимо от Н. И. Лобачевского.

ГРИНА ФОРМУЛЫ — формулы интегрального исчисления, связывающие между собой интегралы различных типов. Простейшая из них связывает двойной интеграл по области G с криволинейным интегралом по границе области G и имеет вид

$$\int_C P\,dx+Q\,dy=\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Эта формула была известна еще Л. Эйлеру (1771). Две другие впервые опубликованы Дж. Грином в 1828 в связи с исследованиями по теории потенциала:

$$\iiint_G\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=$$
$$=\iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma-\iiint_G v\,\Delta u\,dx\,dy\,dz$$

(первая Г. ф., или предварительная Г. ф.) и

$$\iiint_G(u\,\Delta v-v\,\Delta u)\,dx\,dy\,dz=\iint_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma$$

(вторая Г. ф.). Здесь G — область трёхмерного пространства, поверхность S — граница этой области, $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (аналогично Δv) — оператор Лапласа, $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ — производные по направлению внешней нормали к S.

ГРИНА ФУНКЦИЯ — функция, связанная с интегральным представлением решений краевых задач для дифференциальных уравнений.

Г. ф. краевой задачи для линейного дифференциального уравнения — фундаментальное решение уравнения, удовлетворяющее однородным краевым условиям. Г. ф. является ядром интегрального оператора, обратного к диффе-

ренциальному оператору, порождённому данным дифференциальным уравнением и однородными краевыми условиями. Г. ф. позволяет найти решения неоднородного уравнения, удовлетворяющие однородным краевым условиям. Нахождение Г. ф. сводит исследование свойств дифференциального оператора к изучению аналогичных свойств соответствующего интегрального оператора.

Во многих случаях Г. ф. допускает наглядное истолкование как результат воздействия сосредоточенного в точке источника силы, заряда и т. п. (поэтому Г. ф. иногда наз. функцией источника). Так, при электростатич. интерпретации Г. ф. представляет собой потенциал поля точечного заряда, помещённого внутри заземлённой проводящей поверхности.

Важную роль Г. ф. играет в теоретич. физике, особенно в квантовой теории поля и статистич. физике. Г. ф. описывает распространение полей от источников, их порождающих (поэтому её называют также функцией распространения). Г. ф. названа по имени Дж. Грина (1828), впервые рассмотревшего один её частный случай в своём исследовании по теории потенциала.

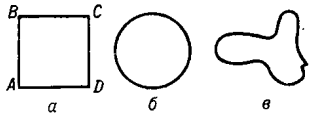
● Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, 4 изд., М., 1984.

ГРУБАЯ ОШИБКА — см. *Ошибок теория*.

ГРУППА (нем. Gruppe) — одно из основных понятий современной математики. Теория Г. изучает в самой общей форме операции, наиболее часто встречающиеся в математике и её приложениях (примеры таких операций — сложение чисел, умножение чисел, сложение векторов, последовательное выполнение преобразований и т. п.). При этом теория Г. изучает не совсем произвольные операции, а лишь те, к-рые обладают рядом основных свойств, перечисляемых в определении Г.

Формальное определение Г. таково. Пусть G — произвольное непустое множество, на к-ром задана бинарная алгебраическая операция, т. е. для любых двух элементов a, b из G определён нек-рый элемент (обозначаемый, напр., $a \circ b$) также из G. Если при этом выполняются условия: 1) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ для любых a, b, c из G; 2) в G существует такой элемент e (называемый единицей, иногда — нейтральным элементом), что $a \circ e = e \circ a = a$ для любого a из G; 3) для любого a из G существует такой элемент a^{-1} (обратный к a элемент), что $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$, то множество G с заданной на нём операцией $\circ$ наз. группой.

Примеры Г. 1) Множество G различных движений евклидовой плоскости, самосовмещающих данную фигуру, операцией на к-ром служит композиция движений (если φ, ψ — два движения из G, то результатом их композиции наз. движение $\varphi \circ \psi$, равносильное последовательному выполнению сначала движения φ, а затем движения ψ), образует т. н. группу симметрий фигуры. Единицей в этой Г. будет тождественное преобразование плоскости, а обратным к φ элементом — обратное к φ преобразование. Г. G является характеристикой большей или меньшей симметричности фигуры: чем больше множество G, тем симметричнее фигура. Напр., группа симметрий квадрата (рис., *а*) состоит из восьми движений (четыре поворота вокруг центра квадрата и четыре отражения: два — относительно диагоналей и два — относительно прямых, соединяющих середины противоположных сторон). Для круга (рис., *б*) группа симметрий уже содержит бесконечно много элементов (напр., все повороты вокруг центра), а для фигуры, изображённой на рисунке (*в*), группа симметрий состоит из одного тождественного преобразования.



а *б* *в*

2) Если $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, а операция на $\mathbb{Z}$ — их обычное сложение $+$, то $\mathbb{Z}$ — группа. Роль e будет играть число 0, а роль обратного к z элемента — число $-z$. Часть H множества $\mathbb{Z}$, состоящая из чётных чисел, сама будет Г. относительно той же операции. В таком случае говорят, что H — *подгруппа* группы $\mathbb{Z}$. Обе группы $\mathbb{Z}$ и H удовлетворяют следующему дополнительному условию: 4) $a+b=b+a$ для любых a, b из группы. Всякая группа, в к-рой выполняется условие 4), наз. коммутативной или абелевой.

3) Множество всех *подстановок* n символов образует группу относительно умножения подстановок, называемую *симметрической группой*. При $n \geqslant 3$ симметрич. группа неабелева. Порядок (число элементов) симметрич. группы равен $n!$.

Историческая справка. Понятие Г. послужило во многих отношениях образцом при перестройке алгебры и вообще математики на рубеже 19—20 вв. Истоки понятия Г. обнаруживаются в нескольких дисциплинах, главная из к-рых — теория решений алгебраич. уравнений в радикалах. В 1771 Ж. Лагранж и А. Вандермонд впервые для нужд этой теории применили подстановки. Затем в ряде работ П. Руффини (1799 и позднее), посвящённых доказательству неразрешимости уравнения 5-й степени в радикалах, систематически используется замкнутость множества подстановок относительно их умножения и, по существу, описаны подгруппы всех подстановок пяти символов. Глубокие связи между свойствами Г. подстановок и свойствами уравнений были установлены Н. Абелем (1824) и Э. Галуа (1830). Э. Галуа принадлежат и многие достижения собственно в теории Г.: открытие роли т. н. нормальных подгрупп в связи с задачей о разрешимости уравнений в радикалах, установление свойства простоты знакопеременных Г. степени $n \geqslant 5$ и др.; он же ввёл термин «группа» (le groupe), хотя и не дал строгого определения. Важную роль в систематизации и развитии теории Г. сыграл трактат К. Жордана (1870) о Г. подстановок.

Независимо и из других соображений идея Г. возникла в геометрии, когда в сер. 19 в. на смену единой античной геометрии пришли многочисленные «геометрии» и остро встал вопрос об установлении связей и родства между ними. Выход из создавшегося положения был намечен исследованиями по проективной геометрии, посвящёнными изучению поведения фигур при различных преобразованиях. Постепенно интерес в этих исследованиях перешёл на изучение самих преобразований и поиск их классификации. Таким «изучением геометрического родства» много занимался А. Мёбиус. На более сознательном уровне классификацию геометрий дал А. Кэли (1854 и далее), он явно пользовался термином «Г.», систематически использовал таблицы умножения, ныне называемые таблицами Кэли, доказал представимость всякой конечной Г. подстановками. Заключительным этапом на этом пути явилась «Эрлангенская программа» Ф. Клейна (1872), положившая в основу классификации геометрий понятие Г. преобразований: каждая геометрия определяется нек-рой Г. преобразований пространства, и только те свойства фигур принадлежат к данной геометрии, к-рые инвариантны относительно преобразований соответствующей Г. (см. также *Классическая группа*).

Третий источник понятия Г.— теория чисел. Уже Л. Эйлер (1761), изучая «вычеты, остающиеся при делении степеней», по существу пользовался сравнениями и разбиениями на классы вычетов, что на теоретико-групповом языке означает разложение Г. на смежные классы по подгруппе. К. Гаусс в «Арифметических исследованиях» (1801), занимаясь уравнением деления круга, фактически определил подгруппы его группы Галуа. Там же, изучая «композицию двоичных квадратичных форм», К. Гаусс, по существу, доказывает, что классы эквивалентных форм образуют относительно композиции конечную абелеву Г.

Осознание в кон. 19 в. принципиального единства теоретико-групповых идей, существовавших к тому времени независимо в разных областях математики, привело к выработке современного абстрактного понятия Г. (С. Ли, Г. Фробениус и др.). Так, уже в 1895 С. Ли определял

Г. как совокупность преобразований, замкнутую относительно их композиции, удовлетворяющей условиям 1), 2), 3). Изучение Г. без предположения их конечности и без каких бы то ни было предположений о природе элементов впервые оформилось в самостоятельную область математики с выходом книги О. Ю. Шмидта «Абстрактная теория групп» (1916).

Теория групп. Конечной целью собственно теории Г. является описание всех возможных групповых операций. Теория Г. распадается на ряд больших разделов, выделяемых чаще всего дополнительными условиями на групповую операцию или внесением в Г. дополнительных структур, связанных определённым образом с групповой операцией. Перечислим важнейшие разделы теории групп.

а) Теория конечных Г. Основная проблема этой старейшей ветви теории Г.— классификация т. н. простых конечных Г., играющих роль «строительных блоков» при построении произвольной конечной Г. См. *Конечная группа.*

б) Теория абелевых Г. Отправной точкой многих исследований в этой области служит основная теорема о конечно порождённых абелевых Г., полностью выясняющая их строение. См. *Абелева группа.*

в) Теория разрешимых и нильпотентных Г. Понятие разрешимой Г. является обобщением понятия абелевой Г. Оно, по существу, идёт от Э. Галуа и тесно связано с разрешимостью уравнений в радикалах. См. *Разрешимая группа, Нильпотентная группа.*

г) Теория Г. преобразований. Понятие Г. возникло исторически именно как понятие Г. преобразований, но в дальнейшем было освобождено от этой конкретной оболочки. Тем не менее теория Г. преобразований осталась важной частью общей теории. Типичный вопрос в ней: какими абстрактными свойствами обладает Г., заданная как Г. преобразований нек-рого множества? Особое внимание привлекают, в частности, Г. подстановок и Г. матриц (см. *Подстановка, Симметрическая группа, Матрица*).

д) Теория представлений Г.— важное орудие изучения абстрактных Г. Представление абстрактной Г. в виде нек-рой конкретной Г. (напр., в виде Г. подстановок или матриц) позволяет проводить тонкие вычисления и с их помощью обнаруживать важные абстрактные свойства. Особенно велики успехи теории представлений в теории конечных Г., где с её помощью получен ряд результатов, недоступных пока абстрактным методам.

е) Из разделов теории групп, выделяемых внесением в Г. дополнительных структур, согласованных с групповой операцией, отметим теорию *топологических групп* (в них групповая операция в нек-ром смысле непрерывна), в частности её старейшую ветвь — теорию *Ли групп.*

Теория Г. является одной из самых развитых областей алгебры и имеет многочисленные применения как в самой математике, так и за её пределами. Напр., с помощью теории групп Е. С. Фёдоров (1890) решил задачу классификации правильных пространственных систем точек, являющуюся одной из основных задач кристаллографии. Это был исторически первый случай применения теории Г. непосредственно в естествознании. Большую роль играет теория Г. в физике, напр. в квантовой механике, где широко используются соображения симметрии и теория представлений Г. линейными преобразованиями.

● Александров П. С., Введение в теорию групп, М., 1980; Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982; Курош А. Г., Теория групп, 3 изд., М., 1967; Холл М., Теория групп, пер. с англ., М., 1962. Шмидт О. Ю., Абстрактная теория групп, в его кн.: Избр. труды. Математика, М., 1959.

М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков.

p-ГРУППА — группа, каждый неединичный элемент которой удовлетворяет уравнению $x^{p^n}=1$; здесь p — фиксированное одно и то же для всех элементов группы простое число, а n — натуральное число, вообще говоря, своё для каждого элемента группы. Если p — конкретное простое число, то говорят о 2-группах, 3-группах и т. д. Иногда (в частности, в теории абелевых групп) p-Г. наз. примарными группами. Обобщением понятия p-Г. является π-группа (π — заданное множество простых чисел), каждый элемент к-рой должен удовлетворять нек-рому уравнению $x^m=1$, где m — натуральное число, все простые делители к-рого принадлежат множеству π.

π-ГРУППА— см. *p-Группа.*

ГРУППА БЕЗ КРУЧЕНИЯ — группа, не имеющая элементов конечного порядка.

ГРУППА ТИПА p^∞ — см. *Абелева группа.*

ГРУППОВАЯ АЛГЕБРА группы G над полем K — ассоциативная алгебра (обозначаемая обычно KG) над полем K, базис которой образуют элементы группы G, а умножение базисных элементов индуцируется групповым умножением. Таким образом, элементами алгебры KG являются всевозможные формальные конечные суммы вида

$$\sum_{g\in G}\alpha_g g,\quad g\in G,\ \alpha_g\in K,$$

а операции определяются формулами:

$$\sum_{g\in G}\alpha_g g+\sum_{g\in G}\beta_g g=\sum_{g\in G}(\alpha_g+\beta_g)\,g$$

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)\left(\sum_{g\in G}\beta_g g\right)=$$

$$=\sum_{h\in G}\left(\sum_{xy=h,\ x,\ y\in G}(\alpha_x\beta_y)\,h\right)$$

(в правой части второй формулы сумма также конечна). Алгебра KG изоморфна алгебре функций, определяемых на группе G со значениями в поле K и принимающих лишь конечное число ненулевых значений; умножение в этой алгебре — свёртка функций.

Г. а. были введены Г. Фробениусом и И. Шуром в связи с изучением представлений групп (рассмотрение представлений группы G над полем K равносильно изучению модулей над Г. а. KG). Целочисленные Г. а. находят применение в алгебраич. топологии; методы теории Г. а. используются также при изучении строения группы.

ГРУППОИД — множество, на котором задана одна произвольная бинарная алгебраическая операция.

ГУРВИЦА КРИТЕРИЙ — то же, что *Рауса — Гурвица критерий.*

ГУРВИЦА МНОГОЧЛЕН — см. *Рауса — Гурвица критерий.*

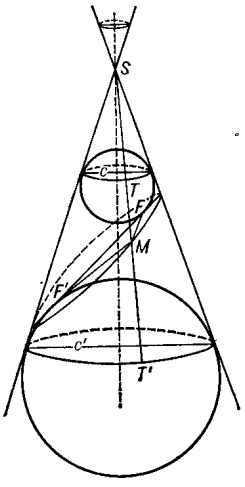
ГУРСА ЗАДАЧА — подробно исследованное Э. Гурса (1902—07) решение гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными по заданным его значениям на двух характеристических кривых, выходящих из одной точки.

Д

Д'АЛАМБЕ́РА ПРИ́ЗНАК — признак сходимости числового *ряда*. Установлен Ж. Д'Аламбером (1768).

Д'АЛАМБЕ́РА УРАВНЕ́НИЕ — то же, что *Лагранжа уравнение*.

ДАНДЕЛЕ́НА ШАРЫ́ — сферы, входящие в геометрическую конструкцию, которая связывает планиметрическое определение эллипса, гиперболы или параболы со стереометрическим определением. Пусть, напр., в круговой конус вписаны две сферы (их и называют шарами Данделена), к-рые касаются конуса по окружностям c и c' (рис.) и нек-рой плоскости π в точках F и F'. Если взять на линии пересечения конуса и плоскости π произвольную точку M и провести через неё образующую SM, к-рая пересекается с окружностями c и c' в точках T и T', то при перемещении точки M точки T и T' будут перемещаться по окружностям c и c' с сохранением расстояния TT', т. е. линия пересечения плоскости π с конусом — эллипс ($MF'+MF=TT'$, так как $MF'=MT'$ и $MF=MT$ как отрезки касательных к сфере из одной точки). Для случая гиперболы Д. ш. находятся в разных полостях конуса.



Конструкция указана Ж. Данделеном (1822).

ДАРБУ́ СУ́ММЫ — суммы специального вида, введённые Г. Дарбу (1875) при исследовании интегрируемости функций по Риману. См. *Интеграл*.

ДВИЖЕ́НИЕ — преобразование евклидова пространства, сохраняющее расстояние между двумя точками. Д. наз. собственным (Д. 1-го рода) или несобственным (Д. 2-го рода) в зависимости от того, сохраняет оно или не сохраняет ориентацию пространства.

Собственное Д. на плоскости может быть задано в прямоугольной системе координат (x, y) формулами:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + a,$$
$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + b.$$

Несобственное Д. есть произведение собственного Д. на преобразование *симметрии* относительно нек-рой прямой. Два параметра a и b характеризуют параллельный перенос плоскости на вектор (a, b), а параметр φ — вращение плоскости вокруг начала координат. Собственное Д. может быть представлено как произведение *вращения* вокруг начала координат на угол φ и *параллельного переноса* на вектор (a, b).

Несобственное Д. на плоскости может быть задано в прямоугольных координатах (x, y) формулами:

$$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi + a,$$
$$y' = x\sin\varphi - y\cos\varphi + b.$$

Всякое несобственное Д. представимо в виде произведения параллельного переноса вдоль нек-рого направления и симметрии относительно прямой, имеющей то же направление.

Д. в пространстве аналитически задаётся посредством линейного преобразования с ортогональной матрицей, определитель к-рой равен 1 или —1 в зависимости от того, является Д. собственным или несобственным.

Собственное Д. в пространстве есть или вращение вокруг оси, или параллельный перенос, или может быть представлено в виде произведения вращения вокруг оси и параллельного переноса в направлении этой оси (винтовое движение).

Несобственное Д. в пространстве есть либо симметрия относительно плоскости, либо может быть представлено в виде произведения симметрии относительно плоскости на вращение вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости, либо в виде произведения симметрии относительно плоскости на перенос в направлении вектора, параллельного этой плоскости.

Д. может быть принято в качестве основного понятия при аксиоматич. построении геометрии. В этом случае вместо аксиом конгруэнтности вводятся аксиомы Д. (фигуры наз. конгруэнтными, если одна переходит в другую при помощи нек-рого Д.).

ДВИЖЕ́НИЯ АКСИО́МЫ — группа аксиом *евклидовой геометрии*.

ДВОИ́ЧНАЯ ЕДИНИ́ЦА — единица измерения *энтропии* и количества *информации*. Энтропию в 1 Д. е. (1 бит) имеет источник с двумя равновероятными сообщениями. Происхождение термина объясняется тем, что количество Д. е. указывает (с точностью до единицы) среднее число двоичных знаков, необходимое для записи сообщений данного источника в двоичном коде. Употребляются также десятичные единицы. Переход от одних единиц к другим соответствует изменению основания логарифмов в определении энтропии и количества информации (10 вместо 2). Формула перехода: 1 дес. ед. $=1/\lg 2$ Д. е. $\approx 3{,}32$ Д. е.

ДВОИ́ЧНАЯ СИСТЕ́МА СЧИСЛЕ́НИЯ — система счисления, построенная на позиционном принципе записи чисел, с основанием 2. В Д. с. с. имеются только два знака — цифры 0 и 1. Число 2 считается единицей 2-го разряда и записывается в виде 10 (читается: «один—нуль»). Каждая единица следующего разряда в 2 раза больше предыдущей, т. е. эти единицы составляют последовательность чисел $2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots$. Для того чтобы число, записанное в десятичной системе счисления, записать в Д. с. с., его делят последовательно на 2 и записывают получающиеся остатки 0 и 1 в порядке от последнего к первому, напр.: $43 = 21\cdot 2+1$; $21 = 10\cdot 2+1$; $10 = 5\cdot 2+0$; $5 = 2\cdot 2+1$; $2 = 1\cdot 2+0$; $1 = 0\cdot 2+1$, итак, двоичная запись числа 43 есть 101 011. Таким образом, 101 011 в Д. с. с. обозначает $1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0$.

В Д. с. с. особенно просто выполняются все арифметич. действия: напр., таблица умножения сводится к равенству $1\cdot 1=1$. Но эта система неудобна тем, что запись числа в ней очень громоздка: напр., число 9000 будет 14-значным. Однако Д. с. с. часто бывает полезной в теоретич. вопросах, а также при вычислениях на ЭВМ.

ДВОЙ́ЧНАЯ ФО́РМА, бинарная форма,— *форма* от двух переменных.

ДВОЙ́ЧНЫЙ КОД — *код*, в словах к-рого используются только два различных символа (напр., 0 и 1).

ДВОЙНА́Я ТО́ЧКА кривой — см. *Особая точка* кривой.

ДВОЙНО́ГО ОТРИЦА́НИЯ ЗАКО́Н — закон классической логики, согласно которому «если неверно, что неверно A, то верно A». Д. о. з. наз. также законом понятия двойного отрицания. В формализованном языке логики высказываний Д. о. з. выражается формулой $\neg\neg A \supset A$ (читается: «неверно, что не A влечёт A»). В традиционной математике Д. о. з. служит логич. основанием для проведения доказательств от противного: из предположения, что суждение A неверно, выводится противоречие, на основании к-рого делается вывод, что неверно «не A», и тогда по Д. о. з. заключают, что верно A.

ДВОЙНО́ГО СЛО́Я ПОТЕНЦИА́Л — см. *Потенциал*.

ДВОЙНО́Е ВЕ́КТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕ́НИЕ векторов — см. *Векторная алгебра*.

ДВОЙНО́Е ОТНОШЕ́НИЕ, сложное отношение, четырёх точек M_1, M_2, M_3, M_4 на прямой,— число, обозначаемое символом $(M_1M_2M_3M_4)$ и равное отношениям длин отрезков:

$$\frac{M_1M_3}{M_3M_2} : \frac{M_1M_4}{M_4M_2}.$$

При этом отношение M_1M_3/M_3M_2 считается положительным, если направления отрезков M_1M_3 и M_3M_2 совпадают, и отрицательным при различных направлениях. Д. о. зависит от порядка нумерации точек, к-рый может отличаться от порядка следования точек на прямой. Наряду с Д. о. четырёх точек, рассматривается Д. о. четырёх прямых m_1, m_2, m_3, m_4, проходящих через точку O. Это отношение обозначается символом $(m_1m_2m_3m_4)$ и равно

$$\frac{\sin(m_1m_3)}{\sin(m_3m_2)} : \frac{\sin(m_1m_4)}{\sin(m_4m_2)},$$

причём угол (m_im_j) между прямыми m_i и m_j рассматривается со знаком.

Если точки M_1, M_2, M_3, M_4 лежат на прямых m_1, m_2, m_3, m_4 (рис. 1), то

$$(M_1M_2M_3M_4) = (m_1m_2m_3m_4).$$

Если точки M_1, M_2, M_3, M_4 и M_1', M_2', M_3', M_4' получены пересечением одной четвёрки прямых m_1, m_2, m_3, m_4 (рис. 1), то $(M_1'M_2'M_3'M_4') = (M_1M_2M_3M_4)$. Если же прямые m_1, m_2, m_3, m_4 и m_1', m_2', m_3', m_4' проектируют одну четвёрку точек M_1, M_2, M_3, M_4 (рис. 2), то $(m_1'm_2'm_3'm_4') = (m_1m_2m_3m_4)$.

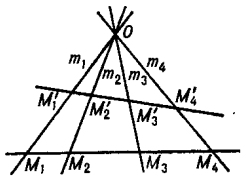


Рис. 1.

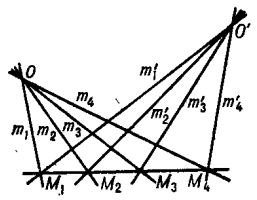


Рис. 2.

Д. о. не меняется также и при любых проективных преобразованиях, т. е. является инвариантом таких преобразований, поэтому Д. о. играют важную роль в проективной геометрии. Особенно важную роль играют четвёрки точек и прямых, для к-рых Д. о. равно —1. Такие четвёрки наз. *гармоническими четвёрками*.

ДВОЙНО́Й ИНТЕГРА́Л — см. *Кратный интеграл*.

ДВОЙНО́Й РЯД — ряд вида

$$\begin{aligned} &u_{11}+u_{12}+\ldots+u_{1n}+\ldots \\ &+u_{21}+u_{22}+\ldots+u_{2n}+\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+u_{m1}+u_{m2}+\ldots+u_{mn}+\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

составленный из элементов бесконечной матрицы $\|u_{mn}\|$, m, $n=1, 2, \ldots$; эти элементы могут быть числами (тогда Д. р. наз. числовым), функциями от одного или нескольких переменных (функциональный Д. р.) и т. д. Для Д. р. принята сокращённая запись

$$\sum_{m,\ n=1}^{\infty} u_{mn} \quad \text{или} \quad \sum_{m,n} u_{mn};$$

u_{mn} наз. общим членом Д. р. Конечные суммы

$$S_{mn} = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} u_{\mu\nu},\ m,\ n=1,\ 2,\ \ldots,$$

наз. частичными суммами Д. р. Если существует предел $S=\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{mn}$, когда m и n независимо друг от друга стремятся к бесконечности, то этот предел наз. суммой Д. р. и Д. р. наз. сходящимся. Теория сходимости Д. р. значительно сложнее соответствующей теории для простых рядов; напр., в отличие от простых рядов из сходимости Д. р. не вытекает, что его частичные суммы ограничены.

Выражение

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}\right) \qquad (1)$$

наз. повторным рядом. Его надо понимать в том смысле, что сначала вычисляются суммы $S_m=\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}$ всех внутренних рядов, а затем рассматривается ряд $\sum_{m=1}^{\infty} S_m$, составленный из этих сумм. Если повторный ряд (1) сходится и имеет сумму S, то её наз. суммой Д. р. по строкам. Аналогично определяется сумма S' Д. р. по столбцам. Из сходимости Д. р. не вытекает, что сходятся внутренние ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}$ и $\sum_{m=1}^{\infty} u_{mn}$, так что суммы по строкам и по столбцам могут и не существовать. Напротив, если Д. р. расходится, то может оказаться, что существуют суммы по строкам и по столбцам и $S\neq S'$. Однако если Д. р. сходится и имеет сумму S и существуют суммы по строкам и по столбцам, то каждая из этих сумм равна S. Это обстоятельство постоянно используется при фактич. вычислении суммы Д. р.

Наиболее важным классом Д. р. являются двойные степенные ряды

$$\sum_{m,n} a_{mn}x^m y^n,$$

двойные ряды Фурье

$$\sum_{m,n} a_{mn}e^{i(mx+ny)} \qquad (2)$$

и квадратичные формы

$$\sum_{m,n} a_{mn}x_m x_n$$

с бесконечным числом переменных x_1, x_2, ..., x_n, ... Для Д. р. Фурье (2) одним из стандартных пониманий суммы таких рядов является следующее: образуются круговые (или сферические) частичные суммы

$$S_N = \sum_{m^2+n^2\leqslant N} a_{mn}e^{i(mx+ny)},$$

где суммирование распространяется на всевозможные пары целых чисел (m, n), для к-рых $m^2+n^2\leqslant N$, и рассматривается предел $\lim\limits_{N\to\infty} S_N$; этот предел наз. сферической суммой Д. р. Фурье (2).

Кратный ряд (точнее, s-кратный ряд) есть ряд вида

$$\sum_{m,\ n,\ \ldots,\ p} u_{mn\ldots p},$$

составленный из элементов таблицы $\|u_{mn\ldots p}\|$. Каждый член этой таблицы занумерован s индексами m, n, ..., p, и эти индексы пробегают независимо друг от друга все натуральные числа. Теория кратных рядов совершенно аналогична теории Д. р.

ДВО́ЙСТВЕННАЯ КАТЕГО́РИЯ к категории C — категория C^*, к-рая может быть построена из тех же объектов, что и категория C, а множества морфизмов получаются «обращением стрелок», т. е. $\mathrm{Hom}_{C^*}(A, B)=\mathrm{Hom}_C(B, A)$. Произведение морфизмов f и g в Д. к. определяется как произведение g на f в C. См. также *Категория*.

ДВО́ЙСТВЕННОСТИ ПРИНЦИП — 1) Д. п. в математической логике — см. *Алгебра логики*.

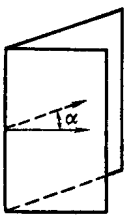
2) Д. п. в геометрии — см. *Проективная геометрия*.

ДВО́ЙСТВЕННЫЕ ФУ́НКЦИИ алгебры логики — см. *Алгебра логики*.

ДВО́ЙСТВЕННЫЙ ПОРЯДО́К — см. *Частично упорядоченное множество*.

ДВУГРА́ННЫЙ У́ГОЛ — фигура в пространстве, образованная двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой, а также часть пространства, ограниченная этими полуплоскостями (рис.). Полуплоскости наз. гранями Д. у., а их общая прямая наз. ребром. Д. у. измеряется

линейным углом α, т. е. углом между двумя перпендикулярами к ребру, выходящими из одной точки и лежащими в разных гранях, или, иначе, углом, образованным пересечением Д. у. плоскостью, перпендикулярной к ребру.



ДВУЛИ́СТНИК, двойной лист,— плоская кривая; см. *Штейнера кривая.*

ДВУМЕ́РНОЕ МНОГООБРА́ЗИЕ — топологическое пространство, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной плоскости или полуплоскости. Д. м.— наиболее наглядный класс многообразий: к ним относятся сфера, круг, лист Мёбиуса, проективная плоскость, тор, бутылка Клейна и др.

Важнейший класс Д. м. составляют замкнутые ориентируемые Д. м., или замкнутые поверхности. Простейшая из них — сфера S^2 и тор T^2 — поверхности рода 0 и 1 соответственно. Поверхность рода g получается из S^2 удалением $2g$ пар непересекающихся дисков и отождествлением с каждой парой граничных окружностей границ изогнутого цилиндра (рис. 1). Поэтому замкнутые поверхности рода g наз. сферами с g ручками (рис. 2).

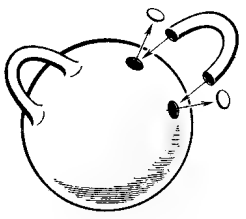


Рис. 1.

Более широкий класс Д. м. составляют компактные незамкнутые ориентируемые Д. м., или поверхности с краем (край поверхности образуют точки, имеющие лишь гомеоморфные полуплоскости окрестности), получаемые из к.-л. замкнутой поверхности удалением внутренних точек конечного числа непересекающихся дисков (рис. 3). Родом этого Д. м. считается род исходной поверхности, так, Д. м. рода 0 — диск или диск с дырами.

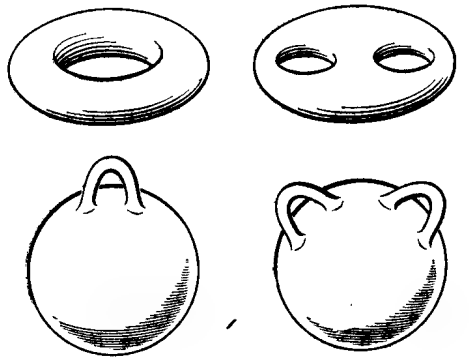


Рис. 2.

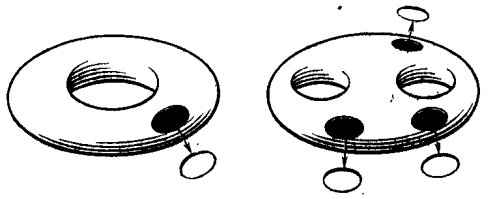


Рис. 3.

В другой класс Д. м. входят компактные неориентируемые Д. м. Они также могут быть замкнутыми и с краем. Простейшее среди них — *Мёбиуса лист*, другой пример — *проективная плоскость*. В общем случае компактные неориентируемые Д. м. получаются из замкнутых поверхностей удалением внутренних точек непересекающихся дисков и заклейкой их листами Мёбиуса. Проективная плоскость получается из сферы заменой одного диска на лист Мёбиуса. Если же заменить листами Мёбиуса два диска, то получится *Клейна поверхность*.

Сферами с ручками или с листами Мёбиуса и, возможно, с удалёнными дисками исчерпываются все компактные связные (состоящие из одного куска) Д. м. Некомпактные Д. м., напр. плоскость $\mathbb{R}^2$, полуплоскость $\mathbb{R}^2_+$ вообще любое открытое подмножество любого компактного Д. м., могут быть очень сложно устроены. Некомпактные Д. м. без края наз. открытыми.

ДВУПО́ЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛО́ИД — незамкнутая центральная *поверхность второго порядка*, *гиперболоид*, состоящий из двух полостей.

ДВУСТОРО́ННЕЕ ПОКАЗА́ТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — то же, что *Лапласа распределение.*

ДВУСТОРО́ННЕЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ ЛАПЛА́СА — см. *Фурье преобразование.*

ДВУСТОРО́ННЯЯ ПОВЕ́РХНОСТЬ — см. *Односторонние и двусторонние поверхности.*

ДВУУГО́ЛЬНИК — часть сферической поверхности, ограниченная двумя дугами больших кругов. См. *Сферическая геометрия.*

ДВУЧЛЕ́Н — алгебраическая сумма двух одночленов. Д. часто наз. также биномом.

ДВУЧЛЕ́ННОЕ УРАВНЕ́НИЕ — алгебраическое уравнение вида $ax^n+b=0$, где a и b — комплексные числа и $ab\neq 0$. Д. у. имеет n различных комплексных корней:

$$x_k=\sqrt[n]{\left|\frac{b}{a}\right|}\exp\left(\frac{2\pi k+\varphi}{n}i\right),$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,\ \varphi=\arg\left(-\frac{b}{a}\right).$$

Корни Д. у. на комплексной плоскости расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|b/a|}$ с центром в начале координат в вершинах правильного вписанного n-угольника.

Большое значение имеют Д. у. специального вида:

$$x^n-1=0;$$

корни таких уравнений наз. корнями n-й степени из единицы и имеют вид

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Произведение и частное двух корней n-й степени из единицы будут также корнями n-й степени из единицы. Среди всех корней n-й степени из единицы существуют такие, что все остальные представляются в виде их степеней; эти корни наз. первообразными. Для того чтобы корень ε_k был первообразным, необходимо и достаточно, чтобы числа k и n были взаимно простыми, т. е. чтобы их наибольший общий делитель равнялся единице; напр., корень ε_1 всегда первообразный: $\varepsilon_k=\varepsilon_1^k$.

Теория Д. у. позволила найти условия разрешимости древней задачи о делении окружности на равные части при помощи циркуля и линейки (см. *Деление круга*).

ДЕВЯТИ ТО́ЧЕК ОКРУ́ЖНОСТЬ — окружность, на которой расположены середины сторон *треугольника*, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр треугольника с вершинами.

ДЕ́ДЕКИНДА АКСИО́МА — одна из аксиом непрерывности множества действительных чисел. Д. а. гласит: если все точки прямой разбиты на два непустых класса, причём все точки первого класса расположены левее всех точек второго, то существует либо самая правая точка первого класса, либо самая левая точка второго. Сформулирована Р. Дедекиндом (1872).

ДЕ́ДЕКИНДОВА РЕШЁТКА, модулярная решётка,— решётка, в которой справедлив модулярный закон, то есть отношение $a\leqslant c$ влечёт за собой $(a+b)c=a+bc$ для всякого b. Это требование равносильно справедливости тождества $(ac+b)c=ac+bc$. Примеры Д. р.: решётки подпространств векторного пространства, решётки нормальных делителей (но не подгрупп) группы, идеалов кольца.

Д. р. названы в честь Р. Дедекинда, к-рый первым сформулировал модулярный закон и установил ряд его следствий.

ДЕДЕКИНДОВО КОЛЬЦО́ — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля, каждый собственный ненулевой идеал которого представим в виде произведения конечного числа простых идеалов. Более того, каждый собственный идеал Д. к. обладает единственным таким представлением. В частности, кольца целых алгебраич. чисел являются Д. к. Толчком для введения Д. к. послужила задача о разложении целых алгебраич. чисел на простые множители (такое разложение оказалось не единственным). Для восстановления единственности этого разложения были введены т. н. *идеальные числа*, одну из интерпретаций к-рых (в виде идеалов) предложил Р. Дедекинд в 70-х гг. 19 в.

ДЕДЕКИНДОВО СЕЧЕ́НИЕ, сечение,— разбиение множества действительных (или только одних рациональных) чисел $\mathbb{R}$ на два таких непустых множества A и B, в сумме дающие $\mathbb{R}$, что для каждого $a\in A$ и $b\in B$ выполняется неравенство $a<b$. Д. с. обозначается символом $A\,|B$. Множество A наз. нижним, а множество B — верхним классом сечения $A\,|B$. Если рациональное число r производит сечение $A\,|B$ так, что в класс A входят все числа $a<r$, а в класс B — все числа $b>r$ (само число r может принадлежать либо классу A, либо классу B), то число r наз. р у б е ж о м сечения $A\,|B$. Д. с. множества рациональных чисел применяются для построения теории *действительных чисел* (Р. Дедекинд, 1872). В терминах Д. с. действительных чисел формулируется понятие непрерывности числовой прямой.

ДЕДУКТИ́ВНАЯ СИСТЕ́МА — см. *Исчисление*.

ДЕДУКТИ́ВНОЕ ПРА́ВИЛО — то же, что *вывода правило*.

ДЕДУ́КЦИИ ТЕОРЕ́МА (от лат. deductio — выведение) — общее название ряда теорем, позволяющих устанавливать доказуемость импликации $A\supset B$ в случае, когда дан логический вывод формулы B из формулы A. В простейшем случае классического, интуиционистского и т. п. исчислений высказываний Д. т. утверждает: если $\Gamma,\ A\vdash B$ (из допущений Γ, A выводимо B), то

$$\Gamma\vdash(A\supset B) \qquad (*)$$

(Γ может быть пусто). При наличии кванторов аналогичное утверждение неверно:

$$A(x)\vdash\forall x A(x),$$

но не

$$\vdash A(x)\supset\forall x A(x).$$

Одна из формулировок Д. т. для традиционных исчислений предикатов (классического, интуиционистского и т. п.): если $\Gamma,\ A\vdash B$, то

$$\Gamma\vdash(\forall A\subset B),$$

где $\forall A$ означает результат приписывания $\forall$-кванторов по всем свободным переменным формулы A. В частности, если A — замкнутая формула, Д. т. принимает форму (*). Эта формулировка Д. т. даёт возможность сводить поиск вывода в аксиоматич. теориях к поиску вывода в исчислении предикатов: формула B выводима из аксиом $A_1, \ldots, A_n$ тогда и только тогда, когда в исчислении предикатов выводима формула

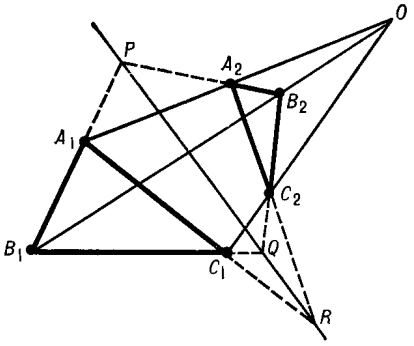
$$\forall A_1\supset(\forall A_2\supset\ldots\supset(\forall A_n\supset B)\ldots).$$

ДЕЗА́РГА ПРЕДЛОЖЕ́НИЕ: если соответственные стороны (или их продолжения) двух треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ (рис.) пересекаются в точках P, Q, R, лежащих на одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, пересекаются в одной точке O. Справедливо и обратное утверждение: если прямые, соединяющие соответственные вершины двух треугольников, проходят через точку O, то три точки P, Q, R пересечения соответственных сторон этих треугольников лежат на одной прямой. Д. п. исходит от Ж. Дезарга (1648).

Упоминаемые в Д. п. точки и прямые могут оказаться бесконечно удалёнными. Поэтому в элементарной геометрии, не рассматривающей *бесконечно удалённые элементы*, Д. п. формулируется с нек-рыми дополнениями. Напр., первая часть теоремы видоизменяется так: если точки пересечения соответственных сторон треугольников лежат на одной прямой, то прямые, соединяющие соответственные вершины и л и проходят через одну точку, и л и параллельны друг другу.

Д. п. играет существенную роль при построении проективной геометрии и, в частности, позволяет ввести понятие гармонич. четвёрки точек.

Содержание Д. п. относится к взаимному расположению прямых на плоскости и не связано с измерениями. Однако, как установил Д. Гильберт, Д. п. не может быть доказана в геометрии на плоскости без привлечения метрич.



аксиом. Таким образом, при аксиоматич. построении проективной геометрии на плоскости Д. п. принимается в качестве аксиомы. Существуют геометрии на плоскости, в к-рых выполняются все проективные аксиомы, но Д. п. в них не имеет места; такие геометрии наз. н е д е з а р г о в ы м и.

ДЕЙСТВИ́ТЕЛЬНАЯ ОСЬ гиперболы — см. *Гипербола*.

ДЕЙСТВИ́ТЕЛЬНАЯ ПРОЕКТИ́ВНАЯ ПЛО́СКОСТЬ — см. *Проективная геометрия*.

ДЕЙСТВИ́ТЕЛЬНАЯ ЧАСТЬ комплексного числа $z=x+iy$ — действительное число x; обозначается $\mathrm{Re}\,z$.

ДЕЙСТВИ́ТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО́, вещественное число,— любое положительное число, отрицательное число или нуль. Д. ч. разделяются на рациональные и иррациональные. Первые представимы как в виде рациональной дроби, т. е. дроби p/q, где p и q — целые, $q\neq0$, так и в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, а вторые — только в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Строгая теория Д. ч., к-рая позволяет определять иррациональные числа исходя из рациональных, была развита лишь во 2-й пол. 19 в. трудами К. Вейерштрасса, Р. Дедекинда и Г. Кантора. Множество всех Д. ч. наз. числовой прямой и обозначается $\mathbb{R}$. Это множество линейно упорядочено и образует поле по отношению к основным арифметич. операциям (сложение и умножение). Множество рациональных чисел всюду плотно в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$ есть его пополнение. Числовая прямая $\mathbb{R}$ «подобна» геометрической прямой, т. е. между числами из $\mathbb{R}$ и точками на прямой можно установить взаимно однозначное соответствие с сохранением упорядоченности. Важнейшее свойство числовой прямой состоит в её непрерывности. Принцип непрерывности числовой прямой имеет несколько различных формулировок. Аксиома (принцип) Вейерштрасса: всякое непустое ограниченное сверху числовое множество имеет (единственную) верхнюю грань. Аксиома (принцип) Дедекинда: всякое сечение (*дедекиндово сечение*) в области Д. ч. имеет рубеж. Аксиома (принцип) Кантора (принцип стягивающихся отрезков): всякая стягивающаяся система отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ числовой прямой имеет единственное число, принадлежащее всем отрезкам.

Теория Д. ч. является одним из важнейших узловых вопросов математики. Свойства числовой прямой являются тем фундаментом, на к-ром строится теория пределов, а вместе с ней всё здание современного математич. анализа.

● Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1, М., 1973; Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1, М., 1975; Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 8 изд., т. 1, М., 1970.

ДЕКА́РТА ПАРА́БОЛА — плоская кривая, одна ветвь *трезубца*. Кривая описана Р. Декартом (1637).

ДЕКА́РТА ПРА́ВИЛО знаков — то же, что *Декарта теорема* о корнях многочлена.

ДЕКА́РТА ТЕОРЕ́МА, правило знаков Декарта, о корнях многочлена: число положительных корней многочлена с действительными коэффициентами равно или на чётное число меньше числа перемен знаков в ряду его коэффициентов (причём каждый корень считается столько раз, какова его кратность); нулевые коэффициенты при подсчёте числа перемен знаков не учитываются. Если известно, что все корни данного многочлена действительны (как, напр., для характеристич. многочлена симметрич. матрицы), то Д. т. даёт точное число корней. Рассматривая многочлен $P_n(-x)$, можно с помощью этой же теоремы найти число отрицательных корней $P_n(x)$. Эта теорема сформулирована Р. Декартом (1637).

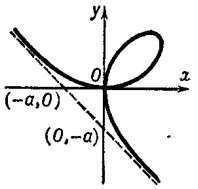
ДЕКА́РТОВ ЛИСТ — плоская алгебраическая кривая 3-го порядка (рис.). Уравнение в прямоугольных координатах:

$$x^3+y^3=3axy.$$

Параметрич. уравнения:

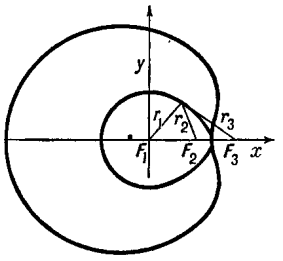
$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3},$$

где t — тангенс угла между радиус-вектором и осью Ox. Симметрична относительно биссектрисы $y=x$. Узловая точка в начале координат с касательными $x=0$ и $y=0$, радиус кривизны ветвей в начале координат $R=3a/2$. Асимптота проходит через точки $(-a, 0)$ и $(0, -a)$. Площадь петли $S_1=3a^2/2$; площадь между кривой и асимптотой $S_2=3a^2/2$. Впервые кривая определена Р. Декартом (1638).



ДЕКА́РТОВ ОВА́Л — плоская кривая (рис.), расстояния r_1 и r_2 каждой точки p к-рой до двух фиксированных точек F_1 и F_2 (фокусов) связаны неоднородным линейным уравнением

$$r_1+mr_2=a.$$



Д. о. можно задать однородным линейным уравнением

$$r_1+mr_2+nr_3=0,$$

где r_3 — расстояние до третьего фокуса F_3, лежащего на прямой F_1F_2. В прямоугольных координатах уравнение Д. о. имеет вид:

$$\sqrt{x^2+y^2}+m\sqrt{(x-d)^2+y^2}=a,$$

где d — длина отрезка F_1F_2. При $m=1$ и $a>d$ Д. о. представляет собой эллипс, при $m=-1$ и $a<d$ — гиперболу и, если $m=a/d$,— улитку Паскаля.

Кривую впервые изучал Р. Декарт (1637) в связи с исследованиями по оптике; Д. о.— кривая, к-рая преломляет лучи, исходящие из одной точки так, что преломлённые лучи проходят через другую заданную точку.

ДЕКА́РТОВА СИСТЕ́МА КООРДИНА́Т — прямолинейная система координат в евклидовом пространстве.

На плоскости общая декартова система координат (аффинная система координат) задаётся точкой O (начало координат) и упорядоченной парой приложенных к ней неколлинеарных векторов e_1 и e_2 (базисных векторов). Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, наз. осями координат данной Д. с. к. Первая, определяемая вектором e_1, наз. осью абсцисс (или осью Ox), вторая — осью ординат (или осью Oy). Сама Д. с. к обозначается Oe_1e_2 или Oxy. Декартовыми координатами точки M (рис. 1) в Д. с. к. Oe_1e_2 наз. упорядоченная пара чисел (x, y), к-рые являются коэффициентами разложения вектора $\overrightarrow{OM}$ по базису e_1e_2:

$$\overrightarrow{OM}=xe_1+ye_2.$$

Число x наз. абсциссой, число y — ординатой точки M. Если (x, y) — координаты точки M, то пишут $M(x, y)$.

Если на плоскости введены две Д. с. к. Oe_1e_2 и $O'e_1'e_2'$ так, что векторы базиса $e_1'e_2'$ выражены через векторы базиса e_1e_2 формулами

$$e_1'=a_{11}e_1+a_{12}e_2,$$
$$e_2'=a_{21}e_1+a_{22}e_2$$

и точка O' имеет в Д. с. к. Oe_1e_2 координаты (x_0, y_0), то координаты (x, y) точки M в Д. с. к. Oe_1e_2 и координаты (x', y') той же точки в Д. с. к. $O'e_1'e_2'$ связаны соотношениями

$$x=a_{11}x'+a_{21}y'+x_0,$$
$$y=a_{12}x'+a_{22}y'+y_0.$$

Д. с. к. наз. прямоугольной (прямоугольной системой координат), если базис e_1e_2 — ортонормированный, т. е. векторы e_1 и e_2 взаимно перпендикулярны и по длине равны единице (векторы e_1 и e_2 наз. в этом случае ортами). В прямоугольной Д. с. к. координаты (x, y) точки M (прямоугольные координаты) соответственно равны: x— величине ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось абсцисс, y — величине ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на ось ординат. В прямоугольной Д. с. к. Oxy расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ равно:

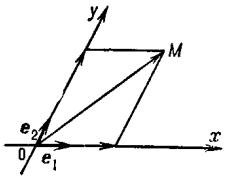


Рис. 1.

$$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Формулы перехода от одной прямоугольной Д. с. к. Oxy к другой прямоугольной Д. с. к. $O'x'y'$, начало к-рой O' имеет в Д. с. к. Oxy координаты (x_0, y_0), имеют вид

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha+x_0,$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha+y_0$$

или

$$x=x'\cos\alpha+y'\sin\alpha+x_0,$$
$$y=x'\sin\alpha-y'\cos\alpha+y_0.$$

В первом случае система $Ox'y'$ образуется поворотом базисных векторов на угол α и последующим переносом начала координат в точку O' (рис. 2), а во втором случае— поворотом и последующим отражением относительно прямой, несущей вектор e_1, а затем переносом начала координат (рис. 3).

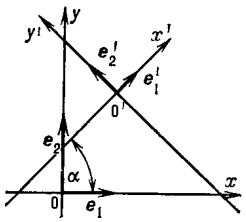


Рис. 2.

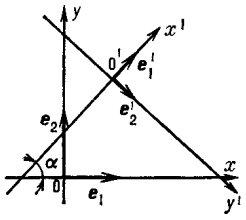


Рис. 3.

Иногда используется косоугольная Д. с. к., отличающаяся от прямоугольной тем, что угол между еди-

ничными базисными векторами не является прямым (см. *Косоугольные координаты*).

Аналогично определяется общая декартова система координат (аффинная система координат) в пространстве заданием точки O — начала координат, и базисных векторов — трёх некомпланарных векторов e_1, e_2, e_3. Аналогично плоскому случаю (рис. 4) определяются оси координат — ось абсцисс (или ось Ox), ось ординат (или ось Oy) и ось аппликат (или ось Oz). Д. с. к. в пространстве обозначается $Oe_1e_2e_3$ (или $Oxyz$). Плоскости, проходящие через пару осей координат, наз. координатными плоскостями. Д. с. к. в пространстве называется правой, если поворот от оси Ox к оси Oy совершается в направлении, противоположном часовой стрелке, если смотреть на плоскость Oxy из какой-нибудь точки положительной полуоси Oz, в противоположном случае — левой. Если базисные векторы e_1, e_2, e_3 единичной длины и попарно перпендикулярны, Д. с. к. наз. прямоугольной (прямоугольной системой координат). Положение одной прямоугольной Д. с. к. в пространстве относительно другой прямоугольной Д. с. к. с той же ориентацией определяется тремя *эйлеровыми углами*.

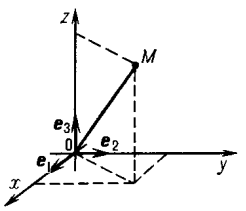


Рис. 4.

Д. с. к. названа по имени Р. Декарта, хотя в его соч. «Геометрия» (1637) система координат сводилась к оси абсцисс с началом отсчёта и системе параллельных, вообще говоря, наклонных ординат, а расстояния по сси и до оси могли быть только положительными числами. Но уже в издании 1659—61 к «Геометрии» приложена работа И. Гудде, в к-рой впервые допускаются как положительные, так и отрицательные значения координат. Пространственную Д. с. к. ввёл Ф. Лаир (1679); он же впервые применил термин «начало» (франц. origine) — отсюда, видимо, обозначение O для начала координат. Обозначения x, y, z для декартовых координат не были приняты сразу и установились лишь в начале 18 в. Современное название «правая» и «левая» системы предложены Дж. Максвеллом (1873). *Т. С. Пиголкина.*

ДЕКА́РТОВО ПРОИЗВЕДЕ́НИЕ — одна из основных теоретико-множественных конструкций, широко используемая во всех областях математики. Впервые введено Р. Декартом (1637) при построении аналитич. геометрии. Часто Д. п. наз. *прямым произведением*.

ДЕКА́РТОВЫ КООРДИНА́ТЫ — см. *Декартова система координат*, *Числовая прямая*.

ДЕКОДИ́РОВАНИЕ (от лат. de- — приставка, здесь означающая уничтожение, отмену, и *код*) — операция обратного преобразования сигнала в сообщение. См. *Канал связи*.

ДЕЛА́МБРА ФО́РМУЛЫ — формулы *сферической тригонометрии*, связывающие все основные элементы сферич. треугольника. Названы по имени Ж. Деламбра.

ДЕЛЁЖ — см. *Кооперативная игра*.

ДЕЛЕ́НИЕ — действие, обратное умножению; заключается в нахождении одного из двух сомножителей, если известны произведение их и другой сомножитель. Т. о., разделить a на b — это значит найти такое x, что $bx=a$ или $xb=a$. Результат Д. x наз. частным, или отношением, a и b. Заданное произведение a наз. делимым, а заданный множитель b — делителем. Для обозначения Д. употребляют знаки двоеточия ($a:b$) или горизонтальной (иногда наклонной) черты ($\frac{a}{b}$, a/b). Знак двоеточия введён Леонардо Пизанским (1202), горизонтальной черты — У. Джонсом (1633). Термины «деление», «делитель», «делимое» употребляются впервые в кон. 10 в. у Герберта, «частное»—в 1202 у Леонардо Пизанского. Соответствующие русские термины ввёл Л. Ф. Магницкий (1703).

В пределах системы целых чисел Д. не всегда возможно (6 делится на 2 и 3, но не делится на 5, см. *Делимость*), но в тех случаях, когда оно возможно, результат его всегда определён единственным образом (как говорят, однозначно). В системе всех рациональных чисел (т. е. чисел целых и дробных) Д. не только однозначно, но и всегда осуществимо, за единственным исключением — Д. на нуль. Если исходить из данного выше определения Д., то легко видеть, что Д. числа, отличного от нуля, на нуль невозможно. Результатом Д. нуля на нуль, по определению, может быть любое число (т. к. всегда $c\cdot 0=0$). Обычно в алгебре предпочитают (чтобы не нарушать однозначности Д.) считать, что Д. на нуль невозможно во всех случаях.

От точного Д., к-рое до сих пор рассматривалось, отличается Д. с остатком. Это по существу совершенно особая операция, отличная от Д. в определённом выше смысле. Если a и b — целые неотрицательные числа, то операция Д. с остатком числа a на число b состоит в определении целых неотрицательных чисел x и y, удовлетворяющих требованиям:

1) $a=xb+y$,
2) $y<b$.

При этом a наз. делимым, b — делителем, x — частным, y — остатком. Эта операция всегда осуществима и всегда однозначна. Если $y=0$, то говорят, что a делится на b без остатка. Аналогично определяется операция Д. с остатком для многочленов вида

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

Она состоит в нахождении по двум многочленам $P(x)$ и $Q(x)$ двух многочленов $S(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющих требованиям:

1) $P(x)=S(x)Q(x)+R(x)$;
2) степень $R(x)$ меньше степени $Q(x)$. Эта операция также всегда осуществима и однозначна. Если $R(x)=0$, то $P(x)$ делится на $Q(x)$ без остатка.

ДЕЛЕ́НИЕ В СРЕ́ДНЕМ И КРА́ЙНЕМ ОТНОШЕ́НИИ — см. *Гармоническая пропорция*.

ДЕЛЕ́НИЕ КРУ́ГА (окружности) на n равных частей — одна из древнейших задач математики; состоит в том, чтобы произвести Д. к. при помощи только циркуля и линейки. Древнегреч. математики умели делить окружность на 2,3, 5, 15 частей, а также неограниченно удваивать число сторон полученных многоугольников. В 1801 К. Гаусс показал, что окружность можно разделить при помощи циркуля и линейки на 17 частей и вообще на такое число частей n, к-рое может быть представлено в виде $n=2^{2^k}+1$ и является простым или равно произведению различных таких чисел и любой степени числа 2 (при $k=0$, 1, 2, 3, 4 получаются простые числа $n=3$, 5, 17, 257, 65537; при $k=5$, 6, 7 соответствующие числа непростые). Ни на какое другое число равных частей разделить окружность при помощи циркуля и линейки нельзя. Д. к. при помощи циркуля и линейки возможно только тогда, когда все корни *двучленного уравнения* $x^n-1=0$ можно получить последовательным решением квадратных и линейных уравнений.

ДЕЛИ́ЙСКАЯ ЗАДА́ЧА — задача об *удвоении куба*; заключается в построении циркулем и линейкой стороны куба, объём которого вдвое больше объёма данного куба. Назв. «Д. з.» связано с преданием, по к-рому жители о. Делос, чтобы избежать чумы, должны были исполнить повеление дельфийского оракула: удвоить объём жертвенника, не изменяя при этом его кубич. формы.

ДЕЛИ́МАЯ ГРУ́ППА, полная группа,— группа, в которой для каждого её элемента a для всякого целого числа $n>0$ уравнение $nx=a$ имеет хотя бы одно решение.

ДЕЛИ́МОЕ — см. *Деление*, *Делимость*; в русской литературе термин «Д.» впервые встречается у Л. Ф. Магницкого (1703).

ДЕЛИ́МОСТИ ПРИ́ЗНАК на натуральное число d — условие, которому удовлетворяет натуральное число A в том и только в том случае, если оно без остатка делится на d. Желательно, чтобы эти условия можно было

легко проверить и чтобы эта проверка была не сложнее непосредственного деления числа A на d.

Если разность $A-B$ делится на d, то число A делится на d тогда и только тогда, когда число B делится на d. На этом свойстве основан вывод многих Д. п. Пусть запись числа A в десятичной системе счисления имеет вид:

$$A=(a_n\ldots a_2a_1a_0)_{10}=a_0+10a_1+10^2a_2+\ldots+10^na_n,$$

тогда

$A=a_0+10A_1$, где $A_1=a_1+10a_2+\ldots+10^{n-1}a_n$;

$A=a_0+10a_1+100A_2$, где $A_2=a_2+10a_3+\ldots+10^{n-2}a_n$;

$A=a_0+10a_1+100a_2+1000A_3$, где

$$A_3=a_3+10a_4+\ldots+10^{n-3}a_n;$$

. . . . . .

Из этих равенств получаются Д. п. на делители чисел 10, 100, 1000, ... В частности, для того чтобы число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы его последняя цифра — число a_0 делилось на 2; для того чтобы число A делилось на 4(на 8), необходимо и достаточно, чтобы число, изображаемое двумя (соответственно, тремя) последними цифрами числа A, т. е. число a_0+10a_1, делилось на 4 (соответственно, $a_0+10a_1+100a_2$ делилось на 8). Так как разность $(a_0+10a_1)-(a_0-2a_1)$ кратна 4, то Д. п. на 4 можно дать и в такой форме: число A делится на 4 тогда и только тогда, когда число a_0+2a_1 делится на 4.

Каждый Д. п. на число d позволяет сопоставить с числом A, если оно не слишком мало, нек-рое неотрицательное целое число, меньшее A, к-рое делится на d в том и только в том случае, когда само число A делится на d. Другими словами, каждый Д. п. на число d определяется нек-рой функцией f, принимающей целые значения и удовлетворяющей условию $|f(A)|<A$ для каждого натурального A, начиная с нек-рого; $f(A)$ делится на d тогда и только тогда, когда число A делится на d. Любая целозначная функция, удовлетворяющая перечисленным условиям, наз. ф у н к ц и е й д е л и м о с т и на ч и с л о d; множество всех таких функций обозначается $\Omega(d)$. Ясно, что

$$f_1(A)=a_0\in\Omega(2)\cap\Omega(5),$$
$$f_2(A)=a_0+10a_1\in\Omega(4)\cap\Omega(25),$$
$$f_3(A)=a_0+10a_1+100a_2\in\Omega(8)\cap\Omega(125),$$
$$f_4(A)=a_0+2a_1\in\Omega(4).$$

Поскольку

$$A=(a_0+A_1)+9A_1=(a_0+a_1+A_2)+9(A_1+A_2)=$$
$$=\ldots=(a_0+a_1+\ldots+a_n)+9(A_1+A_2+\ldots+A_{n-1}),$$

то

$$f_5(A)=a_0+a_1+\ldots+a_n\in\Omega(9)\subset\Omega(3).$$

Итак, число A делится на 3 (на 9) тогда и только тогда, когда сумма цифр $a_0+a_1+\ldots+a_n$ этого числа делится на 3 (на 9). Аналогично

$$A=(a_0-A_1)+11A_1=(a_0-a_1+A_2)+11(A_1-A_2)=$$
$$=\ldots=(a_0-a_1+\ldots+(-1)^na_n)+$$
$$+11(A_1-A_2+\ldots+(-1)^{n-2}A_{n-1}).$$

Следовательно,

$$f_6(A)=a_0-a_1+\ldots+(-1)^na_n\in\Omega(11).$$

Используя представления чисел в системе счисления с основанием 10^k, где $k=2, 3,\ldots$, можно найти Д. п. на делители чисел вида 10^k+1. Так, при $k=2$ получаются функции делимости на 11 и 101:

$$f_7(A)=(a_1a_0)_{10}+(a_3a_2)_{10}+(a_5a_4)_{10}+\ldots\in\Omega(11),$$
$$f_8(A)=(a_1a_0)_{10}\mp(a_3a_2)_{10}+(a_5a_4)_{10}\mp\ldots\in\Omega(101).$$

Поскольку $10^3+1=7\cdot11\cdot13$, получается объединённый Д. п. на числа 7, 11, 13; чтобы узнать, делится ли данное число на какое-нибудь из чисел 7, 11 или 13, достаточно разбить цифры этого числа на грани, начиная справа, по три в каждой, а затем соединить попеременно знаками + и — числа, образованные этими гранями. Полученное число делится на 7, 11 или 13 тогда и только тогда, когда данное число делится соответственно на 7, 11 или 13. Таким образом,

$$f_9(A)=(a_2a_1a_0)_{10}-(a_5a_4a_3)_{10}+(a_8a_7a_6)_{10}-\ldots$$
$$\ldots\in\Omega(7)\cap\Omega(11)\cap\Omega(13).$$

Если целые числа c и d взаимно просты, то число Ac делится на d тогда и только тогда, когда число A делится на d. Это соображение также часто используется при построении Д. п. Пусть d — какой-нибудь делитель разности $10c-1$, тогда числа c и d взаимно просты, и из равенства

$$Ac=(ca_0+A_1)+(10c-1)A_1$$

следует, что число A делится на d в том и только в том случае, если число A_1+ca_0 делится на d. Напр., при $d=19$, $c=2$ разность $10c-1$ делится на 19. Поэтому

$$f_{10}(A)=A_1+2a_0\in\Omega(19).$$

Чтобы узнать, делится ли число на 19, можно последовательно применять этот признак. Пусть d — какой-нибудь делитель суммы $10c+1$. Из равенства

$$Ac=(ca_0-A_1)+(10c+1)A_1$$

следует, что число A делится на d тогда и только тогда, когда число A_1-ca_0 делится на d. Так, при $c=11$ число $10c+1$ делится на 37. Поэтому

$$f_{11}(A)=A_1-11a_0\in\Omega(37).$$

Соответствующий Д. п. можно сформулировать так: чтобы узнать, делится ли число A на 37 или нет, достаточно вычеркнуть последнюю цифру числа A и из числа, образуемого невычеркнутыми цифрами, вычесть произведение 11 на число, изображаемое вычеркнутой цифрой. Число A делится на 37 в том и только в том случае, если полученное число делится на 37. Подобным образом можно вывести Д. п. и на делители чисел вида $10^kc\pm1$.

● В о р о б ь е в Н. Н., Признаки делимости, 2 изд., М., 1974.

В. И. Нечаев.

ДЕЛИМОСТЬ — способность одного числа делиться на другое. Свойства Д. зависят от того, какие совокупности чисел рассматривают. Если рассматривают только целые положительные числа, то говорят, что одно число делится на другое, или, иначе, одно является к р а т н ы м другого, если частное от деления первого числа (д е л и м о г о) на второе (д е л и т е л ь) будет также целым числом. Число наз. п р о с т ы м, если у него нет делителей, отличных от него самого и от единицы (таковы, напр., числа 2, 3, 5, 7, 97, 199 и т. д.), и с о с т а в н ы м в противном случае. Любое целое число можно разложить в произведение простых, напр. $924=2\cdot2\cdot3\cdot7\cdot11$, причём это разложение единственно с точностью до порядка множителей (как говорят, однозначно); так, разложение числа 924 на множители может быть записано следующим образом:

$924=11\cdot7\cdot3\cdot2\cdot2=11\cdot3\cdot2\cdot2\cdot7$ и т. д.,

однако все эти разложения отличаются только порядком множителей. Данное число n делится на простое число p в том и только в том случае, если p встречается среди простых множителей, на к-рые разлагается n. Установлен ряд *делимости признаков*, по к-рым можно легко определить, делится ли число n (записанное по десятичной системе счисления) на данное простое число p.

Для двух чисел a и b среди всех их общих делителей существует наибольший, наз. н а и б о л ь ш и м о б щ и м д е л и т е л е м. Если наибольший общий делитель двух чисел равен единице, то числа наз. в з а и м н о п р о с т ы м и. Целое число, делясь на два взаимно простых числа, делится и на их произведение. На этом факте основаны простые признаки Д. на $6=2\cdot3$, на $10=2\cdot5$, на $12=3\cdot4$, на $15=3\cdot5$ и т. д.

Аналогично теории Д. целых чисел строится теория Д. для многочленов и целых алгебраич. чисел. При разложении многочленов роль простых чисел играют неприводимые многочлены. Свойство быть неприводимым зависит от того, какие числа допускаются в качестве коэффициентов. При действительных коэффициентах неприводимыми мо-

гут быть многочлены только 1-й и 2-й степени, при комплексных — только 1-й степени. Однозначность будет опять условная: с точностью до числового множителя. Для целых алгебраич. чисел теорема об однозначности разложения на множители будет неверна; так, среди чисел вида $a+b\sqrt{5}$ (a и b — целые) число 4 (для к-рого $a=4$, $b=0$) допускает два разложения:

$$4=2\cdot 2=(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1),$$

причём ни один из множителей дальше не разложим. Это обстоятельство привело к введению т. н. *идеальных чисел*, для к-рых уже все теоремы о разложении сохраняются.

ДЕЛИ́ТЕЛЬ — см. *Деление*, *Делимость*; в русской литературе термин «Д.» впервые встречается у Л. Ф. Магницкого (1703).

ДЕЛИ́ТЕЛЬ ЕДИНИ́ЦЫ — см. *Единица*.

ДЕЛИ́ТЕЛЬ НУЛЯ́ — ненулевой элемент кольца или полугруппы с нулём, произведение которого на некоторый ненулевой элемент равно нулю. В некоммутативном случае различаются левые и правые Д. н.: a наз. левым Д. н., если $ab=0$ (соответственно правым — если $ba=0$), хотя бы для одного $b\neq 0$. Если при этом $b=a^k$ (в частности, $b=a$), то a наз. н и л ь п о т е н т н ы м э л е м е н т о м.

ДЕ́ЛЬТА АМПЛИТУ́ДЫ — одна из *эллиптических функций* Якоби.

ДЕ́ЛЬТА-ФУ́НКЦИЯ, δ-ф у н к ц и я, δ-ф у н к ц и я Д и р а к а, $\delta(x)$,— функция, позволяющая записать пространственную плотность физической величины (масса, заряд, интенсивность источника тепла, сила и т. п.), сосредоточенной или приложенной в точке a пространства $\mathbb{R}$. Д.-ф. может быть определена как плотность распределения масс, при к-рой в точке $x=0$ сосредоточена единичная масса, а масса во всех остальных точках равна нулю. Поэтому полагают $\delta(x)=0$ при $x\neq 0$ и $\delta(0)=\infty$, причём $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1$ («бесконечный всплеск» «единичной интенсивности»). Более точно Д.-ф. наз. *обобщённая функция*, определяемая равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,\delta(x)\,dx=\varphi(0),$$

имеющим место для всех непрерывных функций $\varphi(x)$.

Д.-ф. введена П. Дираком (кон. 20-х гг. 20 в.).

ДЕ́НА ТЕОРЕ́МА: куб и равновеликий ему правильный тетраэдр не являются равносоставленными. См. *Равновеликие и равносоставленные фигуры*. Теорема доказана М. Деном (1901).

ДЕНОТА́Т (от лат. denotatus, букв.— обозначение, обозначенный) д а н н о г о и м е н и — объект, обозначением которого является это *имя*.

«ДЕРЕВЕ́НСКИЙ ПАРИКМА́ХЕР» — одна из *антиномий*.

ДЕ́РЕВО в т е о р и и г р а ф о в — связный неориентированный *граф*, не содержащий циклов, или связный граф с минимальным числом рёбер. Число различных Д., к-рые можно построить на n нумерованных вершинах, равно n^{n-2}. Д. с одной выделенной вершиной наз. к о р н е в ы м д е р е в о м.

ДЕСКРИПТИ́ВНАЯ ТЕО́РИЯ МНО́ЖЕСТВ (от позднелат. descriptivus — описательный) — раздел теории множеств, изучающий внутреннее строение множеств в зависимости от тех операций, при помощи которых эти множества могут быть построены из множеств сравнительно простой природы (например, замкнутых или открытых подмножеств данного евклидова, метрического или топологического пространства). К указанным операциям относятся объединение, пересечение, взятие дополнения и так далее. Д. т. м. зародилась в нач. 20 в. в трудах Э. Бореля, Р. Бэра и А. Лебега в связи с проблемой измеримости множеств. Множества, измеримые по Борелю, получили название *борелевских множеств*, или B-множеств. С другой стороны, Р. Бэр дал классификацию функций, названных впоследствии бэровскими функциями, и доказал ряд теорем об этих функциях (см. *Бэра классификация*). А. Лебег дал первую классификацию B-множеств и доказал непустоту каждого её класса.

Изучение B-множеств стало важной задачей Д. т. м., причём в первую очередь надлежало выяснить вопрос о мощности B-множеств. Оказалось, что класс измеримых множеств значительно шире класса B-множеств, и возник вопрос об отыскании средств установления измеримости того или иного множества. Решение этого вопроса в каждом конкретном случае связано, как правило, с выяснением того процесса, при помощи к-рого это множество может быть построено, т. е. его дескриптивной структуры. Так определился ещё один важный круг задач Д. т. м.— отыскание возможности более широкого класса (сохраняющих измеримость) операций над множествами и исследование свойств результатов этих операций. Решение этих вопросов, возникших в работах французских математиков, было дано преимущественно русскими математиками — Н. Н. Лузиным и его школой.

Один из наиболее важных вопросов — вопрос о мощности B-множеств — был решён П. С. Александровым (1916), построившим для этого т. н. A-о п е р а ц и ю. Им было показано, что посредством A-операции, отправляясь от интервалов, можно построить любое B-множество и что всякое несчётное множество, полученное путём A-операции (и называемое A-м н о ж е с т в о м), содержит совершенное множество и, значит, имеет мощность континуума. Этот результат был независимо получен Ф. Хаусдорфом. М. Я. Суслин показал, что существует A-множество, не являющееся борелевским. Он же ввёл и название A-множества, равно как и A-операции (в честь П. С. Александрова). A-множества наз. также с у с л и н с к и м и м н о ж е с т в а м и или реже а н а л и т и ч е с к и м и м н о ж е с т в а м и.

ДЕСЯТИ́ЧНАЯ ДРОБЬ — дробь, знаменатель которой есть целая степень числа 10. Д. д. пишут без знаменателя, отделяя в числителе справа запятой (иногда точкой) столько цифр, сколько нулей содержится в знаменателе, т. е. для Д. д. принята запись

$$a_k a_{k-1}\ldots a_1 a_0, b_1 b_2\ldots b_l, \qquad (1)$$

где $0\leqslant a_i, b_j<10$ — целые числа, причём если $k\neq 0$, то и $a_k\neq 0$. Под (1) понимается число, равное

$$a_k 10^k+a_{k-1}10^{k-1}+\ldots+a_1 10+a_0+\frac{b_1}{10}+\frac{b_2}{100}+\ldots+\frac{b_l}{10^l}.$$

Цифры, стоящие после запятой, наз. десятичными знаками. Если Д. д. не содержит целой части, т. е. меньше единицы по абсолютной величине, то перед запятой ставится нуль.

Б е с к о н е ч н о й д е с я т и ч н о й д р о б ь ю наз. бесконечный ряд чисел вида:

$$a_0, b_1 b_2\ldots b_n\ldots, \qquad (2)$$

где a_0 — целое число, а каждое из чисел $b_j (j=1, 2, \ldots)$ принимает одно из значений 0, 1, 2, ..., 9. Любое действительное число α является суммой нек-рого такого ряда, т. е.

$$\alpha=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{10^k}.$$

Частные суммы ряда (2) — конечные Д. д.

$$a_0, b_1\ldots b_n$$

являются приближёнными значениями числа α с недостатком, а числа

$$a_0, b_1\ldots b_n+\frac{1}{10^n}$$

— приближёнными значениями с избытком. Если существуют такие целые числа n и m, что для всех $i>n$ имеют место равенства $b_i=b_{i+m}$, то бесконечная Д. д. наз. п е р и о д и ч е с к о й. Всякую конечную Д. д. можно рассматривать как бесконечную периодическую с $b_i=0$ для $i>n$. Если α — рациональное число, то соответствующая

ему дробь (2) будет периодической. Для иррационального числа α дробь (2) периодической быть не может.

Д. д. применялись уже в 14—15 вв. аль-Каши описал систему Д. д. в 1427. В Европе Д. д. ввёл в употребление С. Стевин (1584). В русской литературе учение о Д. д. первым изложил Л. Ф. Магницкий в «Арифметике» (1703). С помощью бесконечных Д. д. К. Вейерштрассом во 2-й пол. 19 в. была построена строгая теория действительных чисел.

ДЕСЯТИ́ЧНАЯ СИСТЕ́МА СЧИСЛЕ́НИЯ — система счисления, построенная на позиционном принципе записи чисел с основанием 10. Полагают, что выбор в качестве основания Д. с. с. числа 10 ведёт своё начало от счёта на пальцах. Основание Д. с. с. образует единицу 2-го разряда, единицей 3-го разряда будет $100=10^2$, вообще, единица каждого следующего разряда в 10 раз больше единицы предыдущего. Д. с. с. основана на позиционном принципе, т. е. в ней один и тот же знак (цифра) имеет различные значения в зависимости от того места, где он расположен. В связи с этим для записи всех чисел нуждаются в особых символах только первые 10 чисел. Символы эти, обозначаемые знаками 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, наз. ц и ф р а м и. Для записи числа определяют, сколько в нём содержится единиц наивысшего разряда; затем определяют в остатке число единиц разряда, на единицу меньшего, и т. д. Полученные цифры записывают рядом, напр.: $4\cdot10^2+7\cdot10^1+3\cdot10^0=473$.

Для обозначения больших чисел слово «миллион» (1000^2) было введено в Италии (14 в.). В 15—16 вв. это слово распространилось и в других европейских странах. Н. Шюке ввёл (1484) слово «биллион» и др. для соответствующих степеней миллиона:

биллион (миллиард)	$10^{6\cdot2}$	секстиллион	$10^{6\cdot6}$
триллион	$10^{6\cdot3}$	септиллион	$10^{6\cdot7}$
квадриллион	$10^{6\cdot4}$	октиллион	$10^{6\cdot8}$
квинтиллион	$10^{6\cdot5}$	нониллион	$10^{6\cdot9}$

С сер. 17 в. во Франции числа стали разделять на периоды по три цифры в каждом. При этом биллион вместо старого значения 10^{12} получил значение 10^9, триллион — значение 10^{12}, квадриллион — 10^{15} и т. д. Однако в Великобритании, Германии и нек-рых других североевропейских странах прежнее значение слов сохранилось.

В технич. приложениях используются приставки для международной системы единиц СИ для обозначения десятичных кратных и дольных единиц (напр., пикофарада, мегатонна, наносекунда, сантиметр):

экса	10^{18}	от греч.	ἕξ	— шесть,
пента	10^{15}	от греч.	πέντε	— пять,
тера	10^{12}	от греч.	τέρας	— чудовище,
гига	10^{9}	от греч.	γίγας	— великан,
мега	10^{6}	от греч.	μέγας	— большой,
кило	10^{3}	от греч.	χίλιάς	— тысяча,
гекто	10^{2}	от греч.	ἑκατόν	— сто,
дека	10^{1}	от греч.	δεκάς	— десять,
деци	10^{-1}	от лат.	decem	— десять,
санти	10^{-2}	от лат.	centum	— сто,
милли	10^{-3}	от лат.	mille	— тысяча,
микро	10^{-6}	от греч.	μικρός	— малый,
нано	10^{-9}	от греч.	νᾶνος	— карлик,
пико	10^{-12}	от исп.	pico	— малая величина,
фемто	10^{-15}	от дат.	femten	— пятнадцать,
атто	10^{-18}	от дат.	atten	— восемнадцать.

ДЕСЯТИ́ЧНОЕ ПРИБЛИЖЕ́НИЕ д е й с т в и т е л ь н о г о ч и с л а — приближённое изображение действительного числа конечной десятичной дробью. Всякое действительное число a может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби:

$$a=\pm\alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2\ldots\alpha_n\ldots,$$

где α_0 — неотрицательное число, α_n — одна из цифр 0, 1, 2, ..., 9, $n=1, 2, \ldots$. Если исключить из рассмотрения бесконечные периодич. десятичные дроби с периодами, состоящими только из одних девяток, то всякое действительное число будет записываться в виде бесконечной десятичной дроби однозначным образом. Пусть выбрана такая запись чисел и $a\geqslant0$, тогда конечная десятичная дробь

$$\underline{a}_n=\alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2\ldots\alpha_n$$

(соответственно $\overline{a}_n=\alpha_0,\ \alpha_1\ \alpha_2\ldots\alpha_n+10^{-n}$) наз. н и ж н и м (соответственно в е р х н и м) д е с я т и ч н ы м п р и б л и ж е н и е м порядка n числа a. Если $a<0$ и $a'=-a$, то нижнее $\underline{a}_n$ и верхнее $\overline{a}_n$ Д. п. порядка n числа a определяются равенствами

$$\underline{a}_n=-\overline{a'}_n,\quad \overline{a}_n=-\underline{a'}_n.$$

Для Д. п. действительного числа выполняются следующие сотношения:

$$\underline{a}_n\leqslant\underline{a}_{n+1}\leqslant a\leqslant\overline{a}_{n+1}\leqslant\overline{a}_n,$$
$$\overline{a}_n-\underline{a}_n=10^{-n}.$$

Из них следует, что

$$\lim_{n\to\infty}(\underline{a}_n\pm\underline{b}_n)=a+b,\quad \lim_{n\to\infty}\underline{a}_n\underline{b}_n=ab,$$

а если $b\neq0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\underline{a}_n/\underline{b}_n=a/b,$$

при этом вместо нижних Д. п. можно брать верхние.

Д. п. используются на практике для приближённых вычислений. В качестве приближённых значений сумм $a+b$, разностей $a-b$, произведений ab и частных a/b берутся соответственно $\underline{a}_n+\underline{b}_n$, $\underline{a}_n-\underline{b}_n$, $(\underline{a}_n\underline{b}_n)_n$, $(\underline{a}_n/\underline{b}_n)_n$. В результате указанных действий над конечными десятичными дробями $\underline{a}_n$ и $\underline{b}_n$, имеющими не более n значащих цифр после запятой, получаются снова десятичные дроби с не более чем n значащими цифрами после запятой. С помощью этих дробей искомый результат можно получить с любой степенью точности.

ДЕСЯТИ́ЧНЫЙ ЛОГАРИ́ФМ ч и с л а — логарифм по основанию 10, то есть показатель степени, в которую надо возвести 10, чтобы получить это число. Д. л. числа N обозначается $\lg N$.

ДЕТЕРМИНА́НТ (от лат. determinans, род. падеж determinantis — определяющий) — то же, что *определитель*.

ДЕТЕРМИНИ́РОВАННЫЙ ПРОЦЕ́СС — см. *Вероятностей теория*.

ДЕФЕ́КТ (от лат. defectus — недостаток) м а т р и ц ы — число, равное разности между числом её столбцов и её рангом. Д е ф е к т л и н е й н о г о о т о б р а ж е н и я — размерность ядра этого отображения (см. *Линейное отображение*). Он совпадает с Д. матрицы линейного отображения в произвольном базисе.

ДЕФОРМА́ЦИЯ п о д м н о ж е с т в а A в м н о ж е с т в е X (фигур, отображений и т. д.) — однопараметрическое семейство подмножеств $\{A_t\}\in X$ такое, что $A_0=A$.

ДЕЦИ́ЛЬ (от лат. decem — десять) — частный случай *квантили*.

ДЗЕ́ТА-ФУ́НКЦИЯ Р и м а н а, ζ-ф у н к ц и я,— аналитическая функция комплексного переменного $s=\sigma+it$, при $\sigma>1$ определяемая абсолютно и равномерно сходящимся р я д о м Д и р и х л е:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}. \qquad (1)$$

При $\sigma>1$ справедливо представление в виде п р о и з в е д е н и я Э й л е р а:

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \qquad (2)$$

где p пробегает все простые числа.

Тождественность ряда (1) и произведения (2) представляет собой одно из основных свойств Д.-ф. Оно позволяет получить многочисленные соотношения, связывающие Д.-ф. с важнейшими теоретико-числовыми функциями. Поэтому Д.-ф. играет большую роль в теории чисел.

Д.-ф. была введена как функция действительного переменного Л. Эйлером (1737, опубл. 1744), к-рый указал её разложение в произведение (2). Затем Д.-ф. рассматривалась

П. Дирихле и особенно успешно П. Л. Чебышевым в связи с изучением закона распределения простых чисел. Однако наиболее глубокие свойства Д.-ф. были обкаружены после работ Б. Римана, впервые в 1859 рассмотревшего Д.-ф. как функцию комплексного переменного; им же введено название «Д.-ф.» и обозначение $\zeta(s)$.

Первостепенное значение для теории простых чисел имеет распределение нулей Д.-ф. Известно, что Д.-ф. имеет нули в точках $s=-2n$, где $n=1, 2, \ldots$ (эти нули принято называть тривиальными), и что все остальные (нетривиальные) нули Д.-ф. находятся в полосе $0<\sigma<1$, наз. критической полосой. Б. Риман высказал предположение, что все нетривиальные нули Д.-ф. расположены на прямой $\sigma=\frac{1}{2}$. Эта гипотеза Римана до сих пор (1987) не доказана и не опровергнута.

ДИАГОНА́ЛЬ (от греч. διαγώνιος — идущий от угла к углу) — 1) Д. многоугольника — отрезок прямой, соединяющей две его вершины, не лежащие на одной стороне. Если число вершин многоугольника n, то число Д. равно $n(n-3)/2$.

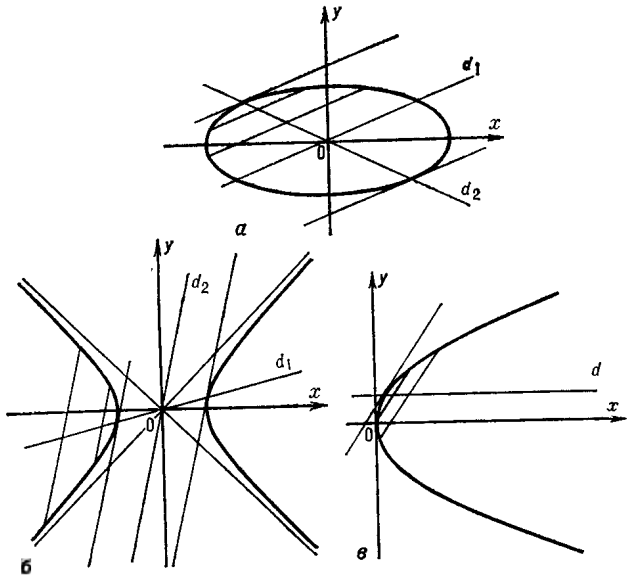
2) Д. многогранника — отрезок прямой, соединяющей две его вершины, не принадлежащие одной грани.

Термин «Д.» встречается у Евклида (3 в. до н. э.).

ДИАГОНА́ЛЬНАЯ МА́ТРИЦА — квадратная матрица $||a_{ij}||$, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, то есть $a_{ij}=0$ при $i\neq j$. Определитель Д. м. равен произведению всех элементов, стоящих на главной диагонали. Д. м., у к-рой на диагонали стоят элементы $a_{ii}=a_i$, обозначают $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$. Если все эти элементы равны между собой, матрица наз. скалярной.

ДИА́МЕТР (от греч. διάμετρος — поперечник) — 1) Д. окружности (круга) — хорда, проходящая через центр окружности. Д. окружности наз. также длина этой хорды.

2) Д. линии второго порядка — прямая, проходящая через середины параллельных хорд этой ли-



нии. Д. наз. сопряжённым хордам (направлению хорд), к-рые он делит пополам. Для центральных линий (эллипса, гиперболы) Д. проходят через центр кривой (рис. *а*, *б*). Диаметр d_2 наз. сопряжённым d_1, если он параллелен хордам, середины к-рых пересекает Д. d_1. Свойство сопряжённости Д. взаимно. Взаимно перпендикулярные сопряжённые Д. наз. главными Д. Гипербола и эллипс, не являющийся окружностью, имеют по одной паре главных Д.— это их главные оси; у окружности главным является каждый её Д. Касательные в точках пересечения Д. с эллипсом (гиперболой) параллельны сопряжённому ему Д. Д. параболы параллелен её оси симметрии (рис. *в*), к-рая есть её главный Д.

Д. конических сечений были известны древнегреческим учёным.

3) Понятие Д. окружности как длины отрезка распространяется на другие геометрич. фигуры и на множества более общей природы. Именно Д. фигуры (или множества в метрич. пространстве) наз. верхняя грань расстояний между всевозможными парами точек этой фигуры (множества). В этом смысле Д. эллипса равен длине большой оси, а Д. квадрата равен длине его диагонали.

ДИВЕРГЕ́НЦИЯ (позднелат. divergentia — расхождение) векторного поля $\boldsymbol{a}$ (в точке x, y, z) — скалярная величина

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z},$$

где a_x, a_y, a_z — координаты вектора $\boldsymbol{a}$. Если вектор $\boldsymbol{a}$ — скорость частицы в установившемся течении несжимаемой жидкости, то $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$ в точке с координатами x, y, z обозначает интенсивность источника ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}>0$) или стока ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}<0$), находящегося в этой точке, или отсутствие источника или стока ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}=0$). Д. есть предел отношения потока векторного поля через замкнутую поверхность, окружающую данную точку, к объёму, ограничиваемому ею, когда эта поверхность стягивается к точке.

Свойства Д.:

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{b},$$
$$\mathrm{div}\,(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\,\mathrm{grad}\,\varphi,$$
$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}=0,$$
$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\boldsymbol{a}=\Delta\varphi\ (\Delta\text{ — оператор Лапласа}),$$
$$\mathrm{div}\,[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=(\boldsymbol{b},\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a},\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}).$$

См. также *Векторный анализ*.

Термин «Д.» ввёл У. Клиффорд (1878); ему же принадлежит обозначение div. Величину, отличную от Д. знаком, рассматривал Дж. Максвелл (1873), называя её конвергенцией.

ДИВИЗО́Р (лат. divisor — делитель) — обобщение понятия делителя элемента коммутативного кольца. Впервые (под названием «идеальный делитель») это понятие появилось в работах Э. Куммера (1847).

Пусть A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля. Теория Д. позволяет свести ряд вопросов, связанных с разложением на простые множители в кольце A, где такое разложение может быть неоднозначно, к разложению на простые множители в нек-рой полугруппе D_0 с однозначным разложением на множители. При этом строится специальный гомоморфизм из мультипликативной полугруппы кольца A в полугруппу D_0, элементы к-рой наз. (целыми) дивизорами кольца A.

Теория Д. существует для всякого *дедекиндова кольца*, в частности для колец целых элементов в полях алгебраич. чисел, причём для дедекиндовых колец существует взаимно однозначное соответствие между элементами полугруппы D_0 и ненулевыми *идеалами* кольца.

«ДИЕ́ТА», задача о диете,— см. *Исследование операций*.

ДИЗЪЮНКТИ́ВНАЯ НОРМА́ЛЬНАЯ ФО́РМА — см. *Алгебра логики*.

ДИЗЪЮ́НКЦИЯ (от лат. disjunctio — разобщение, разделение, различие) — логическая операция, заключающаяся в соединении данных высказываний A и B в новое высказывание «A или B». В формализованных языках Д. высказываний A и B обозначается $A\vee B$ (читается: «A или B», «имеет место A или имеет место B»). A и B — дизъюнктивные члены высказывания $A\vee B$, $\vee$ — знак Д. (от лат. vel — или).

В обычной речи возможны два понимания союза «или»: в исключающем и неисключающем смысле. При первом понимании высказывание «A или B» означает, что истинно ровно одно из двух высказываний A и B, при втором —

что истинно хотя бы одно из них. В математич. логике термин «Д.» относится к истолкованию союза «или» во втором смысле. Такому употреблению Д. соответствует следующая истинностная таблица (И означает «истина», Л — «ложь»):

A	B	$A \vee B$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

ДИМЕТРИЯ (от греч. δι- — приставка, означающая: дважды, двойной, и μετρέω — измеряю) — *аксонометрия* с двумя равными показателями искажения.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ИГРА — бескоалиционная игра, в которой игроки совместно управляют движением точки в некотором множестве X, называемом пространством состояний игры. Д. и. могут рассматриваться как разновидность позиционных игр, характеризуемая специфич. формой как законов перехода от состояния к состоянию, так и выигрышей игроков.

Процесс протекания Д. и. заключается в последовательном переходе от одного состояния к другому в соответствии с выбором всеми игроками управляющих воздействий; выигрыши игроков определяются всей последовательностью состояний и управлений. Типичными примерами могут служить игры на выживание (разорение), в к-рых игроки, обладая нек-рыми начальными капиталами, последовательно разыгрывают одну и ту же бескоалиционную игру до момента разорения одного из них. Каждой точке $x \in X$ соответствует множество $S_i^{(x)}$ элементарных стратегий игрока $i \in I$ в этой точке и, таким образом, множество $S^{(x)} = \prod_{i=1}^{n} S_i^{(x)}$ элементарных ситуаций в x. На X заданы вероятностные распределения

$$F\left(x_k \mid x_1,\ s^{(x_1)},\ \ldots,\ x_{k-1},\ s^{(x_{k-1})}\right),$$
$$x_i \in X,\quad s^{(x_i)} \in S^{(x_i)},$$

определяющие закон движения управляемой точки, известный каждому из игроков. Партия

$$P = \left(x_1,\ s^{(x_1)},\ \ldots,\ x_k,\ s^{(x_k)},\ \ldots\right)$$

Д. и. определяется индуктивно по следующей схеме: в начальном состоянии x_1 каждый игрок выбирает элементарную стратегию $s_i^{(x_1)} \in S_i^{(x_1)}$, в результате чего возникает элементарная ситуация $s^{(x_1)}$ и игра случайным образом переходит в состояние x_2, согласно распределению $F(x_2 | x_1, s^{(x_1)})$. Если определён отрезок партии $(x_1,\ s^{(x_1)},\ \ldots,\ x_{k-1})$ и образуется элементарная ситуация $s^{(x_{k-1})}$, то аналогично игра переходит в состояние x_k, являющееся реализацией распределения $F(x_k | x_1,\ s^{(x_1)},\ \ldots,\ x_{k-1},\ s^{(x_{k-1})})$. На каждой партии P определён выигрыш $h_i(P)$ игрока i. Функции $h_i(P)$, вообще говоря, произвольны, но чаще рассматривались Д. и. либо с терминальным выигрышем (игра заканчивается, как только x_k оказывается в терминальном множестве $X^T \subset X$ и $h_i(P) = h_i(x_k)$, где x_k — последнее состояние в игре), либо с интегральным выигрышем $(h_i(P) = \sum_{k=1}^{\infty} h_i(x_k,\ s^{(x_k)}))$. Обычно считается, что к очередному моменту выбора элементарной стратегии игроки знают предшествующий отрезок партии. В этом случае чистая стратегия s_i игрока i есть набор функций

$$s_i^{(x)}\left(x_1,\ s^{(x_1)},\ \ldots,\ s^{(x_{k-1})},\ x\right),$$

ставящих в соответствие отрезку партии, заканчивающемуся в x, элементарную стратегию $s_i^{(x)} \in S_i^{(x)}$.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЛОГИКА, алгоритмическая логика, программная логика, — раздел теоретического программирования, в рамках которого исследуются аксиоматические системы, представляющие средства для задания семантики *программирования языков*, а также для *программ синтеза* и *программ верификации*. Согласно одному из определений, Д. л. получается из логики предикатов 1-го порядка добавлением оператора $[A]$, к-рый для программы A выражает модальность: «необходимо после выполнения A». Центральные понятия верификации программ — понятия частичной и тотальной правильности программы A относительно предусловия P и постусловия Q — выразимы формулами $P \supset [A]Q$ и $P \supset \neg([A]\neg Q)$ соответственно. При этом $[A]Q$ означает самое слабое предусловие, для к-рого справедливо утверждение о частичной правильности программы A с постусловием Q.

Наряду с Д. л. 1-го порядка рассматриваются пропозициональная Д. л. и её обобщение — т. н. логика процессов, в к-рой выразимы нек-рые свойства программы, зависящие от процесса её выполнения. Различные Д. л. получаются при варьировании средств языков программирования, используемых в программах. Эти средства содержат массивы и другие структуры данных, рекурсивные процедуры, циклич. конструкции, а также средства задания недетерминированных программ.

Среди основных вопросов, к-рые исследуются в теоретич. работах, содержатся вопросы состоятельности и полноты аксиоматич. систем, алгоритмические и сложностные свойства множеств истинных формул, сравнение выразительной мощности языков Д. л.

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА (от греч. δυναμικός — сильный и σύστημα — целое, составленное из частей) — в первоначальном значении механическая система с конечным числом степеней свободы. Её состояние обычно характеризуется её расположением (конфигурацией) и скоростью изменения последнего, а закон движения указывает, с какой скоростью изменяется состояние системы.

В простейших случаях состояние можно охарактеризовать посредством величин $w_1, \ldots, w_m$, к-рые могут принимать произвольные (действительные) значения, а движение описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (д. у.):

$$\dot{w}_i = f_i(w_1, \ldots, w_m),\ i = 1, \ldots, m. \qquad (1)$$

Рассматривая w_i как координаты точки в $\mathbb{R}^m$, можно геометрически представить соответствующее состояние Д. с. посредством точки w. Эту точку называют фазовой точкой, а пространство — фазовым пространством Д. с. (название связано с тем, что в прошлом состояния нередко называли фазами системы). Изменение состояния со временем изображается как движение фазовой точки по нек-рой линии (т. н. фазовой траектории; часто её называют просто траекторией). Векторная скорость движения фазовой точки всё время равна вектору фазовой скорости

$$f(w) = (f_1(w_1, \ldots, w_m), \ldots, f_m(w_1, \ldots, w_m)),$$

отвечающему той точке w фазового пространства, где в данный момент находится движущаяся фазовая точка. В этом состоит т. н. геометрическая (точнее, кинематическая) интерпретация системы д. у. (1), к-рую при этом можно сокращённо записать в виде

$$\dot{w} = f(w). \qquad (2)$$

Возникнув в теории Д. с., эта интерпретация применяется и за её пределами.

В более широком смысле термин «Д. с.» означает произвольную физич. систему (напр., систему автоматич. регулирования или радиотехнич. систему), описываемую д. у. вида (1) или (2), и даже просто систему д. у. такого вида безотносительно к её происхождению. Далее, если векторное поле f задано не в $\mathbb{R}^m$, а на дифференцируемом многообразии M, то по-прежнему можно рассматривать движение в M, происходящее согласно (2), как описано выше. В этом случае тоже говорят о Д. с.

В теории Д. с. обычно считают, что каждое решение (2) определено при всех t (математически это есть нек-рое

условие на (2), имеющее очевидный физич. смысл). Тогда можно говорить о следующих преобразованиях φ_t фазового пространства: фазовая точка, двигаясь согласно (2), за время t переходит из положения w в $\varphi_t w$. Они образуют однопараметрич. группу преобразований, т. е. зависят от одного действительного параметра, φ_0 — тождественное преобразование и $\varphi_{t+s}=\varphi_t \circ \varphi_s$. С этим связана ещё одна концепция Д. с.— как (полу)группы преобразований фазового пространства (уже не обязательно многообразия). Если при таком подходе надо специально отметить, что группа однопараметрическая, то Д. с. наз. потоком (ввиду аналогии между движением точек в фазовом пространстве и движением частиц жидкости при стационарном течении). Но группа может быть и иной. Так, в приложениях встречаются каскады — Д. с. $\{\varphi^n\}$, получающиеся при итерировании нек-рого отображения φ; номер n итерации играет роль, аналогичную t для потока («дискретное время»).

Теорию Д. с. называют также качественной теорией (обыкновенных) д. у.; это особенно относится к ранее возникшим её разделам, прежде всего посвящённым локальным вопросам, т. е. поведению траекторий в нек-рых частях фазового пространства, напр. возле замкнутой траектории потока или возле его положения равновесия (точки w, в к-рой $f(w)=0$). См. также *Устойчивость*. Глобальные вопросы касаются поведения траекторий во всём фазовом пространстве. См. также *Эргодическая теория*.

● Динамические системы, М., 1985 (Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 1—4).

Д. В. Аносов.

ДИНАМИ́ЧЕСКИЙ МЕЖОТРАСЛЕВО́Й БАЛА́НС — см. *Межотраслевой баланс*.

ДИНАМИ́ЧЕСКОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — раздел математического программирования, посвящённый исследованию многошаговых задач принятия оптимальных решений. При этом многошаговость задачи либо отражает реальное протекание процесса принятия решений во времени, либо вводится в задачу искусственно за счёт расчленения процесса принятия однократного решения на отдельные этапы, шаги. Цель такого представления состоит в сведении исходной задачи, состоящей в нахождении решения как точки в пространстве высокой размерности, к решению на каждом шаге задачи небольшой размерности (и даже одномерной задачи).

Методы Д. п. могут применяться к разнообразным задачам планирования и управления, а также к нек-рым задачам чисто технич. содержания (компоновка многоступенчатых ракет, формирование каскада ГЭС, трассирование дорог и др.). Помимо этого, Д. п. стало одним из основных инструментов анализа ряда моделей *исследования операций* (управление запасами, замена оборудования и др.). Д. п. позволяет также сформулировать новый подход к нек-рым задачам вариационного исчисления и теории оптимального управления. При этом, в отличие от других разделов математич. программирования, в Д. п. при постановке задачи и описании общей схемы её решения не накладывается каких-либо специальных ограничений на природу и характер входящих в задачу функций (типа линейности, выпуклости, непрерывности и т. п.). Нек-рые ограничения на сферу фактич. применимости методов Д. п. указаны ниже.

Общая схема многошагового процесса принятия оптимальных решений (с дискретным временем) состоит в следующем. Пусть имеется нек-рая система S, состояние к-рой в начальный момент 0 характеризуется числом $x_0=c_0$. В каждый из моментов времени k, $k=1, \ldots, N$, принимается нек-рое решение x_k, в результате чего система изменяет свои состояния (обычно решение и состояние можно отождествить, т. к. текущее состояние как раз и есть результат принятого перед этим решения). При этом каждое решение x_k должно удовлетворять как исходным ограничениям, определяющим систему S, так и ограничениям, возникающим за счёт ранее сделанных выборов $x_1, \ldots, x_{k-1}$. Каждое решение приносит определённый выигрыш (доход). Для применимости схем Д. п. нужно, чтобы общий доход за N шагов был равен сумме доходов от отдельных шагов. Последовательность допустимых решений на отдельных шагах обычно наз. политикой. Требуется найти среди всех политик оптимальную, дающую максимум суммарного дохода.

В основе Д. п. лежит следующая простая характеризация оптимальной политики, указанная Р. Беллманом (50-е гг. 20 в.) и названная им принципом оптимальности. Именно, оптимальная политика обладает тем свойством, что, каковы бы ни были начальное состояние и первое решение, последующие решения составляют оптимальную политику по отношению к начальному состоянию, полученному в результате первого решения.

Для применения принципа оптимальности в конкретных задачах пользуются приёмом, часто называемым погружением. Он состоит в том, что вместо решения исходной задачи с данным начальным состоянием c_0 и данным числом шагов N решается целое семейство задач с произвольным начальным состоянием $c \leqslant c_0$ и с произвольным числом шагов $n \leqslant N$.

Формализация принципа оптимальности приводит к специфич. функциональным уравнениям, решение к-рых и составляет основу вычислительных схем Д. п. Поэтому иногда Д. п. наз. методом функциональных уравнений динамического программирования. Во многих случаях функциональные уравнения Д. п. представляют собой систему рекуррентных соотношений.

Классич. задачами Д. п. являются задачи распределения ресурсов. Простейшая постановка таких задач состоит в следующем. Имеется однородный ресурс в количестве c_0, к-рый должен быть распределён между N производственными процессами. Если для процесса k выделяется количество ресурса x_k, то при этом получается доход $\varphi_k(x_k)$, $k=1, \ldots, N$. Требуется распределить ресурс по процессам таким образом, чтобы суммарный доход был максимален.

Математически задача сводится к максимизации $\sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x_k)$ при условиях $x_k \geqslant 0$, $k=1, \ldots, N$, и

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = c_0. \qquad (1)$$

В случае когда ресурс состоит из неделимых единиц, на x_k могут быть наложены также условия целочисленности.

В данной задаче принятие решений является однократным, а многошаговость вводится чисто формально: считается, что 1-й шаг состоит в выделении ресурса на 1-й процесс, 2-й шаг — выделение ресурса на первые два процесса и т. д. Для применения схемы Д. п. погружают данную задачу в семейство задач с любым числом шагов (процессов) $n \leqslant N$ и любым запасом ресурса $c \leqslant c$. Пусть $f_n(c)$ — максимальный доход, к-рый можно получить за n шагов при начальном запасе c. Формально

$$f_n(c) = \max \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k), \quad n=1, \ldots, N, \qquad (2)$$

где максимум берётся по всем неотрицательным x_k, для к-рых $x_1+\ldots+x_n=c$. Тогда применение принципа оптимальности приводит к рекуррентным соотношениям

$$f_n(c) = \max_{x_n} [\varphi_n(x_n) + f_{n-1}(c-x_n)], \quad n=2, \ldots, N, \qquad (3)$$

где $f_1(c)=\varphi_1(c)$. Соотношения (3) позволяют последовательно вычислить значения $f_1(c)$, $f_2(c)$, ..., $f_N(c)$ при всех допустимых c и соответствующие оптимальные политики. Оптимальный доход для исходной задачи определяется значением $f_N(c_0)$. Тем самым решение исходной задачи с N переменными оказывается сведённым к решению N задач, в каждой из к-рых максимизация проводится только по одной переменной.

В данном случае пространство состояний одномерно (что определяется наличием в исходной задаче только

одного ограничения вида (1)). Если размерность p пространства состояний больше двух, то решение рекуррентных соотношений (3) становится настолько трудоёмким [за счёт необходимости табулирования функций p переменных $f_n(c)$], что применение метода Д. п. перестаёт быть эффективным. Именно этим обстоятельством в первую очередь и определяется сфера приложимости Д. п.

Аналогично реализуются схемы Д. п. в стохастических задачах принятия решений, среди к-рых важное место занимают марковские процессы принятия решений (т. е. *марковские процессы*, в к-рых переход из состояния в состояние связан с получением определённого дохода). См. также *Исследование операций*.

● Беллман Р., Динамическое программирование, пер. с англ., М., 1960; Беллман Р., Дрейфус С., Прикладные задачи динамического программирования, пер. с англ., М., 1965; Ховард Р., Динамическое программирование и марковские процессы, пер. с англ., М., 1964.

ДИНОСТРА́ТА КВАДРАТРИ́СА (от позднелат. quadratrix) — плоская трансцендентная кривая. Уравнение в прямоугольных координатах:

$$y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a},$$

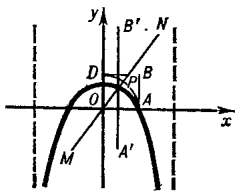


Рис. 1.

в полярных координатах:

$$\rho = \frac{a(\pi - 2\varphi)}{\pi \cos \varphi}.$$

Центральная часть Д. к. может быть построена следующим образом (рис.1): прямая MN равномерно вращается вокруг точки O с угловой скоростью $\pi/2T$; прямая $A'B'$ равномерно движется от точки $A(a, 0)$ налево, оставаясь параллельной оси Oy, со скоростью a/T; точка P описывает Д. к. (по отрезку $OD = \frac{2a}{\pi}$ можно построить отрезок длины π, т. е. выполнить квадратуру круга). Д. к. (рис. 2) симметрична относительно оси Oy. Имеет бесконечное число ветвей, пересекающих ось Ox в точках $\pm a$, $\pm 3a$; $\pm 5a$; ..., и бесконечно много асимптот: $x = \pm 2a$, $\pm 4a$; $\pm 6a$, ... Точки пересечения Д. к. с прямой $y = 2a/\pi$ — точки перегиба. Центральная часть кривой была известна в Др. Греции:

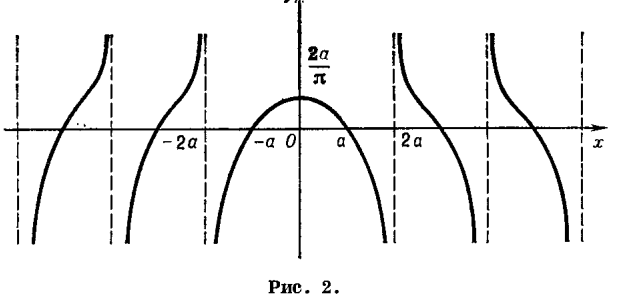


Рис. 2.

открытие её приписывается Гиппию из Элиды (5 в. до н. э.), использовавшему её для трисекции угла; Динострат (4 в. до н. э.) выполнил с помощью кривой квадратуру круга (откуда название).

ДИОКЛЕ́СА ЦИССО́ИДА (от греч. κισσοειδής — плющевидный, похожий на лист плюща) — плоская алгебраическая кривая 3-го порядка. Уравнение в прямоугольных координатах:

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x},$$

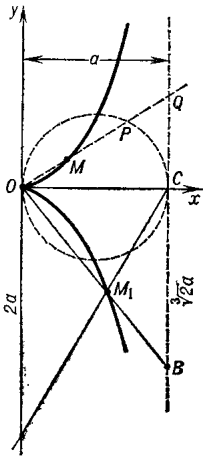
в полярных координатах:

$$\rho = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi},$$

параметрич. уравнения:

$$x = \frac{at^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{at^3}{1 + t^2}, \text{ где } t = \operatorname{tg} MOx.$$

Д. ц. может быть построена следующим образом: луч OQ (рис.) пересекает окружность с диаметром $OC = a$ и касательную BQ к этой окружности; точка M (отрезок $OM = PQ$) описывает Д. ц. (по отрезку $CB = \sqrt[3]{2}a$ можно построить отрезок длины $\sqrt[3]{2}$, т. е. решить задачу об удвоении куба). Д. ц. (рис.) симметрична относительно оси Ox. В начале координат точка возврата 1-го рода. Асимптота $x = a$. Площадь между кривой и асимптотой $S = 3\pi a^2/4$. Д. ц. открыта древними греками в поисках решения задачи об удвоении куба(Диоклес, 2 в. до н. э.).



ДИОФА́НТОВА ГЕОМЕ́ТРИЯ, диофантов анализ,— раздел математики, изучающий целочисленные и рациональные решения алгебраич. уравнений методами алгебраич. геометрии. Наиболее полно в Д. г. изучен вопрос о решениях алгебраич. уравнения

$$f(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Здесь f — абсолютно неприводимый многочлен от двух переменных x и y с рациональными коэффициентами, т. е. многочлен, не представимый в виде произведения $f = f_1 f_2$ отличных от констант многочленов f_1 и f_2 от x и y с (вообще говоря) комплексными коэффициентами. Если f — многочлен 1-й степени вида $Ax + By + C$, то множество рациональных решений бесконечно и параметризуется рациональными числами: рациональному числу t отвечает решение $x = t$, $y = -(At + C)/B$. Если f — многочлен 2-й степени, то либо рациональных решений вообще нет, либо их бесконечно много и они параметризуются рациональными числами в следующем смысле. Существуют рациональные функции $R(t)$, $S(t)$ параметра t, одновременно не являющиеся константами, такие, что: а) для всех рациональных чисел t кроме конечного числа определены значения $a = R(t)$, $b = S(t)$ и (a, b) — решение уравнения (1); б) для всех решений (a, b) уравнения (1) кроме конечного числа существует ровно одно рациональное число t, для к-рого $a = R(t)$, $b = S(t)$. Напр., для уравнения $x^2 + y^2 - 1 = 0$ можно положить

$$R(t) = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad S(t) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Вопрос о существовании хотя бы одного рационального решения уравнения 2-й степени решается с помощью принципа Хассе (1923), утверждающего, что рациональное решение существует тогда и только тогда, когда существует действительное решение уравнения (1) и для любого натурального n найдётся пара целых чисел a, b, для к-рых $f(a, b)$ — целое число, делящееся на n. Если уравнение (1) задаёт рациональную алгебраич. кривую, то его рациональные решения параметризуются рациональными числами так же, как и для уравнений 2-й степени.

Если f — многочлен 3-й степени, то уравнение (1) задаёт либо рациональную, либо эллиптич. кривую. Пусть уравнение (1) задаёт эллиптич. кривую. Тогда при наличии хотя бы одного рационального решения уравнение (1) может быть приведено к виду

$$y^2 - (x^3 + Ax + B) = 0, \qquad (2)$$

где многочлен $x^3 + Ax + B$ не имеет кратных корней, а a и b — рациональные числа. По любым двум решениям (a_1, b_1) и (a_2, b_2) уравнения (2) можно построить третье, проведя через точки (a_1, b_1) и (a_2, b_2) прямую. Поскольку степень уравнения (2) равна 3, эта прямая пересечёт график $y^2 = (x^3 + Ax + B)$ в третьей точке (a_3, b_3), координаты к-рой a_3 и b_3 — рациональные числа. Для того чтобы эта конструкция решений была всегда определена, следует рассматривать и «бесконечно удалённое решение». Эта конструкция проходит даже в том случае, когда рассмат-

риваемые решения совпадают: $(a_1, b_1)=(a_2, b_2)$; в этом случае нужно провести касательную в точке (a_1, b_1) к алгебраич. кривой, задаваемой уравнением (2).

Хотя число рациональных решений уравнения (2) и может быть бесконечным, всегда можно выбрать конечное множество решений $(a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r)$ так, что любое рациональное решение можно получить из них путём (возможно, многократного) применения приведённой выше конструкции. Зафиксировав какое-то рациональное решение (a_0, b_0) уравнения (2), можно ввести на множестве всех рациональных решений структуру абелевой группы, однозначно определяемую следующими условиями: а) решение (a_0, b_0) — нуль группы; б) сумма решений (a_1, b_1), (a_2, b_2) и (a_3, b_3) равна нулю тогда и только тогда, когда они лежат на одной прямой; тогда сформулированная выше теорема эквивалентна утверждению о конечной порождённости этой группы.

Рассмотренные выше утверждения о рациональности решений относились к уравнениям, задающим алгебраич. кривые рода 0 (рациональные кривые) и рода 1 (эллиптич. кривые). Если уравнение (1) задаёт алгебраич. кривую рода, большего 1, то число его рациональных решений конечно (Г. Фалтингс, 1983).

Тем самым структура множества рациональных решений уравнения (1) в значительной степени определяется множеством его комплексных решений (комплексным графиком), являющимся с топологич. точки зрения сферой с g ручками (из к-рой выколото конечное число точек). Здесь g — род кривой, заданной уравнением (1).

Для изучения целочисленных решений уравнения (1) используется теория *диофантовых приближений*. Если алгебраич. кривая, заданная уравнением (1), не рациональна, то множество целочисленных решений конечно (теорема Зигеля). То же верно, если рассматривать рациональные решения со знаменателями, делящимися лишь на простые числа из нек-рого фиксированного конечного множества простых чисел.

Помимо уравнений вида (2) наиболее изучены рациональные решения систем алгебраич. уравнений, определяющих абелевы многообразия, являющихся многомерными обобщениями уравнений вида (2). Довольно мало известно о целочисленных решениях произвольных систем алгебраич. уравнений. Более того, отрицательное решение десятой проблемы Гильберта влечёт за собой несуществование общего универсального алгоритма, позволяющего решать, имеет ли данное алгебраич. уравнение (или система) целочисленное решение. Аналогичный вопрос о рациональных решениях в настоящее время (1987) открыт. Интересен вопрос о выделении классов уравнений, для к-рых существует алгоритм, отвечающий на вопрос о существовании рациональных (или целых) решений. Пример такого класса — уравнения вида (1) 2-й степени, а соответствующий алгоритм основан на принципе Хассе. Для произвольных систем алгебраич. уравнений легко определить аналог принципа Хассе. Существует также алгоритм, проверяющий для данной системы алгебраич. уравнений существование действительного решения и решений соответствующих сравнений по модулю n для всех n. Однако принцип Хассе выполнен далеко не для всех алгебраич. уравнений. Напр., уравнение $3x^3+4y^3-5=0$ имеет действительное решение и для любого натурального n найдутся целые a и b такие, что $3a^3+4b^3-5$ делится на n; однако это уравнение не имеет рациональных решений. Этот пример послужил отправным пунктом для создания теории, описывающей «отклонение» от принципа Хассе.

Наряду с рациональными и целыми решениями в Д. г. изучаются решения, лежащие в полях алгебраич. чисел; при этом коэффициенты уравнений предполагаются алгебраическими (а не обязательно рациональными) числами. Параллельный подход к полям алгебраич. чисел и полям алгебраич. функций от одного переменного (с конечным полем констант), принятый в современной алгебраич. теории чисел, привёл к рассмотрению в Д. г. уравнений не только с числовыми, но и с функциональными коэффициентами. Решающее влияние оказало на это развитие алгебраич. геометрии. Одновременное рассмотрение уравнений над числовыми и функциональными полями, выступающих как две равноправные стороны одного и того же предмета, не только приводит к красоте и законченности результатов, но и взаимно обогащает оба аспекта.

● Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 3 изд., М., 1985; Ленг С., Основы диофантовой геометрии, пер. с англ., М., 1986; Манин Ю. И., Кубические формы, М., 1972.

Ю. Г. Зархин.

ДИОФА́НТОВЫ ПРИБЛИЖЕ́НИЯ — раздел теории чисел, изучающий приближения действительных чисел рациональными числами или, при более широком понимании предмета, вопросы, связанные с решениями в целых числах линейных и нелинейных неравенств или систем неравенств с действительными коэффициентами. Д. п. названы по имени Диофанта (вероятно, 3 в.), к-рый занимался задачей решения алгебраич. уравнений в целых числах — т. н. *диофантовых уравнений*. Методы теории Д. п. основаны на применении непрерывных дробей, рядов Фарея и принципа Дирихле.

Задача о приближении одного числа рациональными дробями решается с помощью всех трёх методов и особенно непрерывных дробей. Приближение действительного числа α подходящими дробями p_k/q_k разложения α в непрерывную дробь характеризуется неравенством $|\alpha-p_k/q_k|<1/q_k^2$; с другой стороны, если несократимая дробь a/b удовлетворяет неравенству $|\alpha-a/b|<1/2b^2$, то она является подходящей дробью разложения α в непрерывную дробь. Существует много расширений задачи о приближении числа рациональными дробями; к ним прежде всего относится задача об изучении выражений $x\theta-y-\alpha$, где θ и α — нек-рые действительные числа, а x и y принимают целые значения (т. н. неоднородная одномерная задача). Среди разнообразных теорем о приближённом решении в целых числах систем линейных уравнений (многомерные задачи Д. п.) особенно известна теорема Кронекера: если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — действительные числа, для к-рых равенство $a_1\alpha_1+\ldots+a_n\alpha_n=0$ с целыми $a_1, \ldots, a_n$ возможно лишь при $a_1=\ldots=a_n=0$, а $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — нек-рые действительные числа, то при любом заданном $\varepsilon>0$ можно найти число t и такие целые числа $x_1, \ldots, x_n$, что выполняются неравенства $|t\alpha_k-\beta_k-x_k|<\varepsilon$, $k=1, 2, \ldots, n$. Для решения многомерных задач Д. п. весьма плодотворным является принцип Дирихле. Для теории Д. п. важное значение имеет связь с геометрией, основанная на том, что систему линейных форм с действительными коэффициентами можно изобразить как решётку в n-мерном арифметич. пространстве. В кон. 19 в. Г. Минковский доказал ряд геометрич. теорем, имеющих приложения в теории Д. п.

В вопросах нелинейных Д. п. замечательные результаты получил И. М. Виноградов. Созданные им методы занимают центральное место в этой области теории чисел. Одной из важнейших задач теории Д. п. является проблема приближения алгебраич. чисел рациональными. Существенные результаты здесь были получены А. Туэ, К. Зигелем и др.

К Д. п. относится теория трансцендентных чисел, в к-рой находят оценки для модулей линейных форм и многочленов от одного и нескольких чисел с целыми коэффициентами. Теория Д. п. тесно связана с решением диофантовых уравнений и с различными задачами аналитической теории чисел.

● Кассельс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений, пер. с англ., М., 1961.

ДИОФА́НТОВЫ УРАВНЕ́НИЯ — алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, у которых разыскиваются целые или рациональные решения. Названы по имени Диофанта (вероятно, 3 в.), изучавшего такие уравнения. Число неизвестных в Д. у. превосходит число уравнений, и поэтому их иногда называют неопределёнными. Простейшим Д. у. является уравнение вида $ax+by=1$, где a и b —

целые взаимно простые числа. Такое Д. у. имеет бесконечное число решений: если x_0 и y_0 — одно решение, то числа $x=x_0+bn$, $y=y_0-an$ (n — любое целое) тоже будут решениями, к-рыми исчерпывается вся совокупность решений. Следующим типом Д. у. являются уравнения 2-й степени $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, где a, b, c, d, e, f — целые числа. Такие уравнения могут иметь бесконечно много решений, напр. уравнение Пелля: $x^2-Ay^2=1$ ($A>0$, A — неполный квадрат). Изучались Д. у. вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_ny^n=0$, где $n\geqslant 3$; установлено, что если многочлен $a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_n$ неприводим в поле рациональных чисел, то соответствующее Д. у. не может иметь бесконечно много решений. Известной задачей теории Д. у. является проблема Ферма (см. *Ферма великая теорема*).

● Гельфонд А. О., Решение уравнений в целых числах, 4 изд., М., 1983.

ДИРАКА δ-ФУНКЦИЯ — то же, что *дельта-функция*; см. также *Обобщённая функция*.

ДИРЕКТРИСА (франц. directrice, от позднелат. directrix — направляющая) конического сечения — прямая, лежащая в плоскости конического сечения (эллипса, гиперболы, параболы) и обладающая тем свойством, что отношение расстояния r от любой точки конического сечения до определённой его точки (фокуса) к расстоянию d от той же точки до этой прямой постоянно и равно эксцентриситету $e=\frac{r}{d}$. Эллипс и гипербола имеют по две Д., парабола — одну Д., для окружности Д. не определена. В прямоугольной системе координат, соответствующей канонич. уравнениям эллипса, гиперболы, параболы, их Д. описываются уравнениями

$$x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ \text{(эллипс)},$$

$$x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \text{(гипербола)},$$

$$x=-\frac{p}{2}\ \text{(парабола)}.$$

Понятие «Д.» ввёл Аполлоний Пергский (2 в. до н. э.), современный термин — Г. Лопиталь (1720).

ДИРИХЛЕ ЗАДАЧА — задача отыскания регулярной в области D гармонической функции u, которая на границе области D совпадает с наперёд заданной непрерывной функцией φ. Задачу отыскания регулярного в области D решения эллиптич. уравнения 2-го порядка, принимающего наперёд заданные значения на границе области, также называют Д. з. или первой краевой задачей. Вопросы, связанные с этой задачей, рассматривались ещё К. Гауссом (1840), а затем П. Дирихле (1850).

См. также *Краевая задача*.

ДИРИХЛЕ ИНТЕГРАЛ — название интегралов нескольких типов.

1) Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\cos\beta x\,dx=\begin{cases}\pi/2 & \text{при } \beta<\alpha,\\ \pi/4 & \text{при } \beta=\alpha,\\ 0 & \text{при } \beta>\alpha.\end{cases}\qquad(1)$$

Этот Д. и., наз. также разрывным множителем Дирихле, и является разрывной функцией от параметров $\alpha>0$ и $\beta>0$. П. Дирихле использовал интеграл (1) в своих исследованиях о притяжении эллипсоидов (1889). Впрочем, этот интеграл встречался ранее у Ж. Фурье, С. Пуассона и А. Лежандра.

2) Интеграл

$$s_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,D_n(t)\,dt,\qquad(2)$$

где

$$D_n(t)=\frac{\sin(n+1/2)\,t}{2\sin t/2}$$

есть т. н. ядро Дирихле (1829). Этот Д. и. равен n-й частичной сумме

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}=(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

ряда Фурье функции $f(x)$. Формула (2) является одной из важнейших формул теории рядов Фурье, в частности, позволившей П. Дирихле установить, что ряд Фурье функции, имеющей конечное число максимумов и минимумов, сходится в каждой точке.

3) Интеграл

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz;$$

подробнее о нём см. *Дирихле принцип* (в теории гармонич. функций).

ДИРИХЛЕ ПРИЗНАК — признак сходимости числового *ряда*. Установлен П. Дирихле (1862).

ДИРИХЛЕ ПРИНЦИП — 1) Д. п. в теории чисел, принцип «ящиков»,— положение, утверждающее, что в случае $m>n$ при отнесении каждого из m предметов к одному из n классов хотя бы в один класс попадёт не менее двух предметов. Это чрезвычайно простое положение применяется при доказательстве многих важных теорем теории чисел, относящихся к приближению иррациональных чисел рациональными, в доказательствах трансцендентности чисел и др. вопросах.

2) Д. п. в теории гармонич. функций: среди всех возможных функций, принимающих заданные значения на границе области G, функция, для к-рой интеграл

$$I=\iiint_G\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz$$

достигает наименьшего значения, будет гармонической в этой области. Предложение это имеет простой физич. смысл (если u есть потенциал скоростей в установившемся течении однородной несжимаемой жидкости, то I с точностью до постоянного множителя выражает кинетич. энергию жидкости). Д. п. находит большие применения в математич. физике.

Наиболее чёткая и полная формулировка Д. п. для класса функций непрерывных вместе со своими частными производными, по-видимому, была дана в лекциях П. Дирихле, опубликованных в 1876 одним из его учеников. Доказательства, данные П. Дирихле, были неполны.

ДИРИХЛЕ РАЗРЫВНЫЙ МНОЖИТЕЛЬ — см. *Дирихле интеграл*.

ДИРИХЛЕ РЯД — функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\qquad(*)$$

где a_n — коэффициенты, а $s=\sigma+it$ — комплексное переменное. Напр., ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

изображает при $\sigma>1$ дзета-функцию.

Теория Д. р. возникла первоначально под большим влиянием аналитич. теории чисел. Впоследствии она развилась в обширную главу теории аналитич. функций. Для действительных s ряды (*) есть т. н. L-ряды Дирихле:

$$L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},$$

где $\chi(n)$ — функции, именуемые характерами; их изучал П. Дирихле (1837).

ДИРИХЛЕ ФУНКЦИЯ — функция, равная единице в рациональных точках и нулю в иррациональных точках. Д. ф. задаётся формулой

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos m!\,\pi x)^{2n};$$

она принадлежит второму классу *Бэра классификации*. Д. ф. не интегрируема по Риману на любом отрезке, но, будучи почти всюду равной нулю, интегрируема по Лебегу.

ДИРИХЛЕ́ *L*-ФУ́НКЦИЯ — функция, выражаемая *Дирихле рядом*.

ДИРИХЛЕ́ ХАРА́КТЕР — арифметическая функция, введённая П. Дирихле (1837) в связи с изучением закона распределения простых чисел в арифметических прогрессиях. См. *Чисел теория*, *Характер*.

ДИРИХЛЕ́ ЯДРО́ — см. *Дирихле интеграл*.

ДИСКРЕ́ТНАЯ МАТЕМА́ТИКА — область математики, занимающаяся изучением свойств дискретных структур, к-рые возникают как внутри математики, так и в её приложениях. К числу таких структур могут быть отнесены, напр., конечные группы, конечные графы, а также нек-рые математич. модели преобразователей информации, конечные автоматы, машины Тьюринга и т. п. Это примеры структур финитного (конечного) характера. Часть Д. м., изучающая их, наз. конечной математикой. Иногда это понятие расширяют до Д. м. Помимо указанных финитных структур, Д. м. изучает нек-рые алгебраич. системы, бесконечные графы, вычислительные схемы определённого вида, клеточные автоматы и т. д. В качестве синонима понятий «Д. м.» и «конечная математика» иногда употребляется термин «дискретный анализ». Ниже термин «Д. м.» понимается в широком смысле, включающем конечную математику.

В отличие от Д. м. классич. математика в основном занимается изучением свойств объектов непрерывного характера. Использование классич. математики или Д. м. как аппаратов исследования связано с тем, какие задачи ставит перед собой исследователь, и в связи с этим, какую модель изучаемого явления он рассматривает: дискретную или непрерывную. Так, напр., при нахождении массы радиоактивного вещества в данный момент с определённой точностью можно считать, что процесс изменения массы при радиоактивном распаде носит непрерывный характер, и в то же время ясно, что на самом деле этот процесс дискретен. Само деление математики на классическую и дискретную в значительной мере условно, поскольку, напр., с одной стороны, происходит активная циркуляция идей и методов между ними, а с другой — часто возникает необходимость исследования моделей, обладающих как дискретными, так и непрерывными свойствами одновременно. Следует отметить также, что в математике существуют подразделы, использующие средства для изучения непрерывных моделей (напр., алгебраич. геометрия и др.), и, наоборот, часто средства и постановки задач классич. анализа используются при исследовании дискретных структур (напр., асимптотич. вопросы в теории чисел и др.). Эти примеры указывают на известное слияние рассматриваемых областей.

Д. м. представляет собой важное направление в математике, в к-ром можно выделить характерные для Д. м. предметы исследования, методы и задачи, специфика к-рых обусловлена в первую очередь необходимостью отказа в Д. м. от основополагающих понятий классич. математики — предела и непрерывности — и в связи с этим тем, что для многих задач Д. м. сильные средства классич. математики оказываются, как правило, мало приемлемыми. Наряду с выделением Д. м. путём указания её предмета можно также определить Д. м. посредством перечисления подразделов, составляющих Д. м. К ним в первую очередь должны быть отнесены *комбинаторный анализ*, теория *графов*, теория *кодирования*, теория функциональных систем и нек-рые другие. Часто под термином «Д. м.» (предполагая, что её предмет исчерпывается конечными структурами) понимается именно совокупность перечисленных дисциплин. Как отмечалось, возможно и более широкое толкование Д. м. за счёт расширения понимания её предмета. С этой точки зрения к Д. м. могут быть также отнесены как целые разделы математики, напр. математич. логика, так и части таких разделов, как теория чисел, алгебра, вычислительная математика, теория вероятностей и другие, в к-рых изучаемый объект носит дискретный характер.

Элементы Д. м. возникли в глубокой древности; развиваясь параллельно с другими разделами математики, они в значительной мере являлись их составной частью. Типичными для того периода были задачи, связанные со свойствами целых чисел и приведшие затем к созданию теории чисел. К их числу могут быть отнесены отыскания алгоритмов сложения и умножения натуральных чисел у древних египтян (2-е тыс. до н. э.), задачи о суммировании и вопросы делимости натуральных чисел в пифагорейской школе (6 в. до н. э.) и т. п. Позже (17—18 вв.), в основном в связи с игровыми задачами, появились элементы комбинаторного анализа и дискретной теории вероятностей (Б. Паскаль, П. Ферма и др.), а в связи с общими проблемами теории чисел, алгебры и геометрии (18—19 вв.) возникли важнейшие понятия алгебры, такие, как группа, поле, кольцо и др. (Ж. Лагранж, Э. Галуа и др.), определившие развитие и содержание алгебры на много лет вперёд и имевшие, по существу, дискретную природу. Стремление к строгости математич. рассуждений и анализ рабочего инструмента математики — логики — привели к выделению ещё одного важного раздела математики — математич. логики (19—20 вв.). Однако наибольшего развития Д. м. достигла в связи с запросами практики, приведшими к появлению новой науки — кибернетики и её теоретич. части — математич. кибернетики (20 в.). Математич. кибернетика, непосредственно изучающая с позиций математики самые разнообразные проблемы, к-рые ставит перед кибернетикой практич. деятельность человека, является мощным поставщиком идей и задач для Д. м., вызывая к жизни целые новые направления в Д. м. Так, прикладные вопросы, требующие большой числовой обработки, стимулировали появление сильных численных методов решения задач, оформившихся затем в вычислительную математику, а анализ понятий «вычислимость» и «алгоритм» привёл к созданию важного раздела математич. логики — теории алгоритмов. Растущий поток информации и связанные с ним задачи хранения, обработки и передачи информации привели к возникновению теории кодирования; экономич. задачи, задачи электротехники, равно как и внутренние задачи математики, потребовали разработки теории графов; задачи конструирования и описания работы сложных управляющих систем составили теорию функциональных систем и т. д. В то же время математич. кибернетика широко использует результаты Д. м. при решении своих задач.

Наряду с уже отмеченными Д. м. имеет ещё ряд особенностей. Так, вместе с задачами типа существования, имеющими общематематич. характер, важное место в Д. м. занимают задачи, связанные с алгоритмич. разрешимостью и построением конкретных решающих алгоритмов, что характерно уже для Д. м. Другой особенностью Д. м. является то, что она, по существу, первой показала необходимость глубокого исследования т. н. дискретных многоэкстремальных задач, особенно часто возникающих в математич. кибернетике. Соответствующие методы классич. математики для поиска экстремумов, существенно использующие определённую гладкость функций, в этих случаях оказываются малоэффективными. Типичными задачами такого рода в Д. м. являются, напр., задачи об отыскании в нек-ром смысле оптимальных стратегий в шахматной партии при ограниченном числе ходов, а также важный вопрос математич. кибернетики о построении минимальных дизъюнктивных нормальных форм для булевых функций, то есть т. н. проблема минимизации булевых функций (см. *Алгебра логики*). Особенностью Д. м., связанной уже с задачами для конечных структур, является и то, что для многих из этих задач, как правило, существует алгоритм решения, в то время как в классич. математике полное решение задачи часто возможно лишь при весьма жёстких ограничениях. Примером такого алгоритма может служить алгоритм просмотра всех возможных вариантов, то есть т. н. алгоритм типа полного перебора. К задачам указанного вида могут быть отнесены, напр., упомянутые задачи

о стратегиях в шахматной партии, о минимизации булевых функций. Вместе с тем решения типа полного перебора очень трудоёмки и практически мало приемлемы, в связи с чем возникает ряд новых задач, связанных с условиями, ограничивающими перебор и приводящими к сведению индивидуальных задач, характеризующихся конкретными значениями параметров, к массовой проблеме, характеризующейся бесконечным множеством значений параметров; возникают задачи о наложении ограничений, естественных для этого класса задач, на средства решения и т. п. Постановка такого рода вопросов и разработка методик осуществляется на конкретных моделях, доставляемых различными разделами математики.

● Яблонский С. В., Введение в дискретную математику, М., 1979.

В. Б. Кудрявцев.

ДИСКРЕ́ТНАЯ СЛУЧА́ЙНАЯ ВЕЛИЧИНА́ — см. *Случайная величина.*

ДИСКРЕ́ТНОЕ МНО́ЖЕСТВО — множество, все точки которого — изолированные точки; другими словами, множество без *предельных точек.*

ДИСКРЕ́ТНОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — раздел математического программирования, посвящённый нахождению экстремумов функций, заданных на конечных множествах. Задачи Д. п. нетривиальны в том смысле, что число допустимых решений (элементов области задания целевой функции) в реальных задачах обычно настолько велико, что их полный перебор (т. е. вычисление и сравнение всех значений функции) практически нереализуем. В качестве допустимых решений задач Д. п. могут выступать объекты весьма разнообразной природы: перестановки n элементов (ситуация, характерная, напр., для *коммивояжера задачи* и задач *расписаний теории*), пути в графе, подмножества данного конечного множества (задача о ранце — см. *Исследование операций*), целочисленные точки данного выпуклого многогранника и т. п. Последний из названных случаев является наиболее известным и изученным. Он формализуется в виде целочисленной задачи линейного программирования, к-рую можно записать в виде: максимизировать

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,\ i=1,\ \ldots,\ m;\ x_j \geqslant 0,\ j=1,\ \ldots,\ n, \qquad (2)$$

$$x_j — \text{целые числа},\ j=1,\ \ldots,\ n. \qquad (3)$$

К задачам Д. п. относят также задачи, в к-рых ограничение целочисленности (3) наложено не на все переменные, а лишь на их часть. Часто рассматриваются задачи с булевыми переменными, в к-рых (3) заменено на условие $x_j \in \{0, 1\}$. Изучаются также задачи Д. п. с несколькими целевыми функциями (см. *Многокритериальная оптимизация*).

Методы Д. п. можно разделить на две большие группы. Для задачи (1)—(3) исторически первыми были предложены методы отсечения. Идея их состоит в следующем. Сначала отбрасывается условие целочисленности (3) и решается задача линейного программирования (1)—(2). Если её решение оказывается целочисленным, то процесс окончен. В противном случае к ограничениям (2) добавляется ещё одно линейное ограничение, к-рому только что полученный нецелочисленный оптимум не удовлетворяет, а все целочисленные решения (2) удовлетворяют [геометрически это отвечает проведению гиперплоскости, отсекающей от многогранника (2) нецелочисленную вершину, но не затрагивающей его целочисленных точек]. Процесс повторяется для пополненной таким образом системы ограничений (2). Установлено, что методы этого класса приводят к оптимальному целочисленному решению за конечное число шагов. Однако обширный вычислительный опыт показал, что методы отсечения ведут себя «непредсказуемо», т. е. могут требовать весьма большого числа шагов даже для задач сравнительно небольших размеров.

Поэтому в вычислительной практике всё большее место занимают методы второй группы — методы частичного перебора, среди к-рых наиболее известны методы ветвей и границ. Их идея состоит в разбиении множества допустимых решений (2)—(3) на те или иные подмножества, оценивании значений целевой функции на каждом из этих подмножеств и отбрасывании «неперспективных» (т. е. заведомо не содержащих оптимума) подмножеств. Однако объём вычислений в методах частичного перебора имеет тенденцию к экспоненциальному (или близкому к нему) росту при увеличении числа переменных. Поэтому большое внимание стало уделяться различным эвристическим и приближённым методам решения задач Д. п. В эвристич. методах широко используются различные неформальные соображения, связанные с содержательной постановкой и спецификой структуры рассматриваемых задач. Среди приближённых методов особое место занимают методы, нацеленные на получение приближённого решения с заранее заданной относительной оценкой отклонения от оптимума (по значению целевой функции). Для многих приближённых методов оценка трудоёмкости оказывается уже не экспоненциальной, а полиномиальной. Создаются также «гибридные» вычислительные схемы, сочетающие в себе идеи метода отсечений и метода ветвей и границ.

В виде моделей Д. п. формализуются широкие классы прикладных задач планирования, управления, транспортировки, размещения, организации производства (см. также *Расписаний теория*).

● Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., Дискретное программирование, М., 1969; их же, «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1983, № 1, с. 165—76.

ДИСКРЕ́ТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — распределение вероятностей, сосредоточенное на конечном или счётном множестве точек *выборочного пространства* Ω. Точнее, пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots$ — выборочные точки и

$$p_i = p(\omega_i),\quad i=1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

суть нек-рые числа, удовлетворяющие условиям

$$p_i \geqslant 0,\quad \sum_i p_i = 1. \qquad (2)$$

Соотношения (1) и (2) полностью определяют Д. р. в пространстве Ω, т. к. вероятностная мера любого множества $A \subset \Omega$ определяется равенством

$$P(A) = \sum_{\{i:\omega_i \in A\}} p_i.$$

В соответствии с этим распределение случайной величины $X(\omega)$ наз. дискретным, если с вероятностью 1 она принимает конечное или счётное число различных значений x_i с вероятностями $p_i = \mathsf{P}\{\omega\colon X(\omega)=x_i\}$. Для Д. р. на прямой функция распределения

$$F(x) = \sum_{\{i:x_i<x\}} p_i$$

имеет скачки в точках x_i, равные $p_i = F(x_i+0) - F(x_i)$, и постоянна в интервалах $[x_i, x_{i+1})$. Наиболее распространены следующие Д. р.: *биномиальное распределение, геометрическое распределение, полиномиальное распределение, Пуассона распределение.*

ДИСКРЕ́ТНОСТЬ (от лат. discretus — разделённый, прерывистый) — прерывность; противопоставляется *непрерывности.* Напр., дискретное изменение к.-л. величины во времени — это изменение, происходящее через определённые промежутки времени (скачками); система целых чисел (в противоположность системе действительных чисел) является дискретной.

ДИСКРЕ́ТНЫЙ АНА́ЛИЗ — то же, что *дискретная математика.*

ДИСКРЕ́ТНЫЙ КАНА́Л связи — *канал* связи, у которого сигналы на входе и выходе представляют собой конечные последовательности букв из одного и того же или различных алфавитов.

ДИСКРЕ́ТНЫЙ ПОРЯ́ДОК — см. *Частично упорядоченное множество.*

ДИСКРЕ́ТНЫЙ СПЕКТР — см. *Спектральный анализ* линейных операторов.

ДИСКРИМИНА́НТ (от лат. discriminans, род. падеж discriminantis — разделяющий, различающий) многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

— выражение

$$D = a_0^{2n-2} \prod_{i>k} (\alpha_i - \alpha_k)^2,$$

в котором произведение распространено на всевозможные разности корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ уравнения $P_n(x)=0$. Д. обращается в нуль тогда и только тогда, когда среди корней многочлена имеются равные. Д. можно выразить через коэффициенты многочлена $P_n(x)$, представив его в виде определителя, составленного из этих коэффициентов (см. *Результант*). Для многочлена 2-й степени ax^2+bx+c Д. является выражение b^2-4ac; для x^3+px+q — выражение $-4p^3-27q^2$. Д. отличается лишь множителем $-a_0$ от результанта $R(P_n, P_n')$ многочлена $P_n(x)$ и его производной $P_n'(x)$.

Термин «Д.» ввёл Дж. Сильвестр.

ДИСКРИМИНА́НТНЫЙ АНА́ЛИЗ — раздел многомерного статистического анализа, изучающий методы классификации объектов, представленных многомерными наблюдениями. Задача Д. а. состоит в отнесении объекта, характеризуемого значениями p признаков, к одной из совокупностей (групп, классов), заданных своими распределениями. Предполагается, что k совокупностей представлены выборками (наз. обучающими), к-рые содержат информацию о статистич. распределениях совокупностей в p-мерном пространстве признаков. Признаками могут служить как количественные измерения объектов (размеры, состав и т. п.), так и качественные, либо классификационные идентификаторы (пол, цвет, национальность или результаты экспертных оценок специалистов, напр. присутствие или отсутствие симптома). Процедура Д. а. состоит в том, что p-мерное пространство разбивается на $k+1$ областей $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$ так, что при попадании объекта в область A_i, $i=1, 2, \ldots, k$, принимают решение отнести (классифицировать) объект к i-му классу, а при попадании в область A_0 отказываются от классификации. Разбиение выбирается так, чтобы минимизировать ошибки классификации в заданном классе областей. Д. а. является лишь одним из соответствующих методов решения задачи классификации. От других методов Д. а. отличается тем, что отнесение объектов одной из совокупностей производится при помощи дискриминантной функции, параметры к-рой являются алгебраич. функциями от параметров распределений соответствующих совокупностей.

Термин и первый метод Д. а. (линейный Д. а.) предложены Р. Фишером (1936) в связи с одной проблемой таксономии (классификация трёх видов ириса по размерам цветка). В этом методе выборки проецируются на прямую, к-рая выбирается так, чтобы расхождение между проекциями было максимально возможным, насколько позволяет разброс внутри выборок.

Важнейшей проблемой Д. а. является оценка ошибок классификации, т. е. определение надёжности формализованного правила, по к-рому осуществляется классификация. Частота ошибок классификации на обучающей выборке является смещённой в том смысле, что она недооценивает ошибки классификации. Существуют методы, позволяющие получить несмещённые оценки вероятностей ошибочной классификации на основании только обучающей выборки, однако в общей постановке они чересчур громоздки в вычислительном отношении. Именно поэтому для контроля часто используется независимая (экзаменующая) выборка. В нек-рых моделях, в частности в линейном Д. а. нормальных совокупностей, удаётся учесть эффект смещения в зависимости от объёмов обучающих выборок, размерности пространства признаков, расстояния между совокупностями и гарантировать надёжность классификации. Другая проблема, связанная с первой, состоит в отбрасывании неинформативных признаков, ухудшающих качество классификации, и в отборе информативных признаков, решающих задачу наиболее эффективно. Именно эта сторона проблемы может наиболее интересовать исследователя, а не классификация сама по себе.

Методы Д. а. могут быть использованы для разделения (дискриминации) совокупностей, для классификации вновь поступающих наблюдений, для определения информативности набора признаков, а также для вычисления риска принадлежности к той или иной совокупности при массовых обследованиях.

Интерес к Д. а. связан с работами по *распознаванию образов* и применению ЭВМ к решению задач автоматич. диагностики. В современной литературе Д. а. часто отождествляют с задачей классификации или с распознаванием образов с обучением (с учителем).

ДИСПЕРСИО́ННОЕ ОТНОШЕ́НИЕ — см. *Дисперсионный анализ*.

ДИСПЕРСИО́ННЫЙ АНА́ЛИЗ — статистический метод, предназначенный для выявления влияния отдельных факторов на результат эксперимента, а также для последующего планирования экспериментов. Первоначально Д. а. был предложен Р. Фишером (1925) для обработки результатов агрономич. опытов по выявлению условий, при к-рых испытываемый сорт сельскохозяйственной культуры даёт максимальный урожай. Современные приложения Д. а. охватывают широкий круг задач экономики, социологии, биологии и техники и трактуются обычно в терминах статистич. теории выявления систематич. различий между результатами непосредственных измерений, выполненных при тех или иных меняющихся условиях.

Если значения неизвестных постоянных $a_1, \ldots, a_J$ могут быть измерены с помощью различных методов или измерительных средств $M_1, \ldots, M_J$ и в каждом случае систематич. ошибка b_{ij} может, вообще говоря, зависеть как от выбранного метода M_j, так и от неизвестного измеряемого значения a_i, то результаты таких измерений представляют собой суммы вида

$$x_{ijk} = a_i + b_{ij} + y_{ijk},$$
$$i=1, \ldots, I,\ j=1, \ldots, J,\ k=1, \ldots, K,$$

где K — количество независимых измерений неизвестной величины a_i методом M_j, а y_{ijk} — случайная ошибка k-го измерения величины a_i методом M_j (предполагается, что все y_{ijk} — независимые одинаково распределённые случайные величины, имеющие нулевое математич. ожидание: $\mathsf{E}y_{ijk}=0$). Такая линейная модель наз. двухфакторной схемой Д. а.; первый фактор — истинное значение измеряемой величины, второй — метод измерения, причём в данном случае для каждой возможной комбинации значений первого и второго факторов осуществляется одинаковое количество K независимых измерений (это допущение введено здесь лишь ради простоты изложения).

Примером подобной ситуации могут служить соревнования I спортсменов, мастерство к-рых оценивается J судьями, причём каждый участник соревнований выступает K раз (имеет K «попыток»). В этом случае a_i — истинное значение показателя мастерства спортсмена с номером i, b_{ij} — систематич. ошибка, вносимая в оценку мастерства i-го спортсмена судьёй с номером j, x_{ijk} — оценка, выставленная j-м судьёй i-му спортсмену после выполненной последним k-й попытки, а y_{ijk} — соответствующая случайная погрешность. Подобная схема типична для т. н. субъективной экспертизы качества нескольких объектов, осуществляемой группой независимых экспертов. Другой пример — статистич. исследование урожайности сельскохозяйственной культуры в зависимости от одного из I сортов почвы и J методов её обработки, причём для каждого сорта i почвы и каждого метода обработки с номером j осуществляется k независимых экспериментов (в этом примере b_{ij} — истинное значение урожайности для i-го сорта почвы при j-м методе обработки, x_{ijk} — соответствующая экспериментально наблюдаемая урожайность в k-м опыте, а y_{ijk} — её случайная ошибка, воз-

никающая из-за тех или иных случайных причин; что же касается величин a_i, то в агрономич. опытах их разумно считать равными нулю).

Пусть

$$c_{ij}=a_i+b_{ij}$$

и

$$c_{i*}=\frac{1}{J}\sum_j c_{ij},\quad c_{*j}=\frac{1}{I}\sum_i c_{ij},$$

$$c_{**}=\frac{1}{IJ}\sum_{ij} c_{ij}=\frac{1}{I}\sum_i c_{i*}=\frac{1}{J}\sum_j c_{*j}.$$

Пусть, кроме того, $\alpha=c_{**}$, $\beta_i=c_{i*}-c_{**}$, $\gamma_j=c_{*j}-c_{**}$ и $\delta_{ij}=c_{ij}-c_{i*}-c_{*j}+c_{**}$. Идея Д. а. основана на очевидном тождестве:

$$c_{ij}=\alpha+\beta_i+\gamma_j+\delta_{ij},\quad i=1,\ \ldots,\ I,\ j=1,\ \ldots,\ J.$$

В примере, связанном со спортивными соревнованиями, функция δ_{ij} выражает «взаимодействие» i-го спортсмена и j-го судьи (положительное значение δ_{ij} означает «подсуживание», т. е. систематич. завышение j-м судьёй оценки мастерства i-го спортсмена, а отрицательное значение δ_{ij} означает «засуживание», т. е. систематич. снижение оценки). Равенство всех δ_{ij} нулю — необходимое требование, к-рое надлежит предъявлять к работе группы экспертов. В случае же агрономич. опытов такое равенство рассматривается как гипотеза, подлежащая проверке по результатам экспериментов. Если эта гипотеза верна, то выявление наилучших «почвы» и «обработки» может быть осуществлено раздельно, что приводит к существенному сокращению числа экспериментов.

В ситуации спортивных соревнований функция γ_j может трактоваться как систематич. ошибка, допускаемая j-м судьёй по отношению ко всем спортсменам. В конечном счёте γ_j — характеристика «строгости» или «либеральности» j-го судьи. В идеале хотелось бы, чтобы все γ_j были нулевыми, но в реальных условиях приходится мириться с наличием ненулевых значений γ_j и учитывать это обстоятельство при подведении итогов экспертизы. Наконец, сумма двух оставшихся функций $\alpha+\beta_i$ зависит лишь от i и поэтому может быть использована для характеризации мастерства i-го спортсмена. Однако здесь нужно помнить, что $\alpha+\beta_i\neq a_i$ характеризует не только мастерство i-го спортсмена, но и в той или иной мере отношение экспертов к этому мастерству.

Истинные значения функций α, β_i, γ_j и δ_{ij} неизвестны и выражаются в терминах неизвестных функций c_{ij}. Поэтому первый этап Д. а. заключается в отыскании статистич. оценок для c_{ij} по результатам наблюдений x_{ijk}. Несмещённая и имеющая минимальную дисперсию оценка для c_{ij} выражается формулой

$$\hat{c}_{ij}=x_{ij*}=\frac{1}{K}\sum_k x_{ijk}.$$

Несмещённые оценки для функций α, β_i, γ_j, δ_{ij}, имеющие минимальную дисперсию, получаются в результате замены аргументов c_{ij} соответствующими оценками $\hat{c}_{ij}$, т. е.

$$\hat{\alpha}=x_{***},\ \hat{\beta}_i=x_{i**}-x_{***},\ \hat{\gamma}_j=x_{*j*}-x_{***},$$

$$\hat{\delta}_{ij}=x_{ij*}-x_{i**}-x_{*j*}+x_{***}.$$

Рассмотрим пять совокупностей случайных величин $\{x_{ijk}\}$, $\{x_{ijk}-x_{ij*}\}$, $\{\hat{\beta}_i\}$, $\{\hat{\gamma}_j\}$ и $\{\hat{\delta}_{ij}\}$. Так как

$$x_{ijk}-x_{ij*}=y_{ijk}-y_{ij*},\ \hat{\beta}_i=\beta_i+(y_{i**}-y_{***}),$$

$$\hat{\gamma}_j=\gamma_j+(y_{*j*}-y_{***}),$$

$$\hat{\delta}_{ij}=\delta_{ij}+(y_{ij*}-y_{i**}-y_{*j*}+y_{***}),$$

то дисперсии эмпирич. распределений, соответствующих указанным совокупностям, выражаются формулами

$$S^2=\frac{1}{IJK}\sum_{ijk}(x_{ijk}-x_{***})^2,$$

$$S_0^2=\frac{1}{IJK}\sum_{ijk}(x_{ijk}-x_{ij*})^2=\frac{1}{IJK}\sum_{ijk}(y_{ijk}-y_{ij*})^2,$$

$$S_1^2=\frac{1}{I}\sum_i\hat{\beta}_i^2=\frac{1}{I}\sum_i[\beta_i+(y_{i**}-y_{***})]^2,$$

$$S_2^2=\frac{1}{J}\sum_j\hat{\gamma}_j^2=\frac{1}{J}\sum_j[\gamma_j+(y_{*j*}-y_{***})]^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{IJ}\sum_{ij}\hat{\delta}_{ij}^2=\frac{1}{IJ}\sum_{ij}[\delta_{ij}+(y_{ij*}-y_{i**}-y_{*j*}+y_{***})]^2.$$

Эти эмпирич. дисперсии представляют собой суммы квадратов случайных величин; при этом относительно всех y_{ijk} справедливо тождество

$$S^2=S_0^2+S_1^2+S_2^2+S_3^2,$$

объясняющее происхождение термина «Д. а.».

Пусть I, J, $K\geqslant 2$ и пусть

$$s_0^2=\frac{K}{K-1}S_0^2,\quad s_1^2=\frac{IJK}{I-1}S_1^2,\ s_2^2=\frac{IJK}{J-1}S_2^2,$$

$$s_3^2=\frac{IJK}{(I-1)(J-1)}S_3^2.$$

На основе этих формул и строится второй этап Д. а., посвящённый выявлению влияния первого и второго факторов на результаты эксперимента (в агрономич. опытах первый фактор — сорт, «почвы», второй — метод «обработки»). Напр., если требуется проверить гипотезу отсутствия «взаимодействия» факторов, к-рая выражается равенством $\sum_{ij}\delta_{ij}^2=0$, то разумно вычислить дисперсионное отношение $s_3^2/s_0^2=F_3$. Если это отношение значимо отличается от единицы, то проверяемая гипотеза отвергается. Точно так же для проверки гипотезы $\sum_j\gamma_j^2=0$ полезно отношение $s_2^2/s_0^2=F_2$, к-рое надлежит тоже сравнить с единицей. Аналогичным образом можно построить статистику, позволяющую дать заключение о справедливости или ложности гипотезы $\sum_i\beta_i^2=0$.

Точный смысл понятия значимого отличия указанных отношений от единицы может быть определён лишь с учётом закона распределения случайных ошибок y_{ijk}.

В Д. а. наиболее обстоятельно изучена ситуация, в к-рой все y_{ijk} распределены нормально. В этом случае s_0^2, s_1^2, s_2^2, s_3^2 — независимые случайные величины. Поэтому в случае справедливости гипотезы $\sum_{ij}\delta_{ij}^2=0$ отношение $s_3^2/s_0^2=F_3$ подчиняется F-распределению (распределению дисперсионного отношения) с параметрами $f_3=(I-1)(J-1)$ и $f_0=IJ(K-1)$. Пусть x — такое число, для к-рого вероятность события $\{F_3>x\}$ равна заданному значению ε, наз. уровнем значимости [таблицы функции $x=x(\varepsilon;\ f_3,\ f_0)$ имеются в большинстве пособий по математич. статистике]. Критерием для проверки этой гипотезы служит правило, согласно к-рому эта гипотеза отвергается, если наблюдаемое значение F_3 превышает x; в противном случае гипотеза считается не противоречащей результатам наблюдений. Аналогичным образом конструируются другие критерии.

Дальнейшие этапы Д. а. существенно зависят не только от реального содержания конкретной задачи, но также и от результатов статистич. проверки гипотез на втором этапе. Напр., в условиях агрономич. опытов справедливость гипотезы $\sum_{ij}\delta_{ij}^2=0$, как указано выше, позволяет более экономично спланировать аналогичные дальнейшие эксперименты (если помимо гипотезы $\sum_{ij}\delta_{ij}^2=0$ справедлива также и гипотеза $\sum_j\gamma_j^2=0$, то это означает, что урожайность зависит лишь от сорта «почвы», и поэтому в дальнейших опытах можно воспользоваться схемой однофакторного Д. а.).

В случае экспертных оценок статистически подтверждённая справедливость гипотезы $\sum_{ij}\delta_{ij}^2=0$ даёт основание для упорядочивания сравниваемых объектов (напр., спортсменов) по значениям величин $\hat{\alpha}+\hat{\beta}_i$, $i=1,\ \ldots,\ I$.

Модели современного Д. а. охватывают широкий круг реальных экспериментальных схем. Соответствующие этим схемам статистич. выводы во многих случаях находятся в стадии разработки.

● Шеффе Г., Дисперсионный анализ, пер. с англ., М., 1963; Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, пер. с англ., М., 1956; Снедекор Дж. У., Статистические методы в применении к исследованиям в сельском хозяйстве и биологии, пер. с англ., М., 1961. *Л. Н. Большев.*

ДИСПЕРСИЯ (от лат. dispersio — рассеяние) — одна из характеристик распределения вероятностей случайной величины, наиболее употребительная мера рассеяния её значений. Дисперсия $\mathsf{D}X$ случайной величины X определяется как математич. ожидание $\mathsf{E}(X-m)^2$ квадрата отклонения X от её математич. ожидания $m=\mathsf{E}X$. Для случайной величины X с дискретным распределением $p_k=\mathsf{P}\{X=x_k\}$. Дисперсия определяется формулой

$$\mathsf{D}X=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-m)^2\,p_k$$

при условии, что ряд сходится, а для случайной величины X с непрерывным распределением, имеющим плотность вероятности $p(x)$,— формулой

$$\mathsf{D}X=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\,p(x)\,dx,$$

если этот интеграл сходится.

Наряду с Д. в качестве меры рассеяния (той же размерности, что и сама случайная величина) используется квадратный корень из Д.: $\sigma=\sqrt{\mathsf{D}X}$, наз. квадратичным отклонением X. Если $\mathsf{D}X=0$, то случайная величина X принимает с вероятностью 1 единственное значение m. Д. обладает свойством минимальности в том смысле, что

$$\mathsf{D}X=\min_{-\infty<a<\infty}\mathsf{E}(X-a)^2,$$

при этом min достигается при $a=\mathsf{E}X$. Представление о $\mathsf{D}X$ (и σ) как о характеристике рассеяния даёт *Чебышева неравенство* для вероятности отклонения случайной величины от её математич. ожидания. В теории вероятностей большое значение имеет теорема: Д. суммы независимых случайных величин равна сумме Д. этих величин. Это свойство выделяет Д. среди других характеристик рассеяния. В математич. статистике важную роль для характеристики качества статистич. оценок играет их Д.

ДИСТРИБУТИВНАЯ РЕШЁТКА — решётка, в которой справедливо тождество

$$(a+b)\,c=ac+bc.$$

Оно равносильно любому из следующих двух тождеств:

$$ab+c=(a+c)\,(b+c),\quad (a+b)\,(a+c)\,(b+c)=ab+ac+bc.$$

Важнейшим частным случаем Д. р. являются *булевы алгебры*. Всякая Д. р. изоморфна решётке подмножеств (не обязательно всех) нек-рого множества.

ДИСТРИБУТИВНОСТЬ (от лат. distributivus — распределительный), распределительность, распределительный закон,— свойство, связывающее сложение и умножение чисел и выражающееся тождествами

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c, \qquad (Д1)$$

$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a. \qquad (Д2)$$

Если «+» и «·» — произвольные бинарные алгебраич. операции, то при выполнении обоих тождеств (Д1) и (Д2) операция «·» наз. дистрибутивной относительно операции «+». Тождества (Д1) и (Д2) — аксиомы, участвующие в определении кольца. Тождества (Д1) и (Д2) независимы, т. е. возможно выполнение одного из них при невыполнении другого. Напр., для операций сложения и суперпозиции функций:

$$(f_1+f_2)\,(g(x))=f_1(g(x))+f_2(g(x)),$$

но, вообще говоря,

$$f(g_1(x)+g_2(x))\neq f(g_1(x))+f(g_2(x)).$$

Термин «дистрибутивный» ввёл Ф. Сервуа (1815).

ДИФФЕОМОРФИЗМ — гомеоморфизм, являющийся *дифференцируемым отображением*.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ (от лат. differentia — разность, различие) — главная линейная часть приращения функции. Если функция $y=f(x)$ одного переменного x имеет при $x=x_0$ производную, то приращение

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

функции $f(x)$ можно представить в виде

$$\Delta y=f'(x_0)\,\Delta x+R(\Delta x),$$

где член R бесконечно мал по сравнению с Δx. Первый член

$$dy=f'(x_0)\,\Delta x$$

в этом разложении и наз. дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0. Из этой формулы видно, что дифференциал dy линейно зависит от приращения независимого переменного Δx, а равенство

$$\Delta y=dy+R(\Delta x)$$

показывает, в каком смысле дифференциал dy является главной частью приращения Δy. Подробнее о Д. функций одного и нескольких переменных см. *Дифференциальное исчисление*.

В работах Г. Лейбница, Я. и И. Бернулли слово «differentia» употреблялось в смысле «приращение», его И. Бернулли обозначал через Δ. Г. Лейбниц (1675, опубл. 1684) для «бесконечно малой разности» использовал обозначение d — первую букву слова «differential», образованного им же от «differentia».

Обобщение понятия дифференциала. Обобщение понятия Д. на вектор-функции, начало к-рому положили в нач. 20 в. Р. Гато и М. Фреше, позволяет лучше выяснить смысл понятия дифференциала для функций нескольких переменных, а в применении к функционалам приводит к понятию вариации, лежащему в основе вариационного исчисления.

Важную роль в этом обобщении играет понятие линейной функции (линейного отображения). Функция $L(x)$ векторного аргумента x наз. линейной, если она непрерывна и удовлетворяет равенству

$$L(x'+x'')=L(x')+L(x'')$$

для любых x' и x'' из области определения. Линейная функция n-мерного аргумента $x=\{x_1,\ \ldots,\ x_n\}$ всегда имеет вид

$$L(x)=a_1x_1+\ldots+a_nx_n,$$

где $a_1,\ \ldots,\ a_n$ — постоянные. Приращение

$$\Delta L=L(x+h)-L(x)$$

линейной функции $L(x)$ имеет вид

$$\Delta L=L(h),$$

т. е. зависит только от векторного приращения h, и притом линейно. Функция $f(x)$ наз. дифференцируемой при значении аргумента x, если её приращение $\Delta f=f(x+h)-f(x)$, рассматриваемое как функция от h, имеет главную линейную часть $L(h)$, т. е. выражается в виде

$$\Delta f=L(h)+R(h),$$

где остаток $R(h)$ при $h\to0$ бесконечно мал по сравнению с h. Главная линейная часть $L(h)$ приращения Δf наз. дифференциалом df функции f в точке x. При этом в зависимости от того, в каком смысле понимается бесконечная малость $R(h)$ по сравнению с h, различают слабый дифференциал, или дифференциал Гато, и сильный дифференциал, или дифференциал Фреше. Если существует сильный Д., то существует и слабый Д., равный сильному Д. Слабый Д. может существовать и тогда, когда сильный не существует.

В случае $f(x)\equiv x$ из общего определения следует, что $df=h$, т. е. можно приращение h считать Д. аргумента x и обозначать dx.

Если сделать теперь переменной точку x, в к-рой определяется Д. df, то он будет функцией двух переменных:

$$df(x;\ h).$$

Далее, считая $h=h_1$ постоянным, можно найти Д. от дифференциала $df(x;\ h_1)$ как главную часть приращения

$$df(x+h_2;\ h_1)-df(x;\ h_1),$$

где h_2 — нек-рое второе, не связанное с h_1 приращение x. Получаемый таким образом **второй дифференциал** $d^2f=d^2f(x;\ h_1,\ h_2)$ является функцией трёх векторных аргументов x, h_1 и h_2, линейной по каждому из двух последних аргументов. Если d^2f непрерывно зависит от x, то он симметричен относительно h_1 и h_2:

$$d^2f(x;\ h_1,\ h_2)=d^2f(x;\ h_2,\ h_1).$$

Аналогично определяется дифференциал $d^nf=d^nf(x, h_1,\ldots,h_n)$ любого порядка n.

В вариационном исчислении сам векторный аргумент является функцией $x(t)$, а дифференциалы df и d^2f функционала $f[x(t)]$ наз. его **первой и второй вариациями** и обозначаются δf и $\delta^2 f$.

Всюду выше речь шла об обобщении понятия Д. на числовые функции векторного аргумента. Существует обобщение понятия Д. и на случай вектор-функций, принимающих значения в банаховых пространствах.

● Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1, 3 изд., М., 1971; Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1, М., 1981; Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981. *А. Н. Колмогоров.*

ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ.

СОДЕРЖАНИЕ:

Кривые 189
Поверхности 191
Семейства кривых и поверхностей 193
Дифференциально-геометрические многообразия . . . 194
Исторический очерк 196

Дифференциальная геометрия — раздел геометрии, в к-ром геометрические образы изучаются методами математического анализа, в первую очередь — дифференциального исчисления. Важнейшими объектами Д. г. являются кривые (линии) и поверхности обычного евклидова пространства, а также семейства (т. е. непрерывные совокупности) кривых и поверхностей. При этом, в отличие от элементарной и аналитич. геометрий, изучающих отдельные кривые и поверхности или специальные классы кривых и поверхностей, Д. г. рассматривает по преимуществу кривые и поверхности вообще, лишь бы их можно было задавать уравнениями, допускающими применение методов математич. анализа. Характерной особенностью Д. г. является то, что она исследует прежде всего свойства геометрич. образов (кривых, поверхностей и семейств), к-рые присущи сколь угодно малой их части; такие свойства наз. **дифференциальными**.

Первоначально в Д. г. изучались дифференциальные свойства геометрич. образов, не изменяющиеся при движениях. Эту часть Д. г. называют **классической** Д. г. (ей посвящены первые три раздела).

К новым направлениям в Д. г. относятся: 1) теории, изучающие дифференциальные свойства геометрич. образов евклидова пространства, не изменяющиеся при аффинных, проективных и др. преобразованиях; 2) теории, изучающие дифференциальные свойства геометрич. образов в неевклидовых, вообще говоря, многомерных пространствах (напр., в трёхмерном или многомерном пространстве Лобачевского) и дифференциальные свойства самих неевклидовых пространств. Исследование неевклидовых пространств составляет весьма большой и важный раздел Д. г., имеющий тесные связи с физикой, особенно с теорией относительности (см. *Римановa геометрия*).

Отвлечение от специальных свойств геометрич. образов, изучаемых в Д. г., приводит к общему понятию дифференциально-геометрич. многообразия (см. стр. 194—96), содержащему как частные случаи понятия кривой, поверхности, семейства кривых и поверхностей в евклидовом и в неевклидовом пространствах, а также сами эти пространства. Таким образом, дифференциально-геометрич. многообразие является предметом Д. г. вообще.

Кривые

Кривые, рассматриваемые в Д. г., имеют во всех своих точках, кроме, может быть, нек-рых «особых» точек, определённую *касательную*. При обычных в Д. г. допущениях достаточной «гладкости» кривой длина перпендикуляра $M'M''$ (рис. 1), опущенного из точки кривой M' на касательную MT в точке M, является бесконечно малой величиной, порядок малости к-рой по сравнению с длиной от-

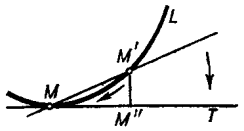


Рис. 1.

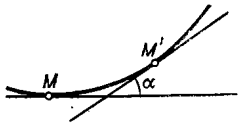


Рис. 2.

резка MM'' не ниже **второго** (т. е. отношение $\frac{M'M''}{(MM'')^2}$ остаётся ограниченным, когда точка M' приближается к M).

Мерой отклонения кривой от касательной MT является кривизна k кривой в точке M:

$$k=2\lim\frac{M'M''}{(MM'')^2},$$

где предел берётся при стремлении точки M' к точке M.

Кривизну можно также рассматривать как меру скорости изменения направления кривой. Если обозначить (рис. 2) через α угол между касательными в точках M и M' и через Δs длину дуги MM', то

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\alpha}{\Delta s}.$$

При нек-рых условиях кривизне плоской кривой естественно приписывают знаки плюс или минус.

В частном случае, когда линия — прямая, направление её во всех точках одно и то же; следовательно, для любого отрезка MM' будет $\alpha=0$ и, значит, $k=0$, т. е. кривизна

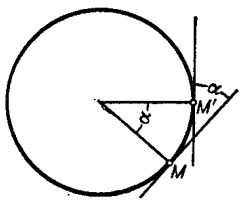


Рис. 3.

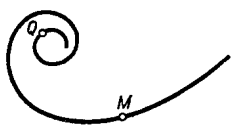


Рис. 4.

прямой во всех точках равна нулю. В другом частном случае, когда линия — окружность, угол равен центральному углу дуги MM' (рис. 3); поэтому $\Delta s=\alpha R$ (R — радиус окружности) и

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\alpha}{\Delta s}=\frac{1}{R},$$

т. е. кривизна окружности во всех точках одинакова и равна обратной величине радиуса. В случае произвольной линии кривизна в разных точках, вообще говоря, различна; напр., на рис. 4 кривизна изображённой линии в точке Q больше, чем в точке M.

Для характеристики искривлённости кривой вблизи данной точки применяются также окружность (круг) кривизны, радиус кривизны и центр кривизны. Пусть M — фиксированная точка кривой L (кривизна её в точке M предполагается отличной от нуля); пусть, далее, O — нек-рая окружность, касающаяся L в точке M, MT — общая касательная к L и к окружности O в точке M, M' и M'' — точки соответственно на L и на O, имеющие общую проекцию M''' на MT (рис. 5). Если точки M' и M'' стремятся к точке M (вместе с тем и $M'''\to M$), то расстояние

$M'M''$ является величиной 2-го порядка малости сравнительно с MM'''; если для окружности O расстояние $M'M''$ оказывается величиной 3-го (или выше) порядка, т. е. эта окружность имеет касание 2-го порядка, то она наз. *соприкасающейся окружностью* кривой L в точке M (если в точке M кривизна равна нулю, то соприкасающаяся окружность вырождается в прямую). Сущность изложенного заключается в том, что малую дугу произвольной кривой можно считать дугой окружности, именно — соприкасающейся окружности в нек-рой её точке, если учитывать величины только 1-го и 2-го порядка малости (сравнительно с размерами дуги). Кривизна произвольной кривой в данной точке совпадает с кривизной соприкасающейся окружности в той же точке. Поэтому соприкасающуюся окружность называют также о к р у ж н о с т ь ю (кругом) к р и в и з н ы, а её центр и радиус — ц е н т р о м и р а д и у с о м к р и в и з н ы кривой (в данной точке). Прямая, соединяющая центр кривизны с точкой M, перпендикулярна касательной; в случае плоской кривой это — *нормаль*, а в случае пространственной — г л а в н а я н о р м а л ь. Кривизна k и радиус кривизны ρ в любой точке кривой связаны соотношением: $k=\frac{1}{\rho}$. Множество центров кривизны (плоской) кривой наз. её *эволютой*. Сама кривая по отношению к своей эволюте наз. *эвольвентой*. Нормаль эвольвенты касается эволюты в центре кривизны (на рис. 6 изображена эволюта эллипса; точка C является центром кривизны эллипса в точке M).

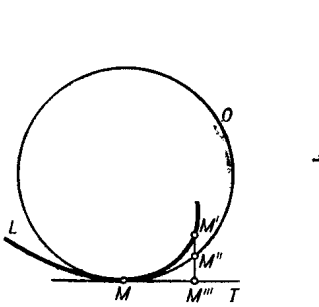


Рис. 5.

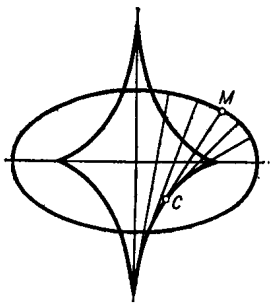


Рис. 6.

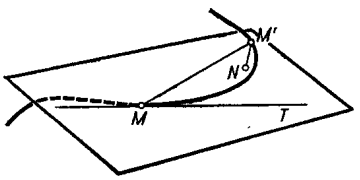


Рис. 7.

Плоскость, в к-рой расположена соприкасающаяся в точке M окружность, наз. *соприкасающейся плоскостью* в точке M. Эту плоскость можно определить непосредственно как плоскость, для к-рой длина перпендикуляра $M'N$ (рис. 7), опущенного из точки M', является бесконечно малой не ниже 3-го порядка по сравнению с MM' (для произвольной плоскости, проходящей через M, длина $M'N$, вообще говоря, будет бесконечно малой 1-го порядка, а для плоскости, проходящей через касательную MT, вообще говоря, 2-го порядка). Соприкасающаяся плоскость есть не что иное, как плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль. В точке M с кривизной, равной нулю, соприкасающаяся плоскость становится неопределённой.

При изучении пространственных кривых, кроме кривизны, вводится ещё понятие *кручения*. Если кривая не лежит целиком в одной плоскости, то её соприкасающаяся плоскость при переходе от точки к точке меняется; чем более резко происходит это изменение, тем большим кручением обладает кривая. Численно кручение определяется следующим образом. Пусть переменная точка перемещается по кривой из M в M'; соприкасающаяся плоскость в переменной точке меняет угол своего наклона к соприкасающейся плоскости в точке M (начиная от нуля) и в конечном положении располагается к ней под нек-рым углом β (если смещение точки мало, то β — малый острый угол). Углу β приписывается знак плюс, если наблюдатель, глядя из M в M', будет видеть вращение переменной соприкасающейся плоскости по часовой стрелке; в противном случае углу β приписывается знак минус. Отношение $\frac{\beta}{\Delta s}$, где Δs — длина дуги MM', принимается в качестве меры кручения кривой в среднем на участке MM'. Предел этого отношения при $\Delta s\to 0$ (т. е. при условии, что точка M' неограниченно приближается к точке M) наз. к р у ч е н и е м σ в точке M:

$$\sigma=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\beta}{\Delta s}.$$

В частном случае, когда кривая плоская, кручение её во всех точках равно нулю; обратно, если кручение во всех точках равно нулю, то кривая целиком лежит в одной плоскости — общей соприкасающейся плоскости для всех её точек.

Кривизна и кручение — величины, определяющие кривую; именно: если между точками двух кривых установлено соответствие так, что соответствующие дуги этих кривых имеют одинаковые длины, и если в соответствующих точках эти кривые имеют равные кривизны и равные кручения, то они одинаковы по форме, т. е. могут быть совмещены при помощи движения. Напр., все кривые, вдоль к-рых кривизна постоянна и равна $\frac{1}{a}$, а кручение равно нулю, суть окружности радиуса a. Произвольно задав непрерывные функции $k(s)\geqslant 0$ и $\sigma(s)$, можно найти кривую с этой заданной зависимостью кривизны k и кручения σ от s.

Изложенные выше основные понятия Д. г. широко используются в механике. Достаточно отметить, что скорость движущейся точки направлена по касательной к её траектории, ускорение лежит в соприкасающейся плоскости. Если движение равномерно, то при данной скорости ускорение пропорционально кривизне траектории и направлено к центру кривизны. Ввиду последнего обстоятельства с кривизной и центром кривизны постоянно приходится иметь дело в разнообразных технич. задачах. Напр., при установлении предельной скорости движения поезда на кривом участке пути необходимо учитывать кривизну участка, чтобы не допустить ускорения, при к-ром инерционные силы превысят границы безопасности; самый переход от прямого участка к кривому должен быть осуществлён таким образом, чтобы кривизна возрастала от нуля не слишком быстро, т. к. в противном случае неизбежны внезапные возникновения инерционных сил.

Д. г. даёт общие способы для нахождения касательной, кривизны, кручения и т. п. Кривая при этом предполагается заданной уравнениями в какой-нибудь системе координат, чаще всего параметрич. уравнениями в прямоугольных координатах:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t); \qquad (1)$$

здесь t — независимое переменное (наз. п а р а м е т р о м), изменяющееся в нек-ром конечном или бесконечном интервале; $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — данные функции; x, y, z — прямоугольные координаты нек-рой точки M. При изменении t меняются x, y, z, вместе с тем перемещается точка M. Траектория точки M и есть кривая, заданная уравнениями (1).

П р и м е р. Уравнения $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ ($a>0$, $b\neq 0$) определяют винтовую линию (при возрастании t точка M вращается вокруг оси Oz и одновременно перемещается в направлении этой оси).

Правые части уравнений (1) можно рассматривать как проекции на оси координат радиус-вектора r точки M, что записывается так:

$$r=\{\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)\}.$$

Вектор с проекциями $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ наз. производной от вектора $\boldsymbol{r}$ и обозначается

$$\boldsymbol{r}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \{\varphi'(t),\ \psi'(t),\ \chi'(t)\};$$

аналогично определяются производные высших порядков:

$$\boldsymbol{r}^{(n)} = \frac{d^n\boldsymbol{r}}{dt^n} = \{\varphi^{(n)}(t),\ \psi^{(n)}(t),\ \chi^{(n)}(t)\}.$$

Вектор $\boldsymbol{r}'$ лежит на касательной к заданной кривой в точке M. Следовательно, если $\boldsymbol{r}' \neq 0$, то касательная определяется точкой M и вектором $\boldsymbol{r}'$. Вектор $\boldsymbol{r}''$ лежит в соприкасающейся плоскости; следовательно, соприкасающаяся плоскость определяется точкой M и векторами $\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}''$ (если только эти векторы неколлинеарны). Кривизна и кручение вычисляются по формулам

$$k = \sqrt{\frac{[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'']^2}{(\boldsymbol{r}'^2)^3}}, \quad \sigma = \frac{(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')}{[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'']^2}, \qquad (2)$$

где $[\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'']$ — векторное, а $(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \boldsymbol{r}''')$ — смешанное произведение. Для того чтобы вторая из этих формул давала правильно знак кручения, необходимо выбрать систему координатных осей так, чтобы она имела «правую» ориентацию. Кривизна и кручение суть дифференциальные инварианты относительно изменения параметра. Это значит, что они выражаются через дифференциалы вектора $\boldsymbol{r}$ и параметра t; их выражения не изменяются (инвариантны) при переходе к новому параметру по формуле $t = t(u)$.

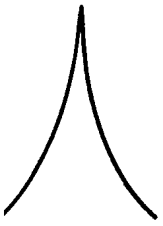


Рис. 8.

Для применения формул (2) необходимо, чтобы правые части уравнений (1), определяющих кривую, имели производные, по крайней мере, до 3-го порядка. Это условие относительно рассматриваемых кривых в Д. г. обычно предполагается выполненным. Кроме того, как правило, предполагается, что $\boldsymbol{r}' \neq 0$. В каждой точке, где оба указанные условия соблюдены, кривая имеет касательную и вблизи такой точки простирается вдоль касательной в обе стороны. Вблизи точки, где $\boldsymbol{r}' = 0$, кривая может иметь иное строение; в таких случаях точка наз. нерегулярной или особой. Пример особой точки (т. н. точки возврата) даёт рис. 8. См. также *Особая точка* кривой.

Если параметр t совпадает с длиной дуги s, пройденной точкой M по данной кривой, считая от нек-рой условно выбранной начальной точки, то $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{t}$ — единичный вектор касательной. Вектор $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{t}$, причём направлен по главной нормали. Единичный вектор, направленный так же, как $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$, наз. единичным вектором главной нормали; его обозначают через $\boldsymbol{n}$. Нормаль, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, наз. бинормалью; соответственно, вектор $\boldsymbol{b}$, равный векторному произведению $\boldsymbol{t}$ на $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}]$) и направленный перпендикулярно к соприкасающейся плоскости, наз. единичным вектором бинормали. Плоскость, проходящая через точку M и векторы $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$, содержит все нормали в точке M и наз. нормальной плоскостью в этой точке; плоскость, проходящая через векторы $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b}$, наз. спрямляющей.

Векторы $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ составляют основной триэдр кривой в её произвольной точке M; они являются функциями того же параметра, к-рый определяет положение точки M. В частности, если в качестве параметра выбрана длина дуги s, то $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ будут функциями от s. Производные от $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ по s выражаются *Френе формулами*:

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = k\boldsymbol{n},$$

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -k\boldsymbol{t} + \sigma\boldsymbol{b},$$

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\sigma\boldsymbol{n},$$

к-рые широко используются в Д. г. и теоретич. механике.

Если кривизна и кручение кривой в нек-рой её точке отличны от нуля, то, зная их, можно сделать определённые заключения о форме кривой в достаточно малой окрестности точки M. Именно, её проекция на соприкасающуюся плоскость в точке M является выпуклой и расположена по ту сторону от касательной, в какую направлен вектор $\boldsymbol{n}$ (рис. 9); проекция на нормальную плоскость

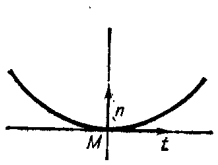


Рис. 9.

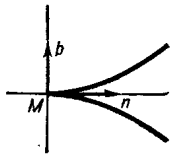
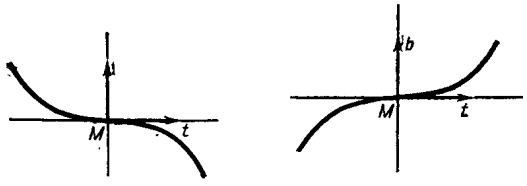


Рис. 10.

имеет точку возврата (рис. 10); проекция на спрямляющую плоскость — точку перегиба, причём в случае $\sigma > 0$ расположена так, как показано на рис. 11*а*, в случае $\sigma < 0$ — как показано на рис. 11*б* (тем самым с новой точки зрения выясняется геометрич. смысл знака кручения).

В Д. г., в частности в теории кривых, различают два рода теорем: теоремы геометрии в малом и теоремы геометрии в целом. В геометрии в малом утверждения относятся не ко всему множеству точек изучаемого объекта



а *б*

Рис. 11.

(напр., кривой), а только к части этого множества, принадлежащей какой-нибудь окрестности нек-рой его точки.

К геометрии в малом относится, напр., исследование формы кривой вблизи точки, где кривизна и кручение отличны от нуля.

Теоремы геометрии в целом трактуют о свойствах всего множества точек изучаемого объекта. Примеры. а) На всякой плоской замкнутой кривой без самопересечений кривизна имеет, по крайней мере, два максимума и два минимума. б) Для любой замкнутой кривой $\oint k ds \geqslant 2\pi$ (знак равенства имеет место только для плоских выпуклых кривых, а если кривизна берётся с учётом знака, то — для плоских замкнутых кривых).

Поверхности

Поверхность в Д. г. может быть определена тремя уравнениями:

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v), \qquad (3)$$

где u, v — независимые переменные, наз. параметрами; x, y, z — прямоугольные координаты нек-рой точки M. Параметры u, v предполагаются изменяющимися в какой-нибудь области D вспомогательной плоскости, на к-рой введена система прямоугольных координат. При всех возможных значениях u, v из области D точка M находится на поверхности, определяемой уравнениями (3), и может занимать на ней любое положение. Функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ обычно предполагаются непрерывными и обладающими частными производными, по крайней мере, до 3-го порядка при всех рассматриваемых значениях u, v.

Для каждой пары значений u, v уравнения (3) устанавливают одно определённое положение точки M на поверх-

ности. Если зафиксирована только величина v, то при изменении u точка M описывает на поверхности нек-рую линию, наз. к о о р д и н а т н о й; различным значениям v соответствуют различные (вообще говоря) координатные линии; все вместе они составляют координатное семейство линий $v=\text{const}$. Аналогично определяется координатное семейство линий $u=\text{const}$. Оба семейства составляют к о о р д и н а т н у ю с е т ь. Если координатная сеть задана, то произвольная точка поверхности, определяемая двумя значениями параметров $u=u_0$, $v=v_0$, может быть найдена как пересечение координатных линий $u=u_0$ и $v=v_0$, т. е. при помощи нек-рого построения на самой поверхности, без обращения к объемлющему пространству. Ввиду этого u, v наз. также в н у т р е н н и м и или к р и в о л и н е й н ы м и координатами точек поверхности.

Помимо задания тремя параметрич. уравнениями, поверхность может быть задана одним уравнением вида

$$F(x,\ y,\ z)=0$$

(как множество точек, координаты к-рых удовлетворяют этому уравнению). Если параметрич. уравнения поверхности заданы, то исключение параметров u, v из этих уравнений приводит к одному соотношению между x, y, z указанного вида.

П р и м е р. Уравнения $x=r\sin u\cos v$, $y=r\sin u\sin v$, $z=r\cos u$ (r — положительное число) определяют сферу радиуса r с центром в начале координат. В данном случае u, v наз. географич. координатами точек сферы (если u, v — координаты точки M, то $u=\angle MOQ$, $v=\angle POQ$; рис. 12).

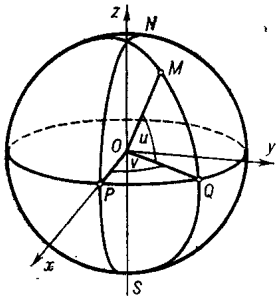


Рис. 12.

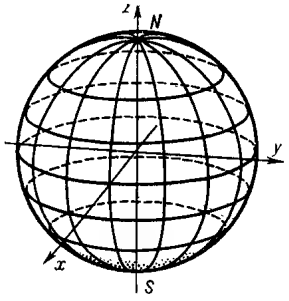


Рис. 13.

Линии $v=\text{const}$ и $u=\text{const}$ наз. соответственно меридианами и параллелями сферы (рис. 13). Точки, в к-рых сходятся все меридианы, наз. полюсами географич. системы координат (на рис. 13 это точки N и S). Исключение параметров u, v из данных трёх параметрич. уравнений сферы приводит к одному уравнению:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Д. г. в первую очередь изучает т. н. регулярные, или обыкновенные, точки поверхности. Точка поверхности наз. р е г у л я р н о й, если в нек-рой её окрестности можно ввести внутренние координаты так, что через каждую точку этой окрестности проходит одна линия семейства $u=\text{const}$ и одна линия семейства $v=\text{const}$, причём направления этих линий различны. При этих условиях и сама координатная система наз. р е г у л я р н о й. Напр., географич. система координат на сфере регулярна всюду, за исключением полюсов N и S; однако и точки N и S — регулярные точки сферы, т. к. на сфере можно ввести другую географич. систему координат (с новыми полюсами), к-рая в этих точках будет уже регулярной. Точка поверхности, не являющаяся регулярной, наз. о с о б о й (на рис. 14 изображена поверхность с особой точкой). В дальнейшем имеются в виду только регулярные точки и регулярные системы внутренних координат.

Пусть нек-рая поверхность задана уравнениями (3). Радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ её произвольной точки M определяется этими уравнениями как функция от u и v. Частные производные $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ суть векторы, к-рые направлены по касательным в точке M к координатным линиям $v=\text{const}$, $u=\text{const}$, проходящим через M. В случае обыкновенной точки и регулярной системы координат векторы $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ неколлинеарны. Поэтому существует одна, вполне определённая плоскость, к-рая проходит через точку M и содержит векторы $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$. Эта плоскость содержит касательную к каждой линии, к-рая проходит на поверхности через точку M. Она наз. *касательной плоскостью* к поверхности в точке M. Прямая, к-рая проходит через точку M перпендикулярно к касательной плоскости (в этой точке), наз. *нормалью* к поверхности в точке M. Направление нормали определяется векторным произведением $[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]$.

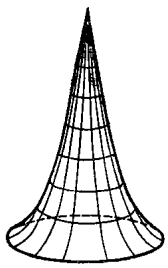


Рис. 14.

Если даны уравнения

$$u=\varphi(t),\ v=\psi(t), \tag{4}$$

то вектор $\boldsymbol{r}$ будет функцией от t с промежуточными аргументами u, v. При изменении t конец вектора $\boldsymbol{r}$ будет описывать на данной поверхности нек-рую линию; уравнения (4) наз. в н у т р е н н и м и у р а в н е н и я м и этой линии. Одной из общих задач теории поверхностей является задача исследования линий на поверхности по их внутренним уравнениям. В первую очередь возникает вопрос об измерении линии, т. е. о вычислении длины любой её дуги.

Пусть s — длина дуги линии на поверхности, измеренная от нек-рой её фиксированной точки до произвольной точки M с внутренними координатами u, v. Так как $u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$, то s является функцией параметра t; дифференциал этой функции определяется равенством

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2. \tag{5}$$

Правая часть равенства (5) есть скалярный квадрат вектора $d\boldsymbol{r}$. Из

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_u\,du+\boldsymbol{r}_v\,dv$$

следует

$$ds^2=\boldsymbol{r}_u^2\,du^2+2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\,du\,dv+\boldsymbol{r}_v^2\,dv^2. \tag{6}$$

Здесь du и dv определяются из уравнений данной линии, а именно: $du=\varphi'(t)dt$, $dv=\psi'(t)dt$. Напротив, коэффициенты $\boldsymbol{r}_u^2$, $\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v$ и $\boldsymbol{r}_v^2$ не зависят от каких бы то ни было линий, проводимых на поверхности; они определяются уравнениями (3) самой поверхности и являются функциями от u, v. Вводя обозначения $\boldsymbol{r}_u^2=E$, $\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=F$, $\boldsymbol{r}_v^2=G$, равенство (6) можно переписать в виде

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2. \tag{7}$$

Выражение в правой части наз. п е р в о й к в а д р а т и ч н о й ф о р м о й. Если E, F, G известны, то длина произвольной дуги линии (4), соответствующей изменению t в отрезке $[t_1,\ t_2]$, может быть вычислена по формуле

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Следовательно, квадратичная форма (7) определяет измерение длин на данной поверхности (её называют поэтому м е т р и ч е с к о й ф о р м о й поверхности). Вместе с тем первая квадратичная форма определяет *внутреннюю геометрию* поверхности, т. е. совокупность фактов, к-рые могут быть получены при помощи измерений, производимых на самой поверхности, без обращения к объемлющему пространству. Внутренняя геометрия даже произвольной поверхности представляет собой теорию, весьма богатую содержанием. Она является широким обобщением планиметрии. Роль прямых во внутренней геометрии произвольной поверхности играют *геодезические линии*.

Две поверхности имеют одинаковую внутреннюю геометрию, если их можно отобразить взаимно однозначно

одну на другую так, что геодезич. линии перейдут в геодезические и длина их останется неизменной. Такие поверхности наз. изометричными.

Непрерывная деформация поверхности, при к-рой её внутренняя геометрия всё время остаётся неизменной, наз. *изгибанием* поверхности. Если поверхность физически реализована из гибкого, но нерастяжимого материала, то, деформируя её так, чтобы не возникало складок или разрывов, получают изгибание этой поверхности. Исследование изгибаний имеет важное значение для теории упругих оболочек.

Естественно, что Д. г. не ограничивается изучением одних внутренних свойств поверхности. Изучение поверхности как пространственной фигуры основано в своих начальных стадиях на рассмотрении кривизны лежащих на поверхности линий. Пусть M — произвольная точка поверхности, определённой уравнениями (3), N — единичный вектор нормали в точке M (обычно вектор N предполагается направленным по нормали в ту же сторону, в какую направлено векторное произведение $[r_u, r_v]$). Если провести плоскость через нормаль в точке M в направлении заранее данного вектора $dr=r_u du+r_v dv$, то она пересечёт поверхность по нек-рой линии. Кривизна этой линии в точке M, взятая со знаком плюс, если направление вогнутости линии совпадает с направлением вектора N, и со знаком минус в противоположном случае, наз. нормальной кривизной поверхности в точке M в направлении вектора dr (если кривизна линии в точке M равна нулю, то вопрос о знаке отпадает). Нормальная кривизна обозначается через $\frac{1}{R}$; она определяется формулой

$$\frac{1}{R}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{ds^2},$$

где $L=r_{uu}N$, $M=r_{uv}N$, $N=r_{vv}N$, а ds^2 определяется по формуле (7).

Квадратичная дифференциальная форма

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2$$

наз. второй квадратичной формой поверхности.

Нормальная кривизна поверхности (в нек-рой её точке M) зависит от направления вектора dr. Те направления, в к-рых нормальная кривизна принимает экстремальное значение, наз. главными направлениями поверхности в точке M. Направления, в к-рых нормальная кривизна обращается в нуль, наз. асимптотическими. Подробнее о зависимости вида поверхности вблизи данной точки от вида второй квадратичной формы см. в ст. *Поверхностей теория*.

Методы исследования поверхности в малом весьма хорошо разработаны. В основном они базируются на следующем предположении: две квадратичные формы поверхности, заданные в каких-нибудь внутренних координатах, определяют поверхность как твёрдое тело (т. е. с точностью до положения в пространстве). Если заранее даны две формы $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ и $Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2$, то найдётся поверхность, для к-рой они являются соответственно первой и второй квадратичной формой при условиях: 1) форма $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$ положительна; 2) функции L, M, N удовлетворяют нек-рой системе трёх уравнений, одно из к-рых, найденное К. Гауссом (1827), является алгебраическим, два других, найденные К. М. Петерсоном (1853), суть линейные дифференциальные уравнения с частными производными 1-го порядка (см. *Поверхностей теория*). В теории поверхностей уравнения Гаусса — Петерсона играют фундаментальную роль.

Геометрия поверхностей в целом устанавливает свойства поверхности по известным её дифференциальным свойствам в каждой точке. Таким образом, она естественно вырастает вслед за геометрией в малом и выдвигает множество разнообразных (часто очень трудных) проблем. Геометрия поверхностей в целом менее развита, чем геометрия в малом, хотя и богата глубокими результатами.

Семейства кривых и поверхностей

В Д. г. часто приходится иметь дело не с отдельной кривой или поверхностью, а с бесконечным семейством кривых или поверхностей. Пусть даны уравнения, к-рые содержат текущие координаты x, y, z и произвольные постоянные C_1, C_2, ..., C_n, причём каждый раз, когда эти постоянные получают какие-нибудь численные значения, данные уравнения определяют нек-рую кривую (или поверхность). Множество всех кривых (или поверхностей), к-рые определяются данными уравнениями при всех возможных численных значениях C_1, C_2, ..., C_n, наз. n-параметрическим семейством кривых (или поверхностей). При этом предполагается, что то же самое множество не может быть определено уравнениями с меньшим числом произвольных постоянных (кроме того, как всегда в Д. г. обе части каждого уравнения предполагаются, по крайней мере, однократно дифференцируемыми по всем аргументам, считая и C_1, C_2, ..., C_n).

Примеры. а) Уравнение $x\cos\alpha+y\sin\alpha-1=0$ (α — произвольная постоянная) определяет однопараметрич. семейство прямых, отстоящих от начала координат на расстоянии, равном единице. б) Уравнения $x=a\cos t$, $y=\sin t$, $z=bt$ (a и b — произвольные постоянные) определяют двухпараметрич. семейство винтовых линий. в) Уравнение $C_1x+C_2y+C_3z-1=0$ (C_1, C_2 — произвольные постоянные, $C_3=\sqrt{1-C_1^2-C_2^2}$) определяет двухпараметрич. семейство плоскостей, отстоящих от начала координат на расстоянии, равном единице.

При изучении однопараметрич. семейств кривых, а также одно- и двухпараметрич. семейств поверхностей особую роль играет понятие *огибающей*.

Огибающей однопараметрич. семейства кривых наз. кривая (не входящая в состав семейства), к-рая в каждой своей точке касается какой-нибудь кривой семейства.

Примеры. а) Семейство прямых на плоскости, отстоящих от данной точки на расстоянии, равном a, имеет

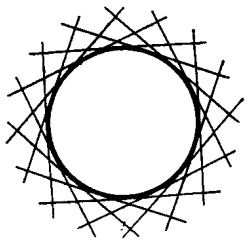


Рис. 15.

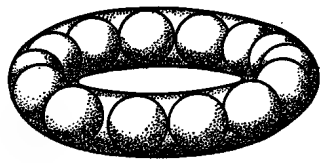


Рис. 16.

в качестве огибающей окружность радиуса a с центром в данной точке (рис. 15). б) Семейство нормалей произвольной плоской кривой имеет в качестве огибающей её эволюту. в) Семейство параллельных прямых никакой огибающей не имеет.

Огибающей одно- или двухпараметрич. семейства поверхностей наз. поверхность (не входящая в состав семейства), к-рая в каждой своей точке касается какой-нибудь поверхности семейства.

Примеры. а) Двухпараметрич. семейство плоскостей, отстоящих от данной точки на расстоянии, равном a, имеет в качестве огибающей сферу радиуса a с центром в данной точке. б) Однопараметрич. семейство всех положений сферы, вращающейся вокруг нек-рой не пересекающей её оси, имеет в качестве огибающей тор (рис. 16).

Понятие огибающей широко используется в теории дифференциальных уравнений. Так, огибающая семейства интегральных кривых обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка геометрически изображает его особое решение. Построение огибающих одно- и двухпараметрич. семейств поверхностей лежит в основе геометрич.

теории дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка. Д. г. даёт общие способы, с помощью к-рых можно найти уравнение огибающей по заданным уравнениям семейства или установить, что огибающая отсутствует.

Среди различных семейств особенно детально в Д. г. исследованы двухпараметрич. семейства прямых в пространстве, наз. конгруэнциями. Простейший пример конгруэнции — семейство параллельных прямых пространства; более общий пример — семейство нормалей произвольной поверхности. Теория конгруэнций представляет собой широко развитый и богатый содержанием отдел Д. г., по своей проблематике и методам тесно связанный с теорией поверхностей. Одним из источников теории конгруэнций, а также областью её приложений является геометрич. оптика.

Дифференциально-геометрические многообразия

В различных разделах Д. г. и в дисциплинах, где применяется Д. г. (напр., в механике), рассматриваются весьма разнообразные предметы. При всём разнообразии этих предметов они обладают нек-рыми общими чертами. Прежде всего они суть множества, для к-рых естественным образом определено понятие близости элементов (линии и поверхности суть множества точек, семейства суть множества линий и поверхностей; в механике рассматриваются множества состояний механич. систем). Далее, они являются n-мерными топологич. *многообразиями*, т. е. вблизи каждого своего элемента имеют то же топологич. строение, что и евклидово пространство нек-рой размерности n (вблизи нек-рых элементов множество может иметь более сложное топологич. строение, но такие элементы исключаются из рассмотрения как особые; напр., конус вблизи каждой своей обыкновенной точки имеет такое же строение, как евклидова плоскость, вершина же конуса является особой точкой). Наконец, множества, изучаемые в Д. г., рассматриваются всегда вместе с заданными координатами элементов; при этом число координат для каждого элемента равно размерности множества и координаты непрерывно зависят от элемента, т. е. при бесконечно малом перемещении элемента его координаты изменяются бесконечно мало. Таковы, напр., декартовы координаты на плоскости. Однако во многих случаях введение таких координат на всём множестве невозможно (напр., на сфере). Но в этих случаях для множеств, рассматриваемых в Д. г., возможно указать конечную или счётную систему областей, совместно покрывающих множество, в каждой из к-рых могут быть введены координаты с соблюдением указанных условий. При этом в общей части каждой пары таких областей координаты произвольного элемента, введённые в одной из них (любой), выражаются через координаты, введённые в другой как функции непрерывные и нек-рое число раз дифференцируемые (или даже аналитические). Это последнее обстоятельство особенно существенно, т. к. делает возможным применение методов математич. анализа вне зависимости от того, какие координаты кладутся в основу вычислений.

Отвлекаясь от специальных свойств конкретных предметов и учитывая лишь указанные выше их общие черты, приходят к общей идее n-мерного дифференциально-геометрического многообразия, понимая под этим любое n-мерное топологич. многообразие M при следующих условиях: 1) многообразие M покрыто конечным или счётным множеством областей, в каждой из к-рых введена координатная система, так что каждая точка определяется заданием координат, причём соответствие между точками и упорядоченными группами их координат взаимно однозначно и в обе стороны непрерывно; 2) если две области этого покрытия имеют общую часть, то в их общей части координаты произвольной точки, заданные в какой-нибудь одной из областей, являются непрерывными и m раз дифференцируемыми или аналитич. функциями координат, заданных в другой области (соответственно, многообразие наз. m раз дифференцируемым или аналитическим).

Если то же самое топологич. многообразие покрыто новым множеством областей и в каждой из них введена координатная система с соблюдением тех же условий, то считают, что новый способ введения координат приводит к тому же самому дифференциально-геометрич. многообразию, если в каждой общей части двух областей старого и нового покрытия координаты, заданные в какой-нибудь одной из этих областей, являются непрерывными и m раз дифференцируемыми или аналитич. функциями координат, заданных в другой области. Согласно этому определению, линии суть одномерные дифференциально-геометрич. многообразия, поверхности — двумерные, обычное евклидово пространство представляет собой пример трёхмерного дифференциально-геометрич. многообразия.

Элементы многообразия принято называть точками, однако они могут быть предметами любой природы.

Примеры. а) Множество, элементами к-рого являются все прямые обычного евклидова пространства, представляет собой четырёхмерное дифференциально-геометрич. многообразие. Если в декартовых координатах прямая задана уравнениями $z=ax+b$, $z=cy+d$, то числа (a, b, c, d) можно рассматривать в качестве координат этой прямой. Область, в к-рой определена такая координатная система, есть множество всех прямых пространства, за исключением тех, что параллельны плоскости xOz или плоскости yOz. б) Множество, элементами к-рого являются всевозможные положения твёрдого тела в обычном евклидовом пространстве, представляет собой шестимерное дифференциально-геометрич. многообразие. Оно шестимерно потому, что положение твёрдого тела определяется шестью числами, в качестве к-рых, напр., можно взять три декартовых координаты какой-нибудь его точки и три эйлеровых угла какого-нибудь жёстко связанного с телом прямоугольного трёхгранника. в) Множество, элементами к-рого являются всевозможные положения механич. системы из n свободных точек, также представляет собой дифференциально-геометрич. многообразие. Размерность его равна $3n$, т. к. положение такой системы определяется заданием $3n$ координат этих точек. Вообще механич. система, имеющая m степеней свободы, представляет собой дифференциально-геометрич. многообразие размерности m.

Уже из приведённых примеров можно видеть, что общее понятие дифференциально-геометрич. многообразия является абстракцией весьма различных конкретных множеств, поэтому изучение дифференциально-геометрич. многообразия важно для многих областей математики и смежных с нею дисциплин (механики, физики). Следует, однако, заметить, что в Д. г. дифференциально-геометрич. многообразия изучаются не сами по себе, а в соединении с нек-рыми понятиями, являющимися обобщением к.-л. понятий обычной евклидовой геометрии (движения, измерения и т. п.).

Далее кратко описываются нек-рые из основных направлений, по к-рым ведётся такое изучение дифференциально-геометрич. многообразий.

Пусть M — многообразие, G — нек-рая транзитивная группа отображений всего многообразия на себя или «локальная группа» отображений, т. е. совокупность отображений областей этого многообразия на себя и на соседние области, подчинённая требованиям, сходным с требованиями групповых аксиом. Фигура A (т. е. множество точек многообразия M) наз. эквивалентной или равной фигуре B, если в группе G существует преобразование, переводящее A в B. Систему предложений о таких свойствах фигур и таких величинах, к-рые являются инвариантными относительно всех преобразований группы G или, иначе говоря, являются общими для всех равных фигур, называют геометрией группы G (в случае, когда отображения составляют локальную группу, т. е. определены не для всего многообразия M, фигуры рассматриваются в малом). Если M — аналитич. многообразие и G — группа Ли, то каждое дифференциально-геометрич. многообразие,

лежащее в M, переводится любым преобразованием на группы G также в дифференциально-геометрич. многообразие (причём размерность и степень дифференцируемости многообразия остаются неизменными). Система предложений о таких свойствах дифференциально-геометрич. многообразий, лежащих в M (в том числе и самого M), и таких величинах, к-рые являются дифференциальными инвариантами группы G, составляет Д. г. группы G.

Классическая Д. г.— геометрия группы движений евклидова пространства; она, следовательно, изучает такие свойства линий, поверхностей и других дифференциально-геометрич. многообразий, лежащих в евклидовом пространстве, к-рые являются дифференциальными инвариантами этой группы. Далеко продвинуты также аффинная, проективная и конформная геометрии, то есть Д. г. соответственно аффинной, проективной и конформной групп. Следует отметить, что под аффинной Д. г. обычно подразумевают Д. г. не общей аффинной группы, а группы аффинных унимодулярных преобразований (т. е. аффинных преобразований с определителем, равным ± 1).

Пример. Если $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ — уравнения нек-рой плоской линии Г (в прямоугольных координатах), то кривизна может быть выражена формулой

$$k=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}.$$

Пусть дано нек-рое аффинное отображение плоскости на себя:

$$x^*=a_{11}x+a_{12}y+c_1,$$
$$y^*=a_{21}x+a_{22}y+c_2.$$

Полагая здесь $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, получают два уравнения, выражающие x^*, y^* через t; это будут уравнения линии Г*, в к-рую отображается Г. В случае $a_{11}=\cos\alpha$, $a_{12}=-\sin\alpha$, $a_{21}=\sin\alpha$, $a_{22}=\cos\alpha$ (α — нек-рый угол), т. е. когда данное отображение есть движение, имеет место тождество

$$\frac{|x^{*\prime}y^{*\prime\prime}-x^{*\prime\prime}y^{*\prime}|}{(x^{*\prime 2}+y^{*\prime 2})^{3/2}}=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}.$$

Этим аналитически выражается тот факт, что линии Г и Г* в соответствующих точках имеют равные кривизны. Иначе говоря, кривизна есть дифференциальный инвариант группы движений. При иных значениях a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} указанное тождество может не осуществляться, значит кривизна не является дифференциальным инвариантом аффинной группы. Дифференциальным инвариантом аффинной унимодулярной группы является величина $\varkappa=|(x''y'''-x'''y'')\varphi^{-5}-\frac{1}{2}(\varphi^{-2})''|$, где $\varphi=(x'y''-x''y')^{1/3}$; таким образом, $\varkappa$ представляет собой объект аффинной Д. г. (наз. аффинной кривизной плоской линии).

В Д. г. особенно значительное место занимает исследование дифференциально-геометрич. многообразий с заданной метрикой. Задание в дифференциально-геометрич. многообразии метрики означает, что указано правило, по к-рому устанавливаются длины лежащих в этом многообразии линий. Среди многообразий с метрикой наиболее важными являются т. н. римановы пространства (ниже даётся их определение).

Пусть U — произвольная область дифференциально-геометрич. многообразия, в которой введены координаты $x^1,\ldots,x^n$, и в каждой такой области задана положительно определённая квадратичная дифференциальная форма

$$\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\,dx^i\,dx^k, \qquad (8)$$

где g_{ik} — непрерывные функции от $x^1,\ldots,x^n$, причём если две области имеют общую часть, то в их общей части заданные формы должны превращаться одна в другую при переходе от координат одной области к координатам другой. С помощью введённой в области U квадратичной формы определяют длину дуги произвольной линии, лежащей в U и заданной уравнениями $x^i=x^i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$, при условии, что $x^{i\prime}(t)$ — непрерывно-дифференцируемые функции и $\sum[x^{i\prime}(t)]^2\neq 0$; именно, длиной дуги этой линии между двумя точками, соответствующими $t=a$ и $t=b$ ($a<b$), называют число

$$s=\int_a^b \sqrt{\sum g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}}\,dt.$$

Число s не зависит от выбора параметра t на линии и не зависит от того, в координатах какой области оно определяется. Если же дуга не уменьшается ни в одной из областей с заданными координатами, то длину такой дуги определяют как сумму длин её частей, каждая из к-рых лежит в одной из этих областей. Многообразие с метрикой, введённой вышеописанным способом, и наз. римановым пространством. Форма (8) наз. метрической формой риманова пространства; она выражает квадрат дифференциала дуги линии $x=x^i(t)$, т. е.

$$ds^2=\sum g_{ik}\,dx^i\,dx^k,$$

где $dx^i=\frac{dx^i}{dt}dt$ или, как ещё говорят, квадрат длины линейного элемента, определяемого точкой x^i и дифференциалами dx^i.

В римановых пространствах, кроме длин линий, вводятся также понятия угла между двумя линиями и объёмами области (см. *Риманова геометрия*). Исследование римановых пространств имеет объектом как свойства самих пространств, так и свойства лежащих в них дифференциально-геометрич. многообразий. Особенно важным является исследование геодезич. линий (в римановом многообразии геодезической наз. линия, любая достаточно малая дуга к-рой есть кратчайшая между своими концами). Методы исследования римановых пространств существенно опираются на тензорное исчисление. Проблематика римановых пространств имеет истоки в теории дифференциальных уравнений, механике, теоретич. физике и классич. теории поверхностей (поверхности обычного евклидова пространства, рассматриваемые с точки зрения их внутренней геометрии, суть римановы пространства размерности $n=2$).

В качестве важнейших примеров римановых пространств можно указать евклидово трёхмерное пространство с метрич. формой

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

евклидово n-мерное пространство с метрич. формой

$$ds^2=dx_1^2+\ldots+dx_n^2$$

и трёхмерное пространство Лобачевского с метрич. формой

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\left[1+\frac{k}{4}(x^2+y^2+z^2)\right]^2},$$

где k — отрицательная постоянная, наз. кривизной пространства Лобачевского; x, y, z — координаты, подчинённые условию

$$1+\frac{k}{4}(x^2+y^2+z^2)>0.$$

Определение риманова пространства можно обобщить, отказавшись от требования положительной определённости его метрич. формы. Такое обобщение вызывается запросами теоретич. физики. Так, напр., пространство с метрич. формой

$$ds^2=dt-\frac{1}{c^2}(dx^2+dy^2+dz^2),$$

наз. пространством Минковского, играет фундаментальную роль в специальной теории относительности (в этом пространстве линейные элементы могут иметь как вещественную, так и мнимую длину).

Дальнейшим обобщением римановых пространств являются финслеровы пространства; в них метрика задаётся равенством

$$ds=f(x^1,\ldots,x^n;\,dx^1,\ldots,dx^n),$$

где $f(x^1, \ldots, x^n; dx^1, \ldots, dx^n)$ — любая функция, положительно однородная относительно аргументов $dx^1, \ldots, dx^n$.

Пусть в нек-ром римановом пространстве R отмечена произвольная точка O. В окрестности точки O можно ввести координаты $x^1, \ldots, x^n$ так, что коэффициенты g_{ik} метрич. формы в точке O будут удовлетворять условиям: $g_{ik}=1$ при $i=k$, $g_{ik}=0$ при $i\neq k$ и $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}=0$ при всех i, k, l. Тогда в соседних точках величины g_{ik} с точностью до малых 2-го порядка относительно приращений координат будут совпадать с коэффициентами метрич. формы $ds^2=\sum(dx^i)^2$ евклидова пространства E. Если окрестность точки O отобразить в пространство E «по равенству координат», то это отображение будет приближённо изометричным с той же точностью. Евклидово пространство E, на к-рое указанным образом отображена окрестность точки O, наз. касательным (или соприкасающимся) пространством к данному риманову пространству R в его точке O (точка O при этом отождествляется с её образом). Суть дела здесь заключается в том, что окрестность произвольной точки риманова пространства приближённо можно рассматривать как окрестность точки евклидова пространства; именно, если точки окрестности риманова пространства заменить их образами в касательном пространстве, то относительная погрешность в измерении расстояний будет 2-го порядка малости.

Пусть в пространстве R, вдоль нек-рой линии, проходящей через O, дано поле векторов с координатами p^i в описанной выше специальной системе координат; $\boldsymbol{p}_0$ — вектор этого поля в точке O, $\boldsymbol{p}$ — вектор поля в бесконечно близкой точке O', dx^i — приращения координат при переходе от O к O' и dp^i — соответствующие дифференциалы функций p^i. Если $dp^i=0$, то вектор $\boldsymbol{p}$ наз. параллельным вектору $\boldsymbol{p}_0$; говорят также, что вектор $\boldsymbol{p}$ получен параллельным перенесением вектора $\boldsymbol{p}_0$ из точки O в бесконечно близкую точку O'. В произвольных координатах параллельность векторов обеспечивается уравнениями

$$dp^i+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\Gamma^i_{\alpha\beta}\,p^\alpha\,dx^\beta=0,$$

где $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ — символы Кристоффеля формы (8). Интегрируя эти уравнения при начальных условиях $p^i=p^i_0$, получают параллельное перенесение вектора $\boldsymbol{p}_0$ в любую точку данной линии.

В произвольном римановом пространстве параллельное перенесение вектора из одной точки в другую зависит от пути (т. е. выбора линии, соединяющей эти точки). Параллельное перенесение не зависит от пути только в евклидовых пространствах.

Каждый вектор, заданный в нек-рой точке O риманова пространства, можно представлять лежащим в касательном пространстве E точки O и приложенным к этой точке. При параллельном перенесении вектора в бесконечно близкую точку O' конец полученного вектора займёт определённое положение в касательном пространстве E' точки O'. Таким образом, устанавливается определённое изометрич. отображение E на E', вместе с тем каждый геометрич. образ, заданный в E, отображается в E'. Тем самым получается возможность сравнивать геометрич. образы, лежащие в касательных пространствах разных точек, или, как говорят, устанавливается связность пространства.

Эта идея получила в Д. г. далеко идущее обобщение. Именно, рассматривается дифференциально-геометрич. многообразие, с каждой точкой к-рого сопоставляется нек-рое пространство, наз. касательным, на к-рое определённым образом отображается окрестность точки; в каждом касательном пространстве устанавливается геометрия заранее данной группы G; затем задаётся отображение касательных пространств в бесконечно близких точках многообразия (это отображение предполагается изоморфным относительно группы G, т. е. фигуры, равные с точки зрения геометрии группы, переходят в равные же фигуры). Тем самым в многообразии устанавливается связность группы G. Вследствие заданных отображений окрестностей такого многообразия в соответствующие касательные пространства каждую окрестность можно приближённо (с точностью до 2-го порядка малости) рассматривать как часть пространства с геометрией группы G. Общее понятие многообразия со связностью данной группы фактически реализовано в ряде случаев. Именно, построены геометрии а ффинной связности (G — аффинная группа, касательные пространства — аффинные пространства), проективной связности (G — проективная группа, касательные пространства — проективные пространства), конформной связности (G — конформная группа, касательные пространства — конформные пространства). Римановы пространства суть частные случаи пространств аффинной связности (G — группа евклидовых движений, касательные пространства — евклидовы).

Исторический очерк

Отдельные понятия Д. г. (круг кривизны, эволюта, огибающие, геодезич. линии) встречаются уже во 2-й пол. 17 в. в работах И. Ньютона, Г. Лейбница, Х. Гюйгенса, Я. и И. Бернулли и др. К кон. 18 в. были заложены основы теории поверхностей преимущественно работами Л. Эйлера и Г. Монжа. Л. Эйлер впервые пользовался криволинейными координатами, установил простую формулу, выражающую нормальную кривизну поверхности, ввёл понятие наложимости поверхностей и рассмотрел поверхности, наложимые на плоскость. Г. Монжу принадлежат понятия линий кривизны и асимптотич. линий поверхности; с его именем связываются начала теории конгруэнций. К Д. г. относится соч. Г. Монжа «О земляных выемках и насыпях» (1781), источником к-рого явились его инженерные работы по фортификации. Наиболее известна его монография «Приложение анализа к геометрии» (1795, рус. пер. 1936).

Особое значение для Д. г. имели работы К. Гаусса, к к-рым он пришёл от геодезии и картографии. Главное соч. К. Гаусса в этой области — «Общие исследования о кривых поверхностях» — вышло в 1827. В нём вводятся обе основные квадратичные формы поверхности, доказывается теорема об инвариантности полной кривизны относительно изометричных преобразований. Принципиальное значение этой работы заключается в установлении понятия внутренней геометрии поверхности. Построение основ классич. теории поверхностей завершено К. М. Петерсоном, к-рый в 1853 дал полную систему основных уравнений этой теории. В середине и во 2-й пол. 19 в. множество глубоких и общих результатов по классич. теории поверхностей было получено Ф. Миндингом, Ж. Лиувиллем, Э. Бельтрами, Г. Дарбу, Л. Бианки и др. В этот период детально исследована внутренняя геометрия поверхности, получены условия наложимости поверхностей, основные теоремы об изгибаниях. Одновременно шло исследование важнейших частных классов поверхностей; как правило, эта проблематика находилась в тесной связи с теорией интегрирования дифференциальных уравнений. Весьма полный обзор результатов, полученных во 2-й пол. 19 в., даёт 4-томный трактат Г. Дарбу «Лекции по общей теории поверхностей» (1888—96). Среди специальных исследований по теории поверхностей наиболее известны исследования К. М. Петерсона. Ему принадлежит понятие изгибания поверхности на главном основании; так наз. изгибание, в процессе к-рого нек-рая сопряжённая сеть поверхности остаётся сопряжённой (эта сеть наз. главным основанием поверхности); им же получен ряд основных теорем об изгибаниях на главном основании. Проблема изгибания на главном основании в принципе завершена Н. Н. Лузиным (1938—39); именно, он установил объём класса поверхностей, допускающих изгибание на главном основании. Далее должны быть отмечены исследования Д. Ф. Его-

рова (1901), к-рый развил теорию т. н. потенциальных поверхностей, интересных с точки зрения механики.

С кон. 19 в. в значительной степени в связи с «Эрлангенской программой» Ф. Клейна (1872) в Д. г. всё большее место занимают исследования дифференциальных инвариантов различных групп (аффинной, проективной, конформной) и, кроме того, исследования различных семейств.

Теоретико-групповые обобщения классич. разделов Д. г. существенно способствовали развитию современного понятия геометрич. пространства. Но главной в этом направлении была другая историч. линия, идущая от работ Н. И. Лобачевского. Его открытие неевклидовой геометрии явилось началом обобщений понятия пространства именно в том направлении, к-рое наиболее важно для естествознания. Здесь значительная роль принадлежит Б. Риману; в его известной лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854) даны основы теории пространств, наз. теперь римановыми. Дальнейшее развитие теории римановых пространств соединилось с развитием тензорного анализа, идея к-рого была подготовлена работами Г. Ламе (1859), Э. Бельтрами (1868), Э. Кристоффеля (1869) и оформлена в работах Г. Риччи-Курбастро (1884—88). Уже в самом начале возникновения теория римановых пространств и тензорный анализ находились в тесной связи с математич. физикой и механикой; позднее они становятся основным математич. аппаратом общей теории относительности. В свою очередь, появление общей теории относительности (1915) явилось стимулом бурного развития тензорного анализа, теории римановых пространств и одним из источников дальнейших обобщений понятия риманова пространства. Уже в 1917 Т. Леви-Чивита и в 1918 независимо от него Я. Схоутен определили параллельное перенесение вектора в римановом пространстве; в 1918 Я. Схоутен и Г. Вейль обобщили понятие риманова пространства на случай пространства аффинной и конформной связности (потребность такого обобщения вызывалась попытками построения единой теории гравитационного и электромагнитного поля). В 1922—24 Э. Картан построил геометрию пространств со связностью произвольной группы. Здесь идеи обобщения внутренней геометрии поверхности соединились с теоретико-групповым направлением. Тензорные методы в Д. г. и теории различных пространств успешно разрабатывались в Казани.

Большие достижения в Д. г. относятся к области проблем в целом. Проблему о наименьшем числе замкнутых геодезических без кратных точек на поверхности, гомеоморфной сфере, отчётливо сформулировал ещё в 1908 А. Пуанкаре, но, несмотря на усилия многих математиков, она долгие годы оставалась нерешённой. В 1930 Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман дали полное решение п р о б л е м ы П у а н к а р е, доказав, что на каждой поверхности, гомеоморфной сфере, имеется не менее трёх замкнутых геодезических без кратных точек.

Важные результаты по исследованию поведения геодезических на двумерных полных римановых многообразиях, гомеоморфных плоскости, принадлежат С. Э. Кон-Фоссену (1935—36). Он установил разнообразные связи между распределением значений кривизны такого многообразия и поведением его «полных», т. е. неограниченно продолженных в обе стороны, геодезических.

Особенно большое значение имеют работы А. Д. Александрова, заслугой к-рого является создание метода исследования метрики поверхности при помощи аппроксимации её метриками многогранников. А. В. Погорелову принадлежит построение полной теории выпуклых поверхностей. К качественным вопросам теории поверхностей относятся работы Н. В. Ефимова.

● **История дифференциальной геометрии.** С т р о й к Д. Д ж., Очерк истории дифференциальной геометрии до XX столетия, пер. с англ., М.— Л., 1941; История математики, т. 3, М., 1972; Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций, М., 1981; К а г а н В. Ф., Очерки по геометрии, М., 1963.

Классики дифференциальной геометрии. М о н ж Г., Приложения анализа к геометрии, пер. с франц., М.— Л., 1936; Г а у с с К. Ф., Общие исследования о кривых поверхностях, пер. с латин., в сб.: Об основаниях геометрии, М., 1956; Р и м а н Б., Сочинения, пер. с нем., М.— Л., 1948; К а р т а н Э., Геометрия римановых пространств, пер. с франц., М.— Л., 1936.

Учебная литература. К а г а н В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1—2, М.— Л., 1947—48; Р а ш е в с к и й П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956; П о г о р е л о в А. В., Дифференциальная геометрия, 6 изд., М., 1974; Т о р п Д ж., Начальные главы дифференциальной геометрии, пер. с англ., М., 1982.

Монографии. Ш у л и к о в с к и й В. И., Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении, М., 1963; А л е к с а н д р о в А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948; П о г о р е л о в А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969; К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К., Основы дифференциальной геометрии, пер. с англ., т. 1—2, М., 1981; В о л ь ф Д ж., Пространства постоянной кривизны, пер. с англ., М., 1982; Г р о м о л Д., К л и н г е н б е р г В., М е й е р В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971.

Н. В. Ефимов.

ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНАЯ ТОПОЛО́ГИЯ — раздел топологии, изучающий топологич. проблемы теории *дифференцируемых многообразий* и *дифференцируемых отображений*. Попытки последовательного построения топологии на базе многообразий, отображений и дифференциальных форм предпринимались ещё А. Пуанкаре в кон. 19 в., но в то время полная реализация этой программы оказалась невозможной. Систематич. построение Д. т. удалось осуществить лишь в 30-х гг. 20 в. благодаря усилиям ряда крупных математиков.

В 70-х гг. резко усилился интерес современных областей физики к методам Д. т., связанный с увеличением роли т. н. калибровочных полей в теории элементарных частиц, сложной топологией решений в теории жидких кристаллов, теории фазовых переходов, в частности в низкотемпературном жидком гелии.

● М и л н о р Д ж., У о л л е с А., Дифференциальная топология. Начальный курс, пер. с англ., М., 1972; П о н т р я г и н Л. С., Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 2 изд., М., 1976.

ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНАЯ ФО́РМА — см. *Форма.*

ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНАЯ ЭНТРОПИ́Я — формальный аналог понятия *энтропии* для случайных величин, имеющих плотность распределения. См. также *Информация.*

ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНО-ГЕОМЕТРИ́ЧЕСКОЕ МНОГООБРА́ЗИЕ — см. *Дифференциальная геометрия.*

ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕ́НИЕ

СОДЕРЖАНИЕ:

Производная 198
Дифференциал 199
Приложения 199
Дифференциальное исчисление функций многих переменных 199
Исторический очерк 200

Дифференциальное исчисление — раздел математики, в котором изучаются производные и дифференциалы функций и их применения к исследованию функций. Оформление Д. и. в самостоятельную математич. дисциплину связано с именами И. Ньютона и Г. Лейбница. Они сформулировали основные положения Д. и. и чётко указали на взаимно обратный характер операций д и ф ф е р е н ц и р о в а н и я и и н т е г р и р о в а н и я. С этого времени Д. и. развивается в тесной связи с *интегральным исчислением*, вместе с к-рым оно составляет основную часть математич. анализа (или анализа бесконечно малых). Создание дифференциального и интегрального исчислений открыло новую эпоху в развитии математики. Оно повлекло за собой появление ряда математич. дисциплин: теории рядов, теории дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии и вариационного исчисления. Методы математич. анализа нашли применение во всех разделах математики. Неизмеримо расширилась область приложений математики к вопросам естествознания и техники. «Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только с о с т о я н и я, но и п р о ц е с с ы: движение» (Э н г е л ь с Ф., см. Маркс К. и Энгельс Ф., Соч., 2 изд., т. 20, с. 587).

Д. и. основывается на следующих важнейших понятиях математики, определение и исследование к-рых составляют предмет введения в математич. анализ: действительные числа (числовая прямая), функция, предел, бесконечно малая, непрерывность. Все эти понятия выкристаллизовались и получили современное содержание в ходе развития и обоснования дифференциального и интегрального исчислений. Основная идея Д. и. состоит в изучении функций в м а л о м. Точнее: Д. и. даёт аппарат для исследования функций, поведение к-рых в достаточно малой окрестности рассматриваемого значения их аргумента (точки) близко к поведению линейной функции или алгебраич. многочлена. Таким аппаратом служат центральные понятия Д. и.: п р о и з в о д н а я и д и ф ф е р е н ц и а л. Понятие производной возникло из большого числа задач естествознания и математики, приводящихся к вычислению пределов отношений нек-рого типа бесконечно малых. Важнейшие из них — построение касательной к кривой и определение скорости движения точки. Понятие дифференциала является математич. выражением близости функции к линейной в малой окрестности рассматриваемой точки. В отличие от производной оно легко переносится на отображения одного евклидова пространства в другое и является одним из основных понятий современного нелинейного функционального анализа.

Производная

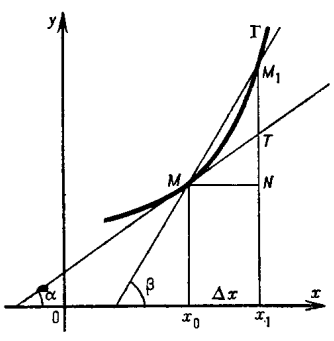
Пусть требуется провести касательную (рис.) в точке M плоской кривой Г, уравнение к-рой в прямоугольной системе координат $y=f(x)$. Положение касательной будет определено, если будет найден её у г л о в о й к о э ф ф и ц и е н т, т. е. тангенс угла α, образованного касательной с осью Ox. Пусть x_0 — абсцисса точки M, а $x_1=x_0+\Delta x$ — абсцисса точки M_1. Угловой коэффициент секущей равен

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{M_1N}{MN}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

где $\Delta y=M_1N=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ — приращение функции на отрезке $[x_0,x_1]$. Определяя касательную в точке M как п р е д е л ь н о е п о л о ж е н и е секущей MM_1, когда x_1 стремится к x_0, получают

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (*)$$

К выражению типа (*) приводит и задача определения скорости прямолинейно движущейся материальной точки.



Если движение равномерно, то пройденный точкой путь пропорционален времени движения; скорость такого движения можно определить как путь, пройденный за единицу времени, или как отношение пути, пройденного за нек-рый промежуток времени, к длительности этого промежутка. Если же движение неравномерно, то пути, пройденные точкой в одинаковые по длительности промежутки времени, будут, вообще говоря, различными. Пример неравномерного движения даёт тело, свободно падающее в пустоте. Закон движения такого тела выражается формулой $s=gt^2/2$, где s — пройденный путь с начала падения (в метрах), t — время падения (в секундах), g — постоянная величина, ускорение свободного падения, $g\approx 9{,}81$ м/сек^2. За первую секунду падения тело пройдёт ок. 4,9 м, за вторую — ок. 14,7 м, а за десятую — ок. 93,2 м, т. е. падение происходит неравномерно. Поэтому приведённое выше определение скорости здесь неприемлемо. В этом случае рассматривается с р е д н я я с к о р о с т ь движения за нек-рый промежуток времени после (или до) фиксированного момента t; она определяется как отношение длины пути, пройденного за этот промежуток времени, к его длительности. Эта средняя скорость зависит не только от момента t, но и от выбора промежутка времени. В нашем примере средняя скорость падения за промежуток времени от t до $t+\Delta t$ равна

$$\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=gt+\frac{g}{2}\Delta t.$$

Это выражение при неограниченном уменьшении промежутка времени Δt неограниченно же приближается к величине gt, к-рую называют с к о р о с т ь ю движения в момент времени t. Таким образом, скорость движения в к.-л. момент времени определяется как п р е д е л средней скорости, когда промежуток времени неограниченно уменьшается.

В общем случае эти вычисления надо проводить для любого момента времени t, промежутка времени от t до $t+\Delta t$ и закона движения, выражаемого формулой $s=f(t)$. Тогда средняя скорость движения за промежуток времени от t до $t+\Delta t$ даётся формулой $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, где $\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)$, а скорость движения в момент времени t равна

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

Основное преимущество скорости в данный момент времени, или м г н о в е н н о й с к о р о с т и, перед средней скоростью состоит в том, что она, как и закон движения, является функцией времени t, а не функцией и н т е р в а л а $(t,\ t+\Delta t)$. С другой стороны, мгновенная скорость представляет собой нек-рую абстракцию, поскольку непосредственному измерению поддаётся средняя, а не мгновенная скорость.

Отвлекаясь от геометрич. или механич. содержания приведённых задач и выделяя общий для них приём решения, приходят к понятию производной. П р о и з в о д н о й функции $y=f(x)$ в точке x наз. предел (если он существует) отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, так что

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

С помощью производной определяется, кроме уже рассмотренных, ряд важных понятий естествознания. Напр., сила тока определяется как предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}$, где Δq — положительный электрич. заряд, переносимый через сечение цепи за время Δt; скорость химич. реакции определяется как предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, где ΔQ — изменение количества вещества за время Δt; вообще, производная по времени есть мера скорости процесса, применяемая к самым разнообразным физич. и иным величинам.

Производную функции $y=f(x)$ обозначают y', $f'(x)$, $\frac{dy}{d}$, $\frac{df}{dx}$ или $Df(x)$. Если функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то она определена как в самой точке x_0, так и в нек-рой окрестности этой точки и непрерывна в точке x_0. Обратное заключение было бы, однако, неверным. Напр., непрерывная в каждой точке функция $y=|x|=+\sqrt{x^2}$, графиком к-рой служат биссектрисы первого и второго координатных углов, при $x=0$ не имеет производной, т. к. отношение $\frac{dy}{dx}$ не имеет предела при $\Delta x\to 0$: если $\Delta x>0$, это отношение равно $+1$, а если $\Delta x<0$, то оно равно -1. Более того, существуют непрерывные функции, не имеющие производной ни в одной точке (пример см. в ст. *Непрерывная функция*).

Операцию нахождения производной называют д и ф ф е р е н ц и р о в а н и е м. На классе функций, имеющих производную, эта операция линейна.

Таблица формул и правил дифференцирования

$$(C)'=0;\quad (x^n)'=nx^{n-1};$$

$$(a^x)'=a^x\ln a \text{ и } (e^x)'=e^x;$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a} \text{ и } (\ln x)'=\frac{1}{x};$$

$$(\sin x)'=\cos x;\quad (\cos x)'=-\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\quad (\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2};$$

$$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x);$$

$$[Cf(x)]'=Cf'(x);$$

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x);$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)};$$

если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, то есть $y=f[\varphi(x)]$, то (правило дифференцирования сложной функции)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}=f'(u)\,\varphi'(x).$$

Здесь C, n и a — постоянные, $a>0$. Эта таблица, в частности, показывает, что производная от всякой элементарной функции есть снова элементарная функция.

Если производная $f'(x)$, в свою очередь, имеет производную, то её называют второй производной функции $y=f(x)$ и обозначают

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2f}{dx^2} \text{ или } D^2f(x).$$

Для прямолинейно движущейся точки вторая производная характеризует её ускорение.

Аналогично определяются и производные более высокого (целого) порядка. Производная порядка n обозначается $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$, $\frac{d^nf}{dx^n}$ или D^nf.

См. также *Производная*.

Дифференциал

Функция $y=f(x)$, область определения к-рой содержит нек-рую окрестность точки x_0, наз. дифференцируемой в точке x_0, если её приращение

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

можно записать в форме

$$\Delta y=A\,\Delta x+\alpha\,\Delta x,$$

где $A=A(x_0)$, $\alpha\to 0$ при $x\to x_0$. В этом и только в этом случае выражение $A\,\Delta x$ наз. дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$. Геометрически дифференциал (при фиксированном значении x_0 и меняющемся приращении Δx) изображает приращение ординаты касательной, т. е. отрезок NT (рис.). Дифференциал (первый дифференциал) есть главная линейная часть приращения функции, в том смысле, что (при фиксированном x_0) dy есть линейная функция от Δx и разность $\Delta y-dy$ есть бесконечно малая относительно Δx. Дифференциал независимого переменного совпадает с его приращением, поэтому обычно пишут $dy=A\,dx$. Имеется тесная связь между дифференциалом функции и её производной. Для того чтобы функция одного переменного $y=f(x)$ имела в точке x_0 дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке (конечную) производную $f'(x_0)$ и было справедливо равенство $dy=f'(x_0)dx$. Наглядный смысл этого предложения состоит в том, что касательная к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 как предельное положение секущей является также такой прямой, к-рая в бесконечно малой окрестности точки x_0 примыкает к кривой более тесно, чем любая другая прямая. Таким образом, всегда $A(x_0)=f'(x_0)$; запись $\frac{dy}{dx}$ можно понимать не только как обозначение для производной $f'(x_0)$, но и как отношение дифференциалов зависимого и независимого переменных. В силу равенства $dy=f'(x_0)dx$ правила нахождения дифференциалов непосредственно вытекают из соответствующих правил нахождения производных. В частности, правило дифференцирования сложной функции приводит к важному свойству инвариантности первого дифференциала: пусть $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, тогда

$$dy=f'(u)\,\varphi'(x)\,dx=f'(u)\,du,$$

т. е. дифференциал функции равен производной, умноженной на дифференциал аргумента, причём безразлично, является ли этот аргумент независимым переменным или же функцией.

Рассматриваются также дифференциалы высших порядков. На практике с помощью дифференциалов часто производят приближённые вычисления значений функции, а также оценивают погрешности вычислений. См. также *Дифференциал*.

Приложения

В Д. и. устанавливаются связи между свойствами функции и её производных (или дифференциалов), выражаемые основными теоремами Д. и. К их числу относятся *Ролля теорема*, формула Лагранжа $f(a)-f(b)=f'(c)(b-a)$, где $a<c<b$ (см. *Конечных приращений формула*), и *Тейлора формула*.

Эти предложения позволяют методами Д. и. провести подробное исследование поведения функций, обладающих достаточной гладкостью (т. е. имеющих производные достаточно высокого порядка). Таким путём удаётся исследовать степень гладкости, выпуклость и вогнутость, возрастание и убывание функций, их экстремумы, найти их асимптоты, точки перегиба, вычислить кривизну кривой, выяснить характер её особых точек и т. д. Напр., условие $f'(x)>0$ влечёт за собой (строгое) возрастание функции $y=f(x)$, а условие $f''(x)>0$ — её (строгую) выпуклость. Все точки экстремума дифференцируемой функции, принадлежащие внутренности её области определения, находятся среди корней уравнения $f'(x)=0$.

Исследование функций при помощи производных составляет основное приложение Д. и. Кроме того, Д. и. позволяет вычислять различного рода пределы функций, в частности пределы вида $0/0$ и ∞/∞ (см. *Неопределённые выражения*, *Лопиталя правило*). Д. и. особенно удобно для исследования элементарных функций, т. к. в этом случае их производные выписываются в явной форме.

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Методы Д. и. применяются для изучения функций нескольких переменных. Для функции двух независимых переменных $z=f(x,\ y)$ частной производной по x наз. производная этой функции по x при постоянном y. Эта частная производная обозначается z'_x, $f'_x(x,\ y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}$, так что

$$z'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется и обозначается частная производная z по y. Величина

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$$

наз. полным приращением функции $z=f(x,\ y)$. Если

$$\Delta z=A\,\Delta x+B\,\Delta y+\alpha,$$

где α — бесконечно малая более высокого порядка, чем расстояние между точками $(x,\ y)$ и $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$, то говорят, что функция $z=f(x,\ y)$ дифференцируема. Слагаемые $A\,\Delta x+B\,\Delta y$ образуют *полный дифференциал* dz функции $z=f(x,\ y)$, причём $A=z'_x$, $B=z'_y$. Вместо Δx

и Δy обычно пишут dx и dy, так что

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Геометрически дифференцируемость функции двух переменных означает существование у её графика касательной плоскости, а дифференциал представляет собой приращение аппликаты касательной плоскости, когда независимые переменные получают приращения dx и dy. Для функции двух переменных понятие дифференциала является значительно более важным и естественным, чем понятие частных производных. В отличие от функций одного переменного, для функции двух переменных существование обеих частных производных первого порядка ещё не гарантирует дифференцируемости функции. Однако если частные производные, кроме того, ещё непрерывны, то функция дифференцируема.

Аналогично определяются частные производные высших порядков. Частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, в к-рых дифференцирование ведётся по одному переменному, называют чистыми, а частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ — смешанными. Если смешанные частные производные непрерывны, то они между собой равны. Все эти определения и обозначения переносятся на случай большего числа переменных.

См. также *Частная производная.*

Исторический очерк

Первые попытки в направлении создания Д. и. были сделаны Р. Декартом, П. Ферма и другими учёными 17 в. при решении задач определения касательных к кривым и нахождения максимальных и минимальных значений переменных величин. Отдельные задачи такого рода были решены ещё математиками Др. Греции. Так, были найдены способы построения касательных к конич. сечениям и нек-рым другим кривым; при этом касательную к кривой линии определяли как прямую, встречающуюся с этой линией, но не пересекающую её (нетрудно видеть, что такое определение не совпадает с современным); Аполлоний Пергский исследовал задачу о нахождении наибольшего и наименьшего отрезка, соединяющего заданную точку с точкой, расположенной на заданном конич. сечении, и т. д. Однако разработанные с этой целью античными математиками методы были применимы лишь в весьма частных случаях; в отличие от методов П. Ферма, содержавших в неявной форме почти готовые определения и правила вычисления производных, методы античных математиков были далеки от идей Д. и. Только Архимед при определении касательной к спирали, носящей его имя, употребил приёмы, аналогичные позднейшим дифференциальным методам, и в одной частной задаче свёл задачу определения нек-рого экстремума к задаче нахождения касательных. Следует отметить, что античная математика в значительно большей степени предвосхитила идеи 2-й части учения о бесконечно малых — интегрального исчисления.

Средние века не внесли ничего нового в развитие дифференциальных методов. Вместе с тем в рамках натурфилософии 14 в. (прежде всего в университетах Оксфорда и Парижа) началось изучение простейших видов неравномерного движения, или, более общим образом, неравномерного изменения текущих величин — «флюент», рассматриваемых как функции времени, и впервые введены, хотя и не определены, понятия мгновенной скорости и ускорения. В «калькуляциях» Р. Суайнсхеда и теории конфигурации качеств Н. Орема было предложено и графич. представление флюент. Эти идеи, не получившие в то время приложений в естествознании, оказали нек-рое влияние на развитие исчисления бесконечно малых 17 в.

Эпохой создания Д. и. как самостоятельного раздела математики следует считать то время, когда было понято, что указанные специальные задачи вместе с рядом других решаются при помощи одного и того же математич. аппарата — при помощи производных и дифференциалов. Это понимание было достигнуто И. Ньютоном и Г. Лейбницем. Ими же было отчётливо высказано, что дифференцирование и интегрирование являются операциями взаимно обратными. С этого времени Д. и. развивается в неразрывной связи с интегральным исчислением.

Первые приёмы решения задач дифференциального исчисления в 17 веке. В 1-й пол. 17 в. были выработаны разнородные частные приёмы решения задач Д. и. Ранее других был опубликован (1637) способ проведения нормалей Р. Декарта, разработанный им в связи с занятиями оптикой. Приём Р. Декарта, опиравшийся на аппарат, созданный им одновременно с П. Ферма аналитич. геометрии, был таков. Для отыскания точки N пересечения с осью абсцисс нормали к кривой в точке M, предполагая задачу решённой и точку N найденной, Р. Декарт представлял себе окружность с центром N и радиусом NM. Далее он требовал, чтобы в точке M сливались две точки пересечения такой окружности с кривой. Это требование накладывало определённые условия на коэффициенты уравнения, служащего для отыскания координат точек пересечения кривой и окружности (корни должны быть здесь кратными), и позволяло найти абсциссу точки N. В вычислительном отношении способ Р. Декарта был громоздким; принципиальный его недостаток — непригодность для проведения нормалей к неалгебраич. кривым. Способ Р. Декарта получил название алгебраического, т. к. формально Р. Декарт производил чисто алгебраич. выкладки. Но в основе его, по существу, лежало уже представление о предельном переходе, поскольку требовалось слияние двух близких точек кривой в одну и двух или нескольких различных корней результирующего уравнения в один кратный корень. Для построения нормали к циклоиде Р. Декарт использовал другую (кинематическую) идею. Представляя себе описывающий циклоиду круг как многоугольник с бесконечным числом бесконечно малых сторон, он пришёл к выводу, что нормаль к циклоиде должна всякий раз проходить через мгновенный центр вращения многоугольника, т. е. через точку, в к-рой катящийся круг касается основания. Другой частный кинематич. метод построения касательной был предложен Ж. Роберваль и Э. Торричелли.

Гораздо ближе к основным идеям Д. и. подошёл в те же годы, а может быть и несколько ранее, П. Ферма. Им было создано правило отыскания экстремумов, к-рое в современных обозначениях можно передать следующим образом. Пусть ищется экстремум функции $f(x)$ (П. Ферма берёт сначала индивидуальные целые рациональные функции). Составив выражение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ в виде многочлена, расположенного по степеням h, и отбросив затем все члены, содержащие h, он результат приравнивает к нулю: полученные корни могут сообщить $f(x)$ экстремальные значения. Отыскание касательных к плоским кривым $y=f(x)$ П. Ферма выполнял с помощью аналогичного метода, составляя фактически для подкасательной выражение $\frac{f(x)\,h}{f(x+h)-f(x)}$, сокращая на h и отбрасывая затем члены, содержащие h. Как видно, в обоих случаях вычисления П. Ферма были равносильны вычислению производной, т. е. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; его правило отыскания экстремумов даёт необходимое (для дифференцируемых функций) условие $f'(x)=0$, а правило для подкасательной приводит к результату, равносильному выражению $\frac{f(x)}{f'(x)}$.

Приём проведения касательных П. Ферма был распространён, с несущественными изменениями, и на случай кривых, определяемых неявными уравнениями вида $f(x, y)=0$; выкладки П. Ферма соответствовали нахождению y' из равенства $\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}=0$. Точки перегиба он находил, основываясь на том, что в них достигает экстремума

угол касательной с осью абсцисс. В этом случае его выкладки были равносильны вычислению второй производной y'' и приравниванию её нулю.

Открытия П. Ферма благодаря переписке быстро получили широкую известность, хотя опубликованы были только в 1679. Из одного письма, обнаруженного лишь в наше время, видно, что П. Ферма располагал и критерием различения максимума от минимума, а также, что он обосновывал свой приём не на простом отбрасывании бесконечно малых, как его поняли современники. На самом деле его рассуждения в основном совпадали с теми, какие проводят, применяя формулу Тейлора, при разыскании и исследовании экстремума.

Приёмы решения задач на экстремум и касательные явились в 1638 предметом научной дискуссии между Р. Декартом и П. Ферма, получившей отклик в среде их современников. В основном истина была на стороне П. Ферма. Одним из результатов этой дискуссии явилось новое понимание касательной как предельного положения секущей.

Заслуги П. Ферма в развитии идей Д. и. были весьма велики. Однако, хотя П. Ферма и подчеркнул единство вычислительных приёмов в обеих указанных задачах, он всё же не выделил основных понятий Д. и.— дифференциала и производной, не создал алгоритма Д. и. и не заметил связи его задач с проблемой квадратур, в решении к-рой он, впрочем, также достиг замечательных результатов.

В сер. 17 в. Б. Паскаль впервые явно ввёл важный для применения исчисления бесконечно малых к геометрии «характеристический» (по выражению Г. Лейбница) треугольник, образуемый бесконечно малыми приращениями отрезков координат и дугой линии. Этот треугольник был затем использован И. Барроу в задаче на касательные. В нач. 2-й пол. 17 в. были предложены и другие методы решения задач на касательные и экстремумы, а также сделаны новые открытия в Д. и. Так, Х. Гюйгенс, изучая маятниковые часы, открыл эволюты кривых, к-рые немедленно нашли применение в оптике. Особое значение имело установление несколькими математиками сер. 17 в. взаимно обратной связи между задачами проведения касательных и квадратуры кривых, в геометрич. форме выразившее связь между дифференцированием и интегрированием.

В это время уже со всей остротой выявилась потребность в объединении различных приёмов решения задач Д. и. и вместе с тем в создании более сильного метода, к-рый можно было бы единообразно применять к более широким классам задач и функций.

Метод флюксий Ньютона. Метод флюксий был в главных чертах развит И. Ньютоном в 1665—66 и изложен вкратце в «Анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (1669, опубликовано в 1711) и подробнее в не вполне завершённом большом труде «Метод флюксий и бесконечных рядов» (1670—71, опубликовано в 1736). Все задачи нового анализа, указывал И. Ньютон, могут быть сведены к двум проблемам, к-рые он сформулировал в терминах механики: 1) определение скорости движения в данный момент времени по известному пути и 2) определение пройденного за данное время пути по известной скорости движения. «Время» при этом понималось просто как общий аргумент всех переменных. Непрерывную переменную И. Ньютон назвал в духе средневековой традиции флюентой (текущей), её скорость — флюксией. Таким образом, главными понятиями метода флюксий явились производная (флюксия) и интеграл как первообразная (флюента), а главными задачами были объявлены вычисление производных и интегрирование (точнее — более общая задача интегрирования дифференциальных уравнений). И. Ньютон ввёл также флюксии высших порядков; последовательные флюксии величины z он обозначал с помощью точек: $\dot{z}$ (1692), затем $\ddot{z}$, $\dddot{z}$, $\ddddot{z}$; такое обозначение неудобно для более высоких порядков, и в нек-рых рукописях И. Ньютон ставит над знаком флюенты число, соответствующее порядку флюксии, напр. $2b\,\overset{7}{z}\,\overset{1}{z}$.

Третьим важным понятием метода флюксий был «момент», соответствовавший дифференциалу,— бесконечно малое, едва-едва зарождающееся, как говорил И. Ньютон, приращение величины. «Момент» времени И. Ньютон обозначал o, тогда «момент» флюенты z он получал в виде zo. При вычислении флюксий И. Ньютон пользовался правилом отбрасывания бесконечно малых. Так, флюксию x^n, т. е. nx^{n-1}, он получал, отбрасывая в выражении $\frac{(x+o)^n-x^n}{o}$ члены, содержащие степени o; найденный результат дал ему путём простого обращения флюенту (интеграл) x^n. Для вычисления флюксий дробно-рациональных и иррациональных функций И. Ньютон предварительно избавлялся от дробей и радикалов, вводя вспомогательные переменные.

Огромное значение для дальнейшего развития Д. и. и всего математич. анализа и его приложений имело введение И. Ньютоном разложений функций в бесконечные степенные ряды. Бесконечные ряды И. Ньютон применил, в частности, к исследованию и вычислению значений целого ряда иррациональных и трансцендентных функций, причём некоторые из последних были им введены впервые.

Прибегая к отбрасыванию бесконечно малых в конкретных исследованиях, И. Ньютон впоследствии осудил эту процедуру за её нестрогость. В математике, говорил он, недопустимо пренебрегать и самыми малыми ошибками. Метод флюксий он стремился обосновать на основе понятия предела, наметив первые контуры теории пределов в знаменитом труде по небесной механике (1687). Впрочем, метод флюксий, как таковой, не получил в этом сочинении широкого применения.

Начиная с 70-х гг. 17 в. сведения о методе флюксий стали распространяться с помощью переписки среди учёных. В печати, однако, сообщения об этом методе появились только в 1693 в труде по алгебре Дж. Валлиса, а более полные изложения ещё позднее. Между тем уже в 1684 был напечатан первый мемуар Г. Лейбница по Д. и. См. также *Флюксий исчисление*.

Дифференциальное исчисление Лейбница. Подобно И. Ньютону, Г. Лейбниц стремился к созданию единого метода исчисления бесконечно малых. Точно так же и для Г. Лейбница анализ должен был служить орудием естествознания. Общий замысел Г. Лейбница был, однако, шире: он мечтал о создании «всеобщей характеристики», своего рода алгебры мышления, к-рая сводила бы к выкладкам над символами понятий любые рассуждения. С этим связаны были у Г. Лейбница, с одной стороны, более отвлечённые определения основных понятий анализа, а с другой — особое внимание к подходящему выбору их обозначений, к-рое должно было сообщить большую силу «алгоритму» Д. и. (как выражался он). Г. Лейбниц преувеличивал возможности «всеобщей характеристики», но его конкретные математич. исследования были чрезвычайно плодотворны.

Г. Лейбниц выработал начала Д. и. уже в 1675, но опубликовал их лишь в 1684 в мемуаре «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». В этом мемуаре были приведены определения дифференциала, правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и степени, важнейшая теорема об инвариантности первого дифференциала, понятие о втором дифференциале и приложения Д. и. к исследованию экстремумов, проведению касательных и отысканию точек перегиба. При этом дифференциал в основном понимался как бесконечно малая разность двух соседних значений величины (отсюда его символ d — первая буква слова

differentia — разность, и отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$, соответствующее производной), кривая рассматривалась как многоугольник с бесконечно большим числом бесконечно малых сторон, касательная — как прямая, продолжающая одну из таких сторон, и т. п. Всё Д. и. у Г. Лейбница, несмотря на нек-рые оговорки, строилось на принципе пренебрежения бесконечно малыми слагаемыми как актуально бесконечно малыми.

В 1686 Г. Лейбниц ввёл в печати понятие об интеграле как сумме бесконечного числа дифференциалов и его знак $\int$ (от первой буквы слова Summa). Таким образом, главными понятиями анализа Г. Лейбница явились дифференциал как бесконечно малая разность и интеграл как сумма. В других работах Г. Лейбниц определил дифференциалы для a^x и x^x, ввёл понятие о бесконечно малых и дифференциалах высших порядков, дал формулу для $d^n(x \cdot y \cdot z \ldots)$, заложил основы учения о соприкосновении кривых и теории огибающих, ввёл частные производные (современное обозначение их предложил в 1786 А. Лежандр).

В разработке Д. и. с Г. Лейбницем сотрудничали начиная с 90-х гг. 17 в. братья Я. и И. Бернулли, из к-рых второй нашёл правило раскрытия неопределённых выражений вида $\frac{0}{0}$. Успехи Д. и. оказались столь быстрыми, что в 1696 Г. Лопиталь, пользуясь указаниями И. Бернулли, опубликовал учебник Д. и. «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий» (рус. пер., М.—Л., 1935), всё изложение к-рого свидетельствовало о глубоком взаимопроникновении анализа и геометрии в то время. Самостоятельное арифметич. построение анализа явилось результатом позднейшей эволюции.

Разработка и обоснование дифференциального исчисления в 18 веке. В 18 в. учёные продолжали разрабатывать Д. и. преимущественно в направлении, намеченном Г. Лейбницем, чему способствовали более ранняя публикация его работ и работ его учеников и более удачная и богатая символика Д. и., к-рая полнее, чем у И. Ньютона, отражала пути получения основных понятий анализа.

В 1715 Б. Тейлор опубликовал правило разложения функций в степенной ряд, известное, впрочем, значительно ранее И. Ньютону, а также Дж. Грегори, к-рые, однако, это правило не опубликовали. Вскоре затем были явно выражены дифференциалы тригонометрич. функций. К. Маклорен привлёк к исследованию экстремумов производные высших порядков, Л. Эйлер (1755) и Ж. Лагранж (1759) изучили экстремум функций двух переменных, Ж. Лагранж (1797) разработал теорию условных экстремумов.

Главные заслуги в дальнейшем развитии Д. и., как и всего анализа, принадлежат Л. Эйлеру. Он доказал теорему о независимости результата дифференцирования от порядка дифференцирования, без доказательства ранее сформулированную Н. Бернулли, нашёл (в одно время с А. Клеро) условие интегрируемости полного дифференциала, дал правила раскрытия неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, привёл многочисленные разложения функций в бесконечные ряды и произведения. Л. Эйлер впервые преобразовал исчисление бесконечно малых в целостную теорию обширных классов функций и начал излагать его как собственно аналитич. дисциплину, не зависящую логически ни от механики, ни от геометрии. В своих классич. курсах «Введение в анализ бесконечных» (ч. 1, 1748, рус. пер., М., 1961) и «Дифференциальное исчисление» (1755, рус. пер., М.—Л., 1949) Л. Эйлер систематизировал почти весь материал по Д. и. 18 в.; эти руководства явились образцом позднейших учебных сочинений. Л. Эйлер первым выдвинул на континенте Европы в качестве основного понятия Д. и. производную (сам этот термин, как и обозначение $f'(x)$, ввёл Ж. Лагранж) и связал Д. и. с исчислением конечных разностей. Он же первый провёл систематич. исследование элементарных функций в комплексной области.

Особое место в 17—18 вв. занимала проблема обоснования Д. и. Первые творцы математич. анализа применяли логически весьма несовершенное и нечёткое понятие актуально бесконечно малой, к-рая нередко в одном и том же рассуждении фигурировала и как нуль, и как число, отличное от нуля. Дифференциал Г. Лейбница, подобно «моменту» И. Ньютона, выступал то как актуально бесконечно малая, то как конечная произвольная величина. Непонятно было, почему отбрасывание бесконечно малых слагаемых не приводит к ошибкам. В ньютоновской же теории пределов логич. трудности были связаны с вопросом о том, достигают ли переменные своих пределов, ибо особенное значение имело разыскание пределов отношений, члены к-рых стремятся к нулю. Неясно было, совпадает ли точно дифференциал функции с её бесконечно малым приращением и пр.

Споры о природе Д. и. велись на протяжении всего 18 в. и во многом подготовили его реформу в 19 в. Л. Эйлер предлагал считать бесконечно малые точными нулями, с тем чтобы их отбрасывание не влекло за собой никаких ошибок. При этом он подчёркивал, что отношение двух нулей может быть вообще любым числом, поскольку $a \cdot 0 = 0$. Главная же задача Д. и. состоит в том, чтобы в каждом отдельном случае связать с $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ то значение, к-рое диктуется законом непрерывного изменения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Продолжая концепцию И. Ньютона и нек-рых его английских последователей, Ж. Д'Аламбер строил анализ с помощью недостаточно развитой теории пределов. Ж. Лагранж пытался строить всё Д. и. без употребления бесконечно малых, чисто алгебраически, представляя функции их разложениями в степенные ряды и определяя производную как коэффициент при втором члене такого разложения. Л. Карно предлагал обосновать лейбницево исчисление на теории, согласно к-рой в задачах Д. и. обязательно взаимно поглощаются две противоположные ошибки. В этих вопросах учёные 18 в. единодушия не достигли. Теория Ж. Лагранжа, напр., отталкивала большинство математиков, т. к. требовала отказа от оправдавших себя в практике инфинитезимальных понятий и плодотворного алгоритма и символики Д. и. (вскоре выяснилось, что в ней имелись и принципиальные пробелы). А теория пределов не встретила широкой поддержки, ибо в наличном виде была недостаточна для обоснования анализа, а кроме того, многие её последователи предлагали отказаться от необходимого в математич. науках пользования бесконечно малыми величинами. В результате многие авторы учебных руководств начала 19 в. стремились эклектически сочетать различные концепции своих предшественников.

Преобразование дифференциального исчисления в 19 веке. В 1-й четверти 19 в. в результате постановки ряда общих проблем существования интеграла, суммы ряда, вопроса о разложимости функций в степенные и тригонометрич. ряды были подвергнуты пересмотру основные понятия анализа. В это время анализ из учения об отдельных функциях или специальных их классах начинает перерастать в общую теорию функций, открывшую новые возможности в исследовании конкретных функциональных зависимостей. Общепринятые ранее «доказательства» теорем с помощью геометрич. и механич. аналогий перестают удовлетворять новым требованиям логич. строгости, усиливаются наметившиеся уже у Л. Эйлера тенденции к построению анализа на арифметич. основе. Теоремам и формулам анализа перестают приписывать общую значимость для любых функций и любых областей изменения аргумента, и в их формулировках появляются привычные теперь ограничительные условия.

Реформа анализа явилась делом прежде всего О. Коши, Б. Больцано и К. Гаусса. О. Коши и Б. Больцано дали общепринятое ныне определение непрерывности функции и

критерии сходимости числовой последовательности; К. Гаусс и О. Коши привели строгие критерии сходимости рядов. Новое изложение математич. анализа было дано О. Коши в своих курсах (1821, 1823). В своём построении анализа он стремился соединить точность усовершенствованной им теории пределов с удобствами, к-рые представляло применение бесконечно малых, только бесконечно малая у О. Коши была уже потенциальной бесконечно малой — переменной, предел к-рой равен нулю. Изложение Д. и. в позднейших курсах анализа давалось, как правило, по О. Коши. Своё завершение классич. Д. и. получило в последней трети 19 в. в лекциях К. Вейерштрасса.

Более глубокий анализ исходных понятий Д. и. был связан с развитием теории множеств и теории функций действительного переменного.

● **История дифференциального и интегрального исчисления.** История математики, т. 1—3, М., 1970—72; Рыбников К. А., История математики, 2 изд., М., 1974; Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966; Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, пер. с нем., 4 изд., М., 1983; Бурбаки Н., Очерки по истории математики, пер. с франц., М., 1963; Хрестоматия по истории математики. Математический анализ. Теория вероятностей, М., 1977.

Работы основоположников и классиков дифференциального и интегрального исчисления. Ньютон И., Математические работы, пер. с латин., М.— Л., 1937; Лейбниц Г., Избранные отрывки из математических сочинений, пер. с латин., «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1; Л'Опиталь Г. Ф. де, Анализ бесконечно малых, пер. с франц., М.— Л., 1935; Эйлер Л., Введение в анализ бесконечных, пер. с латин., 2 изд., т. 1, М., 1961; его же, Дифференциальное исчисление, пер. с латин., М.— Л., 1949; Карно Л., Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, пер. с франц., 2 изд., М.— Л., 1936; Коши О. Л., Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, пер. с франц., СПБ, 1831; его же, Алгебраический анализ, пер. с франц., Лейпциг, 1864.

Учебники и учебные пособия по дифференциальному и интегральному исчислению. Гурса Э., Курс математического анализа, пер. с франц., 3 изд., т. 1, М.— Л., 1936; Ла Валле Пуссен Ш. Ж. де, Курс анализа бесконечно малых, пер. с франц., т. 1, Л.— М., 1933; Курант Р., Курс дифференциального и интегрального исчисления, пер. с нем. и англ., 4 изд., т. 1, М., 1967, т. 2, 2 изд., 1970; Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1, 3 изд., М., 1971; ч. 2, 2 изд., М., 1980; Кудрявцев Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1—2, М., 1973; Никольский С. М., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1—2, М., 1983; Смирнов В. И., Курс высшей математики, 23 изд., т. 1, М., 1974; Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1—2, 7 изд., М., 1969, т. 3, 5 изд., М., 1969; Хинчин А. Я., Восемь лекций по математическому анализу, 3 изд., М.— Л., 1948.

А. П. Юшкевич.

ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение, содержащее искомую функцию, её производные различных порядков и независимые переменные. Теория Д. у. возникла в кон. 17 в. под влиянием потребностей механики и других естественнонаучных дисциплин, по существу одновременно с *интегральным исчислением* и *дифференциальным исчислением*.

Простейшие Д. у. встречались уже в работах И. Ньютона и Г. Лейбница; термин «Д. у.» принадлежит Г. Лейбницу (1676, опубл. 1684). И. Ньютон при создании исчисления флюксий и флюент ставил две задачи: по данному соотношению между флюентами определить соотношение между флюксиями; по данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюентами. С современной точки зрения первая из этих задач (вычисление по функциям их производных) относится к дифференциальному исчислению, а вторая составляет содержание теории обыкновенных Д. у. Задачу нахождения неопределённого интеграла $F(x)$ функции $f(x)$ И. Ньютон рассматривал просто как частный случай его второй задачи. Такой подход был для И. Ньютона как создателя основ математич. естествознания вполне оправданным: в очень большом числе случаев законы природы, управляющие теми или иными процессами, выражаются в форме Д. у., а расчёт течения этих процессов сводится к решению Д. у.

Следующие два простых примера могут служить иллюстрацией к сказанному.

1) Если тело, нагретое до температуры T, помещено в среду, температура к-рой равна нулю, то при известных условиях можно считать, что приращение ΔT (отрицательное в случае $T>0$) его температуры за малый промежуток времени Δt с достаточной точностью выражается формулой

$$\Delta T = -kT\Delta t,$$

где k — постоянный коэффициент. При математич. обработке этой физич. задачи считают, что выполняется точно соответствующее предельное соотношение между дифференциалами

$$dT = -kT\,dt, \qquad (1)$$

т. е. имеет место Д. у.

$$T' = -kT,$$

где T' обозначает производную по t. Решить полученное Д. у., или, как выражаются иначе, проинтегрировать его, значит найти функции, обращающие его в тождество. Для уравнения (1) все такие функции (т. е. все его частные решения) имеют вид

$$T = Ce^{-kt}, \qquad (2)$$

где C постоянно. Сама формула (2) с произвольной постоянной C наз. общим решением уравнения (1).

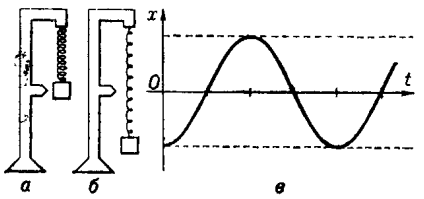


Рис. 1.

2) Пусть, напр., груз p массы m подвешен к пружине и находится в положении равновесия (рис. 1, *а*). Отклоняя его от положения равновесия с помощью натяжения пружины (рис. 1, *б*), приводят груз в движение. Если $x(t)$ обозначает величину отклонения тела от положения равновесия в момент времени t, то ускорение тела выражается 2-й производной $x''(t)$. Сила $mx''(t)$, действующая на тело, при небольших растяжениях пружины по законам теории упругости пропорциональна отклонению $x(t)$. Таким образом, получается Д. у.

$$mx''(t) = -kx(t). \qquad (3)$$

Его решение имеет вид

$$x(t) = A\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}} + x_0\right)$$

и показывает, что тело будет совершать гармонич. колебания (рис. 1, *в*).

Теория Д. у. выделилась в самостоятельную, детально разработанную научную дисциплину в 18 в. (труды Д. Бернулли, Ж. Д'Аламбера и особенно Л. Эйлера).

Д. у. делятся на «обыкновенные», содержащие производные одной или нескольких функций одного независимого переменного, и «уравнения с частными производными», содержащие частные производные функций нескольких независимых переменных. Порядком Д. у. наз. наибольший порядок входящих в него производных. Так, напр., $\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial x^2}$ есть Д. у. с частными производными 2-го порядка.

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Уравнения 1-го порядка. Обыкновенным Д. у. 1-го порядка с одной неизвестной функцией (только такие пока будут рассматриваться) наз. соотношение

$$F(x,\,y,\,y') = 0 \qquad (A)$$

между независимым переменным x, искомой функцией y и её производной $y' = \frac{dy}{dx}$. Если уравнение (А) может быть разрешено относительно производной, то получается уравнение вида

$$y' = f(x,\,y). \qquad (Б)$$

Многие вопросы теории Д. у. проще рассматривать для таких разрешённых относительно производной уравнений, предполагая функцию $f(x, y)$ однозначной.

Уравнение (Б) можно записать в виде соотношения между дифференциалами:

$$dy = f(x, y)\,dx;$$

тогда оно становится частным случаем уравнений вида

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \qquad (В)$$

В уравнениях вида (В) естественно считать переменные x и y равноправными, т. е. не интересоваться тем, какое из них является независимым.

Геометрическая интерпретация дифференциальных уравнений. Пусть $y = y(x)$ есть решение уравнения (Б). Геометрически это значит, что в прямоугольных координатах касательная к кривой

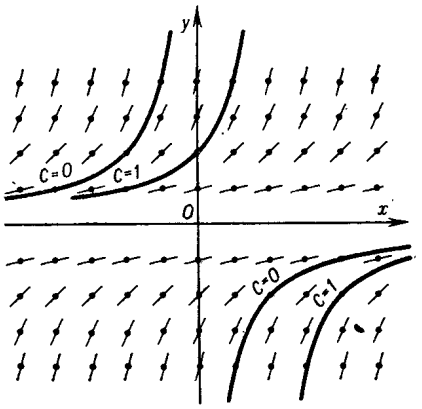


Рис. 2.

$y = y(x)$ имеет в каждой лежащей на ней точке $M(x, y)$ угловой коэффициент $k = f(x, y)$. Таким образом, нахождение решений $y = y(x)$ геометрически сводится к такой задаче: в каждой точке нек-рой области на плоскости задано «направление», требуется найти все кривые, к-рые в любой своей точке M имеют направление, заранее сопоставленное этой точке. Если функция $f(x, y)$ непрерывна, то это направление меняется при перемещении точки M непрерывно, и можно наглядно изобразить поле направлений, проведя в достаточно большом числе достаточно густо расположенных по всей рассматриваемой области точек короткие чёрточки с заданным для этих точек направлением. На рис. 2 это выполнено для уравнения $y' = y^2$. Рисунок позволяет сразу представить себе, как должны выглядеть графики решения — т. н. интегральные кривые Д. у. Вычисление показывает, что общее решение данного уравнения есть $y = \frac{1}{C - x}$. На рис. 2 вычерчены интегральные кривые, соответствующие значениям параметра $C = 0$ и $C = 1$.

График любой однозначной функции $y = y(x)$ пересекает каждую прямую, параллельную оси Oy, только один раз. Таковы, следовательно, интегральные кривые любого уравнения (Б) с однозначной непрерывной функцией в правой части. Новые возможности для вида интегральных кривых открываются при переходе к уравнениям (В). При помощи пары непрерывных функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ можно задать любое непрерывное поле направлений. Задача интегрирования уравнений (В) совпадает с чисто геометрической (не зависящей от выбора осей координат) задачей разыскания интегральных кривых по заданному на плоскости полю направлений. Следует заметить, что тем точкам (x_0, y_0), в к-рых обе функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ обращаются в нуль, не соответствует к.-л. определённое направление. Такие точки наз. *особыми точками* уравнения (В).

Пусть, напр., задано уравнение

$$y\,dx + x\,dy = 0,$$

к-рое можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

хотя, строго говоря, правая часть этого последнего уравнения теряет смысл при $x = 0$ и $y = 0$. Соответствующие поле направлений и семейство интегральных кривых, являющихся в этом случае окружностями $x^2 + y^2 = C$, изображены на рис. 3. Начало координат ($x = 0$, $y = 0$) — особая точка данного уравнения. Интегральными кривыми уравнения

$$y\,dx - x\,dy = 0,$$

изображёнными на рис. 4, являются всевозможные прямолинейные лучи, выходящие из начала координат; начало координат является особой точкой и этого уравнения.

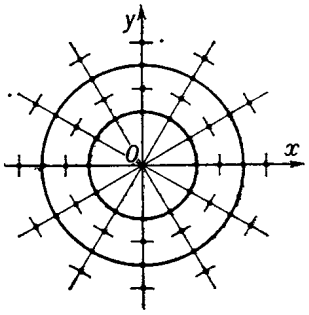


Рис. 3.

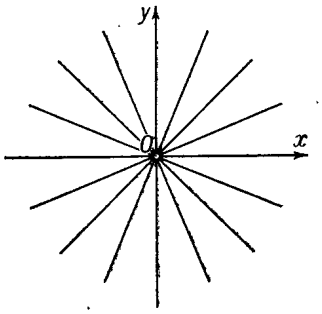


Рис. 4.

Начальные условия. Геометрич. интерпретация Д. у. 1-го порядка приводит к мысли, что через каждую внутреннюю точку M области G с заданным непрерывным полем направлений можно провести одну, вполне определённую интегральную кривую.

В отношении существования интегральной кривой сформулированная гипотеза оказывается правильной. Доказательство этого предложения принадлежит Дж.

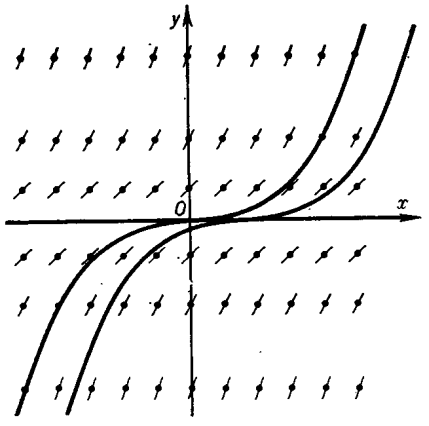


Рис. 5.

Пеано (1890). В отношении же единственности интегральной кривой, проходящей через заданную точку, высказанная выше гипотеза оказывается, вообще говоря, ошибочной. Уже для такого простого уравнения, как

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \qquad (4)$$

у к-рого правая часть непрерывна во всей плоскости, интегральные кривые имеют вид, изображённый на рисунке 5. Единственность интегральной кривой, проходящей через заданную точку, нарушается здесь во всех точках оси Ox.

Единственность, т. е. однозначное определение интегральной кривой условием её прохождения через заданную

точку, имеет место для уравнений (Б) с непрерывной правой частью при том дополнительном условии, что функция $f(x, y)$ имеет в рассматриваемой области ограниченную производную по y.

Это требование является частным случаем следующего, более широкого условия Лишица: существует такая постоянная L, что в рассматриваемой области всегда

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|<L|y_1-y_2|.$$

Это условие чаще всего приводится в учебниках как достаточное условие единственности.

С аналитич. стороны теоремы существования и единственности для уравнения вида (Б) означают следующее: если выполнены надлежащие условия [напр., функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет ограниченную производную по y], то задание для «начального» значения x_0 независимого переменного x «начального» значения $y_0=y(x_0)$ функции $y(x)$ выделяет из семейства всех решений $y(x)$ одно определённое решение. Напр., если для рассмотренного выше уравнения (1) потребовать, чтобы в начальный момент времени $t_0=0$ температура тела была равна «начальному» значению T_0, то из бесконечного семейства решений (2) выделится одно определённое решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$T(t)=T_0e^{-kt}.$$

Этот пример типичен: в механике и физике Д. у. обычно определяют общие законы течения к.-л. явления; однако чтобы получить из этих законов определённые количественные результаты, надо присоединить к ним сведения о начальном состоянии изучаемой физич. системы в нек-рый определённый, выбранный в качестве «начального» момент времени t_0.

Если условия единственности выполнены, то решение $y(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$, можно записать в виде:

$$y(x)=\varphi(x; x_0, y_0), \qquad (5)$$

где x_0 и y_0 входят как параметры, функция же $\varphi(x; x_0, y_0)$ трёх переменных x, x_0 и y_0 однозначно определяется самим уравнением (Б). Важно отметить, что при достаточно малом изменении поля (правой части Д. у.) функция $\varphi(x; x_0, y_0)$ меняется сколь угодно мало на конечном промежутке изменения переменного x — имеется непрерывная зависимость решения от правой части Д. у. Если правая часть $f(x, y)$ Д. у. непрерывна и её производная по y ограничена (или удовлетворяет условию Липшица), то имеет место также непрерывность $\varphi(x; x_0, y_0)$ по x_0 и y_0. Если в окрестности точки (x_0, y_0) для уравнения (Б) выполнены условия единственности, то все интегральные кривые, проходящие через достаточно малую окрестность точки (x_0, y_0), пересекают вертикальную прямую $x=x_0$ и определяются ординатой $y=C$ своей точки пересечения с этой прямой (рис. 6). Таким образом, все эти решения содержатся в семействе с одним параметром C:

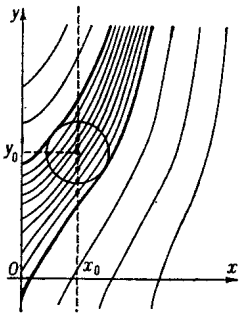


Рис. 6.

$$y(x)=F(x, C),$$

к-рое является общим решением Д. у. (Б).

В окрестности точек, в к-рых нарушаются условия единственности, картина может быть сложнее. Весьма сложен и вопрос о поведении интегральных кривых «в целом», а не в окрестности точки (x_0, y_0).

Общий интеграл. Особые решения. Естественно поставить обратную задачу: задано семейство кривых, зависящих от параметра C, требуется найти Д. у., для к-рого кривые заданного семейства служили бы интегральными кривыми. Общий метод для решения этой задачи заключается в следующем: считая семейство кривых на плоскости xOy заданным при помощи соотношения

$$F(x, y, C)=0, \qquad (6)$$

дифференцируют (6) при постоянном C и получают

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0 \qquad (7)$$

или в симметричной записи

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0 \qquad (8)$$

и из двух уравнений (6) и (7) или (6) и (8) исключают параметр C. Если данное Д. у. получается таким образом из соотношения (6), то это соотношение наз. общим интегралом заданного Д. у. Одно и то же Д. у. может иметь много различных общих интегралов. После нахождения для заданного Д. у. общего интеграла оказывается необходимым, вообще говоря, ещё исследовать, не имеет ли Д. у. дополнительных решений, не содержащихся в семействе интегральных кривых (6).

Пусть, напр., задано семейство кривых

$$(x-C)^3-y=0. \qquad (9)$$

Дифференцируя (9) при постоянном C, получают

$$3(x-C)^2-y'=0,$$

после же исключения C приходят к Д. у.

$$27y^2-(y')^3=0, \qquad (10)$$

равносильному уравнению (4). Легко видеть, что кроме решений (9) уравнение (10) имеет решение

$$y\equiv 0. \qquad (11)$$

Решение уравнения (10) самого общего вида таково:

$$y(x)=\begin{cases}(x-C_1)^3 & \text{при } x<C_1,\\ 0 & \text{при } C_1\leqslant x\leqslant C_2,\\ (x-C_2)^3 & \text{при } x>C_2,\end{cases}$$

где $-\infty\leqslant C_1\leqslant C_2\leqslant+\infty$ (рис. 7). Оно зависит от двух параметров C_1 и C_2, но составляется из кусков кривых

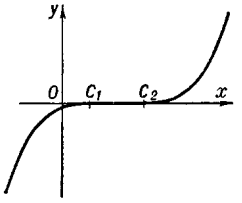


Рис. 7.

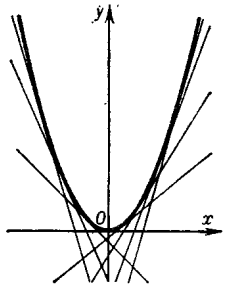


Рис. 8.

однопараметрич. семейства (9) и куска особого решения (11).

Решение (11) уравнения (10) может служить примером *особого решения* Д. у. В качестве другого примера можно рассмотреть семейство прямых

$$4(y-Cx)+C^2=0. \qquad (12)$$

Эти прямые являются интегральными кривыми Д. у.

$$4(y-xy')+(y')^2=0.$$

Особой же интегральной кривой этого Д. у. служит парабола

$$x^2-y=0,$$

огибающая прямые (12) (рис. 8). Картина, наблюдавшаяся в рассмотренном примере, типична; особые интегральные кривые обычно являются огибающими семейства интегральных кривых, получаемых из общего решения.

Дифференциальные уравнения высших порядков и системы дифференциальных уравнений. Д. у. n-го порядка с одной неизвестной функцией $y(x)$ независимого переменного x записывают так:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)})=0. \qquad (13)$$

Если ввести дополнительные неизвестные функции

$$y_1 = y',\ y_2 = y'',\ \ldots,\ y_{n-1} = y^{(n-1)}, \qquad (14)$$

то уравнение (13) можно заменить системой из n уравнений с n неизвестными функциями, но зато 1-го порядка. Для этого достаточно к $n-1$ уравнениям (14) присоединить уравнение

$$F(x,\ y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1},\ y'_{n-1}) = 0.$$

Аналогичным образом сводятся к системам уравнений 1-го порядка и системы уравнений высших порядков. В механике сведение систем уравнений 2-го порядка к системе из удвоенного числа уравнений 1-го порядка имеет простой механич. смысл. Напр., система трёх уравнений движения материальной точки

$$mx'' = P(x,\ y,\ z),\ \ my'' = Q(x,\ y,\ z),\ \ mz'' = R(x,\ y,\ z),$$

где x, y, z — координаты точки, зависящие от времени t, сводится к системе шести уравнений:

$$mu' = P(x,\ y,\ z),\ \ mv' = Q(x,\ y,\ z),\ \ mw' = R(x,\ y,\ z),$$
$$u = x',\ \ v = y',\ \ w = z'$$

при помощи введения в качестве новых переменных составляющих u, v, w скорости.

Наибольшее значение имеют системы, в к-рых число уравнений равно числу неизвестных функций. Система из n уравнений 1-го порядка с n неизвестными функциями, разрешённая относительно производных, имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \qquad (a)$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Решением системы Д. у. (а) наз. система функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, к-рая при подстановке в уравнения (а) обращает их в тождества. Часто встречаются системы вида (а), в к-рых правые части не зависят от t. В этом случае изучение системы (а) в основном сводится к изучению системы из $(n-1)$-го уравнения, к-рую целесообразно записывать в симметричной форме

$$\frac{dx_1}{F_1} = \frac{dx_2}{F_2} = \ldots = \frac{dx_n}{F_n},$$

не предрешая вопроса о том, от какого из переменных x_1, x_2, ..., x_n мыслятся зависящими остающиеся $n-1$ переменных. Считая $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ вектором, можно записать систему (а) в виде одного векторного уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = F(t,\ x),$$

что позволяет широко пользоваться при изучении систем (а) аналогией с теорией одного уравнения 1-го порядка вида (Б). В частности, оказывается, что для систем (а) сохраняют силу основные результаты относительно существования и единственности решения задачи с начальными условиями: если в окрестности точки $(t_0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ все функции F_i непрерывны по совокупности переменных t, x_1, x_2, ..., x_n и имеют ограниченные производные по переменным x_1, x_2, ..., x_n, то задание начальных значений $x(t_0) = x_i^0$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, определяет одно, вполне определённое решение системы (а). Этим объясняется то, что, вообще говоря, решение систем из n уравнений 1-го порядка с n неизвестными функциями зависит от n параметров.

Для приведённых выше конкретных примеров Д. у. их общее решение удаётся выразить при помощи элементарных функций. Типы Д. у., допускающие такого рода решение, детально изучаются. Часто придерживаются более общей точки зрения, считая Д. у. «решённым», если искомая зависимость между переменными (и входящими в общее решение параметрами C_1, C_2, ...) может быть выражена при помощи элементарных функций и одной или нескольких операций взятия неопределённого интеграла («решение выражено в квадратурах»).

Большой общностью обладают способы нахождения решений при помощи разложения их в степенные ряды. Напр., если правые части уравнений (а) в окрестности точки $(t_0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ голоморфны, то решение соответствующей начальной задачи выражается функциями $x_i(t)$, разлагающимися в степенные ряды:

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ki}(t - t_0)^k, \qquad (15)$$

коэффициенты к-рых можно найти последовательным дифференцированием правых частей Д. у. (а) и сопоставлением коэффициентов при одинаковых степенях в левых и правых частях этих уравнений.

Из специальных типов Д. у. особенно хорошо разработана теория линейных Д. у. и систем линейных Д. у. (см. *Линейное дифференциальное уравнение*).

Для линейных Д. у. сравнительно просто решаются также вопросы «качественного» поведения интегральных кривых, т. е. их поведение во всей области задания Д. у., где нахождение общего решения особенно сложно, вопросы качественной теории Д. у. приобретают иногда даже доминирующее значение. В связи с этой теорией см. *Динамическая система*, *Устойчивость*, *Предельный цикл*.

Большое значение имеет аналитич. теория Д. у., изучающая решения Д. у. с точки зрения теории аналитич. функций, т. е. интересующаяся, напр., расположением их особых точек в комплексной плоскости и т. д.

Наряду с рассмотренной выше задачей — *Коши задачей*, в которой задаются значения искомых функций (а в случае уравнений старших порядков и их производных) в одной точке (при одном значении независимого переменного), находят широкое применение *краевые задачи* — задачи о нахождении решения Д. у., принадлежащего заданному множеству D пространства дифференцируемых функций от x на $(a,\ b)$. Напр., для Д. у. 1-го порядка D может состоять из функций $y(x)$ таких, что $\int_a^b y d\Phi = 0$ для нек-рой функции $\Phi(x)$; для Д. у. 2-го порядка $y'' + q(x)y = 0$ множество D состоит из функций, принимающих заданные значения на концах интервала: $y(a) = A$, $y(b) = B$.

В связи с потребностями практики постоянно разрабатывались и способы приближённого интегрирования Д. у., напр., *последовательных приближений метод*, *Адамса метод* и др. Были предложены также разнообразные приёмы графич. и механич. интегрирования этих уравнений. Математика располагает богатым набором численных методов решения многих задач Д. у. (см. *Дифференциальное уравнение обыкновенное*; приближённые методы решения). Эти методы представляют собой удобные алгоритмы вычислений с эффективными оценками точности, а современная вычислительная техника даёт возможность экономно и быстро довести решение каждой такой задачи до числового результата.

Дифференциальные уравнения с частными производными. Типичной особенностью Д. у. с частными производными и систем Д. у. с частными производными является то, что для однозначного определения частного решения здесь требуется задание не значений того или иного конечного числа параметров, а нек-рых функций. Напр., общим решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (16)$$

является выражение

$$u(t,\ x) = f(x + t) + g(x - t),$$

где f и g — произвольные функции. Таким образом, Д. у. (16) лишь в той мере ограничивает произвол в выборе функции двух переменных $u(x,\ y)$, что её удаётся выразить через две функции $f(z)$ и $g(z)$ одного переменного, к-рые остаются [если в дополнение к уравнению (16) не дано к.-л. «начальных» или «краевых» условий] произвольными.

Типичной задачей с начальными условиями для системы Д. у. с частными производными 1-го порядка

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\ u_1,\ \ldots,\ u_m), \qquad (17)$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

где независимыми переменными являются t, x_1, ..., x_n, а u_1, ..., u_m суть функции этих независимых переменных, может служить задача Коши: по заданным при к.-л. значениях $t=t_0$

$$u_i(t_0, x_1, \ldots, x_n)=\varphi_i(x_1, \ldots, x_n),$$
$$i=1, 2, \ldots, m,$$

найти функции $u_i(t, x_1, \ldots, x_n)$.

В теории Д. у. с частными производными порядка выше 1-го и систем Д. у. с частными производными рассматриваются как задачи типа Коши, так и ряд краевых задач.

При постановке и решении краевых задач для Д. у. с частными производными порядка выше 1-го существенное значение имеет тип уравнения. В качестве примера можно привести классификацию Д. у. с частными производными 2-го порядка с одной неизвестной функцией $z(x, y)$ двух переменных:

$$F(x, y, p, q, r, s, t)=0, \qquad (18)$$

где

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$
$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Если

$$D=4\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t}-\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2>0,$$

то (18) есть эллиптическое уравнение. Примером может служить *Лапласа уравнение*

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Если $D<0$, то (18) есть гиперболическое уравнение. Примером может служить уравнение колебания струны (см. *Волновое уравнение*):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Если $D=0$, то (18) есть параболическое уравнение. Примером может служить уравнение распространения тепла (см. *Теплопроводности уравнение*):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

О краевых задачах для этих различных типов уравнений см. *Математической физики уравнения*. Для построения приближённых решений Д. у. с частными производными чаще всего применяются методы конечных разностей (*разностных схем теория*). См. также *Гиперболического типа уравнение*, *Параболического типа уравнение*, *Эллиптического типа уравнение*.

● **Обыкновенные дифференциальные уравнения.** Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, пер. с нем., 5 изд., М., 1976; Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 8 изд., М., 1959; Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 7 изд., М., 1984; Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 5 изд., М., 1982; Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с итал., т. 1—2, М., 1953—54; Коддингтон Э., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1958; Лефшец С., Геометрическая теория дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1961; Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения, пер. с англ., М., 1970.

Дифференциальные уравнения с частными производными. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, 3 изд., М., 1961; Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1966.

Б. П. Демидович, А. Н. Колмогоров, В. В. Немыцкий.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОЕ; приближённые методы решения — методы получения аналитических выражений, либо численных значений, приближающих искомое частное решение дифференциального уравнения (д. у.) или системы д. у.

Для получения приближённого решения д. у. в виде аналитич. выражений используют *последовательных приближений метод*, *Чаплыгина метод*, опирающийся на теорему о дифференциальных неравенствах, асимптотич. методы, основанные на выделении в решаемом д. у. главных членов и членов, малых по сравнению с главными (напр., *малого параметра метод*).

Наиболее распространены численные методы приближённого решения д. у. В этих методах приближённое решение д. у.

$$y'=f(x, y) \qquad (1)$$

с начальным условием

$$y(x_0)=y_0$$

ищется на отрезке $x_0\leqslant x\leqslant x_0+X$ в виде таблицы приближённых значений искомой функции $y(x)$ на этом отрезке. Пусть приближённое решение уравнения (1) вычисляется для значений аргумента $x_p=x_0+ph$, $p=0, 1, \ldots, N$, $h=X/N$; значения x_p наз. узлами, величина h — шагом; через y_p обозначено приближённое значение решения уравнения (1) в узле x_p, через $r_p=|y_p-y(x_p)|$ — погрешность, с к-рой вычислено приближённое решение y_p. Один из простейших численных методов — *Эйлера метод ломаных* основан на приближённом вычислении квадратуры в тождестве

$$y_{p+1}=y_p+\int_{x_p}^{x_{p+1}} f(x, y(x))\,dx \qquad (2)$$

по формуле прямоугольников

$$y_{p+1}=y_p+hf(x_p, y_p).$$

Погрешность r_p метода Эйлера пропорциональна h. Приближая интеграл в тождестве (2) более точными квадратурными формулами, можно получить более точные численные методы. Напр., воспользовавшись формулой трапеций, получают

$$y_{p+1}=y_p+\frac{h}{2}(f(x_p, y_p)+f(x_{p+1}, y_{p+1})). \qquad (3)$$

Соотношение (3) можно рассматривать как уравнение относительно y_{p+1}. Обычно для его решения используют итерационные методы, взяв в качестве начального приближения значение, полученное по методу Эйлера. Одна итерация приводит к формулам Эйлера с пересчётом:

$$y_{p+1}=y_p+\frac{h}{2}(k_1(x_p, y_p)+k_2(x_p, y_p)),$$

где

$$k_1(x_p, y_p)=f(x_p, y_p),\ k_2(x_p, y_p)=f(x_p+h, y_p+hk_1(x_p, y_p)).$$

Эти формулы имеют погрешность r_p порядка h^2. Они относятся к семейству *Рунге — Кутты методов*. Методы Рунге — Кутты наз. одношаговыми, т. к. для вычисления y_{p+1} достаточно знать y_p (значение приближённого решения на предыдущем шаге). Это позволяет применять формулы методов Рунге — Кутты и в случае, когда шаги $h_p=x_{p+1}-x_p$ неодинаковы. В этом случае для выбора h_p обычно используют условие постоянства погрешности r_p. Для оценки r_p часто пользуются т. н. экстраполяцией по Ричардсону: y_{p+2} вычисляется дважды — при помощи двух шагов h и одного шага $2h$; обозначив соответствующие приближённые решения через $y_{p+2}^{(1)}$ и $y_{p+2}^{(2)}$, получают оценку

$$r_{p+2}\approx\frac{|y_{p+2}^{(2)}-y_{p+2}^{(1)}|}{2^s-1},$$

где $s+1$ порядок r_{p+2} по h (для метода Эйлера $s=1$, для метода Эйлера с пересчётом $s=2$ и т. д.).

Для численного решения д. у. применяются также и многошаговые методы, когда для вычисления y_{p+1} используются не только y_p, но и значения y_{p-j} в нескольких предыдущих узлах. Формулы k-шаговых методов имеют вид

$$\sum_{q=0}^{k} a_{-q}y_{p-q}-h\sum_{q=0}^{k} b_{-q}f(x_{p-q}, y_{p-q})=0,$$

где a_{-q}, b_{-q} — постоянные, $a_0\neq 0$. Если $b_0=0$, соответст-

вующий метод наз. экстраполяционным или явным; если $b_0 \neq 0$,— интерполяционным или неявным. Обычно вычисления ведут по паре k-шаговых формул, одна из к-рых явная, а другая неявная. Примером таких формул, реализующих методы прогноза и коррекции, являются формулы:

сначала вычисляется «прогноз»

$$y^*_{p+1} = \frac{2}{3} y_{p-1} + \frac{1}{3} y_{p-2} + \frac{h}{72} (191 f_p - 107 f_{p-1} + 109 f_{p-2} - 25 f_{p-3}), \quad f_p = f(x_p, y_p),$$

потом — «поправка»

$$\tilde{y}_{p+1} = y^*_{p+1} - \frac{707}{750} (y^*_p - y^{**}_p),$$

затем — «коррекция»

$$y^{**}_{p+1} = \frac{2}{3} y_{p-1} + \frac{1}{3} y_{p-2} + \frac{h}{72} (25 f_{p+1} + 91 f_p + 43 f_{p-1} + 9 f_{p-2})$$

и, наконец, приближённое решение

$$y_{p+1} = y^{**}_{p+1} + \frac{43}{750} (y^*_{p+1} - y^{**}_{p+1}).$$

Применение многошаговых методов возможно лишь в случае, если известны значения решения в первых k узлах. Для нахождения этих значений обычно пользуются одношаговыми методами, погрешность к-рых пропорциональна соответствующей степени h.

Для решения линейных краевых задач широко применяются *прогонки метод*, *ортогональной прогонки метод*.

Если для линейного или нелинейного дифференциального уравнения решение задачи Коши не очень сильно чувствительно к влиянию вычислительной погрешности в процессе численного решения задачи, то для решения соответствующей краевой задачи применяется *пристрелки метод*. В противном случае применяются различные варианты *Ньютона метода* решения нелинейных краевых задач для обыкновенных д. у. или варианты других методов решения нелинейных краевых задач.

Иногда используются вариационные методы: метод Ритца, метод Галёркина и др., сводящие решение краевой задачи к задаче минимизации нек-рого функционала.

Большинство численных методов приближённого решения обыкновенных д. у. реализовано в виде библиотечных программ на ЭВМ.

● Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 2 изд., т. 1—2, М., 1962; Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, пер. с англ., М., 1979.

С. С. Гайсарян.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕ́НИЕ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕ́НТОМ — уравнение, связывающее аргумент, а также искомую функцию и её производные, взятые, вообще говоря, при различных значениях этого аргумента. Примерами могут служить уравнения

$$x'(t) = ax(t-\tau), \quad (1)$$

$$x'(t) = ax(kt), \quad (2)$$

где постоянные a, τ, k заданы; $t-\tau$ в уравнении (1) и kt в уравнении (2) — отклонения аргумента. Такие уравнения появились в кон. 18 в. в связи с различными приложениями, прежде всего к теории регулирования.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение, связывающее аргумент, искомую функцию, её приращения и производные (разности). Напр., $y' = k\Delta y$, где $y = y(x)$, $\Delta y = y(x+h) - y(x)$. Подстановка последнего выражения в исходное уравнение показывает, что Д.-р. у.— это частный случай *дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*.

ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНЫЕ И́ГРЫ — раздел математической теории управления, в котором изучается управление в конфликтных ситуациях и управление с гарантированным результатом в условиях неопределённости. Теория Д. и. примыкает также к общей теории игр. Первые работы по Д. и. появились в сер. 50-х гг. 20 в.

Различают Д. и. двух игроков и нескольких игроков. Основные результаты получены для задач с двумя игроками. Содержательное описание этих задач укладывается в следующую схему. Имеется динамич. система, в к-рой часть управляющих воздействий подчинена игроку I, а другая часть — игроку II. В теории Д. и. рассматриваются также задачи управления в условиях неопределённости, когда помехи, действующие на систему, трактуются как управления противника. При постановке задачи, стоящей перед игроком I или II, предполагается, что выбор управлений этого игрока, гарантирующий ему достижение определённой цели при любом неизвестном заранее управлении противника, может опираться лишь на нек-рую информацию о текущих состояниях системы. Напр., постановка задачи игрока I описывается следующим образом. Обычно предполагается, что движение управляемой системы задаётся дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad (*)$$

где x — фазовый вектор системы, u и v — управляющие векторы игроков I и II соответственно. Определён класс стратегий $\mathcal{U}$ игрока I, и для каждой стратегии $U \in \mathcal{U}$ определён пучок движений $\mathcal{X}(U)$, к-рый порождён этой стратегией в паре со всевозможными управлениями противника и выходит из начального состояния системы (*). Эти понятия выбираются так, чтобы они соответствовали заданным ограничениям на управления игроков и характеру информации о текущих состояниях системы, представленной игроку I. На движениях $x(t)$, $t \geqslant t_0$, системы (*) задан функционал $\gamma(x(\cdot))$ (плата игры), значение к-рого игрок I стремится минимизировать [иногда функционал γ зависит также от реализаций $u(t)$, $v(t)$, $t \geqslant t_0$, управлений игроков]. Учитывая самую неблагоприятную реализацию движения $x(\cdot) \in \mathcal{X}(U)$, качество стратегий $U \in \mathcal{U}$ оценивается величиной

$$\varkappa_1(U) = \sup \{\gamma(x(\cdot)) : x(\cdot) \in \mathcal{X}(U)\}.$$

Задача игрока I состоит в определении стратегии $U_0 \in \mathcal{U}$, на к-рой достигается минимум функционала $\varkappa_1$.

Аналогичным образом формулируются задачи игрока II, к-рый максимизирует плату игры. Стратегии игрока II $V \in \mathcal{V}$ оцениваются величиной

$$\varkappa_2(V) = \inf \{\gamma(x(\cdot)) : x(\cdot) \in \mathcal{X}(V)\}.$$

Задача здесь состоит в выборе стратегии $V_0 \in \mathcal{V}$, максимизирующей значение функционала $\varkappa_2$.

Если в задачах игроков I и II классы стратегий $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ таковы, что для всякой пары $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ можно определить хотя бы одно движение

$$x(\cdot) \in \mathcal{X}(U) \cap \mathcal{X}(V),$$

порождённое этой парой, то говорят, что эти две задачи составляют дифференциальную игру, определённую на классе стратегий $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Если в Д. и. выполняется равенство

$$\inf_{U \in \mathcal{U}} \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{X}(U)} \gamma(x(\cdot)) = \sup_{V \in \mathcal{V}} \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{X}(V)} \gamma(x(\cdot)) = c_0,$$

то величина c_0 наз. ценой (значением) Д. и.

Типичным примером Д. и. является игра преследования — уклонения. В этой игре

$$x = (x_1, \ldots, x_{k+l}) = (y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l),$$

где y и z — фазовые векторы преследователя и преследуемого соответственно, движения к-рых описываются уравнениями

$$\dot{y} = g(t, y, u), \quad \dot{z} = h(t, z, v).$$

Наиболее часто рассматривается случай, когда выбор управлений стеснён ограничениями вида $u \in P$, $v \in Q$, где P и Q — некоторые компакты. Платой в этой игре является время до встречи, т. е.

$$\gamma(x(\cdot)) = T(x(\cdot)) = \inf \{t - t_0 : (y, z) \in M\}.$$

Таким образом, попадание точки $x = (y, z)$ на множество $M \subset \mathbb{R}^{k+l}$ трактуется как встреча объектов. В случае, когда игроки располагают информацией о текущей позиции игры $(t, x(t))$, т. е. в *позиционной игре* преследования — уклонения, существует цена игры.

Кроме описанной выше схемы, существуют и другие подходы к определению Д. и. Разнообразны также методы исследования Д. и. В частности, одно из направлений составляют исследования, в к-рых Д. и. трактуется как предел последовательности многошаговых игр (см. *Динамическая игра*). Такой подход был предложен для доказательства существования цены Д. и. Для решения конкретных примеров Д. и. был использован метод *динамического программирования*, согласно к-рому функция цены Д. и. определяется интегрированием т. н. основного уравнения — дифференциального уравнения с частными производными 1-го порядка. Однако функция цены Д. и., как правило, оказывается негладкой, поэтому использование этого метода связано с трудным анализом решений вблизи сингулярных поверхностей, где терпят разрыв функция цены или её производные.

Глубокие связи теории Д. и. с теорией оптимального управления были установлены Л. С. Понтрягиным. Им были предложены постановки игровых задач с информационной дискриминацией противника, управление к-рого полагалось известным на промежутке $[t, t+\delta]$, где t — текущий момент времени, $\delta>0$ — малое число. При таком предположении получается удобное описание игрового процесса, что позволило развить строгую математич. теорию и разработать, в частности, плодотворные прямые методы решения Д. и.

Важное место в теории Д. и. занимает теория позиционных Д. и., разработанная Н. Н. Красовским и его сотрудниками. Здесь игроки располагают информацией о текущей позиции $(t, x(t))$, поэтому естественно отождествить их стратегии с функциями $u=u(t, x)$ и $v=v(t, x)$. Однако при этом возникают принципиальные трудности, связанные с необходимостью использовать разрывные стратегии. Специфика Д. и. не позволяет аппроксимировать эти стратегии непрерывными функциями и использовать для определения движений известные понятия из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Была разработана строгая и содержательная формализация позиционных Д. и. В рамках этой формализации было доказано существование цены позиционной Д. и., исследована структура оптимальных стратегий, выделены классы Д. и., для к-рых решение можно построить эффективно. Здесь же была предложена процедура управления с поводырём, устойчивая по отношению к информационным помехам. При моделировании поводыря можно использовать результаты, полученные при информационной дискриминации. В теории позиционных Д. и. был развит метод программных итераций для определения функции цены Д. и., получены дифференциальные неравенства для функции цены Д. и., обобщающие основное уравнение на случай, когда эта функция не является гладкой.

Значительное развитие получили и другие формализации Д. и.

● Красовский Н. Н., Субботин А. И., Позиционные дифференциальные игры, М., 1974; Айзекс Р., Дифференциальные игры, пер. с англ., М., 1967; Петросян Л. А., Дифференциальные игры преследования, Л., 1977; Черноусько Ф. Л., Меликян А. А., Игровые задачи управления и поиска, М., 1978; Понтрягин Л. С., «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1985, т. 169, с. 119—58. *М. С. Никольский, А. И. Субботин.*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ векторного анализа — *вихрь*, *градиент*, *дивергенция*, *Гамильтона оператор*, *Лапласа оператор*. См. также *Векторный анализ*.

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» — научный журнал АН БССР. Издаётся в Минске с 1965. Выходит 12 номеров в год. Публикует результаты исследований в области дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений, а также уравнений в конечных разностях. Тираж (1987) ок. 2000 экз.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ БИНОМ, биномиальный дифференциал, — выражение вида

$$x^m (a+bx^n)^p\, dx,$$

где a и b — постоянные, отличные от нуля, а p, m и n — рациональные числа. Основная задача для Д. б. состоит в том, чтобы указать все случаи его интегрируемости, т. е. в том, чтобы найти те условия на параметры m, n и p, при выполнении к-рых интеграл от Д. б.

$$\int x^m (a+bx^n)^p\, dx$$

выражается в конечном виде через элементарные функции.

Л. Эйлеру были известны три случая интегрируемости Д. б.: 1) p — целое число; 2) $(m+1)/n$ — целое число; 3) $(m+1)/n+p$ — целое число. П. Л. Чебышев (1853) доказал, что во всех остальных случаях интеграл от Д. б. не выражается через элементарные функции.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — обобщение понятия оператора дифференцирования. Напр., левая часть дифференциального уравнения может быть рассматриваема как Д. о., ставящий в соответствие каждой функции новую функцию. Во многих вопросах физики в основу кладётся не понятие дифференциального уравнения, а понятие Д. о. Так, напр., в квантовой механике для описания физич. величин употребляются операторы, являющиеся, как правило, Д. о.

Наиболее развита теория линейных Д. о. Пусть Ω — совокупность функций $y(x)$ на отрезке $[a, b]$, имеющих производные до n-го порядка и удовлетворяющих граничным условиям вида

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^j y^{(k)}(a) + \beta_k^j y^{(k)}(b) = 0, \qquad (1)$$
$$j = 1, 2, \ldots, m.$$

Обыкновенный Д. о. задаётся формулой

$$D(y) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, y^{(k)}(x) \qquad (2)$$

на функциях из Ω [т. е. удовлетворяющих граничным условиям (1)]. Ω наз. областью определения Д. о. Надо подчеркнуть, что Д. о. задаётся не одной лишь формулой (2), а формулой (2) вместе с граничными условиями (1), т. е. со своей областью определения. Поэтому два Д. о., для к-рых формулы (2) совпадают, а условия (1) различны, следует считать различными. Аналогично определяется Д. о. на бесконечном интервале. Линейный Д. о. с частными производными определяется аналогично формуле (2) как левая часть линейного дифференциального уравнения с частными производными. Возможностей для задания граничных условий здесь значительно больше, чем для обыкновенных Д. о.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ — операция отыскания производной. См. *Дифференциальное исчисление*.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ алгебры — линейное отображение δ алгебры A в себя, удовлетворяющее условию $\delta(ab)=a\delta(b)+\delta(a)b$ для всех $a, b\in A$.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЕ — нахождение производной функции численными методами. Д. ч. используется в случаях, когда методы дифференциального исчисления неприменимы (функция задана таблично) или их применение вызывает значительные трудности (функция имеет сложное аналитич. выражение).

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена функция $u=u(x)$ и заданы узловые точки x_i, $a=x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. Совокупность точек $(x_i, u_i=u(x_i))$, $i=1, 2, \ldots, n$, наз. таблицей. Результатом Д. ч. таблицы является функция $u_n^k(x)$, в к.-л. смысле приближающая k-ю производную $\frac{d^k u(x)}{dx^k}$ функции на нек-ром множестве X_n^k точек x. Применение Д. ч. целесообразно, когда получение функции $u_n^k(x)$ для каждого $x\in X_n^k$ требует незначительной затраты вычислительных средств. Обычно используются линейные методы Д. ч., где результат Д. ч. записывается в виде

$$u_n^k(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i^k(x), \qquad (1)$$

$a_i^k(x)$ — функции, определённые на X_n^k. Наиболее распространённый метод получения формул (1) состоит в следующем: строят функцию

$$u_n(x)=\sum_{i=1}^{n} u_i a_i(x),$$

интерполирующую $u(x)$, и полагают

$$u_n^k(x)\equiv\frac{d^k u_n(x)}{dx^k}=\sum_{i=1}^{n} u_i\frac{d^k a_i(x)}{dx^k}.$$

Точность алгоритмов, основанных на интерполяционных формулах Лагранжа, Ньютона и др., существенным образом определяется выбором способа интерполяции и может быть иногда весьма низкой даже для достаточно гладких функций $u=u(x)$ и при большом числе узловых точек. От этого недостатка часто свободны алгоритмы Д. ч., использующие сплайн-интерполяцию. Если требуется вычисление приближённых значений производной только в узловых точках x_i, то формула (1) принимает вид

$$u_n^k(x_j)=\sum_{i=1}^{n} u_i a_{ij}^k \qquad (2)$$

и $u_n^k(x_j)$ полностью определяется заданием для данного k матрицы коэффициентов a_{ij}^k. Формулы типа (2) наз. разностными формулами Д. ч. Коэффициенты a_{ij}^k этих формул определяют из условия наивысшего порядка малости по

$$h_n=\max_i|x_{i+1}-x_i|$$

разности

$$\frac{d^k u(x_j)}{dx_j^k}-\sum_{i=1}^{n} u_i a_{ij}^k=\xi_j^n.$$

Формулы (2), как правило, весьма просты и удобны на практике. Напр., при $h=h_n=(x_2-x_1)=(x_3-x_2)=\ldots=(x_n-x_{n-1})$ они имеют вид

$$\frac{du(x_j)}{dx}=\frac{u_{j+1}-u_j}{h}+O(h_n)=\frac{u_j-u_{j-1}}{h}+O(h_n),$$

$$\frac{du(x_j)}{dx}=\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2h}+O(h^2),$$

$$\frac{d^2u(x_j)}{dx^2}=\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{h^2}+O(h^2).$$

Алгоритмы Д. ч. часто применяются к таким таблицам, в к-рых значения $u(x_i)$ заданы (или получены) неточно. В этом случае требуется их предварительное сглаживание, так как непосредственное применение Д. ч. может привести к большим погрешностям в результатах.

● Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж., Теория сплайнов и ее приложения, пер. с англ., М., 1972.

В. А. Морозов.

ДИФФЕРЕНЦИ́РУЕМАЯ ФУ́НКЦИЯ в точке — функция, имеющая *дифференциал* в этой точке. Для функции одного переменного это условие равносильно существованию производной. Для того чтобы функция многих переменных была Д. ф., необходимо к условию существования всех частных пронзводных 1-го порядка добавить условие их непрерывности.

Д. ф. на нек-ром множестве точек определяется как функция, дифференцируемая в каждой точке этого множества. Функция многих переменных наз. непрерывно дифференцируемой функцией, если все её частные производные существуют и непрерывны. Функция наз. n раз Д. ф. или бесконечно дифференцируемой функцией, если существует дифференциал n-го порядка или, соответственно, любого порядка $n=1, 2, \ldots$. Всякая Д. ф. непрерывна; обратное утверждение неверно: существуют непрерывные функции, не имеющие производной ни в одной точке (см. пример в ст. *Непрерывная функция*). См. *Дифференциальное исчисление.*

ДИФФЕРЕНЦИ́РУЕМОЕ МНОГООБРА́ЗИЕ n-мерное — n-мерное топологическое пространство, покрытое открытыми множествами U_α, удовлетворяющими условиям: 1) для каждого U_α имеется гомеоморфизм $\varphi_\alpha: U_\alpha\to V$, где V есть n-мерный шар в $\mathbb{R}^n$; 2) если $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, то композиция $\varphi_{\alpha\beta}=\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}$ отображений множества $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ на множество $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ является *дифференцируемым отображением*. Говорят также, что покрытие $\{U_\alpha\}$ и гомеоморфизмы $\{\varphi_\alpha\}$ задают (определяют, вводят) дифференцируемую структуру на исходном топологич. пространстве.

ДИФФЕРЕНЦИ́РУЕМОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, задаваемое дифференцируемыми функциями $y_i=f_i(x_j)$. Матрица, у к-рой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит $\partial f_i/\partial x^j$, наз. матрицей Якоби Д. о. Если $m=n$, то её определитель наз. якобианом отображения.

ДИФФУЗИО́ННЫЙ ПРОЦЕ́СС (от лат. diffusio — распространение) — непрерывный марковский процесс $X=X(t)$ с переходной плотностью $p(s, x, t, y)$, удовлетворяющей следующим условиям: существуют функции $a(t, x)$ и $\sigma^2(t,x)$, называемые соответственно коэффициентами сноса и диффузии, такие, что для любого $\varepsilon>0$

$$\int_{|y-x|>\varepsilon} p(t, x, t+\Delta t, y)\,dy=o(\Delta t),$$

$$\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon}(y-x)\,p(t, x, t+\Delta t, y)\,dy=a(t, x)+o(\Delta t),$$

$$\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon}(y-x)^2\,p(t, x, t+\Delta t, y)\,dy=\sigma^2(t, x)+o(\Delta t)$$

(причём обычно предполагается, что эти предельные соотношения выполняются равномерно по t в каждом конечном интервале $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ и по x, $-\infty<x<\infty$). Важнейшим представителем этого класса процессов является процесс броуновского движения, впервые рассмотренный как математич. модель процессов диффузии (отсюда и название «Д. п.»).

ДИХОТОМИ́И МЕ́ТОД (от греч. δίχα — на две части и τομή — сечение) — то же, что *половинного деления метод.*

ДЛИНА́ — числовая характеристика протяжённости линий. Д. отрезка прямой — расстояние между его концами, измеренное к.-л. отрезком, принятым за единицу длины. Д. ломаной — сумма Д. её звеньев. Д. простой дуги — предел Д. вписанных в эту дугу ломаных, когда число звеньев неограниченно увеличивается и максимум Д. звеньев стремится к нулю. Д. непрерывной кривой, состоящей из конечного числа простых дуг, равна сумме Д. этих дуг. Напр., Д. окружности может быть получена как предел периметров правильных вписанных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон и равна $2\pi R$, где R — радиус окружности. Всякая непрерывная кривая имеет Д.— конечную или бесконечную. Если её Д. конечна, то кривая наз. спрямляемой.

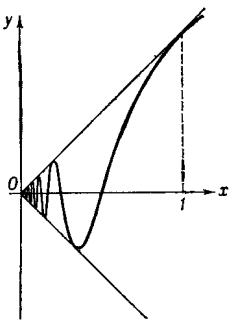


График функции (рис.)

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{\pi}{2x} & \text{при } 0<x<1,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

даёт пример неспрямляемой кривой; здесь Д. вписанных ломаных неограниченно растут, когда Д. звеньев стремятся к нулю. Д. плоской кривой, заданной в прямоугольных координатах уравнением $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ ($f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$), выражается интегралом

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Если кривая задана в параметрич. форме

$$x=x(t),\ y=y(t),\ t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$

то Д. кривой равна

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

Д. спрямляемой кривой не зависит от параметризации. Д. пространственной кривой, заданной в параметрич. форме $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, выражается формулой

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt;$$

в случае n-мерного пространства

$$s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[x_i'(t)]^2}\,dt.$$

К вычислению Д. кривой при помощи предельного перехода из Д. ломаных прибегали, по существу, ещё математики древности. Для них, однако, этот предельный переход был лишь способом вычисления Д. кривой, а не определения понятия Д. кривой, т. к. последнее им представлялось, по-видимому, одним из первоначальных математич. понятий. Необходимость определения Д. кривой стала ясной лишь в 1-й пол. 19 в. Полное выяснение вопроса было достигнуто К. Жорданом. В дифференциальной геометрии определяется также Д. кривой на поверхности или в произвольном римановом пространстве.

ДОВЕРИ́ТЕЛЬНЫЕ ГРАНИ́ЦЫ — см. *Доверительный интервал.*

ДОВЕРИ́ТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕ́ЛЫ — см. *Доверительный интервал.*

ДОВЕРИ́ТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВА́Л — статистическая оценка параметра вероятностного распределения, имеющая вид интервала, границами к-рого служат функции от результатов наблюдений и к-рый с высокой вероятностью «накрывает» неизвестное значение параметра. Именно, пусть результаты наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ суть независимые случайные величины с распределением вероятностей P_θ, зависящим от числового параметра θ, $\theta\in\Theta\subseteq\mathbb{R}$, где Θ — так наз. параметрич. множество. Тогда при фиксированном α, $0<\alpha<1$, интервал с границами

$$\hat\theta_1=\hat\theta_1(X_1,\ \ldots,\ X_n)\ \text{и}\ \hat\theta_2=\hat\theta_2(X_1,\ \ldots,\ X_n),\ \hat\theta_1<\hat\theta_2,$$

в параметрич. множестве Θ такой, что

$$1-\alpha=\inf_{\theta\in\Theta}\mathsf{P}_\theta\{\hat\theta_1\leqslant\theta\leqslant\hat\theta_2\},$$

наз. доверительным интервалом для параметра θ с доверительным уровнем (коэффициентом доверия) $1-\alpha$; здесь доверительная вероятность $\mathsf{P}_\theta\{\cdot\}$ вычисляется при истинном значении параметра θ. Границы $\hat\theta_1$ и $\hat\theta_2$ наз. доверительными границами, или доверительными пределами.

Пример. Пусть P_θ есть нормальное распределение с плотностью вероятности

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}},$$

где $-\infty<x<\infty$ и $\sigma>0$ — известное число. Для построения Д. и. для θ рассматривается точечная статистич. оценка $\overline{X}=(X_1+\ldots+X_n)/n$ параметра θ и статистика $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\theta}{\sigma}$, к-рая при любом значении θ имеет стандартное нормальное распределение с функцией распределения

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-z^2/2}\,dz.$$

Поэтому для любого $t>0$ вероятность

$$\mathsf{P}_\theta\left\{\overline{X}-\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\leqslant\theta\leqslant\overline{X}+\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=$$

$$=\mathsf{P}_\theta\left\{\left|\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\theta}{\sigma}\right|\leqslant t\right\}=\Phi(t)-\Phi(-t)$$

не зависит от θ. Для заданного α значение t_α находится из соотношения

$$2\Phi(t_\alpha)-1=1-\alpha.$$

Для выбранного значения α Д. и.

$$\left(\overline{X}-\frac{t_\alpha\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+\frac{t_\alpha\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

накрывает неизвестное значение θ с вероятностью $1-\alpha$. Точность Д. и. измеряется числом α: вероятность ошибки, состоящей в том, что построенный Д. и. не накрывает истинное значение θ, не превосходит α. Во многих задачах удаётся найти лишь Д. и., отвечающий приближённому значению доверительного уровня.

Понятие Д. и. для векторного параметра воплощается в соответствующей многомерной доверительной области. Для многих функциональных характеристик вероятностных распределений строятся различные доверительные множества и зоны. Задача построения наилучших Д. и. родственна задаче получения наилучших критериев в теории проверки статистич. гипотез.

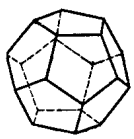
Метод оценивания с помощью Д. и. принадлежит Е. Нейману (1935); он отличается от других методов интервального статистич. оценивания логич. простотой и независимостью от априорных предположений о параметре θ.

● Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983. *А. В. Прохоров.*

ДОВЕРИ́ТЕЛЬНЫЙ УРОВЕ́НЬ — см. *Доверительный интервал.*

ДОВЕ́РИЯ КОЭФФИЦИЕ́НТ — см. *Доверительный интервал.*

ДОДЕКА́ЭДР (от греч. δώδεκα — двенадцать и ἕδρα — грань) — один из пяти типов правильных *многогранников* (рис.); имеет 12 граней (пятиугольных), 30 рёбер, 20 вершин (в каждой вершине сходятся 3 ребра). Если a — длина ребра Д., то его объём $v=\frac{1}{4}a^3(15+7\sqrt{5})\approx 7{,}6631a^3$. Впервые Д. построил Теэтет (4 в. до н. э.).



ДОКАЗА́ТЕЛЬНОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — см. *Программ синтез.*

ДОКАЗА́ТЕЛЬСТВО — рассуждение с целью обоснования истинности какого-либо утверждения (*теоремы*).

Требования, предъявляемые к Д. в математике, выработались уже на раннем этапе её развития в связи с использованием *аксиоматического метода* построения математич. теорий. Образцом применения этого метода и типичного для него способа Д. долгое время оставалась система геометрии, изложенная в «Началах» Евклида (см. *Евклидова геометрия*). Характерный для аксиоматич. теорий метод Д. состоит в том, что утверждения располагаются в нек-рую последовательность, наз. выводом, причём одни из этих утверждений принимаются в качестве допущений, а другие логически вытекают из предшествующих им в этой последовательности. Если все допущения предполагаются истинными не только в рамках данного вывода, а во всей рассматриваемой теории (т. е. являются *аксиомами*), то такой вывод наз. Д. Конкретное Д. может использовать не только аксиомы, но и ранее доказанные предложения. Вообще, то или иное рассуждение является Д. не само по себе, а лишь в рамках нек-рой аксиоматич. теории.

ДОЛГОТА́ — одна из *сферических координат*; угол между нулевым меридианом и меридианом, проходящим через точку на сфере. См. *Сферическая геометрия.*

ДОМИНИ́РОВАНИЕ (нем. dominieren, от лат. dominor — господствую) в теории игр — см. *Кооперативная игра.*

ДОПОЛНЕ́НИЕ — операция, к-рая ставит в соответствие подмножеству M данного множества X другое подмножество $N\subset X$ так, что если известны M и N, то тем или иным способом может быть восстановлено множество X. В общей теории множеств дополнением подмножест-

ва (или дополнительным подмножеством) до множества X наз. подмножество $C_X M$ (или CM, а также $X \setminus M$), состоящее из всех элементов $x \in X$, не принадлежащих M.

ДОПУСТИМОЕ РЕШЕНИЕ — см. *Линейное программирование*, *Математическое программирование*, *Нелинейное программирование*.

ДОСТАТОЧНАЯ СТАТИСТИКА — совокупность таких функций от результатов наблюдений (называемых статистиками), которые содержат ту же информацию о распределении вероятностей, что и сами результаты наблюдений (иначе, Д. с. содержит информацию, достаточную для статистических выводов о распределении). Для одного семейства может существовать много Д. с., в частности простейшими Д. с. являются сами результаты наблюдений и соответствующий им вариационный ряд. Представляют, однако, интерес те Д. с., к-рые позволяют без потери информации заменить всю обширную совокупность результатов наблюдений несколькими характеристиками. Таким образом, переход от наблюдений к Д. с. имеет целью сокращение числа статистич. данных, при этом желательно это сокращение сделать максимально возможным, т. е. найти такую Д. с. (минимальную достаточную статистику), к-рая приводит к большему сокращению, чем любая другая. Практич. способы нахождения минимальных Д. с. имеют большое значение в теории статистич. оценок, т. к. с их помощью легко определяются наилучшие оценки. Напр., пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые результаты наблюдений с одним и тем же распределением, зависящим от неизвестного параметра θ. Если $X_1, \ldots, X_n$ соответствуют схеме испытаний Бернулли, т. е.

$$\mathsf{P}\{X_n = 1\} = \theta, \quad \mathsf{P}\{X_n = 0\} = 1 - \theta, \quad 0 < \theta < 1,$$

то Д. с. для параметра θ являются

$$\sum_{k=1}^{n} X_k$$

и частота

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Если $X_1, \ldots, X_n$ нормально распределены с параметром $\theta = (a, \sigma^2)$ (a — математич. ожидание, σ^2 — дисперсия), то Д. с. для θ будут статистики

$$\left(\sum_{k=1}^{n} X_k, \ \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \right) \quad \text{и} \quad (\overline{X}, \ s^2),$$

где

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2.$$

Величины $\hat{\theta}$, $\overline{X}$ и s^2 являются наилучшими несмещёнными оценками соответствующих параметров.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ — см. *Необходимые и достаточные условия*.

ДОСТОВЕРНОЕ СОБЫТИЕ — см. *Случайное событие*.

ДОЩАНОЙ СЧЁТ — древнерусские *счёты*.

ДРОБНАЯ ЧАСТЬ ЧИСЛА — см. *Целая и дробная части числа*.

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ — функция

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

где a, b, c, d — постоянные и $ad - bc \neq 0$. Условие $ad - bc \neq 0$ означает, что $y \not\equiv \text{const}$. В частности, при $c = 0$ Д.-л. ф. является линейной функцией. При $c \neq 0$ графиком Д.-л. ф. является равнобочная гипербола (рис. 1) с асимптотами $y = a/c$ (горизонтальная) и $x = -d/c$ (вертикальная); точка $(-d/c, \ a/c)$ — центр гиперболы.

Дробно-линейная функция w комплексного переменного $z = x + iy$. В общем случае Д.-л. ф. имеет вид

$$w = \frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c, d — комплексные постоянные и $ad - bc \neq 0$. Отображение, осуществляемое Д.-л. ф., наз. дробно-линейным отображением. В частности, при $c = 0$ дробно-линейное отображение является линейным отображением. При $c \neq 0$ дробно-линейное отображение сводится к суперпозиции линейных отображений и отображения вида $w = 1/z$, к-рое является суперпозицией (в любом порядке) двух отображений: симметрии относительно действительной оси (рис. 2, *а*) и инверсии относительно единичной окружности (рис. 2, *б*).

Д.-л. ф. однолистна во всей расширенной комплексной плоскости и отображает конформно всю расширенную комплексную плоскость на всю расширенную комплексную плоскость. Верно и обратное утверждение: любое конформное отображение всей расширенной комплексной плоскости на всю расширенную комплексную плоскость является дробно-линейным отображением.

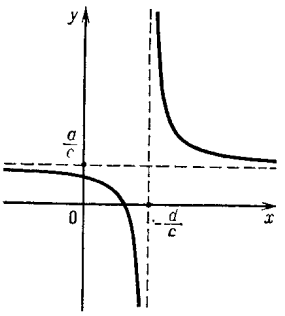


Рис. 1. График дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$.

Совокупность дробно-линейных отображений образует группу: суперпозиция (произведение) дробно-линейных отображений является дробно-линейным отображением, отображение, обратное к дробно-линейному, также является дробно-линейным.

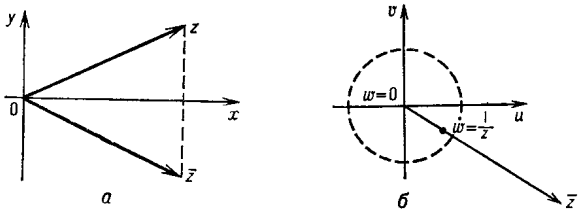


Рис. 2. Дробно-линейное отображение $w = \frac{1}{z}$ осуществляется последовательным выполнением двух отображений: а) переход от точки z к точке $\bar{z}$ (симметрия относительно действительной оси); б) переход от точки $\bar{z}$ к точке $\frac{1}{\bar{z}}$ (инверсия относительно единичной окружности).

При отображении Д.-л. ф. окружности переходят в окружности (круговое свойство). Здесь и далее прямая — частный случай окружности.

При дробно-линейном отображении любая пара точек, симметричных относительно окружности, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности (свойство сохранения симметрии).

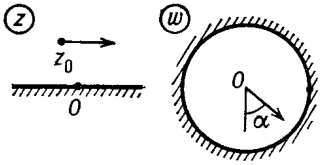


Рис. 3. Дробно-линейное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$; точка $z = z_0$ переходит в точку $w = 0$; угол поворота в точке z_0 равен $\alpha - \frac{\pi}{2}$.

Существует единственная Д.-л. ф., переводящая три различные точки z_1, z_2, z_3 в три соответствующие различные точки w_1, w_2, w_3. Эта Д.-л. ф. определяется формулой

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

Всякое конформное отображение верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$ является дробно-линейным и имеет вид

$$w = \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0} e^{i\alpha},$$

где z_0 — та точка верхней полуплоскости, к-рая переходит в точку $w = 0$, $\alpha - \frac{\pi}{2}$ — угол поворота в точке z_0 (рис. 3).

Всякое конформное отображение круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$ является дробно-линейным и имеет вид

$$w = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z} z_0} e^{i\alpha},$$

где z_0 — та точка единичного круга, к-рая переходит в точку $w=0$, α — угол поворота в точке z_0 (рис. 4).

Всякое конформное отображение полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ является дробно-линейным и имеет вид

$$w = \frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c, d — действительные числа и $ad-bc>0$. *Ю. В. Сидоров.*

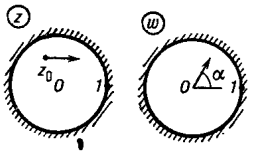


Рис. 4. Дробно-линейное отображение круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$.

ДРО́БНО-ЛИНЕ́ЙНОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — см. *Дробно-линейная функция.*

ДРО́БНО-РАЦИОНА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Рациональная функция.*

ДРО́БНЫХ ША́ГОВ МЕ́ТОД — разностный метод решения нестационарных задач математической физики с p пространственными переменными $x_1, x_2, \ldots, x_p$, в к-ром переход от временно́го слоя t_n к новому слою $t_{n+1}=t_n+\tau_n$ производится посредством последовательного решения p одномерных разностных систем, аппроксимирующих соответствующие нестационарные задачи с меньшим числом пространственных переменных. Напр., если $\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{s=1}^{p} L_s u = 0$ — система обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающая при дискретизации по пространственным переменным смешанной задачи для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{s=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = 0$, то один из наиболее известных вариантов Д. ш. м. приводит к соотношениям

$$\frac{u^{n+s/p} - u^{n+(s-1)/p}}{\tau_n/p} + L_s\left(\frac{u^{n+s/p} + u^{n+(s-1)/p}}{2}\right) = 0,$$

с

$$u^{n+0/p} \equiv u^n \equiv u(t_n),$$

$$u^{n+p/p} \equiv u^{n+1} \equiv u(t_{n+1}).$$

Подобного рода методы известны и под названиями методов расщепления, локально-одномерных разностных схем, аддитивных схем и наряду с методами переменных направлений позволяют в ряде важных случаев получать эффективные сеточные методы решения сложных задач математич. физики.

ДРОБЬ а р и ф м е т и ч е с к а я — число, составленное из целого числа долей единицы. Д. изображается символом $\frac{m}{n}$ (или m/n), где m — ч и с л и т е л ь Д.— показывает число взятых долей единицы, разделённой на столько долей, сколько показывает (знаменует) з н а м е н а т е л ь n. Д. можно рассматривать как частное от деления одного целого числа m на другое n. Если m делится нацело на n, то частное $\frac{m}{n}$ обозначает ц е л о е ч и с л о (напр., $\frac{6}{3}=2$, $\frac{33}{11}=3$). В случае, когда это не так, частное $\frac{m}{n}$ является д р о б н ы м ч и с л о м (напр., $\frac{3}{7}$, $\frac{20}{12}$).

Д. $\frac{m}{n}$ не меняется, если её числитель и знаменатель умножить на одно и то же отличное от нуля целое число. Благодаря этому любые две Д. $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ можно привести к общему знаменателю, т. е. заменить $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ на равные им Д., имеющие один и тот же знаменатель. Кроме того, Д. можно сокращать, поделив её числитель и знаменатель на одно и то же число, вследствие чего всякую Д. можно представить в виде несократимой, т. е. такой, у к-рой числитель и знаменатель не имеют общих делителей, напр. $\frac{16}{72}$ есть сократимая Д. $\left(\frac{16}{72}=\frac{2\cdot 8}{9\cdot 8}=\frac{2}{9}\right)$, а $\frac{27}{64}$ — несократимая.

Сумма и разность Д. $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$ с одинаковыми знаменателями определяются по правилу:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}.$$

Чтобы сложить или вычесть Д. с разными знаменателями, надо предварительно привести их к общему знаменателю. Обычно в качестве общего знаменателя дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ берётся наименьшее общее кратное чисел b и d. Умножение и деление Д. производятся по правилам:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Д. $\frac{a}{b}$ наз. п р а в и л ь н о й, если её числитель меньше знаменателя, и н е п р а в и л ь н о й — в противоположном случае.

Неправильная Д. может быть представлена в виде суммы целого числа и правильной Д. (с м е ш а н н о г о ч и с л а). Для этого надо числитель разделить (с остатком) на знаменатель. Напр., $\frac{91}{17} = \frac{5\cdot 17+6}{17} = 5+\frac{6}{17} = 5\frac{6}{17}$.

Десятичной дробью наз. Д., знаменатель к-рой есть степень числа 10. Такую Д. пишут без знаменателя, напр.,

$$\frac{5\,481\,475}{10\,000} = 548{,}1475; \quad \frac{23}{1000} = 0{,}023.$$

О н е п р е р ы в н ы х (ц е п н ы х) Д. см. *Непрерывная дробь.*

Операции над Д. встречаются уже в древнеегипетском папирусе Ахмеса (ок. 2000 до н. э.), где считаются допустимыми только Д. вида $\frac{1}{n}$ (а л и к в о т н ы е д р о б и), а поэтому ставится задача о представлении любой Д. суммой неравных между собой Д. вида $\frac{1}{n}$ (к последним, в виде исключения, присоединялась ещё Д. $\frac{2}{3}$). Напр., $\frac{7}{29} = \frac{1}{5}+\frac{1}{29}+\frac{1}{145}$.

В древневавилонских памятниках письменности встречаются т. н. сексагезимальные Д., то есть Д., знаменатель к-рых есть степень 60; деление единицы на 60 и $3600=60^2$ частей сохранилось и до нашего времени в делении часа или градуса на 60 мин $\left(\frac{1}{60}\right)$ и каждой минуты на 60 с. У древних индийцев, по-видимому, впервые зародилось современное обозначение Д.

Термин «Д.» вошёл в европейскую математику от арабов через Леонардо Пизанского (1202), термины «числитель» и «знаменатель» встречаются у Максима Плануда (кон. 13 в.).

ДРУ́ЖЕСТВЕННЫЕ ЧИ́СЛА — пара натуральных чисел, каждое из которых равно сумме всех собственных (или правильных) делителей другого, т. е. делителей, отличных от самого числа. Д. ч. 284 и 220, имеющие соответствующую сумму делителей $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$ и $1+2+4+71+142=220$, были известны ещё древним. Приписывая мистич. смысл свойствам чисел, пифагорейцы придавали Д. ч. большое значение. Ок. 60 пар Д. ч. было найдено Л. Эйлером. Использование ЭВМ позволило отыскать ещё несколько сотен пар Д. ч.

ДУА́ЛЬНЫЙ ПОРЯ́ДОК — см. *Частично упорядоченное множество.*

ДУ́ГА, п р о с т а я д у г а, ж о р д а н о в а д у г а,— топологическое пространство, гомеоморфное отрезку числовой оси.

Е, Ж, З

e, число *e*,— обозначение предела, к которому стремится выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при неограниченном возрастании n:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots;$$

служит основанием натуральных логарифмов; e,— трансцендентное число, что впервые доказано Ш. Эрмитом (1873). Иногда число *e* малообоснованно называют неперовым числом.

ЕВБУЛИ́ДА АНТИНО́МИЯ — открытая Евбулидом из Милета (4 в. до н. э.) *антиномия*.

ЕВДО́КСА АКСИО́МА, аксиома Евдокса — Архимеда, аксиома Архимеда,— одна из аксиом о *величинах*. Названа по имени Евдокса Книдского (4 в. до н. э.), сочинения к-рого до нас не дошли. По свидетельству Архимеда, Евдоксу принадлежат приём доказательства методом исчерпывания, основанный на Е. а., учение о несоизмеримости и др.

ЕВКЛИ́ДА АЛГОРИ́ТМ — способ нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел, двух многочленов или общей меры двух отрезков. Описан в геометрич. форме Евклидом (3 в. до н. э.). Для случая положительных чисел a и b, причём $a\geqslant b$, этот способ состоит в следующем. Деление с остатком числа a на число b приводит к результату $a=nb+b_1$, где частное n является целым положительным числом, а остаток b_1 — либо 0, либо положительное число, меньшее b, $0\leqslant b_1<b$. Производится последовательное деление:

$$\left.\begin{aligned} a &= nb+b_1,\\ b &= n_1b_1+b_2,\\ b_1 &= n_2b_2+b_3\\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

(где все n_i — положительные целые числа и $0\leqslant b_i<b_{i-1}$) до тех пор, пока не получится остаток, равный 0. Этот последний остаток b_{k+1} можно не писать, так что ряд равенств (*) закончится так:

$$b_{k-2}=n_{k-1}b_{k-1}+b_k,$$
$$b_{k-1}=n_kb_k.$$

Последний положительный остаток b_k в этом процессе и является наибольшим общим делителем чисел a и b. В случае многочленов или отрезков поступают сходным образом. В случае несоизмеримых отрезков Е. а. приводит к бесконечному процессу.

ЕВКЛИ́ДА ТЕОРЕ́МА о простых числах: множество простых чисел является бесконечным. Первое доказательство этой теоремы приведено в «Началах» Евклида (3 в. до н. э.), книга IX, теорема 20.

ЕВКЛИ́ДОВА ГЕОМЕ́ТРИЯ — геометрическая теория, основанная на системе аксиом, впервые изложенной в «*Началах*» *Евклида* (3 в. до н. э.). Предпринятое во 2-й пол. 19 в. полное исследование аксиом Е. г. показало, что система аксиом, данная в «Началах», не полна. В 1899 Д. Гильберт предложил первую достаточно строгую аксиоматику Е. г. (см. *Гильберта система аксиом*).

Аксиоматика евклидовой геометрии. Современная система аксиом Е. г. состоит из пяти групп и опирается на шесть основных (неопределяемых) понятий. Это — объекты трёх родов: точки, прямые и плоскости, и три вида отношений между ними, выражаемые словами «принадлежит», «между», «движение».

I. Аксиомы принадлежности (инцидентности, соединения, связи, сочетания). I_1. Через каждые две точки можно провести прямую, и притом только одну. I_2. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой. I_3. Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну. I_4. На каждой плоскости есть по крайней мере три точки и существуют хотя бы четыре точки, не лежащие в одной плоскости. I_5. Если две точки данной прямой лежат на данной плоскости, то и сама прямая лежит на этой плоскости. I_6. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют ещё одну общую точку (и, следовательно, общую прямую).

II. Аксиомы порядка. II_1. Если точка B лежит между A и C, то все три точки лежат на одной прямой. II_2. Для каждых точек A, B существует такая точка C, что B лежит между A и C. II_3. Из трёх точек прямой только одна лежит между двумя другими. II_4. Аксиома Паша: если прямая l пересекает одну сторону треугольника (рис. 1), то она пересекает ещё другую его сторону или проходит через вершину (отрезок AB определяется как множество точек, лежащих между A и B; соответственно определяются стороны треугольника).

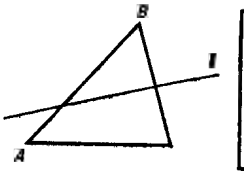


Рис. 1.

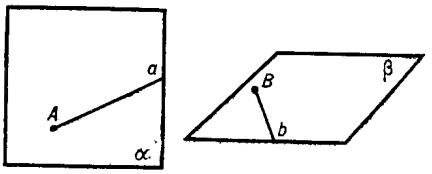


Рис. 2.

III. Аксиомы движения. III_1. Движение ставит в соответствие точкам точки, прямым прямые, плоскостям плоскости, сохраняя принадлежность точек прямым и плоскостям. III_2. Два последовательных движения дают опять движение, и для всякого движения есть обратное. III_3. Если даны точки A, B и полуплоскости α, β, ограниченные продолженными полупрямыми a, b, к-рые исходят из точек A, B, то существует движение (рис. 2), и притом единственное, переводящее A, a, α в B, b, β (полупрямая и полуплоскость легко определяются на основе понятий сочетания и порядка).

IV группа содержит 2 аксиомы непрерывности. IV_1. Аксиома Архимеда. Всякий отрезок

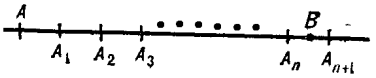


Рис. 3.

AB можно перекрыть меньшим отрезком AA_1, откладывая его на AB достаточное число раз (рис. 3, $AA_1=A_1A_2=\ldots=A_nA_{n-1}$); откладывание отрезка осуществляется движением. IV_2. Аксиома Кантора. Если дана бесконечная последовательность вложенных отрезков A_nB_n, то существует, и притом единственная, точка c, принадлежащая всем отрезкам A_nB_n.

V группа содержит одну аксиому параллельности: через данную точку вне данной прямой можно провести на плоскости не более одной прямой, не пересекающей данную, т. е. не более одной прямой, параллельной данной.

В приведённой системе аксиом III группа содержит аксиомы движения, предложенные в нач. 20 в. Ф. Шуром. У Д. Гильберта в число основных понятий вместо движения входило понятие «конгруэнтность». Соответственно

в системе аксиом Гильберта III группа содержит 5 аксиом конгруэнтности, к-рые описывают отношение «конгруэнтен» (обозначается $\cong$). III_1. Если даны отрезок AB и луч Ox, то на луче Ox существует точка B' такая, что отрезок AB конгруэнтен отрезку OB'; то есть, $AB \cong OB'$. III_2. Если $A'B' \cong AB$ и $A''B'' \cong AB$, то $A'B' \cong A''B''$. III_3. Пусть AB и BC — два отрезка на прямой l (рис. 4), а $A'B'$ и $B'C'$ — два отрезка на прямой l'. Тогда если $AB \cong A'B'$ и $BC \cong B'C'$, то $AC \cong A'C'$. III_4. Если даны угол AOB и луч $O'A'$, ограничивающий вместе со своим продолжением полуплоскость α (рис. 5), то в полуплоскости α существует один и только один луч OB' такой, что $\angle AOB \cong \angle A'O'B'$. III_5. Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ (рис. 6) $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, то $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

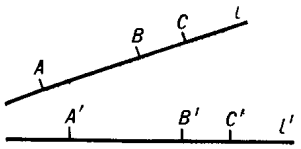


Рис. 4.

За основные могут быть приняты и другие понятия. Так, в аксиоматике В. Ф. Кагана (1905) одним из основных понятий было «расстояние»; в т. н. векторно-точечной аксиоматике основными понятиями являются «точка» и «вектор», связь между к-рыми реализуется сопоставлением паре точек однозначно определённого вектора; в качестве основного понятия может быть принято и отношение симметрии.

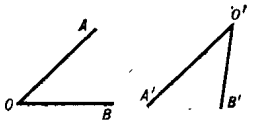


Рис. 5.

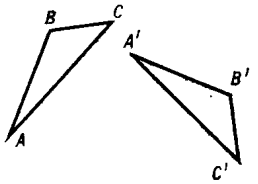


Рис. 6.

С помощью основных понятий Е. г. определяются все остальные понятия Е. г.; все предложения о свойствах геометрич. фигур, не содержащиеся в аксиомах Е. г., должны быть доказаны чисто логич. выводом из этих аксиом. Система аксиом Е. г. обладает свойствами полноты и непротиворечивости. Если в аксиоматике Е. г. заменить аксиому о параллельных, то полученная новая система аксиом (система аксиом *Лобачевского геометрии*) тоже непротиворечива, так что аксиома о параллельных не зависит от остальных аксиом Е. г.

Интерпретация евклидовой геометрии. Объекты, удовлетворяющие изложенной системе аксиом Е. г., допускают различные конкретные истолкования (интерпретации). Обычная интерпретация Е. г., возникшей как отражение фактов действительности, связана с наглядными представлениями об окружающем мире. Вся геометрич. терминология свидетельствует о том, что понятия о геометрич. образах — это абстракция от реальных предметов. Так, напр., слово «точка» происходит от глагола «ткнуть» и означает результат мгновенного прикосновения, укола; тот же смысл имеет и латинское слово «punctum», от к-рого произошли термины «punkt» (точка) и русский термин «пункт». Слово «линия» от латинского linea, в конечном счёте, происходит от латинского linum — лён, льняная нить; таким образом, понятие «линия» является абстракцией от тонкой льняной нити. Часто слово «линия» употребляется в значении «прямая линия» (откуда, напр., «линейка»); понятие «прямая линия» — абстракция натянутой льняной нити. Такое же конкретное значение имеют и термины греческого происхождения: слово «сфера» происходит от греч. σφαῖρα — шар, мяч; «куб» — от κύβος — игральная кость; «цилиндр» — от κύλινδρος — валик, каток; «конус» от κῶνος — кегля, сосновая шишка; «призма» — от πρίσμα — отпиленное; «трапеция» — от τραπέζιον — «столик».

В «Началах» Евклида содержится описание основных объектов как абстракций от реальных предметов окружающего мира. Однако объекты, удовлетворяющие системе аксиом Е. г., допускают бесчисленное множество интерпретаций.

Так, в декартовой интерпретации Е. г. на плоскости точкой наз. любая пара действительных чисел x и y, взятых в определённом порядке (x, y); числа x и y наз. координатами точки. Прямая — совокупность всех точек, координаты к-рых удовлетворяют линейному ур-нию $ax+by+c=0$ (уравнению прямой). Точка принадлежит прямой, если она является одной из её точек, т. е. её координаты удовлетворяют уравнению прямой. Отношение порядка точек на прямой также определяется нек-рыми алгебраич. условиями. Движение заключается в сопоставлении каждой точке (x, y) точки (x', y') по формулам

$$x' = x\cos\theta - \varepsilon y\sin\theta + p,$$
$$y' = x\sin\theta + \varepsilon y\cos\theta + q,$$

где θ, p и q — любые числа, $\varepsilon = \pm 1$, движение по прямой определяется через движение принадлежащих ей точек. При таком конкретном понимании точек и прямых и отношений между ними каждая из аксиом Е. г. представляет собой нек-рое утверждение, относящееся к действительным числам, и имеет место в силу соответствующих предложений арифметики. Поэтому система аксиом Е. г. непротиворечива, если непротиворечива система аксиом арифметики.

● Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.— Л., 1948; Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. 1, М.— Л., 1949; Погорелов А. В., Основания геометрии, 4 изд., М., 1979; Бахман Ф., Построение геометрии на основе понятия симметрии, пер. с нем., М., 1969.

ЕВКЛИ́ДОВО КОЛЬЦО́ — см. *Кольцо*.

ЕВКЛИ́ДОВО ПРОСТРА́НСТВО — 1) пространство, свойства которого описываются аксиомами евклидовой геометрии.

2) Векторное пространство E над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, в котором каждой паре векторов x и y из E ставится в соответствие действительное число (наз. *скалярным произведением* (x, y) этих векторов). Через скалярное произведение в Е. п. определяются длина $|x|$ вектора x и угол $(\widehat{xy})$ между векторами x и y:

$$|x| = \sqrt{(x, x)},$$
$$\cos(\widehat{xy}) = (x, y)/\sqrt{(x, x)(y, y)};$$

а также вводится понятие ортогональности: ортогональными считаются векторы, если их скалярное произведение равно 0.

Примеры Е. п.: 1) Множество всех векторов плоскости или трёхмерного пространства элементарной евклидовой геометрии с обычным скалярным произведением. 2) Конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, в к-ром скалярное произведение векторов $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, \ldots, y_n)$ определено формулой

$$(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

(евклидово n-мерное арифметическое пространство).

Любые два евклидовых пространства одной и той же размерности изоморфны, т. е. существует изоморфизм соответствующих векторных пространств над $\mathbb{R}$, сохраняющий скалярное произведение.

Бесконечномерное Е. п. обычно наз. *предгильбертовым пространством*.

ЕГИ́ПЕТСКАЯ ДРОБЬ — то же, что *аликвотная дробь*.

ЕГО́РОВА ТЕОРЕ́МА — теорема о связи между понятиями сходимости почти всюду и равномерной сходимости последовательности функций. Доказана Д. Ф. Егоровым (1911). См. *Метрическая теория функций*.

ЕДИНИ́ЦА — 1) наименьшее из натуральных чисел $n=1$. При умножении любого числа на 1 получается то же самое число.

2) В множестве предметов или элементов, подвергающихся изучению, часто бывает определена к.-л. бинарная

операция (напр., сложение или умножение для чисел), обозначаемая знаком $*$. Элемент e множества наз. е д и н и ц е й по отношению к этой операции, если для любого элемента a выполняются равенства $a*e=a$ и $e*a=a$. При этом оба равенства независимы, т. е., вообще говоря, $a*b\neq b*a$. В связи с этим особо выделяют левые и правые Е., то есть такие элементы $e_л$ и $e_п$, что $a*e_п=a$, $e_л*a=a$. Если в множестве определено несколько операций (напр., сложение и умножение), то единицей называют Е. по отношению к одной из этих операций (обычно по отношению к умножению; Е. по отношению к сложению наз. н у л ё м).

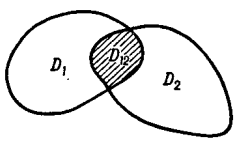
3) В теории алгебраич. чисел и алгебраич. функций Е. наз. д е л и т е л ь е д и н и ц ы, т. е. элемент a, для к-рого можно подобрать такой другой элемент b, чтобы выполнялось равенство $ab=1$.

ЕДИНИ́ЧНЫЙ ВЕ́КТОР — то же, что *орт*.

ЕДИНИ́ЧНЫЙ ОТРЕ́ЗОК — см. *Числовая прямая*.

ЕДИ́НСТВЕННОСТИ КВА́НТОР — см. *Квантор*.

ЕДИ́НСТВЕННОСТИ ТЕОРЕ́МА в т е о р и и а н а л и т и ч е с к и х ф у н к ц и й: две функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, аналитические в области D и совпадающие на каком-либо множестве, которое имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую D, совпадают и во всей области D, то есть $f_1(z)=f_2(z)$. Из Е. т. следует, что если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают на нек-рой кривой, принадлежащей области D, то они тождественно равны во всей области D. В то же время две (даже бесконечно дифференцируемые) функции действительного переменного могут совпадать на части области определения, не совпадая тождественно. Из Е. т. следует также, что если $f_1(z)$ и $f_2(z)$, аналитические в областях D_1 и D_2, имеющих общую подобласть D_{12} (рис.), совпадают в ней, то существует единственная аналитическая в области $D_1 \cup D_2$ функция $F(z)$ такая, что



$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in D_1, \\ f_2(z), & z\in D_2. \end{cases}$$

Функция $F(z)$ наз. *аналитическим продолжением* функции $f_1(z)$ (соответственно, $f_2(z)$) на область $D=D_1 \cup D_2$. Функция $f_2(z)$ (соответственно, $f_1(z)$) также наз. аналитич. продолжением $f_1(z)$ (соответственно, $f_2(z)$) на область D_2 (соответственно, D_1).

ЕДИ́НСТВЕННОСТИ УСЛО́ВИЕ д л я к о н ф о р м н о г о о т о б р а ж е н и я — см. *Конформное отображение*.

ЁМКОСТНАЯ СЛО́ЖНОСТЬ АЛГОРИ́ТМА — см. *Алгоритмов анализ*.

ЁМКОСТЬ к а н а л а с в я з и — то же, что *пропускная способность* канала связи; см. *Информации теория*, *Канал*.

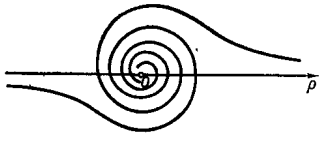
ЕСТЕ́СТВЕННАЯ ГРАНИ́ЦА г о л о м о р ф н о й ф у н к ц и и — см. *Аналитическое продолжение*.

ЖАНР (франц. genre — род) — то же, что род *алгебраической кривой*.

ЖЕГА́ЛКИНА ПОЛИНО́М — полином вида $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\ldots+\mathfrak{A}_s$, где каждая из формул $\mathfrak{A}_i$ есть либо 1, либо переменная, либо *конъюнкция* различных переменных, $\mathfrak{A}_i\neq\mathfrak{A}_j$ при $i\neq j$. См. также *Алгебра логики*. Назван по имени И. И. Жегалкина, изучавшего (1927) множества операций такого вида.

ЖЕЗЛ — плоская трансцендентная кривая. Уравнение в полярных координатах:

$$\rho=\frac{a}{\sqrt{\varphi}}.$$



Кривая (рис.) состоит из двух ветвей (соответствующих положительным и отрицательным значениям ρ), каждая из к-рых имеет асимптоту — ось OP, асимптотич. точку — полюс O, точки перегиба $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm a\sqrt{2})$. Ж. относится к алгебраич. *спиралям*. Кривую описал Р. Котес (1714).

ЖЕРГО́ННА ТО́ЧКА — точка пересечения прямых, соединяющих вершины *треугольника* с точками касания вписанной в него окружности. Названа по имени Ж. Жергонна (19 в.).

ЖОРДА́НА КРИВА́Я — множество точек $M(x, y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнениям: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где φ и ψ — непрерывные функции аргумента t на некотором отрезке $[a, b]$. Иначе, Ж. к. есть непрерывный образ отрезка $[a, b]$. Это определение является одним из возможных строгих определений понятия н е п р е р ы в н о й к р и в о й. Однако Ж. к. может иметь весьма мало общего с тем представлением, к-рое обычно связывается с кривой; напр., Ж. к. может проходить через все точки нек-рого квадрата (см. *Пеано кривая*).

Если точки $M(x, y)$ Ж. к., соответствующие различным значениям t, различны между собой, то такая Ж. к. наз. п р о с т о й д у г о й. Иными словами, простая дуга есть Ж. к. без кратных точек. Простая дуга является гомеоморфным (см. *Гомеоморфизм*) образом отрезка. Если же точки Ж. к., соответствующие $t=a$ и $t=b$, совпадают, а все остальные точки между собой различны и отличны от $M[\varphi(a), \psi(a)]$, то Ж. к. наз. п р о с т ы м з а м к н у т ы м к о н т у р о м. Такая Ж. к. является гомеоморфным образом окружности.

К. Жордан, по имени к-рого названа Ж. к., доказал, что всякая замкнутая Ж. к. без кратных точек делит плоскость на две области, из к-рых одна является внутренней по отношению к этой кривой, а другая внешней. Это предложение носит назв. т е о р е м ы Ж о р д а н а (1882).

ЖОРДА́НА МЕ́ТОД — метод *обращения матрицы*, использующий приведение к жордановой нормальной форме.

ЖОРДА́НА ТЕОРЕ́МА — 1) установленная К. Жорданом (1881) теорема о функциях с ограниченной вариацией. См. *Вариация функции*.

2) Теорема теоретико-множественной топологии. Доказана К. Жорданом (1882). См. *Жордана кривая*.

ЖОРДА́НА — ГЁЛЬДЕРА ТЕОРЕ́МА — одна из классических теорем теории групп. Ж.— Г. т. утверждает: если группа обладает *композиционными рядами*, то любые два её композиционных ряда изоморфны. К. Жордан (1869—70) и О. Гёльдер (1889), занимаясь вопросом о разрешимости уравнений в радикалах, исследовали группы подстановок. Для этих групп К. Жордан ввёл понятие композиционного ряда и доказал, что индексы двух таких рядов (т. е. индексы подгруппы G_{i-1} в G_i), с точностью до расположения, одинаковы. Тем самым было доказано совпадение последовательностей порядков факторов G_{i-1}/G_i двух композиционных рядов с точностью до расположения. О. Гёльдер доказал, что соответствующие друг другу факторы при этом на самом деле изоморфны.

ЖОРДА́НОВА ДУГА́ — см. *Дуга*.

ЖОРДА́НОВА КЛЕ́ТКА — см. *Жорданова матрица*.

ЖОРДА́НОВА МА́ТРИЦА — матрица вида

$$\begin{Vmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_p \end{Vmatrix},$$

где A_i, $i=1, 2, \ldots, p$, есть квадратная матрица

$$\begin{Vmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{Vmatrix}$$

некоторого порядка, наз. ж о р д а н о в о й к л е т к о й (клетка порядка 1 есть элемент λ_i). При этом A_i с различными индексами могут быть равными друг другу.

Квадратная матрица A порядка n над полем K подобна нек-рой Ж. м. J над K (т. е. существует такая невырожденная матрица C над K, что $J=CAC^{-1}$) тогда и только тогда, когда A имеет n собственных значений (считая каж-

дое столько раз, какова его кратность). При этом J наз. жордановой нормальной формой матрицы A; она определена однозначно с точностью до порядка жордановых клеток. В частности, над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел всякая матрица приводится к жордановой нормальной форме. Для унитарных, эрмитовых, косоэрмитовых и, вообще, нормальных матриц над $\mathbb{C}$ их жорданова нормальная форма является диагональной матрицей.

Сформулированная выше теорема о приведении матрицы к жордановой нормальной форме эквивалентна следующему утверждению: для линейного преобразования A n-мерного векторного пространства тогда и только тогда существует базис, в к-ром A записывается Ж. м., когда A имеет n собственных значений, считая каждое столько раз, какова его алгебраич. кратность.

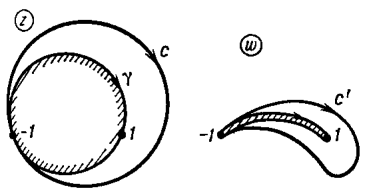
ЖОРДА́НОВА НОРМА́ЛЬНАЯ ФО́РМА матрицы — *жорданова матрица*, подобная данной матрице. Такая нормальная форма рассматривалась одним из первых К. Жорданом (1870).

ЖУКО́ВСКОГО ПРО́ФИЛЬ — см. *Жуковского функция*.

ЖУКО́ВСКОГО ФУ́НКЦИЯ — рациональная функция комплексного переменного $z=x+iy$:

$$w=\lambda(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

важная своими применениями в гидродинамике и аэродинамике; открыта Н. Е. Жуковским (1911). Основное применение Ж. ф.— для построения профилей крыла самолёта, именуемых профилями Жуковского (один из таких профилей изображён на рис.). Ж. ф. позволяет построить конформное отображение внешности круга радиуса единица (единичного круга) на внешность профиля Жуковского (см. рис.), а следовательно, и получить формулы для сил и моментов, действующих на крыло самолёта, движущегося с дозвуковой скоростью.



«ЖУРНА́Л ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНОЙ МАТЕМА́ТИКИ И МАТЕМАТИ́ЧЕСКОЙ ФИ́ЗИКИ» — научный журнал Отделения математики АН СССР. Издаётся в Москве с 1961. Выходит 6 номеров в год. В 1957—61 выходил под назв. «Вычислительная математика». Публикует статьи по приближённым и точным методам решения задач естествознания, техники, экономики, представляющих матем. интерес, и по теоретич. вопросам, возникающим при создании вычислит. машин, программировании на ЭВМ, создании матем. таблиц. Тираж (1987) ок. 2000 экз.

ЗАВИ́СЯЩИЙ ОТ ПАРА́МЕТРА ИНТЕГРА́Л — см. *Интегральное исчисление*.

ЗАМЕ́НЫ ПЕРЕМЕ́ННОГО ПРА́ВИЛО — см. *Интегральное исчисление*.

ЗА́МКНУТАЯ ПОВЕ́РХНОСТЬ — замкнутое ориентируемое *двумерное многообразие*.

ЗА́МКНУТАЯ ПОЛУПЛО́СКОСТЬ — см. *Полуплоскость*.

ЗА́МКНУТАЯ ПОЛУПРЯМА́Я, луч,— см. *Полупрямая*.

ЗА́МКНУТАЯ ФО́РМУЛА — формула без свободных предметных переменных; см. *Модель*.

ЗА́МКНУТОЕ МНОГООБРА́ЗИЕ — см. *Многообразие*.

ЗА́МКНУТОЕ МНО́ЖЕСТВО в топологическом пространстве — множество, содержащее все свои *предельные точки*. Примерами З. м. могут служить отрезок, квадрат, куб и т. д., рассматриваемые со своими граничными точками. Объединение конечного числа и пересечение любого числа З. м. снова будет З. м. Дополнение любого З. м. является *открытым множеством* и наоборот. Среди З. м. особенно выделяются благодаря своим замечательным свойствам совершенные множества, т. е. З. м., не имеющие изолированных точек (см., напр., *Кантарово множество*).

ЗА́МКНУТОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — отображение $f\colon X\to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y такое, что образ любого замкнутого множества замкнут.

ЗА́МКНУТОЕ ПОЛУПРОСТРА́НСТВО — см. *Полупространство*.

ЗА́МКНУТЫЙ ПРОМЕЖУ́ТОК — то же, что сегмент, или отрезок. См. *Интервал и сегмент*.

ЗАМОРО́ЖЕННЫХ КОЭ́ФФИЦИЕ́НТОВ МЕ́ТОД — практический способ исследования устойчивости (корректности) разностных схем, аппроксимирующих дифференциальные уравнения. Применяется при исследовании методов решения сложных, главным образом нелинейных, задач в случаях, когда строгое исследование невозможно на данном этапе развития теории или требует больших затрат времени.

Наиболее часто используется при выборе методов решения нестационарных задач. Наряду с исходной сеточной задачей $L_h(u_h)=0$ рассматривается задача с возмущёнными начальными данными, решение к-рой обозначено через $u_h+\delta_h$: $L_h(u_h+\delta_h)=0$. Линеаризируется уравнение

$$L_h(u_h+\delta_h)-L_h(u_h)=0 \qquad (1)$$

относительно δ_h отбрасыванием членов 2-го порядка малости по δ_h. Получается линейное уравнение

$$M_h\delta_h=0. \qquad (2)$$

Если исходная задача была линейной, то M_h совпадает с L_h.

Пусть (t_0, X_0) — произвольная точка сетки из рассматриваемой области значений аргументов. Замена в уравнении $M_h\delta_h=0$ всех значений коэффициентов и значений приближённого решения u_h на значения в точке (t_0, X_0) даёт уравнение с постоянными коэффициентами:

$$M_h^{(t_0,\,x_0)}\delta_h=0. \qquad (3)$$

Существует более продвинутая теория исследования устойчивости для уравнений с постоянными коэффициентами. После исследования устойчивости (3) получают, напр., что разностная схема устойчива при условии

$$\tau/h^q\leqslant\varphi(t_0,\ X_0,\ u_h(t_0,\ X_0));$$

τ и h — шаги по t и пространственным переменным соответственно.

Далее возможна различная тактика поведения. Иногда из к.-л. соображений выводится оценка Ф снизу для $\varphi(t_0,\ X_0,\ u_h(t_0,\ X_0))$ и шаг сетки берётся из условия

$$\tau/h^q<\varkappa\Phi,$$

где $\varkappa$ — нек-рый страховочный множитель, величина к-рого определяется из численного эксперимента. Для ряда схем берут $\varkappa=0{,}85$, для других $\varkappa=0{,}5$. Чаще оценку снизу для φ вычисляют на каждом временном слое t_n:

$$\Phi_n(t_n)=\inf_X\varphi(t_n,\ X,\ u_n(t_n,\ X)),$$

и выбирают переменный шаг по времени $\tau_n=t_{n+1}-t_n$, удовлетворяющий условию

$$\tau_n/h^q\leqslant\varkappa\Phi(t_n).$$

Тогда предварительная оценка области, где находится приближённое решение, не требуется.

Пример. Для интегрирования уравнения

$$u_t+(\varphi(u))_x=0,\ \varphi'\geqslant 0,$$

используется разностная схема

$$L_h(u_h)=\frac{u_{n+1m}-u_{nm}}{\tau}+\frac{\varphi(u_{nm})-\varphi(u_{nm-1})}{h}=0.$$

Уравнение (1) имеет вид

$$L_h(u_h+\delta_h)-L_h(u_h)=\frac{(u_{n+1m}+\delta_{n+1m})-(u_{nm}+\delta_{nm})}{\tau}+$$
$$+\frac{\varphi(u_{nm}+\delta_{nm})-\varphi(u_{nm-1}+\delta_{nm-1})}{h}=0,$$

уравнение (2):

$$M_h\delta_h=\frac{\delta_{n+1m}-\delta_{nm}}{\tau}+\frac{\varphi'(u_{nm})\,\delta_{nm}-\varphi'(u_{nm-1})\,\delta_{nm-1}}{h}=0,$$

уравнение (3):

$$\frac{\delta_{n+1m}-\delta_{nm}}{\tau}+\varphi'(u_{n_0m_0})\frac{\delta_{nm}-\delta_{nm-1}}{h}=0.$$

Считая $u_{n_0m_0}$ фиксированным, получают условие устойчивости $\varphi'(u_{n_0m_0})\tau/h\leqslant 1$.

В данном случае $\varkappa$ можно взять равным 1 и шаг $\tau_n=t_{n+1}-t_n$ выбирать из условия

$$(\max_m \varphi'(u_{nm}))\tau_n/h\leqslant 1.$$

В линейном случае, по-видимому, не известно ни одной задачи с дифференцируемыми коэффициентами, где применение З. к. м. приводит к неправильным суждениям по поводу устойчивости. *Н. С. Бахвалов.*

ЗАМЫКА́НИЕ множества — см. *Прикосновения точка.*

ЗАМЫКА́НИЕ ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНОГО АЛГОРИ́ТМА — система уравнений

$$L_z u=f_z,\quad 0\leqslant z\leqslant Z, \tag{1}$$

предельная при $h\to 0$, $z(m,h)\to z$ для системы частично разрешённых уравнений

$$L_m^h u^h=f_m^h,\quad m=0,\ 1,\ \ldots,M, \tag{2}$$

описывающих последовательные этапы вычислительного алгоритма решения уравнения

$$L^h u^h=f^h \tag{3}$$

(напр., сеточного уравнения, тогда h — шаг сетки), аппроксимирующего при $h\to 0$ уравнение

$$Lu=f.$$

При этом $L_0^h=L^h$, $f_0^h=f^h$, L_M^h — тождественный оператор, $f_M^h=(L^h)^{-1}f^h=u^h$, т. е. на M-м этапе алгоритма получается окончательное решение аппроксимирующего уравнения (3). Функция $z(m,h)$ предполагается возрастающей вместе с m (обычно линейной возрастающей) и удовлетворяющей граничным условиям $z(0,h)=0$, $z(M,h)=Z$. Не исключается возможность $M=\infty$; в этом случае L_∞^h, f_∞^h, $z(\infty,h)$ понимаются как пределы переменных L_m^h, f_m^h, $z(m,h)$ при $m\to\infty$. Случай $M=\infty$ соответствует итерационным методам решения уравнения (3).

Если операторы L_z в уравнении (1) ограничены равномерно по z, то говорят, что алгоритм (2) имеет регулярное замыкание. Хотя наличие регулярного замыкания не обязательно для реальной устойчивости алгоритма, построение З. в. а. иногда помогает при исследовании устойчивости алгоритма к различным возмущениям, в частности к вычислительной погрешности.

Обратная операция — построение по непрерывному процессу дискретного алгоритма, имеющего этот процесс своим замыканием,— бывает полезной при конструировании новых методов решения задач. Например, ряд итерационных методов имеет своим замыканием процессы установления.

ЗАОСТРЕ́НИЯ ТО́ЧКА — см. *Особая точка* кривой.

ЗАПЯТА́Я — термин, относящийся к представлению действительного числа дробью, к способу представления действительных чисел в цифровой вычислительной машине.

Пусть выбрана система счисления с основанием q и пусть для действительного числа x имеет место разложение

$$x=\sum_{k=-\infty}^{n}\alpha_k q^k, \tag{1}$$

где α_k — целые числа, заключённые в пределах от 0 до $q-1$. В представлении числа x q-ичной дробью

$$x=(\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0,\ \alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots). \tag{2}$$

З. (так наз. q-ичная запятая) разделяет коэффициенты разложения (1), относящиеся соответственно к неотрицательным и отрицательным степеням q.

По способу представления действительных чисел цифровые вычислительные машины делятся на машины с фиксированной З. и машины с плавающей З.

Арифметика с фиксированной запятой предполагает, что все числа имеют модуль, меньший 1. Для хранения коэффициентов α_{-1}, α_{-2}, ... отводится фиксированное число разрядов. Если при выполнении арифметич. операции над числами с фиксированной З. результат имеет модуль, больший 1, то выполнение программы прерывается и выдаётся сигнал переполнения. Чтобы избежать этого, программист заранее должен предусмотреть возможность переполнения и предупредить его соответствующим масштабированием. Трудности программирования для арифметики с фиксированной З. объясняют тот факт, что большинство современных ЭВМ используют арифметику с плавающей З. Число с плавающей запятой имеет вид

$$x=\pm q^p\sum_{k=1}^{t}\alpha_k q^{-k},$$

при этом p наз. порядком, а $(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$ — мантиссой числа x. Для хранения порядка и мантиссы числа с плавающей З. обычно отводится фиксированное число разрядов (определяемое длиной машинного слова), что вызывает ограничения на величину порядка такого числа. Число с плавающей З., у к-рого $\alpha_1\neq 0$, наз. нормализованным числом. Обычно результаты арифметич. операций в машине с плавающей З. автоматически нормализуются суммирующим устройством машины.

ЗАРИ́СКОГО ТОПОЛО́ГИЯ — предложенная О. Зариским (1944) топология; играет важную роль в алгебраической геометрии. См. *Алгебраическое многообразие.*

ЗЕ́ЙДЕЛЯ МЕ́ТОД — итерациониый метод решения системы линейных алгебраических уравнений $Ax=b$, матрица $A=\|a_{ij}\|$ которой имеет отличные от нуля диагональные элементы.

В З. м. k-е приближение

$$x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}$$

вычисляется по правилу

$$x_i^{(k)}=-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k)}-\sum_{j\ i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k-1)}+\frac{b_i}{a_{ii}},\quad (*)$$

где x_i^0 — произвольны, b_i — компоненты вектора b, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

В обозначениях $A=B+C$, где

$$B=\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n}\\ 0 & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\end{Vmatrix},$$

вычисления (*) могут быть записаны в виде

$$x^{(k)}=-Cx^{(k-1)}+B^{-1}b.$$

З. м. равносилен методу простой итерации, применённому к системе $x=-B^{-1}Cx+B^{-1}b$, эквивалентной исходной. Итерации (*) по З. м. отличаются от простых итераций тем, что при вычислении i-й компоненты k-го приближения используются уже найденные компоненты k-го приближения с меньшими номерами.

Для сходимости З. м. достаточно выполнения одного из двух условий:

1) $\sum_{j\neq i}|a_{ij}|<|a_{ii}|,\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;$

2) A — эрмитова положительно определённая матрица.

Метод предложен Л. Зейделем (1874).

ЗЕНО́НА АПОРИ́И — выдвинутые Зеноном Элейским (5 в. до н. э.) *антиномии.*

ЗЕРКА́ЛЬНОЕ ОТРАЖЕ́НИЕ — *симметрия* относительно прямой на плоскости или симметрия относительно плоскости в пространстве.

ЗИ́ГЕЛЯ ТЕОРЕ́МА — теорема о конечности числа решений одного класса диофантовых уравнений (см. *Диофантова геометрия*). Получена К. Зигелем (1929).

ЗНАКОПЕРЕМЁННАЯ ГРУ́ППА — группа всех чётных *подстановок* данного порядка n.

ЗНАКОПЕРЕМЁННАЯ МА́ТРИЦА — см. *Кососимметрическая матрица.*

ЗНАКОЧЕРЕДУ́ЮЩИЙСЯ РЯД, знакопеременный ряд,— ряд, члены которого попеременно положительны и отрицательны:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots;\quad u_i>0.$$

Если члены З. р. монотонно убывают по абсолютной величине ($u_{n+1}\leqslant u_n$) и стремятся к нулю ($\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$), то ряд сходится (признак Лейбница, 1682). Остаток сходящегося З. р.

$$r_n=(-1)^n u_{n+1}+\ldots$$

имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине. Простейшие примеры сходящихся З. р.:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots=\ln 2,$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

ЗНАМЕНА́ТЕЛЬ арифметической дроби m/n — число n, показывающее (знаменующее) размеры долей единицы, из которых составлена дробь. Термин «З.» впервые встречается у Максима Плануда (кон. 13 в.).

ЗНАМЕНА́ТЕЛЬ геометрической прогрессии — см. *Геометрическая прогрессия.*

ЗНА́ЧАЩАЯ ЦИ́ФРА — термин, относящийся к приближённому заданию действительного числа. Пусть в системе счисления с основанием q для действительного числа x получено приближённое представление q-ичной дробью

$$x\approx x^*=(\alpha_n\ldots\alpha_1\alpha_0,\ \alpha_{-1}\alpha_{-2}\ldots\alpha_{-m}).$$

Пусть при этом α_s — первая ненулевая цифра, считая слева. Тогда и все последующие цифры наз. значащими цифрами приближённого числа x^*.

З. ц. α_t наз. верной, если абсолютная погрешность $\Delta(x^*)$ числа x^*, то есть величина $|x-x^*|$, удовлетворяет неравенству

$$\Delta(x^*)\leqslant\frac{1}{2}q^t.$$

ЗНАЧЕ́НИЕ ИГРЫ — см. *Антагонистическая игра, Матричная игра, Дифференциальные игры.*

ЗНА́ЧИМОСТИ КРИТЕ́РИЙ — см. *Значимости уровень, Статистических гипотез проверка.*

ЗНА́ЧИМОСТИ УРОВЕ́НЬ статистического критерия — вероятность ошибочно отвергнуть основную проверяемую гипотезу, когда она верна. В теории статистич. проверки гипотез З. у. наз. вероятностью ошибки первого рода. Понятие «З. у.» возникло в связи с задачей проверки согласованности теории с опытными данными. Если, напр., в результате наблюдений регистрируются значения n случайных величин $X_1,\ldots,X_n$ и если требуется по этим данным проверить гипотезу H, согласно к-рой совместное распределение величин $X_1,\ldots,X_n$ обладает нек-рым определённым свойством, то соответствующий статистич. критерий конструируется с помощью подходящим образом подобранной функции $Y=f(X_1,\ldots,X_n)$; эта функция обычно принимает малые значения, когда гипотеза H верна, и большие значения, когда H ложна. В частности, если $X_1,\ldots,X_n$ — результаты независимых измерений нек-рой известной постоянной a и гипотеза H представляет собой предположение об отсутствии в результатах измерений систематич. ошибок, то для проверки H разумно в качестве Y выбрать $(2m-n)^2$, где m — количество тех результатов измерений X_i, к-рые превышают истинное значение a. Наблюдаемое в опыте большое значение Y можно рассматривать как значимое статистич. опровержение гипотетич. согласия между результатами наблюдений и проверяемой гипотезой. Соответствующий критерий значимости представляет собой правило, согласно к-рому значимыми считаются значения Y, превосходящие заданное критич. значение y. В свою очередь выбор величины y определяется заданным З. у., к-рый в случае справедливости гипотезы H совпадает с вероятностью события $\{Y>y\}$. Примеры критериев значимости см. в статьях *Статистических гипотез проверка, Стьюдента критерий, Хи-квадрат критерий.*

При выборе З. у. следует учитывать ущерб, неизбежно возникающий при использовании любого критерия значимости. Так, напр., если З. у. чрезмерно велик, то основной ущерб будет происходить от ошибочного отклонения правильной гипотезы; если же З. у. мал, то ущерб будет, как правило, возникать от ошибочного принятия гипотезы, когда она ложна. Практически при обычных статистич. расчётах в качестве З. у. выбирают вероятность в пределах от 0,01 до 0,1. Значения З. у., меньшие, чем 0,01, используются, напр., при статистич. выявлении токсичных медицинских препаратов, а также в других особых случаях, когда первостепенное значение приобретает гарантия от ошибочного отклонения проверяемой гипотезы.

ЗОЛОТО́Е СЕЧЕ́НИЕ, гармоническое деление, деление в крайнем и среднем отношении,— деление отрезка AB на две части таким образом, что бо́льшая его часть AC является средней пропорциональной между всем отрезком AB и меньшей его частью CB (рис.). Алгебраич. нахождение З. с. отрезка $AB=a$ сводится к решению уравнения $a:x=x:(a-x)$ (где $x=AC$), откуда $x=(\sqrt{5}-1)a/2\approx 0{,}62a$. Отношение x к a может быть также выражено приближённо дробями $^2/_3$, $^3/_5$, $^5/_8$, $^8/_{13}$, $^{13}/_{21}$, ..., где 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...— *Фибоначчи числа.* Геометрически построение З. с. отрезка AB осуществляется так: в точке B восстанавливают перпендикуляр к AB, на нём откладывают отрезок $BE=\frac{1}{2}AB$, соединяют A и E, откладывают $ED=EB$ и, наконец, $AC=AD$, тогда будет $AB:AC=AC:CB$.

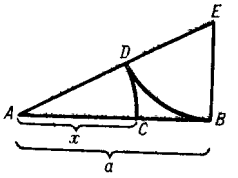


Рис. 1.

В дошедшей до нас античной литературе З. с. впервые встречается во II книге «Начал» Евклида, где даётся геометрич. построение З. с., равносильное решению квадратного уравнения вида $x(a+x)=a^2$. Евклид применяет З. с. при построении правильных 5- и 10-угольников (IV и XIV книги), а также в стереометрии при построении правильных 12- и 20-гранников. Несомненно, что З. с. было известно и до Евклида. Весьма вероятно, что задача З. с. была решена ещё пифагорейцами, к-рым приписываются построение правильного 5-угольника и геометрич. построения, равносильные решению квадратных уравнений. После Евклида исследованием З. с. занимались Гипсикл (2 в. до н. э.), Папп Александрийский (3 в. н. э.) и др. В средневековой Европе с З. с. познакомились по арабским переводам «Начал» Евклида. Переводчик и комментатор Евклида Дж. Кампано из Новары (13 в.) добавил к XIII книге «Начал» предложение, содержащее арифметич. доказательство несоизмеримости отрезка и обеих частей его З. с.

Рис. 2.

В 15—16 вв. усилился интерес к З. с. среди учёных и художников в связи с его применениями как в геометрии, так и в искусстве, особенно в архитектуре. Л. Пачоли посвятил З. с. трактат «О божественной пропорции» (1509); о З. с. много писал в

одном из своих ранних произведений И. Кеплер (1596). Термин «З. с.» ввёл Леонардо да Винчи (кон. 15 в.). З. с. или близкие ему пропорциональные отношения легли в основу композиционного построения многих произведений мирового искусства (гл. обр. в архитектуре античности и Возрождения), напр. Капелла Пацци во Флоренции, архитектор Ф. Брунеллески, 15 в. (рис. 2).

● Пидоу Д., Геометрия и искусство, пер. с англ., М., 1979.

И, Й

ИГР ТЕОРИЯ — раздел математики, предметом которого является изучение математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта. При этом под к о н ф л и к т о м понимается всякое явление, в к-ром участвуют различные стороны, называемые множествами и г р о к о в и наделённые несовпадающими интересами. Как содержательная природа, так и структура конфликтов, охватываемая теоретико-игровыми рассмотрениями, весьма разнообразны. К конфликтам в этом понимании слова относятся многие явления экономического, социального, правового, военного и т. д. содержания, а также спортивные состязания и т. н. салонные игры (в т. ч. шахматы, шашки, го, карточные игры, домино). В условиях конфликта стремление противника скрыть свои предстоящие действия порождает неопределённость. Наоборот, неопределённость при принятии решений (напр., на основе недостаточных данных) можно интерпретировать как конфликт принимающего решения субъекта с природой (или с др. субъектом). Поэтому И. т. может также рассматриваться как теория принятия оптимальных решений в условиях неопределённости. Это помогает математизировать нек-рые важные аспекты принятия решений в технике, сельском хозяйстве, медицине и социологии. Перспективен подход с позиций И. т. к проблемам управления, планирования и прогнозирования.

Отдельные математич. соображения по поводу конфликтов высказывались (начиная с 17 в.) многими учёными. Систематич. математич. И. т. была разработана Дж. Нейманом и О. Моргенштерном (1944) как средство математич. подхода к явлениям конкурентной экономики.

Оптимизационная направленность И. т. означает, что И. т. занимается изучением нормативного аспекта конфликтов, т. е. вопросов, касающихся в том или ином смысле разумного, целесообразного поведения участвующих в нём сторон. Напротив, непосредственно в И. т. не входит рассмотрение ни конструктивного аспекта конфликтов, имеющего дело с принятием оптимальных решений в конкретной реальной обстановке и их претворением в жизнь, ни прогностич. аспекта, связанного с предсказанием исхода того или иного конкретного конфликта.

Исходными понятиями каждого из разделов И. т. являются различные варианты понятия и г р ы как формального представления о конфликте и соответствующие им варианты понятия оптимальности. При этом как содержание, так и формальные выражения различных принципов оптимальности даже для одного и того же класса игр могут быть весьма разнообразными и даже противоречащими друг другу. Формулировка принципов оптимальности может осуществляться на основе интуитивных представлений о целесообразном, формализуемых в рамках аксиоматич. подхода. При этом аксиомы отражают интуитивные представления об отдельных чертах оптимальности, а фактически — о чертах выгодности, устойчивости и справедливости, давая в совокупности то или иное истолкование этих понятий.

Основой проблематики И. т. является выработка применительно к тому или иному классу игр принципов оптимальности и установление связей между математич. свойствами игр и их классов, с одной стороны, и математич. свойствами реализаций для них этих принципов оптимальности — с другой. Наиболее слабой формой таких связей является реализуемость принципов оптимальности (т. е. существование у игр из рассматриваемого класса таких исходов, к-рые удовлетворяют выработанным принципам оптимальности), а наиболее сильной формой — полное перечисление таких реализаций, к-рые и являются «решениями» игр в соответствующем смысле. Решение задач каждого из этих типов — описание оптимальности, установление её реализуемости и нахождение свойств реализаций, вплоть до исчерпывающего перечисления этих реализаций,— требует, вообще говоря, преодоления значительных математич. трудностей как концептуальных, так и технических.

Точное описание конфликта в виде игры состоит в указании того, кто и как участвует в конфликте, каковы его возможные исходы, а также, кто и в какой форме заинтересован в этих исходах.

В современной И. т. базовым классом игр считаются *бескоалиционные игры* с выигрышами. Каждая такая игра характеризуется конечным множеством своих игроков $I=\{1, \ldots, n\}$, семейством множеств стратегий $\{X_i\}_{i\in I}$ и семейством функций выигрыша $\{H_i\}_{i\in I}$, задаваемых на множестве всех ситуаций $X=\Pi_{i\in I}X_i$ и принимающих действительные значения. Содержательно каждая бескоалиционная игра сводится к произвольному выбору каждым из игроков $i\in I$ нек-рой своей стратегии $x_i\in X_i$ с последующим получением выигрыша $H_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Класс бескоалиционных игр может служить основой математически интересных и практически важных обобщений. Прежде всего, можно допустить, что игроки выбирают свои стратегии не независимо друг от друга, а возможны объединения нек-рых игроков в коалиции, в к-рых они могут выбирать свои стратегии согласованно. Такое допущение иногда молчаливо предполагается, т. к. объединение игроков в коалицию $K\subset I$ формально не увеличивает их возможности выбора стратегий: множеством стратегий коалиции является декартово произведение $X_K=\Pi_{i\in K}X_i$, к-рое может быть реализовано и при независимых выборах игроками своих стратегий. Однако возможность образования коалиций влияет на определение оптимального поведения игроков, формализуемого в принципах оптимальности, зависящих от множества разрешённых коалиций.

Отказ от условия конечности множества I приводит к понятию и г р ы с б е с к о н е ч н ы м м н о ж е с т в о м и г р о к о в. Важным для теории и приложений случаем является тот, когда I есть пространство с неатомич. мерой (т. е. когда никакой элемент I не имеет положительной меры), а функции выигрыша H_i не изменяют своих значений при изменении стратегий игроками из множества нулевой меры. Такие неатомич. игры могут служить математич. моделями массового поведения.

Обобщение в другом направлении получается, если сравнивать ценности ситуаций для игроков не по численным величинам выигрышей в них, а по отношению предпочтительности, к-рое может задаваться и чисто качественным, нечисленным путём.

Ещё одно обобщение (и г р ы с з а п р е щ ё н н ы м и с и т у а ц и я м и) получится, если считать ситуациями не произвольные комбинации стратегий игроков, а лишь

нек-рые, составляющие заданное множество, описание к-рого входит в число правил игры.

Наложение на компоненты бескоалиционной игры тех или иных ограничений приводит к разнообразным частным классам таких игр. Если все множества X_i конечны, то игра наз. конечной. Если $n=2$ и $H_1=H=-H_2$, то игра Г наз. *антагонистической игрой*. Конечная антагонистич. игра наз. *матричной игрой*. Антагонистич. игра с X_1 $X_2=[0,1]$ наз. игрой на единичном квадрате.

Одним из простейших примеров бескоалиционной игры может служить «морра» в следующем своем варианте. Три игрока показывают одновременно 1 или 2 пальца каждый. Если все три игрока показывают одно и то же число, то выигрыш каждого равен нулю. В противном случае два игрока, показывающие одно и то же число не получают ничего, а оставшийся игрок, единственный, показывающий число a (=1 или 2), получает из нек-рого источника (напр., из банка, образованного предварительными взносами) a единиц.

Предположение об однократных и независимых выборах игроками своих стратегий фактически является весьма общим и охватывает как частные случаи различные возможности взаимной информированности игроков, выполнения ими поочерёдных ходов в игре, осуществление каждым игроком выбора своей стратегии в виде последовательности частичных, уточняющих друг друга решений и т. д. Игры, обладающие перечисленными конкретными особенностями, принадлежат к числу *позиционных игр* (или *динамических игр*) либо непосредственно сводятся к ним.

В качестве примера позиционной игры можно привести шахматы. В этой игре участвуют два игрока (белые и чёрные). Стратегия каждого игрока есть мыслимое (хотя практически и не поддающееся детальному описанию) правило выбора для каждой позиции нек-рого хода, допускаемого движениями фигур. Число стратегий каждого игрока в шахматах хотя и чрезвычайно велико, но конечно. Как и в подавляющем большинстве позиционных игр, в шахматах стратегии не выбираются игроками до начала игры, а реализуются постепенно, ход за ходом. Функции выигрыша белых можно приписать значение 1 на выигрываемых партиях, 0 на ничейных и —1 на проигрываемых (такой способ начисления очков по существу не отличается от принятого в турнирной и матчевой практике). Функция выигрыша чёрных отличается от функции выигрыша белых только знаком. Шахматы относятся к числу антагонистических, и притом матричных, игр.

Важной разновидностью динамич. игр являются *дифференциальные игры*, изучаемые также в математич. теории управления. В них стратегиями игроков являются нек-рые допустимые управления заданной динамич. системой.

Основой большинства принципов оптимальности в бескоалиционных играх является тот вариант идеи устойчивости, к-рый можно назвать приемлемостью. Ситуация x в игре Г наз. приемлемой для коалиции $K\subset I$ (или, иначе, K-оптимальной), если одновременное отклонение игроков из K от их стратегий, входящих в x, не улучшит ситуации с точки зрения коалиции K. При этом возможны различные варианты понимания этого неулучшения: неувеличение выигрыша сразу для всех игроков, входящих в K; неувеличение суммарного выигрыша игроков из K; возможность увеличения выигрышей одних игроков из K лишь за счёт уменьшения выигрышей других игроков из K (обладающая таким свойством ситуация наз. оптимальной по Парето для коалиции K), и т. д. Если коалиция K состоит из единственного игрока i, то все эти варианты приемлемости совпадают. Ситуация, приемлемая (оптимальная) для каждой коалиции из нек-рого набора коалиций $\mathfrak{K}=\{K_1, \ldots, K_k\}$, наз. $\mathfrak{K}$-устойчивой. Если набор $\mathfrak{K}$ состоит из всех отдельных игроков (как бы $\mathfrak{K}=I$), то $\mathfrak{K}$-устойчивая ситуация наз. равновесной (по Нэшу). Можно конструировать и иные принципы оптимальности.

В частном случае антагонистич. игры каждый из перечисленных вариантов принципа оптимальности, основанных на приемлемости ситуаций, превращается в принцип максимина (наз. также принципом гарантированного результата), состоящий в выборе игроком такой стратегии, чтобы максимизировать свой выигрыш в наименее благоприятных условиях, т. е. какую бы стратегию противник ни выбрал. Такие стратегии наз. максиминными. Аналогично можно говорить и о принципе максимина в общей бескоалиционной игре применительно к суммарному выигрышу любой коалиции (предполагая противодействие коалиции, состоящей из всех остальных игроков). Жёсткая фиксация принципа максимина задаёт для каждой коалиции $K\subseteq I$ нек-рый её максимальный выигрыш $v(K)$. Тем самым стратегич. аспект игры снимается, и черты конфликтности сохраняются в виде проблемы распределения общего возможного выигрыша $v(I)$ между игроками. Эта проблема порождает дальнейшие разнообразные принципы оптимальности и связанные с ними задачи, составляющие т. н. кооперативную теорию игр.

Каждый принцип оптимальности, сформулированный для того или иного класса игр, представляет для каждой конкретной игры из этого класса практич. интерес лишь в том случае, когда он реализуем, т. е. когда в этой игре существуют исходы, удовлетворяющие этому принципу оптимальности. Именно поэтому один из основных теоретич. вопросов, относящихся к использованию принципа оптимальности в данном классе игр, состоит в выяснении, реализуем ли он для каждой игры из этого класса, и если нет, то при соблюдении каких дополнительных условий эта реализуемость будет иметь место.

Если принцип оптимальности задаётся аксиоматически, то его реализуемость означает непротиворечивость соответствующей аксиоматики. Все реализации принципа оптимальности в заданной игре представляются с точки зрения этого принципа равноправными. Поэтому принцип оптимальности тем более нормативен и эффективен, чем меньше число его реализаций. Для аксиоматически заданного принципа оптимальности единственность его реализации означает полноту аксиоматики.

Если принцип оптимальности, представляющийся достаточно естественным для игр из нек-рого класса, применительно к конкретной игре из этого класса не реализуем (т. е. если игра в смысле этого принципа неразрешима), то, подобно тому как это делается в других разделах математики, принято ставить вопрос о таких обобщениях понятия ситуации (обычно через обобщение понятия стратегии), что среди ситуаций в новом, обобщённом смысле реализации принципа оптимальности уже заведомо найдутся.

В качестве обобщённых стратегий бескоалиционных игр рассматриваются смешанные стратегии (вероятностные меры на множествах исходных стратегий, к-рые наз. при этом чистыми), сверхстратегии (последовательности стратегий — ответов на исходы предыдущих партий при повторяющихся разыгрываниях игры), метастратегии (ответы игроков на стратегии других игроков и коалиций), а также другие конструкции.

Доказательства существования реализаций принципов оптимальности (решений игр) в И. т. в бесконечных случаях обычно используют такие неконструктивные средства, как теоремы о неподвижной точке, выбор из последовательностей сходящихся подпоследовательностей, и т. д., а в конечных случаях — разнообразные комбинаторные приёмы, также обычно неэффективные. Поэтому весьма существенным оказывается восполнение этих теорем существования конструктивными приёмами фактич. нахождения решений игры. Теорему о существовании в шахматах максиминных стратегий доказал Э. Цермело. Это значит, что в шахматах уже в начальной позиции либо имеется способ выигрыша за белых, либо способ выигрыша за чёрных, либо как та, так и другая сторона способна форсировать ничью. Вместе с тем такие способы (т. е. страте-

гии) не найдены и даже неизвестно, какая из трёх перечисленных возможностей имеет место на самом деле.

Рассмотрение реализаций принципов оптимальности позволяет выявлять качественные принципиальные различия между конфликтами. Напр., все ситуации равновесия в смешанных стратегиях для конечных бескоалиционных игр двух лиц (т. н. биматричные игры) описываются через значения функций выигрыша рационально (т. е. получаются путём выполнения конечного числа арифметич. действий). Напротив, в характеризации единственной состоящей из смешанных стратегий ситуации равновесия в описанной выше игре «морра» участвует иррациональное число $\sqrt{2}$. Таким образом, имеются бескоалиционные игры трёх лиц, исследование к-рых принципиально не сводится к исследованию биматричных игр.

Фактич. решение нек-рых классов антагонистич. игр сводится к решению дифференциальных и интегральных уравнений иногда весьма нетрадиционных типов, а решение матричных игр — к решению стандартной задачи линейного программирования. Разрабатываются приближённые и численные методы решения игр.

И. т., созданная для математич. решения задач экономического и социального происхождения, не может в целом ограничиваться использованием классич. математич. теорий. Поэтому И. т. не только широко использует результаты из различных разделов математики, но и даёт повод к разработке отдельных новых математич. вопросов. В И. т. систематически и по существу употребляются понятия теории вероятностей. На языке И. т. можно сформулировать большинство задач математич. статистики. Более того, теоретико-игровой подход позволяет получать в этой области новые результаты, напр., относящиеся к т. н. статистике малых выборок. Необходимость при анализе игр количественного учёта неопределённости предопределяет связь И. т. с теорией информации и через её посредство — с кибернетикой. Кроме того, И. т., будучи теорией принятия решений, может рассматриваться как существенная составная часть математич. аппарата исследования операций.

И. т. применяется в экономике, технике, социальной психологии, военном деле. Основные трудности практич. применения И. т. связаны со сложностью и недостаточной разработанностью количественного представления многих аспектов социальных и экономич. процессов. Серьёзную проблему представляет информационное обеспечение моделей такого рода.

● Нейман Дж., Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, пер. с англ., М., 1970; Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, пер. с англ., М., 1964; Оуэн Г., Теория игр, пер. с англ., М., 1971; Ауман Р., Шепли Л., Значения для неатомических игр, пер. с англ., М., 1977; Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г., Введение в прикладную теорию игр, М., 1981; Воробьев Н. Н., Основы теории игр. Бескоалиционные игры, М., 1984; его же, Теория игр для экономистов и кибернетиков, М., 1985.

Н. Н. Воробьёв.

ИГРА́ — см. *Игр теория.*

ИГРА́ БЕЗ ПОБО́ЧНЫХ ПЛАТЕЖЕ́Й — кооперативная игра, в которой, в отличие от классической кооперативной игры, не предполагается измерение полезностей игроков в одной и той же шкале (трансферабельность полезностей) либо не разрешена передача выигрышей от одних игроков другим (побочные платежи).

ИГРА́ ДВУХ ЛИЦ с нулевой суммой — то же, что *антагонистическая игра.*

ИГРА́ НА ЕДИНИ́ЧНОМ КВАДРА́ТЕ — см. *Игр теория.*

ИГРА́ ПРЕСЛЕ́ДОВАНИЯ — УКЛОНЕ́НИЯ — см. *Дифференциальные игры.*

ИГРА́ С ПО́ЛНОЙ ИНФОРМА́ЦИЕЙ — см. *Позиционная игра.*

ИГРО́К — индивидуальное действующее и заинтересованное начало в игре. См. *Игр теория.*

ИДЕА́Л (франц. idéal) — специального рода подобъект в некоторой алгебраической структуре. Назв. «И.» ведёт своё происхождение от *идеальных чисел.* Понятие «И.» ввёл Р. Дедекинд (1870). Из алгебраич. теории чисел это понятие перешло в абстрактную алгебру, где применялось первоначально для колец, а затем и для полугрупп, решёток и более общих алгебраич. структур.

Для алгебры (над полем), кольца или полугруппы A идеал I есть подалгебра, подкольцо или подполугруппа, замкнутая относительно умножения на элементы из A. При этом I наз. левым (соответственно правым), если он замкнут относительно умножения слева (соответственно справа) на элементы из A, т. е.

$$AI=I \text{ (соответственно, } IA=I),$$

где $AI=\{ab \mid a\in A,\ b\in I\}$, $IA=\{ba \mid a\in A,\ b\in I\}$. И., являющийся одновременно левым и правым (т. е. выдерживающий любые умножения на элементы из A), наз. двусторонним. В коммутативном случае все эти три понятия совпадают. Любому утверждению о левых И. отвечает двойственное утверждение о правых И. (далее формулировки будут приводиться только в «левом случае»).

Двусторонние И. в кольцах и алгебрах играют ту же роль, что и нормальные подгруппы в группах. Для всякого гомоморфизма $f\colon A\to B$ ядром (т. е. множеством элементов, отображающихся в 0) служит И., и обратно, всякий И.— ядро нек-рого гомоморфизма. Более того, И. однозначно (с точностью до изоморфизма) определяет образ гомоморфизма f, ядром к-рого он служит,— факторкольцо A/I (соответственно, факторалгебру). Для полугрупп, напротив, двусторонние И. не дают описания всех гомоморфных образов данной полугруппы. Если задан гомоморфизм f полугруппы A на полугруппу B, то только в случае, когда B — полугруппа с нулём, с f естественно связан двусторонний И. $f^{-1}(0)$, к-рый, однако, не обязан однозначно определять гомоморфизм f.

Для любого подмножества $X\subset A$ можно определить И., порождённый X, как пересечение всех И., содержащих множество X. При этом разные множества могут порождать один и тот же И. Идеал, порождённый одним элементом, наз. главным.

Пересечение, а в случае полугрупп и объединение левых (двусторонних) И. снова будет левым (двусторонним) И. Для колец и алгебр теоретико-множественное объединение И. не обязано быть И. Суммой I_1 и I_2 наз. минимальный идеал, содержащий оба эти И.

И. мультипликативной полугруппы кольца может и не быть И. кольца. Полугруппа A является группой тогда и только тогда, когда A не содержит (как левых, так и правых) И., отличных от самой A. Для алгебры A над полем И. кольца A может, вообще говоря, не быть И. алгебры A. Однако в случае, когда A — алгебра с единицей, оба эти понятия И. совпадают.

Идеалом решётки наз. непустое подмножество I элементов решётки, удовлетворяющее условиям: 1) если $a, b\in I$, то $a+b\in I$; 2) если $c\leqslant a\in I$, то $c\in I$. И. решётки, упорядоченные отношением включения, сами образуют решётку. Не вполне согласовано с предыдущим определение идеала частично упорядоченного множества. А именно, вместо условия 1) требуется выполнение более сильного условия: для всякого подмножества элементов, лежащих в И., их объединение, если оно существует в этом частично упорядоченном множестве, также лежит в И.

ИДЕА́ЛЬНОЕ ЧИСЛО́ — понятие, возникшее в 19 в. при попытках перенести на алгебраические числа теорему о единственности разложения целого числа в произведение простых. В терминах алгебраич. теории чисел эта теорема формулируется следующим образом: всякое целое рациональное число может быть представлено в виде произведения простых чисел единственным образом с точностью до порядка множителей и делителей единицы (в поле рациональных чисел это числа $+1$ и -1). Если же рассматривать целые алгебраич. числа, то единственность такого разложения утрачивается. Напр., все целые элементы поля

$\mathfrak{I}(\sqrt{-5})$ имеют вид $a+b\sqrt{-5}$ с целыми a и b; число 9 допускает здесь два разложения:

$$9=3\cdot3=(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5}),$$

причём ни один из множителей $3,2+\sqrt{-5}$, $2-\sqrt{-5}$ дальше разложить в произведение чисел вида $a+b\sqrt{-5}$ нельзя.

И. ч. были введены Э. Куммером (1847) для одного частного случая полей алгебраич. чисел — круговых полей. При этом И. ч. определялись как произведения простых И. ч., а эти последние как «идеальные» делители простых натуральных чисел. Для каждого целого алгебраич. числа разложение соответствующего ему И. ч. в произведение простых И. ч. можно рассматривать как нек-рую замену единственности разложения на простые множители. Понятие И. ч. относительно: для разных полей алгебраич. чисел приходится строить разные И. ч. Обобщение теории И. ч. Куммера на случай произвольных полей алгебраич. чисел принадлежит в основном Л. Кронекеру и Р. Дедекинду. Уже в их работах наметилось разделение теории И. ч. на теорию *дивизоров* (подход Л. Кронекера) и теорию *идеалов* (подход Р. Дедекинда). Р. Дедекинд каждому И. ч. сопоставлял идеал кольца A целых элементов данного поля, к-рый определялся им как подмножество в A, состоящее из 0 и всех таких a, что a делится на это И. ч. При этом если $a_1, \ldots, a_n$ — образующие идеала, то соответствующее ему И. ч. является наибольшим общим делителем И. ч., соответствующих $a_1, \ldots, a_n$.

Впоследствии понятие идеала было распространено на случай произвольного кольца. Кольца, для к-рых понятия идеала и дивизора совпадают (как и для колец алгебраич. чисел), наз. теперь д е д е к и н д о в ы м и.

ИДЕМПОТЕ́НТ (от лат. idem — тот же самый и potens — сильный, способный) — элемент e кольца, полугруппы или группоида, равный своему квадрату: $e^2=e$. Напр., *проекторы* являются И. в кольце операторов. Два И. наз. о р т о г о н а л ь н ы м и, если их произведение равно нулю. Понятие «И.» ввёл Б. Пирс (1881), изучавший разложения колец в прямую сумму, связанные с ортогональными системами И.

ИЕ́НСЕНА НЕРА́ВЕНСТВО д л я в ы п у к л ы х ф у н к ц и й — неравенство

$$f\left(\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_nx_n}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\right)\leqslant\frac{\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\ldots+\lambda_nf(x_n)}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}, \quad (1)$$

где $f(x)$ — выпуклая на некотором множестве C функция, $x_i\in C$, $\lambda_i\geqslant0$, $i=1, 2, \ldots, n$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда либо $x_1=x_2=\ldots=x_n$, либо $f(x)$ — линейная функция. Неравенство (1) установлено О. Гёльдером (1889). Интегральное И. н. для выпуклой на C функции $f(x)$

$$f\left(\frac{\int_D\lambda(t)\,x(t)\,dt}{\int_D\lambda(t)\,dt}\right)\leqslant\frac{\int_D\lambda(t)\,f(x(t))\,dt}{\int_D\lambda(t)\,dt}, \quad (2)$$

где множество D таково, что $x(t)\in C$ при $t\in D$, $\lambda(t)\geqslant0$ при $t\in D$, установлено И. Иенсеном (1906). Равенство в (2) достигается тогда и только тогда, когда либо $x(t)=\mathrm{const}$ на D, либо $f(x)$ линейна на множестве точек $x(t)$, $t\in D$. Если $f(x)$ — вогнутая функция, неравенства (1) и (2) меняются на противоположные.

При соответствующем подборе функции $f(x)$ и весов λ_i или весовой функции $\lambda(t)$ можно получить из И. н. (1) и (2) многие классич. неравенства. Напр., если в (1) положить $f(x)=-\ln x$, $x>0$, то получается неравенство между взвешенными средним арифметическим и средним геометрическим:

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}\leqslant\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_nx_n;$$

к-рое при $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=1/n$, в свою очередь, даёт

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

ИЕРА́РХИЯ (греч. ἱεραρχία, от ἱερός — священный и ἀρχή — власть) — классификация тех или иных математических объектов в соответствии с их сложностью. Первые И. были построены в *дескриптивной теории множеств*. В этих И. переход к более сложному классу множеств осуществляется путём применения теоретико-множественных и топологич. операций к элементам более простых классов.

ИЗБЫТОК ТРЕУГО́ЛЬНИКА, э к с ц е с с,— разность между суммой углов сферического треугольника и двумя прямыми углами. И. т. пропорционален площади сферич. треугольника.

ИЗБЫТО́ЧНОСТЬ — понятие теории информации. Наличие И. в записи сообщений к.-л. источника информации проявляется в возможности записать эти сообщения в среднем более кратко, используя те же самые знаки (т. е. заменяя один код на другой с тем же алфавитом, см. *Кодирование*). Напр., если рассматриваемые сообщения представляют собой последовательности знаков 0 и 1, в к-рых единица встречается в среднем один раз на десять знаков, то, применяя кодирование по правилу $00\to0$, $01\to10$, $10\to110$, $11\to111$, можно сократить запись почти вдвое. Максимальная доля «лишних» знаков определяется по статистич. свойствам рассматриваемого источника сообщений и также наз. его и з б ы т о ч н о с т ь ю. В этом понимании И. R определяется по формуле $R=1-H/\log_2m$, где m — число букв алфавита, а H — энтропия источника на букву сообщения. Можно подсчитать, что в приведённом примере И. равна 0,53. Минимальной И. $R=0$ обладает только последовательность, в к-рой знаки независимы и с вероятностью $1/m$ могут быть равны любой из букв алфавита.

Практически важен вопрос об оценке И. конкретных видов сообщений (таких, как письменная и устная речь, фототелеграммы, телевизионные изображения). Величина И. в них оказывается обычно значительной. Так, напр., И. английской письменной речи не менее 0,6.

«ИЗВЕ́СТИЯ АКАДЕ́МИИ НАУ́К СССР. СЕ́РИЯ МАТЕМАТИ́ЧЕСКАЯ» — научный журнал Отделения математики АН СССР. Издаётся в Москве с 1937. Выходит 6 номеров в год. Публикует оригинальные работы по всем разделам современной математики. Тираж (1987) ок. 1500 экз.

ИЗВЛЕЧЕ́НИЕ КО́РНЯ — алгебраическое действие, обратное возведению в степень. Извлечь корень n-й степени из числа a — это значит найти такое число x, к-рое при возведении в n-ю степень даст данное число: $x^n=a$; число x (обозначается $\sqrt[n]{a}$) наз. к о р н е м, n — п о к а з а т е л е м к о р н я, a — п о д к о р е н н ы м в ы р а ж е н и е м; знак $\sqrt{\ }$ (знак радикала) есть изменённое написание буквы r (латинское radix — корень). Напр., в области действительных чисел $\sqrt[4]{81}=\pm3$, так как $(\pm3)^4=81$; среди мнимых чисел имеются ещё два корня $\sqrt[4]{81}=\pm3i$. Корень 2-й степени наз. квадратным (обозначается $\sqrt{a}$), корень 3-й степени — кубическим. При И. к. выполняются равенства:

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b},\quad\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[m]{a},\quad\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

ИЗГИБА́НИЕ — деформация поверхности, при которой длина каждой дуги любой линии, проведённой на этой поверхности, остаётся неизменной. Наглядный пример И.— свёртывание листа бумаги в цилиндр или конус (при незначительных условиях, к-рые нужны для такой деформации, бумага является нерастяжимой; поэтому длина каждой дуги любой линии, проведённой на бумаге, остаётся неизменной). Напротив, раздувание шарика, изготовленного из тонкой резиновой плёнки, представляет собой при-

мер деформации, к-рая не будет И. При И. поверхности внешняя кривизна в каждой её точке остаётся неизменной (теорема Гаусса). Из этой теоремы, напр., следует, что никакой кусок сферы при помощи И. нельзя превратить в кусок сферы другого радиуса или придать ему плоскую форму. Исследуется возможность или невозможность И. различных поверхностей. Доказано, что каждая замкнутая выпуклая поверхность (напр., целая сфера, целый эллипсоид) не может изгибаться; если же из такой поверхности вырезать сколь угодно малый кусок (положительной внешней кривизны), то оставшаяся часть будет допускать И. Исследование И. поверхности имеет большое значение для теории тонких оболочек в механике.

ИЗГИБА́НИЕ НА ГЛА́ВНОМ ОСНОВА́НИИ — см. *Поверхностей теория.*

ИЗЛО́МА ТО́ЧКА кривой — см. *Особая точка* кривой.

ИЗМЕРИ́МАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция $f(x)$, обладающая тем свойством, что для любого t множество E_t точек x, для которых $f(x)\leqslant t$, измеримо по Лебегу (см. *Мера* множества). Это определение И. ф. принадлежит А. Лебегу. Сумма, разность, произведение и частное двух И. ф., а также предел последовательности И. ф. снова являются И. ф. Таким образом, основные операции алгебры и анализа не выводят за пределы совокупности И. ф. Н. Н. Лузин доказал, что функция измерима в том и только в том случае, если она может быть сделана непрерывной после изменения её значений на множестве сколь угодно малой меры (теорема Лузина); это — так наз. C-свойство И. ф.

В абстрактной теории меры функция $f(x)$ наз. И. ф. по отношению к к.-л. мере μ, если множество E_t входит в область определения меры μ. В совр. теории вероятностей И. ф. выступают под названием случайных величин (см. *Вероятностей теория*).

ИЗМЕРИ́МОЕ МНО́ЖЕСТВО — множество, к которому применимо данное А. Лебегом определение меры (см. *Мера* множества). И. м. — одно из основных понятий теории функций действительного переменного, важнейший и весьма широкий класс точечных множеств. В частности, замкнутые множества и открытые множества, расположенные на нек-ром отрезке, являются И. м. В абстрактной теории меры измеримыми по отношению к к.-л. мере μ наз. множества, входящие в область определения μ. В случае когда μ есть распределение вероятностей, И. м. наз. также случайными событиями (см. *Вероятностей теория*).

ИЗОБРАЖЕ́НИЕ оригинала — см. *Лапласа преобразование, Операционное исчисление.*

ИЗОГО́Н (от греч. ἴσος — равный и γωνία — угол) — выпуклый многогранник, группа поворотов которого вокруг центра тяжести переводит любую его вершину в любую другую вершину. См. *Многогранник.*

ИЗОГОНА́ЛЬНАЯ ТРАЕКТО́РИЯ — линия, пересекающая под одним и тем же углом α все линии данного семейства линий. В частности, если угол α прямой, И. т. наз. ортогональной.

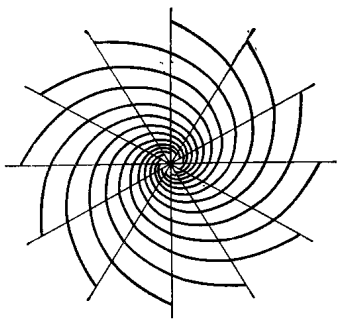


Рис. 1.

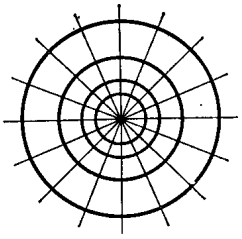


Рис. 2.

Напр., И. т. пучка прямых суть логарифмич. спирали (рис. 1), ортогональные траектории — окружности (рис. 2).

ИЗОКЛИ́Н МЕ́ТОД — см. *Направлений поле.* Термин ввёл И. Бернулли (1694).

ИЗОКЛИ́НА (от греч. ἴσος — равный и κλίνω — наклоняю) — множество точек плоскости x, y, в которых наклон поля направлений, определяемого обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка $y'=f(x, y)$, один и тот же.

ИЗОКО́ЛА (от греч. ἴσος — равный и κόλος — обрубленный, надломленный) — см. *Картографическая проекция.*

ИЗОЛИ́РОВАННАЯ ОСО́БАЯ ТО́ЧКА — *особая точка* аналитической функции такая, что для неё существует окрестность, свободная от других особых точек.

ИЗОЛИ́РОВАННАЯ ТО́ЧКА кривой — см. *Особая точка* кривой.

ИЗОЛИ́РОВАННАЯ ТО́ЧКА множества A в топологическом пространстве X — такая точка $a\in A$, что пересечение некоторой её окрестности с A состоит из единственной точки a.

ИЗОМЕТРИ́ЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y, сохраняющее расстояния между точками. И. о. взаимно однозначно; если $f(X)=Y$, то говорят, что X и Y изометричны друг другу, при этом они оказываются гомеоморфными.

ИЗОМЕТРИ́ЧНЫЕ ПОВЕ́РХНОСТИ — см. *Дифференциальная геометрия, Поверхностей теория.*

ИЗОМЕ́ТРИЯ (от греч. ἰσομετρία — равномерность) — 1) биективное *изометрическое отображение.*

2) *Аксонометрия* с тремя равными показателями искажения.

ИЗОМОРФИ́ЗМ (от греч. ἴσος — равный и μορφή — вид, форма) — одно из основных понятий современной математики, возникшее сначала в пределах алгебры в применении к таким алгебраическим образованиям, как группы, кольца, поля и т. п., но оказавшееся весьма существенным для общего понимания строения и области всевозможных применений каждого раздела математики.

Понятие И. относится к системам объектов с заданными в них операциями или отношениями. В качестве простого примера двух изоморфных систем можно рассмотреть систему $\mathbb{R}$ всех действительных чисел с заданной на ней операцией сложения $x=x_1+x_2$ и систему $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел с заданной на ней операцией умножения $y=y_1y_2$. Можно показать, что внутреннее «устройство» этих двух систем чисел совершенно одинаково. Для этого достаточно систему $\mathbb{R}$ отобразить в систему $\mathbb{R}_+$, поставив в соответствие числу x из $\mathbb{R}$ число $y=a^x$, $a>1$ из $\mathbb{R}_+$. Тогда сумме $x=x_1+x_2$ будет соответствовать произведение $y=y_1y_2$ чисел $y_1=a^{x_1}$ и $y_2=a^{x_2}$, соответствующих x_1 и x_2. Обратное отображение $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}$ имеет при этом вид $x=\log_a y$. Из любого предложения, относящегося к сложению чисел системы $\mathbb{R}_+$, можно извлечь соответствующее ему предложение, относящееся к умножению чисел системы $\mathbb{R}_+$. Напр., если в $\mathbb{R}$ сумма

$$s_n=x_1+x_2+\ldots+x_n$$

членов арифметич. прогрессии выражается формулой

$$s_n=\frac{n(x_1+x_n)}{2},$$

то в $\mathbb{R}_+$ произведение

$$p_n=y_1y_2\ldots y_n$$

членов геометрич. прогрессии выражается формулой

$$p_n=\sqrt{(y_1y_n)^n}$$

(умножению на n в системе $\mathbb{R}$ соответствует при переходе к системе $\mathbb{R}_+$ возведение в n-ю степень, а делению на два — извлечение квадратного корня).

Изучение свойств одной из изоморфных систем в значительной мере (с абстрактно-математич. точки зрения — полностью) сводится к изучению свойств другой. Любую систему объектов S', изоморфную системе S, можно рассматривать как «модель» системы S («моделировать систему S при помощи системы S'») и сводить изучение самых разнообразных свойств системы S к изучению свойств «модели» S'.

Общее определение И. систем объектов с заданными на них отношениями между постоянным для каждого отношения числом объектов таково. Пусть даны две системы объектов S и S', причём в первой определены отношения

$$F_k(x_1, x_2, \ldots), \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

а во второй — отношения

$$F'_k(x'_1, x'_2, \ldots), \quad k=1, 2, \ldots, n.$$

Системы S и S' с указанными на них отношениями наз. изоморфными (обозначение $S \cong S'$), если между ними существует такое взаимно однозначное соответствие

$$x' = \varphi(x), \quad x = \psi(x')$$

(где x — произвольный элемент S, а x' — произвольный элемент S'), что из наличия $F(x_1, x_2, \ldots)$ вытекает $F'_k(x'_1, x'_2, \ldots)$, и наоборот. Отображение φ наз. изоморфным отображением или изоморфизмом системы S в S', а обратное ему отображение ψ — изоморфизмом системы S' в S. [В приведённом выше примере в системе R определено отношение $F(x, x_1, x_2)$, где $x=x_1+x_2$, в системе P — отношение $F'(y, y_1, y_2)$, где $y=y_1y_2$; взаимно однозначное соответствие устанавливается по формулам $y=a^x$, $x=\log_a y$.]

Понятие И. возникло в теории групп, где впервые был понят тот факт, что изучение внутренней структуры двух изоморфных систем объектов представляет собой одну и ту же задачу. Существование этого свойства подметил Р. Декарт, он предвидел возможность «отождествлять» изоморфные отношения или операции (он называл их «подобными»). Термин «И.» был введён в сер. 19 в. Современная терминология утвердилась после работ Э. Нётер (1918).

Аксиомы любой математич. теории определяют систему объектов, изучаемую этой теорией, всегда только с точностью до И.: аксиоматически построенная математич. теория, применимая к к.-л. одной системе объектов, всегда полностью применима к другой, изоморфной ей. Поэтому каждая аксиоматически изложенная математическая теория допускает не одну, а много «интерпретаций», или «моделей».

Понятие И. включает в себя как частный случай понятие *гомеоморфизма*, играющее основную роль в топологии.

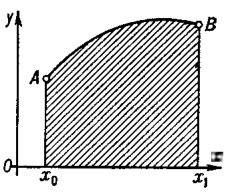
Частным случаем И. является автоморфизм — взаимно однозначное отображение

$$x' = \varphi(x), \quad x = \psi(x')$$

системы объектов с заданными отношениями $F_k(x_1, x_2, \ldots)$ на самоё себя, при котором из $F_k(x_1, x_2, \ldots)$ вытекает $F'_k(x'_1, x'_2, \ldots)$, и наоборот. Это понятие тоже возникло в теории групп, но потом оказалось существенным в самых различных разделах математики.

В. И. Битюцков, А. Н. Колмогоров.

ИЗОПЕРИМЕТРИ́ЧЕСКАЯ ЗАДА́ЧА (от греч. ἴσος — равный и περιμετρέω — измеряю вокруг) — одна из классических задач вариационного исчисления. Простейшие И. з. (нахождение треугольников и многоугольников заданного периметра, имеющих наибольшую площадь; нахождение замкнутой кривой заданной длины, ограничивающей максимальную площадь; определение замкнутой поверхности заданной площади, ограничивающей наибольший объём, и т. п.) были известны древнегреч. учёным. Общее изучение И. з. началось в 1697, когда Я. Бернулли опубликовал поставленную и частично решённую им И. з.: среди всех кривых данной длины найти кривую, для к-рой нек-рая величина, зависящая от кривой, достигает минимума или максимума. Систематическое исследование И. з. было впервые проведено в 1732 Л. Эйлером.



Пример И. з.: среди кривых данной длины l, проходящих через точки A и B, найти кривую, для к-рой площадь криволинейной трапеции (заштрихована на рис.) была бы наибольшей. Площадь криволинейной трапеции равна

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx, \tag{1}$$

длина дуги

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{2}$$

Следовательно, задача сводится к нахождению наибольшего значения интеграла (1) при наличии условий (2). Оказывается, что исходная кривая — дуга окружности.

ИЗОПЕРИМЕТРИ́ЧЕСКОЕ НЕРА́ВЕНСТВО — неравенство между объёмом V области в евклидовом пространстве E^n, $n \geqslant 2$, и $(n-1)$-мерной площадью F, ограничивающей область гиперповерхности:

$$n^n v_n V^{n-1} \leqslant F^n,$$

где v_n — объём единичного n-мерного шара. (Так, напр., $4\pi S \leqslant F^2$, где S — площадь, а F — периметр плоской области.) Равенство имеет место только для шара. И. н. даёт решение изопериметрич. задачи. Для $n=2,3$ И. н. известно с глубокой древности. Строгое доказательство И. н. для $n=2$ дано Ф. Эдлером (1882), для $n=3$ — Г. Шварцем (1890) и для всех $n \geqslant 2$ — Л. А. Люстерником (1939).

ИЗОТО́ННОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ (от греч. ἴσος — равный и τόνος — напряжение) — однозначное отображение частично упорядоченного множества A в частично упорядоченное множество B, сохраняющее порядок. И. о. играют роль *гомоморфизмов* частично упорядоченных множеств, рассматриваемых как алгебраич. системы с одним отношением. И. о. иногда наз. также монотонными отображениями.

ИЗОТО́ПИЯ (от греч. ἴσος — равный и τόπος — место) — 1) И.— частный случай *гомотопии*, подразумевающий, что гомеоморфизм или погружение при деформации ими же и остаются.

2) См. *Алгебраическая топология.*

3) См. *Квазигруппа.*

ИЗОЭ́ДР (от греч. ἴσος — равный и ἕδρα — основание, грань) — выпуклый многогранник, группа поворотов которого вокруг центра тяжести переводит любую его грань в любую другую грань. См. *Многогранник.*

ИКОСА́ЭДР (греч. εἰκοσάεδρον, от εἴκοσι — двадцать и ἕδρα — основание, грань) — один из пяти типов правильных многогранников (рис.); имеет 20 граней (треугольных), 30 рёбер, 12 вершин (в каждой вершине сходится 5 рёбер). Если a — длина ребра И., то его объём $v = {}^5/_{12}a^3(3+\sqrt{5}) \approx 2{,}1817a^3$. Полагают, что назв. «И.» дано Теэтетом (4 в. до н. э.); он же его открыл. См. также *Многогранник.*

ИМЕННА́Я ФО́РМА — см. *Имя.*

ИМИТАЦИО́ННАЯ МОДЕ́ЛЬ — см. *Кибернетика.*

ИМПЛИКА́ЦИЯ (лат. implicatio — сплетение, от implico — тесно связываю) — логическая операция, заключающаяся в соединении данных высказываний A и B в новое высказывание «если A, то B». В формализованных языках И. высказываний A и B обозначается: $A \supset B$, $A \to B$, $A \Rightarrow B$ [читается: «если A, то B», «A влечёт (имплицирует) B»]. Высказывание A. наз. посылкой высказывания $A \supset B$, а B — его заключением.

В обычной речи утверждение «если A, то B», как правило, предполагает наличие причинной связи между тем, что утверждается в высказывании A, и тем, что утверждается в высказывании B, и его истинность зависит от смысла этих высказываний. В математич. логике обычно учитывается лишь истинность или ложность высказываний, а не смысл. Поэтому И. обычно понимается в соответствии со следующей истинностной таблицей (И означает «истина», Л — «ложь»):

A	B	$A \supset B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Иными словами, высказывание $A \supset B$ считается ложным лишь в случае, когда его посылка истинна, а заключение ложно. При таком понимании оказываются истинными такие, например, высказывания: «$2+2=4 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{2}=1$», «$2>3 \Rightarrow$ 56788 — простое число».

ИМЯ — языковое выражение, служащее для обозначения определённого объекта. Объект, обозначаемый данным И., наз. его д е н о т а т о м. В математике широко используются И. для конкретных математич. объектов, напр.: e, π— для известных трансцендентных чисел, sin — для функции синус, $\varnothing$ — для пустого множества. Из таких простейших И. могут быть образованы с о с т а в н ы е и м е н а. Напр., $\sin \pi$ есть другое И. числа 0. Имя не только называет денотат, но и выражает определённый смысл. Так, выражения

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \quad \text{и} \quad \sin \pi/2$$

суть И. числа 1, однако смысл их различен. Смыслом И. однозначно определяется его денотат. Если в составном И. нек-рое входящее в него И. заменить на И., имеющее тот же денотат, то денотат составного И. не изменится. Если в составном И. нек-рое входящее в него И. заменить на его с и н о н и м (т. е. И., имеющее тот же смысл), то смысл составного И. не изменится.

Наряду с И. в математике употребляются выражения, содержащие переменные и превращающиеся в И. после подстановки вместо переменных И. объектов из области значений переменных. Такие выражения наз. и м е н н ы м и ф о р м а м и. Выражения e^x, $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$, где x — переменная для действительных чисел, являются примерами именных форм.

ИНВАРИА́НТ (от лат. invarians, род. падеж invariantis — неизменяющийся) — отображение φ рассматриваемой совокупности M математических объектов, снабжённой фиксированным отношением эквивалентности ρ, в другую совокупность N математич. объектов, постоянное на классах эквивалентности M по ρ (точнее: И. отношения эквивалентности ρ на M). Если X — объект из M, то весьма часто говорят, что $\varphi(M)$ — И. объекта X. Концепция И. является одной из важнейших в математике, поскольку изучение И. непосредственно связано с задачами классификации объектов того или иного типа. По существу, целью всякой математич. классификации является построение нек-рой полной системы И. (по возможности наиболее простой), т. е. такой системы, к-рая разделяет любые два неэквивалентных объекта из рассматриваемой совокупности.

Простейшим примером И. могут служить так наз. И. действительных плоских линий второго порядка. А именно, пусть M — множество всех таких линий, а ρ — отношение эквивалентности на M, определённое правилом: $\Gamma \in M$ эквивалентна $\Gamma' \in M$ тогда и только тогда, когда Γ' получается из Γ движением (т. е. изометрией) плоскости. Если

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

— уравнение линии $\Gamma \in M$ в к.-л. декартовой системе координат, то числа

$$\sigma(\Gamma)=A+C, \quad \delta(\Gamma)=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \text{ и } \Delta(\Gamma)=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

не зависят от выбора системы координат (хотя само уравнение линии Γ — зависит). Если две линии Γ и $\Gamma' \in M$ эквивалентны, то

$$\sigma(\Gamma)=\sigma(\Gamma'), \quad \delta(\Gamma)=\delta(\Gamma') \text{ и } \Delta(\Gamma)=\Delta(\Gamma').$$

Иначе говоря, отображения σ, δ и Δ множества M в множество N всех действительных чисел являются И. отношения эквивалентности ρ; эти отображения и называют И. действительных плоских линий второго порядка. Значения этих И. на конкретной линии позволяют определить тип этой линии (эллипс, гипербола, парабола, пара прямых, мнимая линия).

Другой классич. пример — двойное отношение упорядоченного набора четырёх точек, лежащих на одной прямой в действительном проективном пространстве. Двойное отношение не изменится, если подвергнуть эти точки проективному преобразованию всего пространства. В этом примере M — множество упорядоченных четвёрок точек проективного пространства, лежащих на одной прямой; отношение эквивалентности ρ на M определяется по правилу: наборы F и $F' \in M$ эквивалентны тогда и только тогда, когда F переводится в F' проективным преобразованием пространства; N — множество действительных чисел. Взятие двойного отношения определяет отображение M в N, являющееся И. отношения ρ; именно в этом смысле говорят, что двойное отношение — И. четырёх точек (относительно проективной группы).

Сопоставление квадратичной форме от n переменных её ранга также доставляет пример И.: ранг не меняется при замене формы на эквивалентную (коротко: ранг есть И. квадратичной формы). Более того, если формы рассматриваются над полем комплексных чисел, то ранг составляет полную систему И. форм от n переменных: две формы эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги равны. Если же рассматривать формы над полем действительных чисел, то появляется ещё один И.— сигнатура формы; ранг и сигнатура составляют полную систему И. В этих примерах M — множество квадратичных форм от n переменных, ρ — отношение эквивалентности, определённое невырожденными линейными преобразованиями переменных, N — множество целых чисел.

Общая черта, объединяющая эти (и многие другие) примеры, состоит в том, что отношение эквивалентности ρ определяется с помощью нек-рой группы преобразований множества M (то есть X и $Y \in M$ ρ-эквивалентны тогда и только тогда, когда $Y=g(X)$ для нек-рого $g \in G$); И., возникающие в таких случаях, наз. И. группы G. В первом примере — это преобразования M, индуцированные групповой изометрий плоскости, во втором — проективной группой, в третьем — полной линейной группой невырожденных преобразований переменных. Эти примеры иллюстрируют общую концепцию, выдвинутую Ф. Клейном (т. н. э р л а н г е н с к а я п р о г р а м м а), согласно к-рой всякая группа преобразований может служить группой «преобразований систем координат» (автоморфизмов) в нек-рой геометрии; величины, определяемые объектами этой геометрии и не меняющиеся при «смене координат» (инварианты), описывают внутренние свойства рассматриваемой геометрии и дают «структурную» классификацию её теорем. Так, напр., задача проективной геометрии— нахождение И. (и соотношений между ними) для проективной группы, евклидовой геометрии — для группы движений (изометрий) евклидова пространства, и т. д. На этом пути возникла классич. теория И., в к-рой рассматриваются лишь И. специального вида (полиномиальные или рациональные И. для групп линейных преобразований или, шире, числовые функции, постоянные на орбитах нек-рой группы).

Однако общее понятие И. является более широким и не может быть ограничено рамками И. групп преобразований. Примеры таких И. можно указать во многих областях математики. Так, кривизна поверхности, определяемая в дифференциальной геометрии, является И. изгибания, размерность алгебраич. многообразий, определяемая в алгебраич. геометрии, является И. относительно бирациональной эквивалентности, и т. п.

Термин «И.» ввёл Дж. Сильвестр (1851). *В. Л. Попов.*

ИНВАРИА́НТНАЯ ПОДГРУ́ППА г р у п п ы — то же, что *нормальная подгруппа*.

ИНВАРИА́НТНОЕ ПОДПРОСТРА́НСТВО в е к т о р н о г о п р о с т р а н с т в а — подпространство W векторного пространства V, переходящее в себя при некотором линейном преобразовании A пространства V. Если W есть k-мер-

ное подпространство n-мерного пространства V, инвариантное относительно A, то в подходящем базисе матрица линейного преобразования A записывается в виде

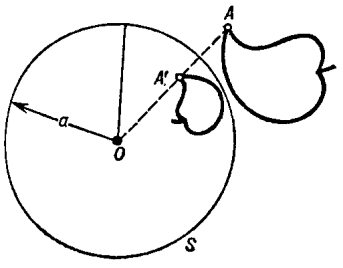
$$A=\begin{Vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix},$$

где A_1 и A_2 — подматрицы порядков k и $n-k$ соответственно. Если в V существует И. п. W', дополнительное к W, т. е. такое, что V распадается в прямую сумму $V=W\oplus W'$, то в матрице A можно считать $B=0$.

В конечномерном векторном пространстве над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел (или над любым алгебраически замкнутым полем) для любого A существует одномерное И. п. (т. е. существует *собственный вектор*); в конечномерном векторном пространстве над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел для любого A существует либо одномерное, либо двумерное И. п.

ИНВЕ́РСИЯ (от лат. inversio — перестановка) в комбинаторике — см. *Подстановка.*

ИНВЕ́РСИЯ — преобразование, переводящее (рис.) каждую точку A плоскости в такую точку A', лежащую на луче OA, что $OA'\cdot OA=k$, где k — некоторое постоянное число. Точка O наз. центром или полюсом И., k — степенью или коэффициентом И. Если $k=a^2$, то точки окружности S с центром O и радиусом a переходят при И. сами в себя; внешние по отношению к S точки переходят во внутренние, а внутренние — во внешние (иногда И. наз. симметрией относительно окружности). Центр И. не имеет образа. И. с $k>0$ наз. гиперболической И., а с $k<0$ — эллиптической И. или антиинверсией. Прямая, проходящая через центр И., преобразуется в себя; прямая, не проходящая через центр И., преобразуется в окружность, проходящую через центр И. (при этом точка O исключается из окружности), и обратно; окружности, ортогональные к окружности И., преобразуются сами в себя. В декартовых прямоугольных координатах И. может быть задана формулами



$$x'=\frac{kx}{x^2+y^2},\quad y'=\frac{ky}{x^2+y^2}$$

или в плоскости комплексного переменного: $z=k/\bar{z}$. И. является антиконформным преобразованием, т. е. сохраняет углы между линиями, но меняет ориентацию.

Аналогично определяется И. относительно сферы в пространстве.

Преобразование И. систематически применял с 1824 в своих исследованиях Я. Штейнер.

ИНВОЛЮ́ЦИЯ (от лат. involutio — изгиб, свёртывание) — эндоморфизм порядка два, то есть отображение объекта на себя, квадрат которого является тождественным отображением. Таковы, напр., симметрия относительно прямой на плоскости; гиперболич. гомология проективной плоскости. Часто под И. группы понимают её элементы 2-го порядка.

И. в алгебре над полем действительных или комплексных чисел — отображение $x\to x^*$, удовлетворяющее следующим аксиомам: 1) $(x^*)^*=x$; 2) $(x+y)^*=x^*+y^*$; 3) $(\lambda x)^*=\bar{\lambda}x^*$; 4) $(xy)^*=y^*x^*$. Здесь x, y — произвольные элементы алгебры, λ — элемент соответствующего поля (т. е. действительное или комплексное число), $\bar{\lambda}$ — сопряжённое к λ число.

И́НДЕКС (лат. index — указатель) — числовой или буквенный указатель, которым снабжаются математические выражения для того, чтобы отличать их друг от друга, напр. x_0, x_i, a^3, a_{nm} (здесь 0, i, 3, nm суть И.).

И́НДЕКС в теории чисел — число, играющее при решении сравнений роль, аналогичную роли логарифмов при решении показательных уравнений. Если p — нечётное простое число, g — *первообразный корень* по модулю p, то индексом числа a наз. такое число $k=\operatorname{ind} a$, что $a\equiv g^k \pmod p$. Свойства И.:

$$\operatorname{ind} ab=\operatorname{ind} a+\operatorname{ind} b \pmod{p-1},$$

$$\operatorname{ind}\frac{a}{b}=\operatorname{ind} a-\operatorname{ind} b \pmod{p-1},$$

где $\frac{a}{b}$ следует понимать как корень сравнения $bx\equiv a \pmod p$. При решении двучленных сравнений $ax^n\equiv b \pmod p$ И. используют для перехода к линейным сравнениям: $\operatorname{ind} a+n\operatorname{ind} x=\operatorname{ind} b \pmod{p-1}$. Ввиду практич. пользы И. для каждого простого модуля p (не слишком большого) имеются специальные таблицы. В 1839 К. Якоби составил таблицу И. для всех простых чисел до 1000.

Понятие «И.» ввёл К. Гаусс (1801).

И́НДЕКС ПОДГРУ́ППЫ — см. *Подгруппа.*

ИНДИВИ́ДНАЯ ПЕРЕМЕ́ННАЯ (от лат. individuus — неделимый, нераздельный) — то же, что *предметная переменная.*

ИНДИКА́ТОР (позднелат. indicator — указатель, от лат. indico — указываю, определяю) множества — то же, что *характеристическая функция* множества.

ИНДУКТИ́ВНАЯ РАЗМЕ́РНОСТЬ — см. *Размерности теория.*

ИНДУКТИ́ВНОЕ ОПРЕДЕЛЕ́НИЕ — см. *Математическая индукция.*

ИНДУКТИ́ВНОЕ ПРЕДПОЛОЖЕ́НИЕ — см. *Математическая индукция.*

ИНДУКТИ́ВНЫЙ ПРЕДЕ́Л — см. *Функциональный анализ.*

ИНДУ́КЦИЯ (от лат. inductio — наведение, побуждение) — умозаключение от частных фактов к некоторой гипотезе (общему утверждению). И. в математике — то же, что *математическая индукция.*

ИНДУЦИ́РОВАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕ́НИЕ конечной группы G — представление T группы G, определяемое линейным представлением T_1 её подгруппы G_1 (T_1: $G_1\to V_1$) следующим образом. Пусть V — совокупность V_1-значных функций на G, обладающих свойством

$$f(x,\ y)=T_1(x)\,f(y) \text{ для } x\in G_1,\ y\in G.$$

Тогда пространство V инвариантно относительно сдвигов на g и формула $T(g)f(x)=f(xg)$ задаёт И. п. T группы G в V.

ИНЕ́РЦИИ ЗАКО́Н (от лат. inertia — бездействие), теорема Сильвестра для квадратичных форм — см. *Квадратичная форма.* Термин «И. з.» ввёл Дж. Сильвестр (1852).

ИНТЕГРА́Л (от лат. integer — целый) — одно из важнейших понятий математики, возникшее в связи с потребностью, с одной стороны, отыскивать функции по их производным (напр., находить функцию, выражающую путь, пройденный движущейся точкой, по скорости этой точки), а с другой — измерять площади, объёмы, длины дуг, работу сил за определённый промежуток времени и т. п. Соответственно с этим различают неопределённые и определённые И., вычисление к-рых является задачей *интегрального исчисления.*

Слово «интеграл» впервые в печати употребил Я. Бернулли (1690). Возможно, термин образован от латинского integer — целый. По другому предположению, Я. Бернулли произвёл термин от латинского integro — приводить в прежнее состояние, восстанавливать.

Неопределённый интеграл. Первообразная функция $f(x)$ одного действительного переменного — функция $F(x)$, производная к-рой при каждом значении x равна $f(x)$. Прибавляя постоянную к первообразной к.-л. функции, вновь получают первообразную той же функции.

Следовательно, имея одну первообразную $F(x)$ функции $f(x)$, получают общее выражение этих первообразных этой функции в виде $F(x)+C$. Это общее выражение первообразных называют неопределённым интегралом

$$\int f(x)\,dx$$

функции $f(x)$. Одна из основных теорем интегрального исчисления устанавливает, что каждая непрерывная функция $f(x)$ действительного переменного имеет неопределённый И.

Определённый интеграл. Определённый И. функции $f(x)$ с нижним пределом a и верхним пределом b можно определить как разность

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (1)$$

где $F(x)$ есть первообразная функция $f(x)$; определение не зависит от того, какая из первообразных выбрана для вычисления определённого И. Если функция $f(x)$ непрерывна, то приведённое определение в случае $a<b$ равносильно следующему определению, данному О. Коши (1823): рассматривают произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ точками

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b; \qquad (2)$$

в каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$, берут произвольную точку ξ_i, $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$, и образуют сумму

$$S_n=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}). \qquad (3)$$

Сумма S_n зависит от выбора точек x_i и ξ_i. Однако в случае непрерывной функции $f(x)$ суммы S_n, получающиеся при различном выборе точек x_i и ξ_i, стремятся к вполне определённому пределу, если максимальная из разностей x_i-x_{i-1} стремится к нулю при $n\to\infty$. Этот предел и является определённым интегралом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

По определению,

$$\int_a^a f(x)\,dx=0, \quad \int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

Определённый И., как указано выше, выражается через любую первообразную $F(x)$. Обратно, первообразная $F(x)$ может быть записана в виде

$$F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)\,dt, \qquad (4)$$

где a — произвольная постоянная. В соответствии с этим неопределённый И. записывается в виде

$$\int f(x)\,dx=\int_a^x f(t)\,dt+C. \qquad (5)$$

О свойствах неопределённых и определённых И. см. в ст. *Интегральное исчисление*.

Обобщение понятия интеграла. Интеграл Римана. О. Коши применял своё определение И. только к непрерывным функциям. Назвать, по определению, интегралом

$$I=\int_a^b f(x)\,dx \qquad (6)$$

предел сумм S_n при $\max(x_i-x_{i-1})\to 0$ во всех тех случаях, когда этот предел однозначно определён, предложил Б. Риман (1853). Он же исследовал условия применимости такого определения. Более совершенную форму этим условиям придал А. Лебег (1902), пользуясь введённым им понятием *меры* множества. Для интегрируемости в смысле Римана функции $f(x)$ на $[a, b]$ является необходимой и достаточной совокупность двух условий: $f(x)$ ограничена на $[a, b]$; множество помещающихся на $[a, b]$ точек разрыва функции $f(x)$ имеет меру, равную нулю. Таким образом, непрерывность в каждой точке отрезка $[a, b]$ совсем не обязательна для интегрируемости по Риману.

Неопределённый И. и первообразную можно теперь определять формулами (4) и (5). Следует только заметить, что при этом первообразная $F(x)$ не обязана иметь подинтегральную функцию $f(x)$ своей производной в каждой точке. Но в каждой точке непрерывности $f(x)$, т. е. (в силу результата А. Лебега) всюду, кроме, может быть, множества меры, равной нулю, будет

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x). \qquad (7)$$

Г. Дарбу (1875) дал определение интеграла Римана, к-рое делает особенно наглядными условия существования такого И. Вместо сумм (3) Г. Дарбу вводит суммы (наз. суммами Дарбу)

$$\overline{S}=M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+\ldots+M_n(x_n-x_{n-1}),$$
$$\underline{S}=m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+\ldots+m_n(x_n-x_{n-1}),$$

где M_k — верхняя грань функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, а m_k — нижняя грань $f(x)$ на том же отрезке. Если $\overline{I}$ — нижняя грань сумм $\overline{S}$, а $\underline{I}$ — верхняя грань сумм $\underline{S}$, то для существования интеграла Римана необходимо и достаточно условие $\underline{I}=\overline{I}$. Общее значение $I=\overline{I}=\underline{I}$ величин $\underline{I}$ и $\overline{I}$ и является интегралом Римана (6). Сами величины $\overline{I}$ и $\underline{I}$ наз. соответственно верхним и нижним интегралами Дарбу.

Интеграл Лебега. Введённое А. Лебегом понятие меры множества позволило дать значительно более широкое определение И. Чтобы определить И. (6), А. Лебег делит точками

$$\ldots<y_{-2}<y_{-1}<y_0<y_1<\ldots<y_i<\ldots$$

область возможных значений переменного $y=f(x)$ и обозначает M_i множество тех точек x из отрезка $[a, b]$, для к-рых

$$y_{i-1}\leqslant f(x)<y.$$

Сумма S определяется равенством

$$S=\sum\nolimits_i \eta_i\mu(M_i),$$

где η_i берётся из отрезка $y_{i-1}\leqslant\eta_i<y_i$, а $\mu(M_i)$ обозначает меру множества M_i. Функция $f(x)$ наз. интегрируемой в смысле Лебега на отрезке $[a, b]$, если ряды, определяющие суммы S, абсолютно сходятся при $\max(y_i-y_{i-1})\to 0$. Предел этих сумм и наз. интегралом Лебега (6). Можно определить первообразную в смысле Лебега как функцию $F(x)$, удовлетворяющую равенству (4), где И. в правой части понимается по Лебегу. Как и в случае интеграла Римана, равенство (7) будет при этом выполняться во всех точках, кроме, может быть, множества, имеющего меру, равную нулю.

Для интегрируемости по Лебегу ограниченной функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала к числу *измеримых функций* в смысле Лебега. Все функции, встречающиеся в математич. анализе, измеримы в этом смысле. Более того, до настоящего времени (1987) не построено ни одного индивидуального примера неизмеримой функции. Таким образом, для случая ограниченных функций А. Лебег решил задачу определения интеграла (6) с общностью, исчерпывающей потребности математич. анализа. Среди функций, интегрируемых по Лебегу, имеется сколько угодно функций, всюду разрывных и, следовательно, неинтегрируемых по Риману. Наоборот, каждая интегрируемая по Риману функция интегрируема и по Лебегу.

Определение Лебега обобщается на случай интегрирования по полупрямой и по полной прямой, т. е. на случай И. вида

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

После этого обобщения теория Лебега охватывает все случаи абсолютно сходящихся *несобственных интегралов*,

Общность, достигнутая в определении Лебега, весьма существенна во многих вопросах математич. анализа; напр., только с введением интеграла Лебега могла быть установлена теорема Рисса — Фишера в теории тригонометрич. рядов, в силу к-рой любой ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

для к-рого

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)<\infty,$$

представляет функцию $f(x)$, порождающую коэффициенты a_n и b_n по формулам

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx,$$

где И. понимается в смысле Лебега.

Интеграл Стилтьеса. В кон. 19 в. определение интеграла Римана подверглось совершенно иному обобщению, чем то, к к-рому привело введение понятия меры множества. Это обобщение было дано Т. Стилтьесом (1894). Пусть $f(x)$ — непрерывная функция действительного переменного x, определённая на отрезке $[a, b]$, и $U(x)$ — определённая на том же отрезке ограниченная монотонная (неубывающая или невозрастающая) функция. Для определения интеграла Стилтьеса берут произвольное разбиение (2) отрезка $[a, b]$ и составляют сумму

$$f(\xi_1)[U(x_1)-U(x_0)]+$$

$$+f(\xi_2)[U(x_2)-U(x_1)]+\ldots+f(\xi_n)[U(x_n)-U(x_{n-1})], \quad (8)$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — произвольные точки, выбранные соответственно на отрезках $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}—x_n]$. Пусть δ — наибольшее расстояние между двумя последовательными точками деления в разбиении (2). Если взять любую последовательность разбиений, для к-рой δ стремится к нулю, то сумма (8) будет иметь определённый, всегда один и тот же предел, как бы ни выбирались точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ на соответствующих отрезках. Этот предел называют, следуя Т. Стилтьесу, интегралом функции $f(x)$ относительно функции $U(x)$ и обозначают символом

$$I=\int_a^b f(x)\,dU(x). \quad (9)$$

Интеграл (9) (его называют также интегралом Стилтьеса) существует и в том случае, когда ограниченная функция $U(x)$, не будучи сама монотонной, может быть представлена в виде суммы или разности двух ограниченных монотонных функций $U_1(x)$ и $U_2(x)$:

$$U(x)=U_1(x)-U_2(x),$$

т. е. является функцией с ограниченной *вариацией*.

Если интегрирующая функция $U(x)$ имеет ограниченную и интегрируемую по Риману производную $U'(x)$, то интеграл Стилтьеса сводится к интегралу Римана по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dU(x)=\int_a^b f(x)\,U'(x)\,dx.$$

В частности, когда $U(x)=x+C$, интеграл Стилтьеса (9) превращается в обыкновенный интеграл Римана (6).

Дальнейшие обобщения. Концепции И., созданные Т. Стилтьесом и А. Лебегом, удалось впоследствии объединить и обобщить на интегрирование по любому (измеримому) множеству в пространстве любого числа измерений. Классические *кратные интегралы* вполне охватываются этим подходом. Потребности таких дисциплин, как теория вероятностей и общая теория динамич. систем, привели к ещё более широкому понятию абстрактного интеграла Лебега, основанному на общих понятиях меры множества и измеримости функций. Пусть X — пространство, в к-ром выделена определённая система B его подмножеств, наз. «измеримыми», причём эта система обладает свойствами замкнутости по отношению к обычным теоретико-множественным операциям, выполняемым в конечном или счётном числе. Пусть μ — конечная мера, заданная на B. Для B-измеримой функции $y=f(x)$, $x\in X$, принимающей конечное или счётное число значений $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ соответственно на попарно непересекающихся множествах $A_1, \ldots, A_n, \ldots$, сумма к-рых есть X, интеграл от функции $f(x)$ по мере μ, обозначаемый

$$\int_X f(x)\,\mu(dx),$$

определяется как сумма ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}y_j\mu(A_j)$$

в предположении, что этот ряд абсолютно сходится. Для других f интегрируемость и И. определяются путём нек-рого естественного перехода от указанных кусочно постоянных функций.

Пусть A — измеримое множество и $\varphi_A(x)=1$ для x, принадлежащих A, и $\varphi_A(x)=0$ для x, не принадлежащих A. Тогда интеграл от функции $f(x)$ по множеству A определяют, полагая

$$\int_A f(x)\,\mu(dx)=\int_X f(x)\,\varphi_A(x)\,\mu(dx).$$

При фиксированных μ и A И. в зависимости от f может рассматриваться как линейный функционал; при фиксированном f И., как функция множества A, есть счётноаддитивная функция.

Следует отметить, что, несмотря на кажущуюся отвлечённость, это общее понятие И. в наибольшей степени подходит для определения такого понятия, как математич. ожидание (в теории вероятностей), и даже для общей формулировки задачи проверки статистич. гипотез. И. по отношению к т. н. мере Винера и различным её аналогам используют в статистич. физике (здесь в качестве X фигурирует пространство непрерывных на к.-л. отрезке функций). Упоминавшиеся до сих пор обобщения понятия И. были такими, что f и $|f|$ оказывались интегрируемыми или неинтегрируемыми одновременно.

Обобщения первоначального понятия И. в другом направлении относятся к функциям одного переменного, но зато дают много больше в исследовании интегрирования неограниченных функций. Ещё О. Коши в случае функции $f(x)$, неограниченной в точке $x=c$, определил интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

для $a<c<b$ как предел выражения

$$\int_a^{c-\varepsilon_1}f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx$$

при $\varepsilon_1\to 0$, $\varepsilon_2\to 0$. Аналогично И. с бесконечными пределами

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$$

определяется как предел И.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

при $a\to-\infty$ и $b\to+\infty$. Если при этом не требуется интегрируемости $|f(x)|$, т. е. $f(x)$ интегрируема «не абсолютно», то это определение Коши не поглощается лебеговским.

Ещё более широкое обобщение понятия И. в этом направлении было предложено А. Данжуа (1912) и А. Я. Хинчиным (1915).

● Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.— Л., 1934; Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; Камке Э., Интеграл Лебега — Стилтьеса, пер. с нем., М., 1959; Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981.

В. И. Гливенко, А. Н. Колмогоров.

ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТИ, интеграл ошибок,— функция

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt,\ |x|<\infty.$$

В теории вероятностей используется не И. в., а функция нормального распределения:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}=\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

— т. н. интеграл вероятности Гаусса. Для случайной величины X, имеющей нормальное распределение с математич. ожиданием 0 и дисперсией σ^2, вероятность неравенства $|X|\leqslant t$ равна $\operatorname{erf}(t/\sqrt{2})$.

ИНТЕГРА́Л ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНОГО УРАВНЕ́НИЯ — соотношение вида

$$\Phi(x,\ y)=0, \qquad (1)$$

определяющее решение $y(x)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$F(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n)})=0 \qquad (2)$$

как неявную функцию x (иногда интегралом наз. сама функция Ф). В отличие от соотношения (1), наз. частным интегралом, соотношение

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ \ldots,\ C_n)=0, \qquad (3)$$

из к-рого при соответствующем выборе постоянных $C_1, \ldots, C_n$ получается решение с любыми начальными данными, наз. общим интегралом. Соотношение

$$\Phi(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(k)},\ C_1,\ \ldots,\ C_{n-k})=0,$$

содержащее производные до k-го порядка, $1\leqslant k\leqslant n$, и $n-k$ произвольных постоянных, наз. промежуточным интегралом, в частности при $k=1$ первым интегралом. Знание их позволяет понизить порядок решаемого уравнения.

Каждая функция y, (неявно) определяемая соотношением (3), представляет собой общее решение дифференциального уравнения (2) — семейство функций $y=\varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ такое, что при соответствующем выборе постоянных может быть получено любое однозначно определяемое начальными данными решение. Однако не всякое решение дифференциального уравнения может быть получено на этом пути (см. *Особое решение*).

Аналогичные понятия вводятся для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и для уравнений с частными производными первого порядка. Так, под частным И. д. у.

$$F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

понимают его решение, полным интегралом наз. семейство решений $u(x, y, a, b)$, зависящее от двух произвольных постоянных, общим интегралом — соотношение, содержащее одну произвольную функцию и дающее при каждом выборе её решение уравнения.

ИНТЕГРА́Л ТИ́ПА КОШИ́ — см. *Коши интеграл*.

ИНТЕГРА́ЛЬНАЯ КРИВА́Я — график решения *дифференциального уравнения* или системы дифференциальных уравнений.

ИНТЕГРА́ЛЬНАЯ МЕ́ТРИКА — см. *Метрика*.

ИНТЕГРА́ЛЬНАЯ ПОКАЗА́ТЕЛЬНАЯ ФУ́НКЦИЯ — специальная функция, определяемая интегралом

$$\operatorname{Ei}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}\,dt,\quad x<0.$$

Этот интеграл не выражается в конечной форме через элементарные функции. Если $x>0$, то интеграл понимается в смысле главного значения:

$$\operatorname{Ei}(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^t}{t}\,dt+\int_{\varepsilon}^{x}\frac{e^t}{t}\,dt\right\}.$$

См. также *Интегральный логарифм*.

ИНТЕГРА́ЛЬНАЯ СУ́ММА — см. *Интегральное исчисление, Кратный интеграл*.

ИНТЕГРА́ЛЬНАЯ ТЕОРЕ́МА ЛАПЛА́СА, см. *Лапласа теорема*.

ИНТЕГРА́ЛЬНАЯ ФО́РМУЛА КОШИ́ — см. *Коши интеграл*.

ИНТЕГРА́ЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕ́НИЕ.

СОДЕРЖАНИЕ:

Неопределённый интеграл 230
Определённый интеграл 231
Обобщения понятия определённого интеграла 231
Интегралы, зависящие от параметра 232
Исторический очерк 232

Интегральное исчисление — раздел математики, в к-ром изучаются свойства интегралов и связанных с ними процессов интегрирования. Простейшими понятиями И. и. являются неопределённый интеграл и определённый интеграл. И. и. тесно связано с *дифференциальным исчислением*, вместе с к-рым оно составляет одну из основных частей математич. анализа. Как дифференциальное, так и интегральное исчисление базируются на методе бесконечно малых или методе пределов.

Неопределённый интеграл

Нахождение неопределённых интегралов, или интегрирование, есть операция, обратная дифференцированию. При дифференцировании данной функции ищется её производная. При интегрировании, наоборот, ищется первообразная функция — такая функция, производная к-рой равна данной функции. Таким образом, функция $F(x)$ является первообразной для данной функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$, или, что то же самое, $dF(x)=f(x)dx$. Данная функция $f(x)$ может иметь различные первообразные, но все они отличаются друг от друга только постоянными слагаемыми. Поэтому все первообразные для $f(x)$ содержатся в выражении $F(x)+C$, к-рое наз. неопределённым интегралом функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

Символ $\int$ наз. знаком интеграла, а $f(x)$ — подынтегральной функцией.

Взаимно обратный характер операций интегрирования и дифференцирования выражается равенствами

$$d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx,\quad \int dF(x)=F(x)+C.$$

Отсюда следует возможность получения из формул и правил дифференцирования соответствующих формул и правил интегрирования (см. табл., где C, m, a, k — постоянные и $m\neq-1$, $a>0$).

Основные интегралы и правила интегрирования

$$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C;\quad \int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C;$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad\text{и}\quad \int e^x dx=e^x+C;$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C;\quad \int\cos x\,dx=\sin x+C;$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C;\quad \int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C;$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C;$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C.$$

$$\int[f_1(x)\pm f_2(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx\pm\int f_2(x)\,dx;$$

$$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx;$$

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

(формула интегрирования по частям);

если $x=\varphi(t)$, то $dx=\varphi'(t)\,dt$ и

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

(правило замены переменного).

Трудность И. и. сравнительно с дифференциальным исчислением состоит в том, что неопределённый интеграл от элементарной функции может не быть элементарной функцией. Даже в тех случаях, когда интеграл выражается через элементарные функции (т. е., как говорят, берётся в конечном виде), нет единых рецептов, к-рые позволяли бы найти такое выражение (простейшие способы интегрирования излагаются в учебниках математич. анализа; обширные таблицы интегралов приводятся в справочниках).

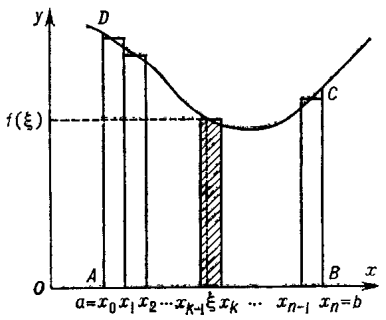
Важный класс функций, интегралы от к-рых берутся в конечном виде, представляют собой рациональные функции

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. Многие функции, не являющиеся рациональными, также интегрируются в конечном виде, напр. функции, рационально зависящие от $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и x или же от x и рациональных степеней дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$. В конечном виде интегрируются и нек-рые трансцендентные функции, напр. рациональные функции синуса и косинуса. Функции, к-рые изображаются неопределёнными интегралами, не берущимися в конечном виде, представляют собой новые трансцендентные функции. Многие из них хорошо изучены (см., напр., *Интегральный логарифм*, *Интегральный синус и интегральный косинус*, *Интегральная показательная функция*).

Определённый интеграл

К понятию определённого интеграла можно прийти, решая задачу о вычислении площади криволинейной трапеции, т. е. фигуры $ABCD$ (рис.), ограниченной дугой непрерывной кривой, расположенной над осью Ox и имеющей уравнение $y=f(x)$, отрезком $AB=[a, b]$ оси Ox и отрезками AD и BC. Для вычисления площади этой фигуры основание AB (отрезок $[a, b]$) разбивают точками



$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

на n частей и на каждом участке строят прямоугольники с высотами $f(\xi_1)$, . . ., $f(\xi_n)$, где ξ_k — нек-рая точка из отрезка $[x_{k-1}, x_k]$. Сумма площадей построенных прямоугольников выражается так:

$$S_n=f(\xi_1)(x_1-x_0)+\ldots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})=$$
$$=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

где $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$. Предел сумм S_n, когда число точек деления неограниченно увеличивается и наибольшая из длин Δx_k стремится к нулю, будет равен площади криволинейной трапеции $ABCD$. Отвлекаясь от геометрич. содержания задачи, приходят к понятию определённого интеграла от любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, $b>a$, как к пределу интегральных сумм S_n при том же предельном переходе. Этот интеграл обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Числа a и b наз. нижним и верхним пределами определённого интеграла. Если $a=b$, то, по определению, полагают

$$\int_a^a f(x)\,dx=0,$$

а в случае $b<a$ —

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx,$$

так что определённый интеграл зависит от направления обхода отрезка $[a, b]$.

Определённый интеграл есть число, к-рое сопоставляется непрерывной функции $f(x)$ и направленному отрезку $[a, b]$. Оно не зависит от того, как обозначена переменная интегрирования x, к-рая играет здесь такую же роль, как и индекс суммирования в символе суммы; таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt.$$

Для определённых интегралов справедливы правила интегрирования, аналогичные соответствующим правилам для неопределённых интегралов.

К вычислению определённых интегралов сводятся задачи об измерении площадей, ограниченных кривыми (задачи «нахождения квадратуры»), длин дуг кривых («спрямление кривых»), площадей поверхностей тел, объёмов тел («нахождение кубатур»), а также задачи определения координат центров тяжести, моментов инерции, пути тела по известной скорости движения, работы, производимой силой, и многие другие задачи естествознания и техники. Напр., длина дуги плоской кривой, заданной уравнением $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$, выражается интегралом

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

объём тела, образованного вращением этой дуги вокруг оси Ox,— интегралом

$$\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx,$$

площадь поверхности этого тела — интегралом

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Определённый интеграл, рассматриваемый как функция верхнего предела интегрирования

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

(интеграл с переменным верхним пределом), представляет собою одну из первообразных подинтегральной функции $f(x)$, т. е.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x).$$

Отсюда вытекает основная теорема интегрального исчисления (формула Ньютона — Лейбница), согласно к-рой

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

где $F(x)$ — любая первообразная для $f(x)$. Эта формула служит одним из основных средств для вычисления определённых интегралов.

Фактич. вычисление определённых интегралов осуществляется различными способами. В отдельных случаях определённый интеграл можно найти, непосредственно вычисляя предел соответствующей интегральной суммы. Однако большей частью такой переход к пределу затруднителен. Как правило же, приходится прибегать к приближённому вычислению определённых интегралов, применяя различные *квадратурные формулы* (напр., *трапеций формулу*, *Симпсона формулу*). Такое приближённое вычисление может быть осуществлено на ЭВМ с абсолютной погрешностью, не превышающей любого заданного малого положительного числа. В случаях, не требующих большой точности, для приближённого вычисления определённых интегралов применяют графич. методы (см. *Графические вычисления*).

Обобщения понятия определённого интеграла

Понятие определённого интеграла распространяется на случай неограниченного промежутка интегрирования, а также на нек-рые классы неограниченных функций. Это

т. н. *несобственные интегралы*. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, \infty)$ и существует предел

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

то он наз. интегралом с бесконечным верхним пределом и обозначается

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Аналогично, если на отрезке интегрирования $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет одну точку разрыва c, в окрестности к-рой она неограниченна, то под несобственным интегралом

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

понимается

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

если эти пределы существуют. В этом случае говорят, что несобственный интеграл сходится, а в противном случае — что он расходится или не существует.

Понятие интеграла распространяется также на функции многих действительных переменных (см. *Кратный интеграл*, *Криволинейный интеграл*, *Поверхностный интеграл*), на функции комплексного переменного (см. *Аналитическая функция*) и вектор-функции.

Относительно обобщения понятия определённого интеграла на разрывные функции см. ст. *Интеграл*.

Интегралы, зависящие от параметра

Это интегралы вида

$$\varphi(x)=\int_a^b f(x,\ y)\,dy,$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна по y. При нек-рых дополнительных ограничениях на функцию f такие интегралы можно интегрировать и дифференцировать «под знаком интеграла», т. е.

$$\int_c^d \varphi(x)\,dx=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy,\quad \varphi'(x)=\int_a^b\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dy.$$

Интегралы, зависящие от параметра, служат в математич. анализе основным средством для изображения и изучения *специальных функций*, встречающихся в математике и её приложениях. Особенно важную роль играют несобственные интегралы, зависящие от параметра (см., напр., *Гамма-функция*).

Исторический очерк

Античность. И. и. возникло из задач на определение площадей и объёмов. Эмпирически обнаруженные правила измерения площадей и объёмов нек-рых простейших фигур были известны ещё учёным Древнего Востока и уже за 2000 лет до н. э. египтяне и вавилоняне умели, в частности, приближённо измерять площадь круга и знали правило вычисления объёма усечённой пирамиды с квадратным основанием. Задача теоретич. обоснования правил измерения пирамиды и круга была впервые поставлена в древнегреческой науке; это повлекло за собой введение в математику идеи бесконечного (см. *Бесконечность*).

По свидетельству ряда источников, начала интеграционных приёмов были впервые созданы философом-материалистом Демокритом из Абдер в 5 в. до н. э. Демокрит, по-видимому, рассматривал тела как состоящие из огромного числа мельчайших частей. Конус, с этой точки зрения, оказывался совокупностью наслаивающихся друг на друга тончайших цилиндрич. дисков различного диаметра. Демокрит показал, что пирамида и конус равновелики соответственно трети призмы или цилиндра с теми же основанием и высотой. Однако доказательства Демокрита вскоре перестали удовлетворять требованиям возросшей математич. строгости.

Большое значение в истории И. и. имела задача о *квадратуре круга*. Исследуя эту задачу, Гиппократ Хиосский (сер. 5 в. до н. э.) нашёл первую точную квадратуру нескольких криволинейных фигур (см. *Гиппократовы луночки*). Философ-софист Антифонт (кон. 5 в. до н. э.) предпринял попытку построить квадрат, равновеликий кругу, вписывая в круг правильные многоугольники со всё увеличивающимся числом сторон. Каждый многоугольник можно с помощью циркуля и линейки преобразовать в равновеликий квадрат, представляя себе, по-видимому, что при чрезвычайно большом числе сторон правильный вписанный многоугольник совпадает с кругом. Антифонт умозаключил, что нашёл решение задачи о квадратуре круга. Однако эта ошибка не умаляет плодотворного значения применённого Антифонтом способа приближения площади криволинейной фигуры с помощью вписанных в неё прямолинейных фигур.

В 4 в. до н. э. Евдокс Книдский дал новый удовлетворяющий возросшим требованиям математич. строгости метод определения площадей и объёмов, к-рый много позднее (в 17 в.) был назван *исчерпывания методом*. В основе этого метода лежала созданная Евдоксом общая теория отношений величин, игравшая в античной математике ту же роль, к-рая в современном анализе принадлежит теории действительных чисел. Важное место в теории отношений занимает т. н. аксиома Евдокса—Архимеда, согласно к-рой нек-рое кратное меньшей из двух однородных величин a и b превзойдёт большую (если $a<b$, то существует такое натуральное число n, что $na>b$). Аксиома Евдокса исключала из математики т. н. актуально бесконечно малые величины и воспрещала рассматривать отношения между объёмом и площадью. Из аксиомы Евдокса следует, что если от к.-л. величины отнять больше половины, от остатка — больше его половины и т. д., то через конечное число шагов можно получить остаток, меньший любой данной величины того же рода; это следствие было существенным моментом многих выводов по методу исчерпывания. Пользуясь своим приёмом, Евдокс точно доказал теоремы об объёмах конуса и пирамиды, а также о том, что площади кругов относятся как квадраты их диаметров, а объёмы шаров — как кубы их диаметров; эти доказательства имеются в «Началах» Евклида (3 в. до н. э.).

Развитие в 4—3 вв. до н. э. теории конич. сечений, статики и гидростатики потребовало вычисления ряда новых площадей и объёмов и — впервые в истории науки — центров тяжести. Лучшие достижения древности в этой области принадлежат Архимеду (3 в. до н. э.). Квадратура сегмента параболы, данная Архимедом, может служить хорошим примером его приёмов (см. подробнее о решении этой задачи Архимедом в ст. *Исчерпывания метод*).

Доказательства по методу исчерпывания заключали в себе идеи позднейшей теории пределов и содержали как важнейший элемент сколь угодно точное приближение к искомой величине — пределу. Заключение от противного, неразрывно связанное с этим неограниченным приближением, гарантировало единственность предела. Однако в методе исчерпывания не были выделены ни идея переменной величины, ни идея предела, ни тем более к.-л. общие свойства последнего, и в отличие от современной теории пределов, где теорема о единственности предела доказывается (также от противного) сразу в общем случае, в античном методе это доказательство проводилось в каждой задаче заново.

Архимед не только использовал старые формы метода исчерпывания, но ввёл и существенно новые. Евдокс, Евклид и сам Архимед в квадратуре параболы применяли приближения с помощью последовательности сумм членов (сходящегося) ряда величин; переменной являлась только сумма, но не её слагаемые, а неограниченно умалялась только разность между искомой величиной и её приближениями. В других задачах Архимед впервые применил составление настоящих интегральных «верхней» и «нижней» сумм, первая из к-рых превосходит измеряемую ве-

личину, а вторая меньше её. Члены этих сумм неограниченно уменьшаются, число их неограниченно растёт, а разность между ними (и измеряемой величиной) стремится, говоря по-современному, к нулю. Так, в задаче о кубатуре эллипсоида вращения Архимед делит ось его симметрии на n равных частей и строит вписанные и описанные цилиндры, высотами к-рых служат равные отрезки оси симметрии. Вычисление общего объёма вписанного и описанного тел требовало при этом суммирования ряда первых степеней и квадратов членов арифметич. прогрессии, т. е., в частности, отыскание сумм

$$1+2+\ldots+n=\frac{(n+1)\,n}{2},$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{(2n+1)\,(n+1)\,n}{6},$$

а также пределов

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}=\frac{1}{2}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}.$$

Другими словами, вычисление названного объёма было равносильно вычислению интегралов

$$\int_0^a x\,dx \quad\text{и}\quad \int_0^a x^2\,dx.$$

Ко многим своим открытиям Архимед пришёл, сочетая принципы теории рычага с рассмотрением «неделимых» элементов фигур. Результаты, найденные таким путём, Архимед считал необходимым затем доказывать по методу исчерпывания, удовлетворявшему принятому в ту эпоху стандарту строгости.

Хотя среди различных приёмов Архимеда встречаются настоящие интегрирования методы, однако он не выделил общего содержания интегрирования приёмов и понятия об интеграле, а тем более не создал алгоритма И. и. Самый запас вычислительных средств И. и. оставался весьма ограниченным (суммы геометрич. прогрессии, ряд квадратов и немногие другие), а внешняя форма изложения, чисто словесная, сильно затрудняла изучение работ Архимеда. После него вплоть до конца античной эпохи существенно новых результатов в И. и. получено не было. Со 2 в. до н. э. деятельность учёных в области классич. направлений античной математики стала постепенно вырождаться в комментаторство. Подлинное возрождение приёмов Архимеда наступило только в новое время.

Средние века. Учёные Среднего и Ближнего Востока 9—15 вв. изучали и переводили труды Архимеда на общеупотребительный в их среде арабский язык. Единственным шагом вперёд в развитии И. и. явилось вычисление по методу исчерпывания объёмов тел вращения сегмента параболы вокруг касательной к вершине или хорды, потребовавшее вычисления суммы

$$1^4+2^4+\ldots+n^4$$

и равносильное вычислению интеграла $\int_0^a x^4dx$ (Ибн аль-Хайсам). Несколько ранее Сабит ибн Курра предложил оригинальный приём квадратуры параболы, основанный на делении отрезка интегрирования на неравные части и равносильный вычислению интеграла $\int_0^a \sqrt{x}\,dx$. Деятельность европейских учёных долгое время была ещё менее значительной. Земледелие и ремесленная техника многие столетия удовлетворялись правилами измерения простейших фигур; проблема квадратур или кубатур более сложных геометрич. образов не ставилась.

Разработка методов интегрирования в 17 веке. Развитие в Европе в 16 и 17 вв. статики, гидромеханики, астрономии и других естественных наук поставило перед математикой ряд новых задач, в частности задач на квадратуры, кубатуры и определение центров тяжести (см. также *Дифференциальное исчисление*). Труды Архимеда, впервые изданные в 1544 (на латинском и греческом языках), стали привлекать широкое внимание; изучение их явилось одним из важнейших отправных пунктов дальнейшего развития И. и. Математики нового времени, искавшие общие познавательные приёмы, общие методы, прежде всего обратили внимание на недостаток общности метода исчерпывания. Сходные в своей аналитич. сущности задачи на квадратуру параболы и спирали Архимеда, на кубатуру пирамиды и эллипсоида (все они могут быть приведены к вычислению $\int_0^a x^2dx$) рассматривались древнегреческими математиками каждая особо. Многие учёные 1-й пол. 17 в. стали на путь выделения тех общих понятий и их свойств, к-рые лежали в основе архимедовых доказательств. Итогом трудов этой группы учёных (Л. Валерио, 1601, Григория из Сен-Винцента, 1647, А. Таке, 1651, и др.) явились формулировка идеи, близкой идее предела, и теоремы, к-рую ныне записывают в виде: если $\lim x=a$, $\lim y=b$ и $x/y=k$, то $a/b=k$, а также нек-рые частные квадратуры, кубатуры и определения центров тяжести. Однако это направление мало обогатило запас вычислительных средств анализа.

И. Кеплер первый возродил античный *неделимых метод*. Он сумел извлечь идею этого метода из известных ему работ Архимеда благодаря своим собственным взглядам на бесконечно малые (сочинение Архимеда о применении механич. метода было найдено только в 1906). Теорему Архимеда о том, что площадь круга равновелика площади треугольника с основанием, равным длине окружности, и высотой, равной радиусу, И. Кеплер доказывал в нескольких словах: каждая точка окружности рассматривается как основание равнобедренного треугольника с вершиной в центре круга и с высотой, равной радиусу; площадь круга тогда состоит из бесконечного числа треугольников, в совокупности равновеликих треугольнику с той же высотой, т. е. радиусом, и с основанием, равным сумме всех оснований, т. е. длине окружности.

Пользуясь такого рода рассуждениями, И. Кеплер в «Новой стереометрии винных бочек» (1615) нашёл около сотни новых объёмов тел вращения, гл. образом конич. сечений. Известный в астрономии закон пропорциональности площадей, описываемых радиус-векторами планет, и времён прохождения соответствующих дуг орбит был получен И. Кеплером фактически с помощью приближённого (численного) интегрирования. Замечательно остроумные приёмы интеграции И. Кеплера не обладали, однако, строгостью (он сам отмечал это), а главное, как правило, носили характер геометрич. преобразований, для каждого случая особых и поэтому лишённых общности.

В более общей форме идеи этого метода были развиты учеником Г. Галилея — Б. Кавальери в «Геометрии, изложенной новым способом при помощи неделимых непрерывного» (1635) и «Шести геометрических этюдах» (1647). Неделимые Б. Кавальери являлись актуально бесконечно малыми образами с измерением на единицу низшим, чем обладающее ими в бесконечном числе непрерывное целое. Использование неделимых осуществлялось следующим образом. Если провести касательную к ограничивающей площадь выпуклой кривой («направляющую ось»), то при движении её параллельно самой себе она займёт положения всех хорд, пересекающих в том же направлении фигуру (всё это легко переносится с помощью плоских сечений на трёхмерные образы). Понятию интеграла соответствует при этом у Б. Кавальери «совокупность всех неделимых» фигуры. Такие совокупности, хотя и бесконечно велики, но зато во многих случаях отношения их имеют вполне определённую величину; собственно говоря, Б. Кавальери определял таким образом отношения нек-рых интегралов. Для сравнения площадей фигур, заключённых между двумя параллельными прямыми, Б. Кавальери рассматривал отношения сумм соответствующих неделимых, проведённых в каждой из фигур на одних и тех же расстояниях друг от друга. Так, в случае «криво-

линейных трапеций» приём Б. Кавальери сводится (в современных обозначениях) к сравнению сумм вида $Y_1+Y_2+\ldots+Y_n$ и $y_1+y_2+\ldots+y_n$, где все ординаты двух кривых $Y=F(x)$ и $y=f(x)$ берутся в точках с одними и теми же равноотстоящими абсциссами и где n — сколь угодно большое натуральное число. Вычисление отношений таких сумм при $n\to\infty$ равносильно вычислению отношения интеграла $\int_a^b F(x)dx$ к интегралу $\int_a^b f(x)dx$, причём в качестве второго из них берётся такой, значение к-рого известно. Важным результатом первой из названных работ Б. Кавальери было введение совокупностей квадратов неделимых. Он доказал теорему: совокупность квадратов неделимых параллелограмма относится к совокупности квадратов неделимых любого из образуемых в нём диагональю треугольников как 3 : 1. Теорема Кавальери равносильна утверждению:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{n}\right)^2(1^2+2^2+\ldots+n^2)}{na^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}$$

или $\int_0^a x^2dx:\int_0^a a^2dx=\frac{1}{3}$. Пользуясь своей теоремой, Б. Кавальери дал новый вывод площади параболич. сегмента и витка спирали Архимеда (для последней он ввёл криволинейные неделимые). Во второй работе Б. Кавальери дал аналогичные теоремы для высших степеней до девятой включительно, приложив их, в частности ($n=4$), к вычислению объёма тела вращения параболич. сегмента вокруг хорды, перпендикулярной к его оси (ранее найденного Ибн аль-Хайсамом).

Арифметизация метода неделимых. Метод неделимых Б. Кавальери не был свободен от недостатков. С одной стороны, он требовал усложнений для применения к площадям поверхностей и не мог быть непосредственно применён к измерению длин кривых. С другой стороны, задачи на квадратуры получали у Б. Кавальери чрезвычайно громоздкое решение, поскольку он не пользовался вычислительными приёмами и символикой новой алгебры. Упрощением метода неделимых с помощью его арифметизации занялись Э. Торричелли (1644), Дж. Валлис в «Арифметике бесконечных» (1655) и тогда же Б. Паскаль. Последний по-прежнему пользовался термином «сумма линий», но отмечал, что так называет сумму неограниченного числа прямоугольников с высотами — ординатами кривой — и бесконечно малыми основаниями. Преобразовав эту совокупность неделимых в сумму бесконечно малых (это понятие Б. Паскаль, впрочем, не уточнил) и установив в общем виде связь между квадратурами степенных функций и суммированием рядов $1^k+2^k+\ldots+n^k$ (для натуральных k), Б. Паскаль значительно ближе подошёл к понятию интеграла. Он выполнил в связи с геометрич. и статич. задачами также ряд выкладок, соответствующих вычислению интегралов

$$\int_0^a \sin x\,dx,\quad \int_0^a \sin^2 x\,dx,\quad \int_0^a (a^2-x^2)^{3/2}\,dx$$

и ряда аналогичных. У него же в геометрич. форме можно найти и приём интегрирования по частям. Дж. Валлис также свёл задачи на квадратуры кривых $y=x^n$ к нахождению пределов $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1^n+2^n+\ldots+m^n}{m^{n+1}}$, к-рые он нашёл для $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ по индукции, рассматривая дроби, стоящие под знаком предела, для возрастающих m, и по индукции распространил сначала на все натуральные n, а затем на дробные и отрицательные. Ещё замечательнее было валлисово вычисление $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$ (площади полукруга диаметра 1, т. е. $\pi/8$), давшее представление $4/\pi$ в виде бесконечного произведения

$$\frac{1\cdot3\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n-1)\ldots}{2\cdot4\cdot4\cdot\ldots\cdot2n\cdot2n\cdot\ldots}.$$

Применённый Дж. Валлисом метод состоял в целесообразном и хорошо обоснованном интерполировании нек-рых последовательностей функций $u_1, u_2, u_3, \ldots$, имеющих рациональные значения при натуральном n, именно в определении этих функций для дробных значений индекса n; он повлиял на ряд работ И. Ньютона (в частности, на открытие общей формулы о степени бинома для действительных показателей), а позднее способствовал введению Л. Эйлером гамма- и бета-функций.

Метод Ферма; спрямление кривых. П. Ферма, много сделавший для разработки методов дифференциального исчисления, пошёл по пути арифметизации методов квадратур (не позднее 1636). Рассматривая площади парабол $y=x^n$ (n — целое положительное число), он не применял неделимых, но делил площадь на узкие полоски с помощью равноотстоящих ординат, а затем производил квадратуру, опираясь на неравенства

$$1^n+\ldots+m^n>\frac{m^{n+1}}{n+1}>1^n+\ldots+(m-1)^n$$

и фактически находя предел

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1^n+2^n+\ldots+m^n}{m^{n+1}}=\frac{1}{n+1}.$$

Около 1644 он обобщил свой результат на дробные и отрицательные значения n, проводя ординаты в точках, абсциссы к-рых образуют геометрич. прогрессию; при этом площади полосок, приближённо равные ydx, сами составляют легко суммируемые геометрич. прогрессии. Предельные переходы дали П. Ферма результаты, равносильные вычислению интеграла $\int_0^a x^n dx$ при $n>0$ и первых несобственных интегралов $\int_a^\infty x^n dx$ при $n<-1$, $a>0$; свой приём П. Ферма назвал логарифмическим, тем самым указав на его связь со свойствами логарифмов. Метод Ферма был гораздо более арифметизирован, чем метод неделимых; результаты П. Ферма превосходили по общности результаты Б. Кавальери и, кроме того, были изложены существенно проще и короче. Хотя работы П. Ферма были опубликованы лишь в 1679, но они были известны широким кругам математиков в рукописях или письмах ещё в 30—40-е гг. 17 в.

В нач. 2-й пол. 17 в. интеграционные приёмы были распространены и на спрямление кривых: было установлено, что элемент дуги плоской кривой $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ и что длина линии с уравнением $y=f(x)$ численно равна площади криволинейной трапеции кривой $y=\sqrt{1+[f'(x)]^2}$. Х. Гюйгенс получил нек-рые спрямления с помощью эволют и произвёл ряд вычислений площадей поверхностей вращения.

В итоге этих исследований выявилась общность операций, к-рыми пользовались при решении внешне несходных задач геометрии и механики, приводившихся к квадратурам; последние и служили геометрич. эквивалентом определённого интеграла. Заключительным звеном в цепи открытий предшественников И. Ньютона и Г. Лейбница было установление взаимно обратной связи между задачами на проведение касательной и на квадратуры, т. е. между дифференцированием и интегрированием. Серьёзное влияние здесь имело изучение т. н. обратной задачи на касательные, поставленной ещё в 1638 Ф. Дебоном; в ней требовалось найти кривую по тем или иным свойствам наклона касательной, т. е. найти y по условию типа $f(x, y, y')=0$ (вообще говоря, это — задача теории дифференциальных уравнений). В геометрич. форме связь между дифференцированием и интегрированием была в печати указана И. Барроу в «Лекциях по оптике и геометрии» (1669—70); в переводе на современные обозначения И. Барроу показал, что из равенства $y=\int_0^x z\,dx$ следует, что $dy=z\,dx$, и обратно. Выдающиеся заслуги в подготовке от-

крытия исчисления бесконечно малых принадлежат также П. Менголи (1659), Дж. Грегори (1667—68 и рукописи).

Интегральное исчисление И. Ньютона и Г. Лейбница. Алгоритмы дифференциального исчисления, И. и. и их основные понятия были созданы независимо друг от друга И. Ньютоном и Г. Лейбницем. Интеграл у И. Ньютона (флюента) выступал прежде всего как неопределённый, как первообразная (термин Ж. Лагранжа). Исходным пунктом интеграций И. Ньютона было поэтому использование взаимно обратной связи между вычислением флюксий (дифференцирование) и вычислением флюент. Уже около 1666 он, найдя производную (флюксию) $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ равной x^n, получил интеграл x^n в виде $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, $n\neq -1$. Важнейшую роль в интеграциях И. Ньютона играло разложение интегрируемой функции в степенной ряд и затем почленное интегрирование ряда. Применяя открытую им общую теорему о степени бинома, обращение рядов и нек-рые другие приёмы, И. Ньютон выражал интегралы через бесконечные степенные ряды. Таким образом были проинтегрированы многие иррациональные и трансцендентные функции и решён ряд задач на квадратуры, спрямления и др. Интегрирование в конечном виде также не было оставлено И. Ньютоном без внимания, хотя играло в его исследованиях второстепенную роль. Так, в 1676 он указал, что интеграл дифференциального бинома $x^m(a+bx^p)^n$, где m, n, p — положительные рациональные числа, выражается через алгебраич. функции, когда $\frac{m+1}{p}$ или $\frac{m+1}{p}+n$ — целые положительные числа. Применяя замену переменных и нек-рые другие приёмы, И. Ньютон установил ряд случаев интегрируемости в алгебраических, логарифмических и обратных тригонометрич. функциях интегралов

$$\int x^m \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

причём последние два вида функций фигурировали у него в форме величин площадей нек-рых конич. сечений, а аналитически могли быть выражены в общем случае с помощью бесконечных рядов. В «Математических началах натуральной философии» (1687) И. Ньютон фактически проводил вычисления, равносильные вычислению нек-рых двойных и тройных интегралов, но соответствующие общие понятия были введены позднее.

Понятие интеграла у Г. Лейбница выступило, наоборот, прежде всего в форме определённого интеграла, в виде суммы бесконечного числа бесконечно малых дифференциалов, на к-рые разбивается та или иная величина. Введение понятия интеграла и его обозначений относится к осени 1675. Сначала Г. Лейбниц, следуя Б. Кавальери, употребил знак $\overline{\text{omn}}\,l$ (omnia — все, l — линия), но вскоре стал писать $\int y$, где $\int$ есть удлинённое S (первая буква слова Summa). Вслед за тем Г. Лейбниц окончательно остановился на знаке $\int y\,dx$, ибо суммировались не линии, а дифференциалы площади $y\,dx$. Знак интеграла был опубликован в статье Г. Лейбница 1686; термин «интеграл» впервые в печати употребил Я. Бернулли в 1690, после чего вошло в обиход и выражение «интегральное исчисление» (Г. Лейбниц сначала говорил о «суммирующем исчислении»). Вычисление интегралов Г. Лейбниц и его ученики, первыми из к-рых явились братья Я. и И. Бернулли, сводили к обращению операции дифференцирования, т. е. к отысканию первообразных [постоянная интегрирования в печати появилась в статье Г. Лейбница (1694)]. При вычислении интегралов с определёнными пределами с помощью неопределённых интегралов как И. Ньютон, так и Г. Лейбниц пользовались носящей их имя формулой; однако современная терминология была создана только в кон. 18 в. Среди употреблявшихся Г. Лейбницем специальных способов интегрирования были: замена переменной, интегрирование по частям, а также т. н. дифференцирование по параметру под знаком интеграла (1697). Г. Лейбницу же принадлежит идея интегрирования рациональных дробей при помощи разложения на простейшие дроби (1702—1703), впоследствии усовершенствованная другими учёными. К И. Ньютону, Г. Лейбницу и нек-рым их современникам восходит также первое применение методов графич. интегрирования и идея механич. интеграфов.

Дальнейшее развитие интегрального исчисления. Основные работы по дальнейшему развитию И. и. в 18 в. принадлежат И. Бернулли и особенно Л. Эйлеру, «Интегральное исчисление» (3 тт., 1768—70) к-рого явилось настольной книгой и источником вдохновения крупнейших математиков 2-й пол. 18 в. Основным понятием для Л. Эйлера являлось понятие об интеграле как первообразной. Интеграл с произвольной постоянной назывался полным, с фиксированной постоянной — частным, а значение частного интеграла при к.-л. значении аргумента давало величину, позднее названную определённым интегралом. В центре учения о неопределённых интегралах находилась разработка различных приёмов интегрирования в элементарных функциях, круг к-рых сам Л. Эйлер и выделил. Почти все приёмы, излагаемые в современных учебниках, можно найти в его трактате. Л. Эйлер не ограничился систематизацией прежних и разработкой новых приёмов вычисления неопределённых интегралов, но существенно развил теорию определённых интегралов, для к-рых ввёл позднее специальный знак $\int P dx \left[\begin{matrix}\text{от } x=a\\ \text{до } x=b\end{matrix}\right]$ (термин «определённый интеграл» предложил в 1779 П. Лаплас, а современный знак $\int_a^b f(x)dx$ — в 1817—22 Ж. Фурье). Так, Л. Эйлер вычислил большое количество важных несобственных интегралов, напр. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, и заложил основы теории Г-функции и В-функции. В 1777—78 Л. Эйлер впервые применил к вычислению определённых интегралов функции комплексного переменного (опубл. 1793—97); почти тогда же П. Лаплас (1782) вычислил первые интегралы с мнимыми пределами (опубл. 1785). В сер. 18 в. Л. Эйлер и Ж. Лагранж свободно владели двойными и тройными интегралами. Впервые двойные интегралы встречаются в 1756 в письме Ж. Лагранжа Л. Эйлеру, причём Ж. Лагранж выражает с их помощью объёмы цилиндрич. тел и площади криволинейных поверхностей; первое изложение теории двойных интегралов опубликовал, однако, Л. Эйлер в 1770, вслед за чем в 1772 Ж. Лагранж ввёл тройные интегралы; криволинейные интегралы были ещё ранее рассмотрены А. Клеро (1743).

Быстро развиваясь, И. и. явилось уже в 18 в. источником возникновения новых разделов анализа, первоначально считавшихся лишь ветвями И. и. Так, от И. и. отделяются заложенные Я. Бернулли и затем разработанное гл. обр. Л. Эйлером и Ж. Лагранжем вариационное исчисление и теория дифференциальных уравнений. И. и. явилось основой теории эллиптич. интегралов, впоследствии переросшей в теорию эллиптич. функций. К первым попыткам вычисления интегралов от комплексных выражений или интегралов между мнимыми пределами восходят важные разделы теории аналитич. функций.

В нач. 19 в. И. и., как и дифференциальное исчисление, было перестроено на новых основаниях. Реформа И. и. была начата О. Коши, к-рый вновь выдвинул в качестве основного понятие об определённом интеграле и в «Кратком изложении уроков о дифференциальном и интегральном исчислении» (1823, рус. пер. 1831) впервые аналитически доказал существование определённого интеграла непрерывной функции, а также точно определил простейшие несобственные интегралы для неограниченного промежутка интегрирования и для функций с конечным числом точек разрыва. Дальнейшие обобщения понятия интеграла, связанные особенно с изучением тригонометрич. рядов, были даны Б. Риманом, А. Лебегом и др.

В развитии И. п. в 19 в. приняли важнейшее участие и русские учёные. Так, М. В. Остроградский предложил оригинальный приём интегрирования рациональных дробей, позволяющий алгебраически выделить рациональную часть интеграла (1845). М. В. Остроградскому (1826—34) также принадлежат имеющие фундаментальное значение в И. и. и его приложениях формулы преобразования n-кратных интегралов в $(n-1)$-кратные (см. *Остроградского формула*). Большое число специальных определённых интегралов вычислил Н. И. Лобачевский. В. Я. Буняковский открыл (1859) широко применяемое неравенство

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx \int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx \geqslant \left[\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx\right]^2.$$

Крупнейшие исследования по И. и. принадлежат П. Л. Чебышеву. Среди них — продолжавшие исследования Н. Абеля и М. В. Остроградского работы об интегрировании в конечном виде нек-рых иррациональных функций. В частности, П. Л. Чебышев доказал, что известные ещё в 18 в. три случая интегрируемости в конечном виде дифференциального бинома являются единственными.

Общая теория *интеграла* связана с развитием теории множеств и теории функций действительного переменного.

● См. *лит.* при ст. *Дифференциальное исчисление*, а также дополнение к разделу «Работы основоположников и классиков»: Архимед, Сочинения, М., 1962; Кеплер И., Новая стереометрия винных бочек, пер. с лат., М.— Л., 1934; Кавальери Б., Геометрия..., пер. с лат., М.— Л., 1940; Эйлер Л., Интегральное исчисление, пер. с лат., т. 1—3, М., 1956—58. *А. П. Юшкевич.*

ИНТЕГРА́ЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — функциональное преобразование вида

$$F(x) = \int_C K(x,\ t)\,f(t)\,dt,$$

где C — конечный или бесконечный контур в комплексной плоскости, $K(x,\ t)$ — ядро И. п. Наиболее часто рассматриваются И. п., для к-рых $K(x,\ t) \equiv K(xt)$ и C — действительная ось или её часть $(a,\ b)$. Если $-\infty < a,\ b < \infty$, то И. п. наз. конечным И. п. Формулы, позволяющие восстановить функцию $f(t)$ по известной $F(x)$, наз. формулами обращения И. п.

Примеры интегральных преобразований

Преобразование Бохнера:

$$[Tf](r) = 2\pi r^{1-n/2} \int_0^\infty J_{n/2-1}(2\pi r\rho)\,\rho^{n/2} f(\rho)\,d\rho,$$

где $J_\nu(x)$ — цилиндрич. функция 1-го рода порядка ν, ρ — расстояние в $\mathbb{R}^n$. Формула обращения: $f = T^2 f$. Равенство Парсеваля:

$$\int_0^\infty |[Tf](r)|^2\, r^{k-1}\,dr = \int_0^\infty |f(\rho)|^2\,\rho^{k-1}\,d\rho.$$

Преобразование Вебера:

$$F(u,\ a) = \int_a^\infty c_\nu(tu,\ au)\,tf(t)\,dt,\quad a \leqslant t < \infty,$$

где $c_\nu(\alpha,\ \beta) \equiv J_\nu(\alpha)Y_\nu(\beta) - Y_\nu(\alpha)J_\nu(\beta)$, $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ — цилиндрич. функции 1-го и 2-го рода. Формула обращения:

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{c_\nu(xu,\ au)}{J_\nu^2(au) + Y_\nu^2(au)}\,uF(u,\ a)\,du.$$

При $a \to 0$ преобразование Вебера переходит в преобразование Ганкеля:

$$F(x) = \int_0^\infty \sqrt{xt}\,J_\nu(xt)\,f(t)\,dt,\quad 0 < x < \infty.$$

При $\nu = \pm 1/2$ это преобразование сводится к синус- и косинус-преобразованиям Фурье. Формула обращения: если $f \in L_1(0,\ \infty)$, функция $f(t)$ имеет ограниченную вариацию в окрестности точки $t_0 > 0$ и $\nu \geqslant -1/2$, то

$$\frac{1}{2}[f(t_0+0) + f(t_0-0)] = \int_0^\infty \sqrt{t_0 x}\,J_\nu(t_0 x)\,F(x)\,dx.$$

Равенство Парсеваля: если $\nu \geqslant -1/2$, $F(x)$ и $G(x)$ — преобразования Ганкеля функций $f(t)$ и $g(t)$, причём $f,\ G \in L_1(0,\ \infty)$, то

$$\int_0^\infty f(t)\,g(t)\,dt = \int_0^\infty F(x)\,G(x)\,dx.$$

Другие формы преобразования Ганкеля:

$$\int_0^\infty J_\nu(xt)\,tf(t)\,dt,\quad \int_0^\infty J_\nu(2\sqrt{xt})\,f(t)\,dt.$$

Преобразование Вейерштрасса

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^\infty \exp[-(x-t)^2/4]\,f(t)\,dt$$

является частным случаем преобразования свёртки.

Цепные преобразования. Пусть

$$f_{i+1}(x) = \int_0^\infty f_i(t)\,K_i(xt)\,dt,\quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

причём $f_{n+1}(x) = f_1(x)$. Такая последовательность И. п. наз. цепочкой И. п.

ИНТЕГРА́ЛЬНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. И. у. делятся на два основных класса: линейные И. у. и нелинейные И. у.

Линейные интегральные уравнения имеют вид

$$A(x)\,\varphi(x) + \int_D K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds = f(x),\ x \in D, \qquad (1)$$

где A, K, f — заданные функции, из к-рых A наз. коэффициентом, K — ядром, f — свободным членом (или правой частью) И. у., D — ограниченная или неограниченная область евклидова пространства одного или многих измерений, x, s — точки этого пространства, ds — элемент объёма, φ — искомая функция. Требуется определить φ так, чтобы уравнение (1) удовлетворялось для всех (или почти всех, если интеграл рассматривается в смысле Лебега) x из D. Если в (1) A, K — матрицы, f, φ — вектор-функции, тогда (1) наз. системой линейных И. у. Если $f = 0$, то И. у. называется однородным, в противном случае — неоднородным.

В зависимости от коэффициента A различают три типа линейных И. у. Если $A(x) = 0$ для всех $x \in D$, то (1) наз. уравнением 1-го рода; если $A(x) \neq 0$ для всех $x \in D$ — уравнением 2-го рода; если $A(x)$ обращается в нуль на нек-ром подмножестве области D — уравнением 3-го рода.

В дальнейшем, для простоты изложения, рассматриваются И. у. в одномерном случае, когда D — конечный отрезок $[a,\ b]$. В этом случае линейные И. у. 1-го и 2-го рода можно представить соответственно в виде

$$\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds = f(x),\ x \in [a,\ b], \qquad (2)$$

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(x)\,ds = f(x),\ x \in [a,\ b]; \qquad (3)$$

комплексное число λ наз. параметром И. у. При исследовании задач математич. физики особенно часто встречаются уравнения 2-го рода. Если ядро K фредгольмово, т. е. интегральный оператор в уравнениях (2), (3) вполне непрерывен, то И. у. (2), (3) наз. *Фредгольма уравнениями* 1-го и 2-го рода соответственно. Важным примером уравнения Фредгольма является уравнение, в к-ром ядро K удовлетворяет условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,\ s)|^2\,dx\,ds < \infty, \qquad (4)$$

а правая часть f и искомая функция φ — интегрируемые с квадратом функции.

Уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds = 0,\ x \in [a,\ b], \qquad (5)$$

наз. однородным И. у., соответствующим неоднородному И. у. (3). Аналогично определяется однородное И. у., соответствующее уравнению (2). Однородное И. у. всегда имеет решение $\varphi = 0$, к-рое наз. нулевым (или тривиальным) решением. Значение параметра

λ, при к-ром И. у. (5) имеет ненулевое решение φ, наз. собственным (или характеристическим) значением ядра K или И. у. (5), а ненулевое решение φ — собственной функцией ядра K или И. у. (5), принадлежащей (или соответствующей) данному собственному значению λ. Если λ не есть собственное значение, тогда его наз. правильным значением параметра.

Комплексное ядро K наз. эрмитовым, если

$$\overline{K(x,\ s)} = K(s,\ x), \qquad (6)$$

где черта означает переход к комплексно сопряжённому значению. В случае действительного ядра равенство (6) принимает вид $K(x,\ s)=K(s,\ x)$. Такое ядро наз. симметричным.

Фредгольмово ядро может не иметь собственное значение (напр., в случае ядра Вольтерры, см. ниже). Если ядро симметрично и не равно нулю почти всюду, тогда оно имеет, по крайней мере, одно собственное значение, и все собственные значения действительны.

Если ядро K обращается в нуль при $s>x$ (т. н. ядро Вольтерры), то уравнения (2) и (3) соответственно принимают вид

$$\int_a^x K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds = f(x),\ a \leqslant s \leqslant x \leqslant b, \qquad (7)$$

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds = f(x),\ a \leqslant s \leqslant x \leqslant b. \qquad (8)$$

Эти уравнения наз. *Вольтерры уравнениями* 1-го и 2-го рода соответственно.

Частные примеры И. у. начали появляться в 1-й пол. 19 в. И. у. стали объектом особого внимания математиков после того, как удалось свести решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа к исследованию линейного И. у. 2-го рода. Построение общей теории линейных И. у. было начато в кон. 19 в. Основоположниками этой теории считаются В. Вольтерра (1896), И. Фредгольм (1903), Д. Гильберт (1912) и Э. Шмидт (1907). Ещё до исследований этих учёных для построения решения И. у. был предложен метод последовательных приближений. Этот метод применялся сначала для решения нелинейных И. у. типа Вольтерры (по современной терминологии) в связи с исследованиями обыкновенных дифференциальных уравнений в работах Ж. Лиувилля (1838), Л. Фукса (1870), Дж. Пеано (1888) и др., а К. Нейманом (1877) — для построения решения линейного И. у. 2-го рода. Общую форму методу последовательных приближений придал Э. Пикар (1893).

При изучении уравнения колеблющейся мембраны А. Пуанкаре (1896) пришёл к идее введения переменного численного параметра λ в уравнение (3). Тогда же им была высказана гипотеза, что (аналогично случаю уравнения колеблющейся мембраны) решение И. у. (3) является мероморфной функцией от λ. Эту гипотезу доказал И. Фредгольм (1900—03). Работам И. Фредгольма предшествовали исследования В. Вольтерры (1896—97), к-рый изучил И. у. вида (7), (8). Он доказал, что если ядро и правая часть уравнения непрерывны, то (8) имеет при любом конечном значении λ одно и только одно непрерывное решение, к-рое можно построить по методу последовательных приближений. Уравнение (3) изучалось И. Фредгольмом в предположении, что его ядро, а также правая часть и искомое решение — непрерывные функции соответственно на квадрате $[a,\ b] \times [a,\ b]$ и на сегменте $[a,\ b]$. Следуя В. Вольтерре, И. Фредгольм заменил интеграл в (3) интегральной суммой и рассмотрел интегральное уравнение (3) как предельный случай конечной системы линейных алгебраич. уравнений. С помощью формального перехода к пределу И. Фредгольм получил формулу, дающую решение уравнения (3); доказал, что построенная формула является решением уравнения (3) за исключением конечного или счётного множества значений параметра λ, и доказал теоремы об условиях разрешимости уравнения (3). Построенную теорию уравнения (3) И. Фредгольм распространил на случай системы И. у. Решение системы приводится к решению одного уравнения, ядро к-рого имеет линии разрыва, параллельные осям координат.

Д. Гильберт показал (1904), что теоремы Фредгольма можно доказать путём строгого обоснования процесса предельного перехода, и построил общую теорию линейных И. у. на базе теории линейных и билинейных форм с бесконечным числом переменных. Э. Шмидт придал более простую и несколько более общую форму исследованиям Д. Гильберта. Он построил теорию линейных И. у. с действительным симметричным ядром независимо от теории Фредгольма.

Если линейное И. у. не является уравнением Фредгольма, то его наз. *сингулярным интегральным уравнением*. Общая теория Гильберта квадратичных форм с бесконечным числом переменных даёт возможность и в этом случае получить ряд важных результатов. Для нек-рых конкретных классов сингулярных И. у. разработаны специальные способы их решения, учитывающие характерные свойства этих уравнений.

Параллельно с линейными изучались и нелинейные интегральные уравнения, когда неизвестная функция может входить в уравнение в степени n, $n>1$, как это, напр., имеет место в уравнении

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,\ s)\,[\varphi(s)]^n\,ds = f(x),\ x \in [a,\ b].$$

Она может входить и более общим образом, как, напр., в уравнении

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,\ s,\ \varphi(s))\,ds.$$

● Привалов И. И., Интегральные уравнения, 2 изд., М.— Л., 1937; Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965; Смирнов В. И., Курс высшей математики, 6 изд., т. 4, ч. 1, М., 1974.
Б. В. Хведелидзе.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ; численные методы решения — методы нахождения приближённых решений И. у.

Требуется найти приближённое решение одномерного уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds + f(x), \qquad (1)$$

где $f(x)$ непрерывна на $[a,\ b]$, λ — числовой параметр, $K(x,\ s)$ непрерывна на $a \leqslant x,\ s \leqslant b$. Пусть λ не является собственным значением ядра $K(x,\ s)$. Тогда И. у. (1) имеет единственное решение $\varphi(x)$, непрерывное на $[a,\ b]$. В этих условиях можно указать следующие способы получения приближённого решения.

Первый способ. Пусть a и b — конечные числа. Интеграл в (1) заменяют интегральной суммой по сетке $\{s_j\}$, $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, а переменному x придают значения $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. Получается система линейных алгебраич. уравнений относительно φ_j:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}\varphi_j = f(x_i),\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (2)$$

где $A_{ij}=\delta_{ij} - C_j K(x_i,\ x_j)\lambda$, C_j — коэффициент квадратурной формулы, по к-рой интеграл в (1) заменён интегральной суммой. Система (2) при достаточно больших n имеет единственное решение $\{\overline{\varphi}_j\}$. В качестве приближённого решения уравнения (1) можно брать функцию

$$\tilde{\varphi}_n(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n C_j K(x,\ x_j)\,\overline{\varphi}_j,$$

т. к. при $n \to \infty$ и $\max\{|x_{i+1} - x_i|\} \to 0$ последовательность $\{\tilde{\varphi}_n(x)\}$ равномерно сходится на $[a,\ b]$ к искомому решению уравнения (1). В случае, когда промежуток $(a,\ b)$ бесконечный, то 1) либо заменяют его конечным промежутком $(a_1,\ b_1)$, пользуясь априорной информацией о поведении искомого решения $\varphi(x)$ при больших значениях $|x|$; 2) либо сводят его заменой переменной интегрирования к конечному; 3) либо применяют квадратурные формулы для бесконечного промежутка.

Второй способ. В уравнении (1) ядро $K(x, s)$ заменяют аппроксимирующим его вырожденным ядром

$$K_1(x, s) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(s), \qquad (3)$$

в к-ром функции $\{(a_i(x)\}$ линейно независимы. Получающееся при этом уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(s)\, \varphi(s)\, ds + f(x) \qquad (4)$$

имеет решение $\widehat{\varphi}_n(x)$ вида

$$\widehat{\varphi}_n(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i a_i(x) + f(x), \quad C_i = \int_a^b \widehat{\varphi}_n(s)\, b_i(s)\, ds,$$

в к-ром постоянные C_i подлежат определению. Подставляя $\widehat{\varphi}_n(x)$ в уравнение (4) и сравнивая коэффициенты при функциях $a_i(x)$, получают систему линейных алгебраич. уравнений для $\{C_i\}$:

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} C_j = \beta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\alpha_{ij} = \int_a^b a_j(s)\, b_i(s)\, ds, \ \beta_i = \int_a^b f(s)\, b_i(s)\, ds.$$

Так определённая функция $\widehat{\varphi}_n(x)$ принимается за приближённое решение уравнения (1), т. к. при достаточно хорошей аппроксимации (3) ядра $K(x, s)$ решение уравнения (4) произвольно мало отличается от искомого решения $\varphi(x)$ уравнения (1) на любом отрезке $[a_1, b_1] \subset (a, b)$, а если (a, b) — конечный промежуток, то и на отрезке $[a, b]$.

Третий способ. В качестве приближённых решений берутся функции $\varphi_n(x)$, получаемые методом итераций по формулам

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi_n(s)\, ds + f(x),$$

$\varphi_0(x) = f(x)$, т. к. последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно сходится к искомому решению при $n \to \infty$, если $|\lambda| < \frac{b-a}{M}$, $M = \max |K(x, s)|$. Эта сходимость имеет место и для некрых ядер с интегрируемыми особенностями.

Если в уравнении (1) λ совпадает с одним из собственных значений ядра $K(x, s)$, то задача нахождения его решения является некорректно поставленной. Интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода также являются некорректно поставленными задачами (см. *Некорректные задачи*).

Нелинейные И. у. 2-го рода приближённо решают обычно методом итераций. Для получения приближённых решений как линейных, так и нелинейных И. у. применяют также *Галёркина метод*.

Аналогичные методы можно применять и для получения приближённых решений многомерных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.

● Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, 3 изд., М., 1965; Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; Канторович Л. В., Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.— Л., 1962; Соболев С. Л., Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974; Соболь И. М., Многомерные кубатурные формулы и функции Хаара, М., 1969. *В. Я. Арсенин.*

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ЛОГАРИФМ — специальная функция, определяемая интегралом

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}, \quad x > 0, \ x \neq 1.$$

Этот интеграл не выражается в конечной форме через элементарные функции. Если $x > 1$, то интеграл понимается в смысле главного значения:

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\ln t} \right\}.$$

И. л. введён в математич. анализ Л. Эйлером (1768). И. л. $\mathrm{li}(x)$ связан с *интегральной показательной функцией* $\mathrm{Ei}(x)$ соотношением

$$\mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x).$$

Для больших положительных x функция $\mathrm{li}(x)$ растёт как $\frac{x}{\ln x}$. И. л. играет важную роль в аналитич. теории чисел, т. к. число простых чисел, не превосходящих x, приблизительно равно $\mathrm{li}(x)$.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — отображение $x \to Ax$, когда закон соответствия A задаётся с помощью интеграла. Уравнения, содержащие И. о., наз. интегральными. Таковы, напр., операторы *Вольтерра уравнения*, *Фредгольма уравнения*.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ — признак сходимости числового *ряда*.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ СИНУС И ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КОСИНУС — специальные функции, определяемые соответственно интегралами

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt, \quad \mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt.$$

Эти функции введены Л. Маскерони (1790). Однако ещё Л. Эйлеру (1781) было известно, что

$$\mathrm{Si}(\infty) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Этот интеграл является простейшим примером сходящегося, но не абсолютно сходящегося несобственного интеграла. Функции $\mathrm{Si}(x)$ и $\mathrm{Ci}(x)$ встречаются в различных вопросах анализа и техники, и для них имеются подробные таблицы. Иногда используют обозначения $\mathrm{si} \equiv \mathrm{Si} - \frac{\pi}{2}$ и $\mathrm{ci} \equiv \mathrm{Ci}$.

ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ МЕТОД, метод полос, — метод решения систем дифференциальных уравнений с частными производными, основанный на приближённом сведении уравнений с частными производными к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод применим к уравнениям различных типов и является развитием *прямых метода*.

Пусть имеется система дифференциальных уравнений с частными производными в дивергентном виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} P_i(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k) + \frac{\partial}{\partial y} Q_i(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k) = F_i(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k), \qquad (*)$$

$$i = 1, 2, \ldots, k,$$

где P_i, Q_i, F_i — заданные функции от независимых x, y и искомых $u_1, u_2, \ldots, u_k$ переменных. Пусть решение системы (*) ищется в криволинейном прямоугольнике с границами $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = \Delta(x)$, на к-рых ставится $2k$ условий, из них k условий на границах $x = a$ и $x = b$. Если заранее функция $\Delta(x)$ неизвестна, то требуется одно дополнительное условие. При наличии на границе особых точек вместо соответствующих граничных условий используются условия регулярности.

В N-м приближении область интегрирования разбивается на N непересекающихся полос системой линий $y = y_n(x) = n\Delta(x)/N$, $n = 1, \ldots, N$. Для каждого N выбирается замкнутая система из N линейно независимых функций $f_n(y)$. При умножении каждого исходного уравнения (*) на функции $f_n(y)$ и интегрировании по y поперёк всех полос получают kN интегральных соотношений вида

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta(x)} f_n(y)\, P\, dy - \Delta'(x)\, f_n(\Delta(x))\, P|_{y=\Delta(x)} + f_n(\Delta(x))\, Q|_{y=\Delta(x)} - f_n(0)\, Q(0) - \int_0^{\Delta(x)} f_n'(y)\, Q\, dy = \int_0^{\Delta(x)} f_n(y)\, F\, dy.$$

Подинтегральные функции P, Q, F аппроксимируются при помощи интерполяционных формул через их значения P_n, Q_n, F_n на границах полос; интегралы, входящие в интегральные соотношения, имеют вид

$$\int_0^{\Delta(x)} f_n(y)\, P\, dy \approx \Delta(x) \sum_{n=0}^{N} C_n P_n y_n(x),$$

где C_n — численные коэффициенты, зависящие от выбора интерполяционных формул и вида функций $f_n(y)$. В резуль-

тате получается аппроксимирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений по x относительно $k(N+1)$ значений искомых функций u_n на всех границах полос. Эта система замыкается граничными условиями при $y=0$ и $y=\Delta(x)$. Функции $f_n(y)$ выбираются достаточно произвольно. Применение в качестве $f_n(y)$ δ-функции $f_n(y)=\delta(y-y_n)$, $n=1, 2, \ldots, N$, приводит к методу прямых, в к-ром производные по y заменяются разностными выражениями, отвечающими выбранным интерполяционным формулам. При использовании ступенчатых функций

$$f_n^k(y)=\begin{cases} 0 \text{ при } y < y_{n-1}, \\ 1 \text{ при } y_{n-1} \leqslant y \leqslant y_n, \\ 0 \text{ при } y > y_n, \end{cases} n=1, 2, \ldots, N,$$

говорят о простом И. с. м., где исходные уравнения интегрируются поперёк каждой полосы. При этом выраженные исходной системой (*) законы сохранения запишутся для полос в виде следующих интегральных соотношений:

$$\frac{d}{dx}\int_{y_{n-1}}^{y_n} P\,dy - y_n' P(y_n) + y_{n-1}' P(y_{n-1}) + Q(y_n) - Q(y_{n-1}) = \int_{y_{n-1}}^{y_n} F\,dy.$$

Элементы И. с. м. применяются в других численных методах, напр. в *крупных частиц методе*.

И. с. м. наиболее приложим в газовой динамике, где с его помощью был решён ряд практически важных задач. При этом выделяют три схемы И. с. м.: 1) область интегрирования разбивается линиями, проходящими между поверхностью тела и ударной волной; 2) область интегрирования разбивается линиями, проходящими между осью симметрии и граничной характеристикой; 3) производится разбиение на подобласти двумя семействами пересекающихся линий.

● Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент, М., 1982.

Ю. М. Давыдов.

ИНТЕГРИ́РОВАНИЕ — операция отыскания неопределённого интеграла (см. *Интегральное исчисление*). Под И. понимают также решение дифференциальных уравнений.

ИНТЕГРИ́РОВАНИЕ ПО ЧАСТЯ́М — см. *Интегральное исчисление*. Способ предложил П. Ферма (ок. 1640).

ИНТЕГРИ́РОВАНИЕ ЧИ́СЛЕННОЕ — приближённое вычисление интеграла по нескольким значениям подинтегральной функции. Имеются в виду определённые интегралы, как простые, так и кратные, а также неопределённые интегралы. Для вычисления определённых интегралов применяются *квадратурные формулы*, а в случае кратных интегралов — *кубатурные формулы*. Задача вычисления неопределённого интеграла

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x)\,dt$$

имеет ту особенность, что верхний предел интегрирования является переменным. Значения $y(x)$ приходится находить для многих значений x, и это обстоятельство привело к разработке специальных методов.

См. также *Интерполирование*.

● Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов, 2 изд., М., 1967; Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, М., 1966.

ИНТЕГРИ́РУЮЩИЙ МНОЖИ́ТЕЛЬ — множитель, после умножения на который левая часть дифференциального уравнения

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0 \qquad (*)$$

обращается в полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$. Таким образом, если $\mu(x, y)$ — И. м., то

$$\mu(x, y)\,[P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy]=dU(x, y).$$

Если множитель $\mu(x, y)$ известен, то задача интегрирования уравнения (*) сводится к квадратурам, т. к. остаётся найти функцию $U(x, y)$ по её полному дифференциалу.

В отдельных случаях И. м. пользовался И. Бернулли (1691—92). Систематич. разработку метода предпринял Л. Эйлер (1732—33).

ИНТЕ́ГРО-ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение, содержащее неизвестную функцию как под знаком интеграла, так и под знаком производной. Напр., уравнение, полученное В. Вольтеррой в задаче о крутильных колебаниях:

$$\omega(t)=k\left[f(t)-m\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}\right]+\int_0^t K(t, \tau)\left[f(\tau)-m\frac{d^2\omega(\tau)}{d\tau^2}\right]d\tau.$$

Иногда И.-д. у. можно свести к интегральным уравнениям или дифференциальным уравнениям. Решение И.-д. у. можно искать также непосредственно методом последовательных приближений.

ИНТЕНСИ́ВНОСТЬ векторной трубки — см. *Векторная трубка*.

ИНТЕРВА́Л И СЕГМЕ́НТ (от лат. intervallum — промежуток, расстояние и segmentum — отрезок), промежуток и отрезок,— простейшие множества точек на прямой. Интервалом (промежутком, открытым промежутком) наз. множество точек на прямой, заключённых между точками A и B, причём сами точки A и B не причисляются к интервалу; обозначается (a, b) или $]a, b[$. Сегментом (отрезком, замкнутым промежутком) наз. множество точек прямой, лежащих между точками A и B, к к-рому присоединены сами эти точки; обозначается $[a, b]$. Термины «И. и с.» применяются для обозначения соответствующих множеств действительных чисел, интервал состоит из чисел, удовлетворяющих неравенствам $a<x<b$, а сегмент — из чисел, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x\leqslant b$.

Иногда термин «интервал» употребляют в более широком смысле для обозначения произвольного связного множества на прямой. В этом случае к интервалам относятся собственный интервал (a, b), бесконечные, или несобственные, интервалы $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, сегмент $[a, b]$ и полуинтервалы $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$. При этом круглая скобка обозначает, что соответствующий конец интервала не принадлежит к рассматриваемому множеству, а квадратная — что принадлежит. Напр., $(a, b]$ обозначает множество точек x, удовлетворяющих неравенствам $a<x\leqslant b$.

Обозначения И. и с. (a, b) ввёл Г. Ковалевский (1909), $[a, b]$ — Х. Хан (1921), $]a, b[$ — по-видимому, Н. Бурбаки (1956).

ИНТЕРВА́Л СХОДИ́МОСТИ степенного ряда — интервал действительных значений переменного, обладающий тем свойством, что в каждой точке этого интервала степенной ряд сходится, а в каждой точке, не принадлежащей к этому интервалу и не являющейся его концом,— расходится.

ИНТЕРВА́ЛЬНАЯ СТАТИСТИ́ЧЕСКАЯ ОЦЕ́НКА — статистическая оценка неизвестного параметра вероятностного распределения, представляющая собой интервал приближённых значений параметра. Границы этого интервала, принадлежащего множеству допустимых значений параметра (параметрич. множеству), определяются по результатам наблюдений. Существует несколько способов построения И. с. о. для параметров распределения. Наиболее распространённым является метод *доверительных интервалов* (областей, множеств), При наличии априорной информации о распределении параметра применяются бейесовские И. с. о. (см. *Бейесовский подход*). В отличие от точечной статистич. оценки И. с. о. даёт возможность решить вопрос о точности оценивания, именно, вычислить вероятность ошибки при использовании данной И. с. о.

См. также *Статистическое оценивание*, *Статистическая оценка*.

ИНТЕРВА́ЛЬНЫЙ АНА́ЛИЗ — раздел вычислительной математики, посвящённый учёту ошибок округления при проведении расчётов на цифровых ЭВМ. Так как точное представление чисел невозможно в машине с конечной разрядной сеткой, то результат каждого достаточно слож-

ного расчёта содержит нек-рую ошибку, обусловленную погрешностями округлений входных данных и промежуточных результатов. Для учёта этой ошибки можно каждую величину представить парой чисел, к-рые ограничивают её сверху и снизу и имеют точное представление в ЭВМ. Таким образом, каждая величина заменяется нек-рым содержащим её интервалом. При выполнении арифметич. действий новый интервал вычисляется с помощью специальных операций.

Основой И. а. является интервальная арифметика. Пусть $\mathcal{G}$ — множество интервалов $\{(a, b)\}$. Элементарные арифметич. операции над интервалами определяются следующим образом:

$$I * J = \{x * y \mid x \in I,\ y \in J\},\ I,\ J \in \mathcal{G},$$

где $* \in \{+, -, \cdot, /\}$. Деление возможно лишь в том случае, если интервал, являющийся делителем, не содержит нуля. Множество $\mathcal{G}$ образует полугруппу по сложению и умножению.

И. а. успешно применяется при решении нек-рых математич. задач. Однако применение методов И. а. значительно увеличивает объём работы (более чем вдвое), требует вдвое больше памяти и времени счёта. Кроме того, в достаточно больших задачах интервал, содержащий окончательный ответ, часто бывает настолько большим, что практически не даёт решения задачи.

Для преодоления последней трудности развивается И. а. со структурами теории вероятностей, в к-ром наряду с интервалом (a, b), содержащим величину x, вводится распределение вероятностей:

$$P_x(\zeta) = \mathsf{P}\{a \leqslant x < \zeta \leqslant b\},\ P_x(a) = 0,\ P_x(b) = 1.$$

И. а. имеет определённое теоретич. значение, так как арифметика интервалов существенно отличается от арифметик действительных и комплексных чисел, арифметики матриц, операторов и т. д.

● Хемминг Р. В., Численные методы, пер. с англ., 2 изд., М., 1972.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ, интерполяция,— приближённое или точное нахождение какой-либо величины по известным отдельным значениям этой же или других величин, связанных с ней. В первоначальном понимании — восстановление функции (точное или приближённое) по известным её значениям или значениям её производных в заданных точках.

Основные направления исследования: разрешимость задачи интерполирования, построение интерполяционных формул, изучение погрешностей приближённых интерполяционных формул, применение интерполирования для построения приближённых и численных методов решения различных задач математики и её приложений.

Приближённое представление функций. И. функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ по значениям её в узлах x_k сетки $\Delta_n = \{a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b\}$ означает построение другой функции $L_n(x) \equiv L_n[f; x]$ такой, что $L_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. В более общей постановке задача И. функции $f(x)$ состоит в построении $L_n(x)$ не только из условия совпадения значений функций $f(x)$ и $L_n(x)$ на сетке Δ_n, но и совпадения в отдельных узлах производных до какого-то порядка или нек-рых других соотношений, связывающих $f(x)$ и $L_n(x)$.

Обычно $L_n(x)$ строится в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x),$$

где $\{\varphi_i(x)\}$ — нек-рая заранее выбранная система линейно независимых функций. Такое И. наз. линейным относительно системы $\{\varphi_i(x)\}$, а $L_n(x)$ — интерполяционным многочленом по системе $\{\varphi_i(x)\}$.

Выбор системы $\{\varphi_i(x)\}$ определяется свойством класса функций, для приближения к-рого предназначаются интерполяционные формулы. Напр., для приближения 2π-периодич. функций на $[0, 2\pi]$ за $\{\varphi_i(x)\}$ естественно взять тригонометрич. систему функций, для приближения на полуоси $[0, \infty)$ ограниченных или возрастающих функций — систему рациональных или показательных функций, учитывающих поведение приближаемых функций на бесконечности и т. д.

Чаще всего используется алгебраическое интерполирование: $\varphi_i(x) = x^i$. Существует ряд явных представлений алгебраич. интерполяционных многочленов. Напр., интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\,\omega_n'(x_k)} f(x_k),$$

$$\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

В задаче приближения функции на всём отрезке $[a, b]$ алгебраич. И. высокого порядка применяется сравнительно редко. Алгебраич. интерполяционный процесс не является сходящимся в классе непрерывных на $[a, b]$ функций. Обычно ограничиваются линейным И. по узлам x_{k-1} и x_k на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ или квадратичным по трём узлам x_{k-1}, x_k, x_{k+1} на отрезке $[x_{k-1}, x_{k+1}]$.

Эффективным аппаратом приближения функций являются интерполяционные сплайны, но их построение в ряде случаев требует значительных вычислительных затрат.

На практике чаще всего используются параболические или кубические полиномиальные сплайны. Интерполяционным кубическим сплайном дефекта 1 для функции $f(x)$ относительно сетки Δ_n наз. функцию $S_3(x) \equiv S_3[f; x]$, являющуюся многочленом 3-й степени на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, принадлежащую классу дважды непрерывно дифференцируемых функций и удовлетворяющую условиям

$$S_3(x_k) = f(x_k),\ k = 0, 1, \ldots, n;\ n \geqslant 2.$$

При таком определении кубич. сплайн имеет ещё два свободных параметра, для нахождения к-рых на сплайн налагаются дополнительные краевые условия. Например, $S_3^{(i)}(a) = S_3^{(i)}(b)$, $i = 1, 2$, или $S_3'(a) = a_n$ и $S_3^1(b) = b_n$, или нек-рые другие.

Полиномиальный интерполяционный сплайн произвольной степени m дефекта r определяется как функция $S_m(x)$, удовлетворяющая, кроме условий $S_m^{(m+1)}(x) \equiv 0$, $x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k$, и $S_m(x) \in C^{m-r}[a, b]$, ещё дополнительно условиям совпадения в узлах сетки значений функции $S_m(x)$ и интерполируемой функции $f(x)$ и их производных до нек-рого порядка.

Часто при обработке эмпирич. данных $\{y_k\}$ коэффициенты a_i в $L_n(x)$ определяют исходя из требования минимизации суммы

$$S = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k [y_k - L_n(x_k)]^2,$$

α_k — заданные числа, $m \geqslant n$.

Такое построение функции $L_n(x)$ наз. интерполированием по методу наименьших квадратов.

И. функций многих переменных имеет ряд принципиальных и вычислительных трудностей. Напр., в случае алгебраич. И. интерполяционный многочлен Лагранжа фиксированной степени, вообще говоря, не существует для произвольной схемы различных узлов И. В частности, для функций двух переменных $f(x, y)$ такой многочлен $L_n(x, y)$ суммарной степени не выше n может быть построен по узлам (x_k, y_k) лишь при условии, что эти узлы не лежат на алгебраич. кривой порядка n.

Другой подход к И. функций многих переменных $f(x_1, \ldots, x_m)$ состоит в том, что сначала интерполируется функция по переменной x_1 при фиксированных x_k, $k = 2, 3, \ldots, m$, потом по следующей переменной при фиксированных остальных x_k и т. д. Интерполяционные сплайны для функций многих переменных определяются на многомерной сетке при соответствующих изменениях по аналогии с одномерным случаем.

Интерполирование функций и численные методы. И. функций используется: для замены сложно вычисляемой функции другой, вычисляемой проще; для приближённого восстановления функции на всей области задания по значениям её в отдельных точках или по другим известным величинам; для получения сглаживающих функций; для приближённого нахождения предельных значений функций; в задачах ускорения сходимости последовательностей и рядов и в других вопросах.

Общие идеи построения интерполяционных методов решения уравнения $f(x)=0$ и систем уравнений $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)=0$, $i=1, 2, \ldots, m$, одни и те же. Трудности задачи И. функций многих переменных особенно сказываются при исследовании и практич. использовании такого рода методов для большого числа уравнений. В основу получения интерполяционных методов решения уравнения $f(x)=0$ положена замена функции $f(x)$ её интерполяционным многочленом $L_n(x)$ и последующим решением уравнения $L_n(x)=0$. Корни уравнения $L_n(x)=0$ берутся за приближённые решения уравнения $f(x)=0$. Интерполяционный многочлен $L_n(x)$ используется также при построении итерационных методов решения уравнения $f(x)=0$.

Напр., взяв за x_{n+1} корень линейного интерполяционного алгебраич. многочлена, построенного по значениям $f(x_n)$ и $f'(x_n)$ в узле x_n или по значениям $f(x_{n-1})$ и $f(x_n)$ в узлах x_{n-1} и x_n, приходят соответственно к *Ньютона методу* и *секущих методу*:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f(x_{n-1}, x_n)},$$

где $f(x_{n-1}, x_n)$ — разделённая разность функции для узлов x_{n-1} и x_n.

Другой подход к построению численных методов решения уравнения $f(x)=0$ основан на И. обратной функции $x=g(y)$. Пусть в качестве интерполяционной формулы для функции $x=g(y)$ взят интерполяционный алгебраич. многочлен Лагранжа $L_m(y)$, построенный по узлам y_n, $y_{n-1}, \ldots, y_{n-m}$. Тогда за следующее приближение к корню x^* уравнения $f(x)=0$ берётся величина $x_{m+1}=L_m(0)$.

Численное интегрирование. Аппарат И. функций лежит в основе построения многих квадратурных и кубатурных формул. Такого рода формулы строятся путём замены интегрируемой функции на всей области или на её составных частях интерполяционными многочленами того или иного вида и последующим интегрированием этих многочленов. Напр., квадратурные формулы наивысшей алгебраич. степени точности, т. н. квадратурные формулы Гаусса:

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

где $p(x)$ — знакопостоянная весовая функция, получаются в результате замены функции $f(x)$ интерполяционным алгебраич. многочленом, построенным по корням x_k ортогонального относительно веса $p(x)$ многочлена степени n.

Изложенная выше схема построения формул для приближённого вычисления интегралов применима и в многомерном случае.

Формулы численного дифференцирования, в основе к-рых лежит И., получаются в результате дифференцирования интерполяционных многочленов. Ввиду неустойчивости задачи численного дифференцирования относительно ошибок используемых значений функции в узлах шаг И. должен согласовываться с погрешностью значений функции. Поэтому на практике нередки случаи, когда известная с нек-рой погрешностью на густой сетке функция используется в данной задаче не во всех точках, а на более редкой сетке.

При численном решении интегральных уравнений неизвестная функция $f(x)$ заменяется в интегральном уравнении каким-либо интерполяционным приближением (интерполяционным алгебраич. многочленом, интерполяционным сплайном и т. д.) с узлами И. (x_k), а приближённые значения f_k для $f(x_k)$ находятся из системы, полученной после подстановки вместо независимой переменной x узлов И. x_k. В случае нелинейных интегральных уравнений приближённые значения f_k находятся соответственно из нелинейной системы.

Построение численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными состоит в замене производных искомых функций интерполяционными формулами численного дифференцирования, а в ряде случаев и заменой интерполяционными формулами других функций и выражений, входящих в уравнения.

Интерполяционный метод применим для решения дифференциальных уравнений, записанных в интегральной форме. Напр., для нахождения приближённого решения задачи Коши

$$y'=f(x, y),\quad y(x_0)=y_0$$

в точках $x_k=x_0+kh$, $k=1, 2, \ldots$, используются разностные формулы типа

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{j=1}^n B_j f(x_{n-j}, y_{n-j}),$$

получаемые заменой функции под знаком интеграла в равенстве

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)\,dx$$

интерполяционным многочленом и последующим интегрированием. В частности, таким образом получены формулы *Адамса метода* для уравнения 1-го порядка, формулы *Штёрмера метода* для уравнений 2-го порядка и т. д.

Такой подход позволяет строить вычислительные алгоритмы для широкого класса дифференциальных уравнений, в том числе и для уравнений с частными производными.

Интерполирование операторов и некоторые общие подходы к построению приближённых методов. Имеются различные формулировки задачи И. операторов. Напр., по известным свойствам в двух или в нескольких операторах определить наличие этого свойства в операторах, промежуточных в каком-то смысле исходным. Наряду с этим строится теория И. операторов, аналогичная задаче И. функций.

Линейный интерполяционный оператор $L_1[A; x]$ для данного оператора A записывается в виде

$$L_1[A; x]=A(x_0)+A(x_0, x_1)(x-x_0),$$

где x_0 и x_1 — узлы И., $A(x_0, x_1)$ — оператор разделённой разности 1-го порядка, определяемый как линейный оператор, удовлетворяющий условию

$$A(x_0, x_1)(x_0-x_1)=A(x_0)-A(x_1).$$

Данное определение оператора разделённой разности в ряде случаев конкретизируется.

Постановка задачи И. функционалов, представляющая интерес для теории приближённых методов, такова. Пусть $\{\psi_i(x)\}$, $i=0, 1, \ldots, n$,— нек-рые фиксированные функционалы или классы функционалов, определённые на пространстве X. Функционал $L_n[F; x]$ наз. интерполяционным функциональным многочленом для данного функционала $F(x)$ и системы точек $\{x_k\}$ из X, если выполняются соотношения

$$L_n[F; x_k]=F(x_k),\ L_n[\psi_i; x]\equiv\psi_i(x),\ i=0,1,\ldots,n.$$

Интерполяционный многочлен $L_1[F; x]$, когда X есть пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $C[a, b]$, представляется в виде интеграла Стилтьеса

$$L_1[F; x]=F(x_0)+$$
$$+\int_a^b \frac{x(\tau)-x_0(\tau)}{x_1(\tau)-x_0(\tau)}\,d_\tau F[x_0(\cdot)+\chi(\cdot, \tau)(x_1(\cdot)-x_0(\cdot))],$$

где $x_0(\tau)$ и $x_1(\tau)$ — узлы И., а функция

$$\chi(t, \tau)=\begin{cases}1, & \tau>t,\\ 0, & \tau\leqslant t.\end{cases}$$

Если $F(x)$ постоянный или линейный функционал, то $L_1[F;\ x]\equiv F(x)$.

Построение приближённых методов решения математич. задач, записанных в виде $y=Ax$, где элементы x и y принадлежат нек-рым множествам X и Y, а A — заданный оператор, состоит в замене множеств X и Y и оператора A или только нек-рых из этих трёх объектов другими таким образом, чтобы решение новой задачи $\tilde{y}=\tilde{A}\tilde{x}$, состоящей в нахождении $\tilde{y}$ или $\tilde{x}$, было в каком-то смысле близко к решению первоначальной задачи. Один из способов замены A на $\tilde{A}$ основан на И. операторов.

Напр., с использованием линейного И. м е т о д с е к у щ и х для уравнения $Ax-0$ записывается в виде

$$x_{n+1}=x_n-A^{-1}(x_{n-1},\ x_n)\,A(x_n),$$

где $A^{-1}(x_{n-1},\ x_n)$ — оператор, обратный к $A(x_{n-1},\ x_n)$. И. функционалов используется при получении приближённых методов вычисления континуальных интегралов, для нахождения экстремальных значений функционалов и в ряде других задач, напр. при построении следующих двух интерполяционных аналогов метода градиента для нахождения локальной точки безусловного минимума функционала $F(x)$, определённого на нек-ром гильбертовом пространстве. Первый из этих методов получается, если $\operatorname{grad} F(x_n)$ в градиентном методе заменить на значение оператора $F(x_{n-1},\ x_n)$ на функционале $F(x)$, т. е.

$$x_{n+1}=x_n-\varepsilon_n F(x_{n-1},\ x_n),\ \varepsilon_n>0,\ n=1,\ 2,\ \ldots.$$

Второй метод использует градиент интерполяционного многочлена. По приближениям x_{n-2}, x_{n-1}, x_n к экстремальной точке x^* функционала $F(x)$ строится квадратичный интерполяционный функционал

$$L_2[F;\ x]=F(x_n)+F(x_{n-1},\ x_n)(x-x_n)+$$
$$+F(x_{n-2},\ x_{n-1},\ x_n)(x-x_{n-1})(x-x_n),$$

где $F(x_{n-2},\ x_{n-1},\ x_n)$ — разделённая разность 2-го порядка функционала $F(x)$ относительно узлов x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, и новое приближение x_{n+1} находится по формуле

$$x_{n+1}=x_n-\varepsilon_n \operatorname{grad} L_2[F;\ x_n],\quad \varepsilon_n>0,\ n=2,\ 3,\ \ldots$$

Применение И. функционалов и операторов для построения вычислительных алгоритмов решения конкретных задач основано на использовании интерполяционных формул с малой величиной погрешности. Такого рода формулы должны строиться для отдельных классов функционалов и операторов с учётом специфики этих классов.

Термин «И.» впервые употребил Дж. Валлис (1656) при составлении астрономич. и математич. таблиц.

● Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И., Вычислительные методы, т. 1—2, М., 1976—77.

Л. А. Янович.

ИНТЕРПОЛЯЦИО́ННАЯ ФО́РМУЛА — формула для приближённого вычисления значений функции $f(x)$, основанного на замене приближаемой функции $f(x)$ более простой в каком-то смысле функцией

$$g(x)\equiv g(x;\ a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)$$

наперёд заданного класса, причём параметры a_i выбираются так, чтобы значения $g(x)$ совпадали с известными заранее значениями $f(x)$ для данного множества $n+1$ попарно различных значений аргумента:

$$g(x_k)=f(x_k),\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n. \qquad (*)$$

Такой способ приближённого представления функций наз. и н т е р п о л и р о в а н и е м или и н т е р п о л я ц и е й, а точки x_k, для к-рых должны выполняться условия (*), — у з л а м и и н т е р п о л я ц и и.

В ряде случаев (напр., при интерполировании алгебраич. многочленами) параметры a_i могут быть явно выражены из системы (*), и тогда $g(x)$ непосредственно используется для приближённого вычисления значений функции $f(x)$.

ИНТЕРПОЛЯЦИО́ННЫЙ ПРОЦЕ́СС — процесс получения последовательности интерполирующих функций $\{f_n(x)\}$ при неограниченном возрастании числа n узлов *интерполирования*. Если интерполирующие функции $f_n(x)$ представлены в виде частных сумм нек-рого функционального ряда, то последний иногда наз. и н т е р п о л я ц и о н н ы м р я д о м. Целью построения И. п. чаще всего является, по крайней мере в простейших первоначальных задачах интерполирования, приближение в каком-то смысле посредством интерполирующих функций $f_n(x)$ исходной функции $f(x)$, о к-рой или имеется неполная информация, или форма к-рой слишком сложна для непосредственного использования.

ИНТЕРПОЛЯЦИО́ННЫЙ СПЛА́ЙН — см. *Интерполирование.*

ИНТЕРПОЛЯ́ЦИЯ (от лат. interpolatio — обновление, переделывание, изменение) — то же, что *интерполирование.*

ИНТЕРПРЕТАЦИО́ННАЯ ЭКВИВАЛЕ́НТНОСТЬ — эквивалентность схем программ (см. *Программы схема*), учитывающая множество всех интерпретаций схемы в определённом функциональном пространстве.

ИНТЕРПРЕ́ТАЦИЯ (от лат. interpretatio — разъяснение) — сопоставление всем исходным понятиям и отношениям данной аксиоматич. теории T нек-рых математич. объектов и отношений между ними. Объекты, сопоставленные понятиям теории T, являются элементами нек-рой математич. системы $\mathfrak{A}$ и сами могут быть предметом рассмотрения к.-л. математич. теории T_1. В таком случае говорят об И. теории T в теории T_1, а систему $\mathfrak{A}$ также иногда называют И. теории T. В результате И. каждому утверждению F теории T естественным образом соответствует высказывание F^* об объектах системы $\mathfrak{A}$. Если высказывание F^* истинно, то говорят, что утверждение F истинно в данной И., в противном случае F в этой И. ложно. Если все аксиомы теории T истинны в данной И., то эта И. наз. п р а в и л ь н о й, а математич. система $\mathfrak{A}$ считается м о д е л ь ю теории T.

Построение правильной И. теории T в теории T_1 является одним из методов установления непротиворечивости теории T относительно теории T_1 (см. *Аксиоматический метод*). Этим методом была, напр., доказана непротиворечивость геометрии Лобачевского относительно евклидовой геометрии, а вопрос о непротиворечивости последней был сведён к проблеме непротиворечивости арифметики. Метод И. позволяет также решать вопрос о независимости системы аксиом.

Дальнейшее уточнение и совершенствование метода И. связано с разработкой метода формализации, представленного в работах Д. Гильберта и его последователей и проявившегося в изложении математич. теорий на нек-ром *формализованном языке* и представлении их в виде *формальных систем*. По отношению к формализованным теориям И. выступает как задание смысла выражений соответствующего формализованного языка путём построения модели. Исследование связей между формализованными языками и теориями и их возможными И. составляет предмет *моделей теории.*

Конечной целью И. является задание смысла формул данного формализованного языка. И. формул можно задавать, минуя этап И. отдельных понятий и определяя И. данного языка в другом языке, смысл выражений к-рого уже определён. При этом всякой формуле F данного языка сопоставляется по определённым правилам нек-рая формула F' другого языка и считается, что формула F означает то же, что и формула F'.

ИНТЕРПРЕТА́ЦИЯ программы — см. *Программирование теоретическое.*

ИНТРАНЗИТИ́ВНОСТЬ (от лат. intransitivus — непереходный) — см. *Транзитивность.*

ИНТУИЦИОНИ́ЗМ (от средневек. лат. intuitio — созерцание) — совокупность философских и математич. идей и методов, рассматривающих математику как науку об умственных построениях. С точки зрения И. основным критерием истинности математич. суждения является интуитивная убедительность возможности построения мыс-

ленного эксперимента, связываемого с этим суждением. В связи с этим в интуиционистской математике отвергается теоретико-множественный подход к определению математич. понятий, а также нек-рые способы рассуждения, принятые в классич. логике.

Истоки И. можно проследить ещё в античной математике, а позднее в высказываниях таких учёных, как К. Гаусс, Л. Кронекер, А. Пуанкаре, А. Лебег, Э. Борель. Начиная с 1907 с развёрнутой критикой нек-рых концепций классич. математики в ряде статей выступил Л. Брауэр. В основе этой критики лежит обсуждение статуса с у щ е с т в о в а н и я в математике.

Есть серьёзные основания считать, что объекты, существование к-рых устанавливается без использования *абстракции актуальной бесконечности*, а лишь в рамках гораздо более скромной *абстракции потенциальной осуществимости*, имеют наиболее непосредственное отношение к реальной действительности. Но при обычной теоретико-множественной трактовке не делается никакого различия между объектами, существование к-рых можно подтвердить с помощью нек-рого потенциально осуществимого построения, и абстрактными теоретико-множественными объектами исследования. Способы установления свойств обоих типов объектов в классич. математике основаны на законах логики, возникших в результате экстраполяции на бесконечные множества законов, верных для конечных совокупностей. В области бесконечного эти законы не ориентированы на эффективное построение объектов, существование к-рых утверждается. Фактически такое положение дел приводит к появлению в математике т. н. «т е о р е м ч и с т о г о с у щ е с т в о в а н и я», в к-рых утверждается существование нек-рых объектов и в то же время не указывается никакого способа отыскания этих объектов. Такова, напр., известная теорема классич. анализа, утверждающая, что всякая непрерывная действительная функция действительного переменного, заданная на замкнутом ограниченном множестве, имеет максимум. Обычно доказательство этой теоремы не даёт никаких указаний на метод построения искомого максимума.

Описанная критика классич. математики не связана непосредственно с *антиномиями* теории множеств. Появление антиномий можно рассматривать как дополнительный довод в пользу неудовлетворительности теоретико-множественного подхода, но критика относится и к таким разделам математики, где антиномий не возникает.

Критика теоретико-множественного подхода к математике исторически привела к возникновению двух путей преодоления трудностей в обосновании математики — интуиционизма Брауэра и формализма Гильберта. Обе концепции, развиваясь, оказывают значительное влияние друг на друга. Так, при обосновании непротиворечивости формальных теорий необходимо уточнить приёмы содержательных умозаключений в *метаматематике*, что делается обычно в рамках тех или иных интуиционистских концепций. С другой стороны, именно с помощью метода формализации удалось получить ряд важнейших результатов в *интуиционистской логике*.

Интуиционистская математика есть наука об интуитивно убедительных мысленных построениях. Сам Л. Брауэр трактовал эту интуитивную убедительность идеалистически, рассматривая мысленные построения как таковые «безотносительно к таким вопросам о природе конструируемых объектов, как вопрос, существуют ли эти объекты независимо от нашего знания о них». Однако возможно и материалистич. толкование «интуиции» И. как наглядной умственной убедительности простейших конструктивных процессов реальной действительности. Независимо от философских установок конкретные математич. результаты, относящиеся к интуиционистской математике и логике, представляют большую научную ценность.

До 2-й пол. 20 в. идеи Л. Брауэра в полном объёме оставались достоянием узкой группы математиков-интуиционистов, хотя они и оказали большое влияние на все дальнейшие исследования по основаниям математики. В последнее время положение изменилось. Развитие теории доказательств позволило оформить в виде точных исчислений основные интуиционистские теории и подвергнуть их точному исследованию. Развитие вычислительной тенденции в математике пробудило интерес к логич. анализу эффективных средств доказательства и изучению абстракций, применяемых в математике. Возникли различные программы конструктивной перестройки математики в той или иной концепции конструктивности. Синтез традиционных методов И. с современными методами теории доказательств позволил значительно продвинуться в И.

● Гейтинг А., Интуиционизм, пер. с англ., М., 1965; Клини С. К., Весли Р. Е., Основания интуиционистской математики..., пер. с англ., М., 1978.

А. Г. Драгалин.

ИНТУИЦИОНИ́СТСКАЯ ЛО́ГИКА — совокупность логических законов, приемлемых с точки зрения *интуиционизма*.

В *интуиционистской математике* используются те же логич. связки, что и в классич. математике, но нек-рым из них придаётся несколько иной смысл. Поэтому нек-рые законы классич. логики, в частности *исключённого третьего закон*, оказываются недопустимыми в И. л.

Систематич. исследование И. л. началось после того, как в работах А. Н. Колмогорова, В. И. Гливенко, А. Гейтинга было осуществлено построение логич. систем, содержащих только интуиционистски приемлемые логич. законы. Наибольшее признание получила система аксиом И. л., предложенная А. Гейтингом (1930). Аксиоматика Гейтинга и эквивалентные ей системы получили название и н т у и ц и о н и с т с к о г о и с ч и с л е н и я п р е д и к а т о в.

Одна из эквивалентных формулировок этого исчисления содержит следующие схемы аксиом:

1. $A \supset (B \supset A)$;
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$;
3. $A \supset (B \supset A \,\&\, B)$;
4. $A \,\&\, B \supset A$;
5. $A \,\&\, B \supset B$;
6. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$;
7. $A \supset A \vee B$;
8. $B \supset A \vee B$;
9. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$;
10. $\neg A \supset (A \supset B)$;
11. $\forall x A(x) \supset A(y)$;
12. $A(y) \supset \exists x A(x)$.

(В аксиомах 11, 12 в формуле $A(x)$ переменная x не входит в область действия кванторов $\forall y$ и $\exists y$.)

Другие логич. законы разрешается получать из этих аксиом с помощью следующих правил вывода:

I. $\dfrac{A,\ A \supset B}{B}$ (модус поненс);

II. $\dfrac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)}$; III. $\dfrac{A(x) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$

(в правилах II и III C — формула, для к-рой x не является свободной переменной). Интуиционистское исчисление предикатов отличается от классического тем, что в последнем вместо схемы аксиом 10 используется схема аксиом $\neg\neg A \supset A$. Схемы аксиом 1—10 и правило модус поненс задают и н т у и ц и о н и с т с к о е и с ч и с л е н и е в ы с к а з ы в а н и й.

Общепризнанным является тот факт, что все формулы, выводимые в интуиционистском исчислении предикатов, выражают законы И. л. Вопрос о п о л н о т е этого исчисления, т. е. вопрос о том, всякая ли формула, выражающая нек-рый закон И. л., выводима в этом исчислении, требует для своего решения математически точного описания интуиционистского понимания логич. формул. Ряд интерпретаций логич. формул основан на предложенной А. Н. Колмогоровым (1932) идее трактовать интуициони-

стское исчисление высказываний как исчисление задач.

Суть этой идеи состоит в том, что пропозициональные переменные интерпретируются не как произвольные высказывания, а как задачи. Логич. операции интерпретируются как операции над задачами. Всякая формула, выводимая в интуиционистском исчислении высказываний, истинна в том смысле, что существует общий метод решения задач, возникающих при замене в этой формуле всех переменных на конкретные задачи.

В математически точной форме вопрос о полноте интуиционистского исчисления высказываний относительно описанной интерпретации может быть поставлен после выбора того или иного точно очерченного класса задач.

Близка к подходу А. Н. Колмогорова восходящая к А. Гейтингу идея трактовки математич. предложения как требования нек-рого построения. В математически точной форме эта идея была осуществлена С. Клини по отношению к арифметич. суждениям и нашла воплощение в понятии *рекурсивной реализуемости.* На основе этого понятия определяется семантика логич. формул. Интуиционистское исчисление высказываний неполно относительно этой семантики, а соответствующая ей логика предикатов оказывается неперечислимой (и даже неарифметической).

Для интуиционизма характерно представление о процессе установления истинности того или иного высказывания как о нек-ром становящемся процессе. Наряду с суждениями, истинность или ложность к-рых установлена к данному моменту, интуиционист допускает непроверенные суждения. Такие суждения, не будучи истинными в данный момент, не являются и ложными, однако их истинность или ложность со временем может быть установлена.

Этот характер интуиционистской истинности нашёл отражение в т. н. модели Крипке; она состоит из «миров», в каждом из к-рых задана предметная область и интерпретация на ней предикатных переменных. Между «мирами» введено упорядочение, и истинность сложного высказывания в «мире» w определяется истинностными значениями составляющих высказываний не только в «мире» w, но и в следующих за ним «мирах». Формула истинна в данной модели Крипке, если она истинна в выделенном «начальном» «мире». Интуиционистское исчисление предикатов полно относительно моделей Крипке.

● Гейтинг А., Интуиционизм, пер. с англ., М., 1965; Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; Новиков П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977; Драгалин А. Г., Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств, М., 1979.

В. Е. Плиско.

ИНТУИЦИОНИ́СТСКАЯ МАТЕМА́ТИКА — математика, строящаяся в соответствии с принципами *интуиционизма.* При построении И. м. обычные логич. связки, употребляемые для формулировки математич. суждений, истолковываются способом, отличным от классического. Суждение считается истинным, только если исследователь имеет возможность его доказать. Доказательство же всегда связано с нек-рой мысленной конструкцией. Истинное математич. суждение представляет собой сообщение о выполненных построениях, и эффективный характер этих построений предполагает использование особой *интуиционистской логики.* При этом эффективность в И. м. понимается достаточно широко, она не обязательно связана с наличием алгоритма в точном понимании этого термина и может носить, напр., характер историч. наступления события, зависеть от фактич. решения проблем, от физич. факторов.

Объектами исследования И. м. являются, прежде всего, конструктивные объекты, такие, как натуральные числа, рациональные числа, конечные множества конструктивных объектов, заданные списком своих элементов. Своеобразным объектом исследования являются т. н. свободно становящиеся последовательности (с. с. п.; в другой терминологии — последовательности выбора). С. с. п. можно представлять себе как функцию, определённую на натуральном ряде, принимающую в качестве значений объекты исследования нек-рого класса (в простейшем случае — натуральные числа) и такую, что всякое её значение эффективно становится доступным исследователю. Наконец, объектами исследования И. м. могут быть и т. н. интуиционистские виды. Вид — свойство, к-рым могут обладать объекты исследования. Объекты, удовлетворяющие этому свойству, наз. элементами вида или его членами. Обращение с видами во многом отлично от обращения с множествами в классич. математике. В практически разрабатываемой И. м. виды занимают весьма скромное место. Подавляющую часть результатов можно сформулировать и доказать вообще без употребления видов как самостоятельных объектов исследования.

Отказ от рассмотрения актуально заданных бесконечных множеств и требование эффективности всех осуществляемых построений приводят к тому, что нек-рые разделы традиционной математики приобретают в И. м. весьма необычный вид. Числовой континуум трактуется не как совокупность отдельных точек, а как «среда становления». Каждое отдельное интуиционистское действительное число определяется с. с. п., значениями к-рой являются неограниченно уменьшающиеся, вложенные друг в друга рациональные интервалы. Всякая интуиционистская действительная функция, определённая на отрезке, равномерно непрерывная. И. м. является достаточно разработанным направлением в математике, содержащим много продвинутых результатов, в т. ч. и в таких областях, как теория меры, функциональный анализ, топология, теория дифференциальных уравнений.

А. Г. Драгалин.

ИНФИМУМ (лат. infimum — наинизшее) — нижняя грань множества E действительных чисел; обозначается $\inf E$.

ИНФОРМА́ТИКА — 1) находящаяся в становлении наука, изучающая законы и методы накопления, передачи и обработки информации с помощью ЭВМ. 2) Родовое понятие, охватывающее все виды человеческой деятельности, связанные с применением ЭВМ.

Как фундаментальная наука И. связана с философией — через учение об информации как общенаучной категории и теорию познания; с математикой — через понятие математич. модели, математич. логику и теорию алгоритмов; с лингвистикой — через учение о формальном языке и о знаковых системах. И. тесно связана с такими более специальными науками, как теория информации, кибернетика, системотехника.

Важнейшими методологич. принципами И. являются изучение природного явления или поведения объекта как процесса обработки информации, а также признание единства законов обработки информации в искусственных, биологических и социальных системах.

Основными видами человеческой интеллектуальной деятельности, изучаемыми в И., являются: математич. моделирование (фиксация результатов познавательного процесса в виде математич. модели); алгоритмизация (реализация причинно-следственных связей и других закономерностей в виде направленного процесса обработки информации по формальным правилам); программирование (реализация алгоритма на ЭВМ); выполнение вычислительного эксперимента (получение нового знания об изучаемом явлении или объекте с помощью вычислений на ЭВМ); наконец, решение конкретных задач, относящихся к кругу объектов и явлений, описанных исходной моделью.

В связи с массовым применением ЭВМ предметом И. становится изучение закономерностей взаимодействия человека с ЭВМ во всех видах его деятельности. Результаты этого изучения воплощаются в т. н. информационной технологии, т. е. систематич. методах и приёмах применения ЭВМ в производственных процессах, управлении, образовании, научной работе, проектировании, сфере обслуживания и т. п. Практич. применения И. постепенно

формируют новый сектор народного хозяйства, объединяющий вычислительную технику, средства связи, управления и массовой информации и получивший назв. «индустрия информатики».

● Кибернетика. Становление информатики, М., 1986.

А. П. Ершов.

ИНФОРМАЦИИ КОЛИЧЕСТВО — теоретико-информационная мера величины *информации*, содержащейся в одной случайной величине относительно другой. См. также *Информации теория*.

ИНФОРМАЦИИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ — см. *Кибернетика*.

ИНФОРМАЦИИ ТЕОРИЯ — раздел математики, исследующий процессы хранения, преобразования и передачи *информации*. И. т.— существенная часть *кибернетики*. В основе И. т. лежит определённый способ измерения количества информации, содержащейся в к.-л. данных (*сообщениях*).

И. т. исходит из представления о том, что сообщения, предназначенные для сохранения в запоминающем устройстве или для передачи по *каналу* связи, не известны заранее с полной определённостью. Заранее известно лишь множество, из к-рого могут быть выбраны эти сообщения, и в лучшем случае то, как часто выбирается то или иное из этих сообщений (т. е. вероятность сообщений). В И. т. показывается, что «неопределённость», с к-рой сталкиваются в подобной обстановке, допускает количественное выражение и что именно это выражение (а не конкретная природа самих сообщений) определяет возможность их хранения и передачи. В качестве такой «меры неопределённости» в И. т. принимается число двоичных знаков, необходимое для фиксирования (записи) произвольного сообщения данного источника. Более точно — рассматриваются всевозможные способы обозначения цепочками символов 0 и 1 (двоичные *коды*), удовлетворяющие условиям: а) различным сообщениям соответствуют различные цепочки и б) по записи нек-рой последовательности сообщений в кодированной форме эта последовательность должна однозначно восстанавливаться. Тогда в качестве меры неопределённости принимают среднее значение длины кодовой цепочки, соответствующее самому экономному способу *кодирования*; один двоичный знак служит единицей измерения (см. *Двоичная единица*).

Пример. Пусть нек-рые сообщения x_1, x_2, x_3 появляются с вероятностями, равными соответственно $^1/_2$, $^3/_8$, $^1/_8$. Какой-либо слишком короткий код, скажем $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=01$, не пригоден, т. к. нарушается вышеупомянутое условие б). Так, цепочка 01 может означать x_1x_2 или x_3. Код

$$x_1=0,\ x_2=10,\ x_3=11$$

удовлетворяет условиям а) и б). Ему соответствует среднее значение длины кодовой цепочки, равное

$$1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{8}=1{,}5.$$

Никакой другой код не может дать меньшего значения, т. е. указанный код — самый экономный. В соответствии с выбором меры неопределённости неопределённость данного источника сообщений следует принять равной 1,5 двоичной единицы.

Здесь уместно подчеркнуть, что термины «сообщение», «канал связи» и т. п. понимают в И. т. очень широко. Так, с точки зрения И. т. источник сообщений описывается перечислением множества x_1, x_2, ... возможных сообщений (к-рые могут быть словами к.-л. языка, результатами измерений, телевизионными изображениями и т. п.) и соответствующих им вероятностей p_1, p_2, ...

Нет никакой простой формулы, выражающей точный минимум H' среднего числа двоичных знаков, необходимого для кодирования сообщений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ через вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n$ этих сообщений. Однако указанный минимум не меньше величины

$$H=\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 (1/p_i)$$

и может превосходить её не более чем на единицу. Величина H, наз. *энтропией* множества сообщений, обладает простыми формальными свойствами, а для всех выводов И. т., к-рые носят асимптотич. характер, соответствуя случаю $H'\to\infty$, разница между H и H' абсолютно несущественна. Поэтому именно энтропия принимается в качестве меры неопределённости сообщений данного источника. В приведённом выше примере энтропия равна $\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{3}{8}\log_2\frac{8}{3}+\frac{1}{8}\log_2 8=1{,}40564$.

С изложенной точки зрения энтропия бесконечной совокупности оказывается, как правило, бесконечной. Поэтому в применении к бесконечным совокупностям поступают иначе. Именно задаются определённым уровнем точности и вводят понятие ε-энтропии как энтропии сообщения, записываемого с точностью до ε, если сообщение представляет собой непрерывную величину или функцию, напр. времени.

Так же, как и понятие энтропии, понятие количества информации, содержащейся в одном случайном объекте (случайной величине, случайном векторе, случайной функции и т. д.) относительно другого, вводится сначала для объектов с конечным числом возможных значений. Затем общий случай изучается при помощи предельного перехода. В отличие от энтропии количество информации, напр. в одной непрерывно распределённой случайной величине относительно другой непрерывно распределённой величины, очень часто оказывается конечным.

Понятие канала связи в И. т. носит весьма общий характер. По сути дела, канал связи задаётся указанием множества «допустимых сообщений» на «входе канала», множеством «сообщений на выходе» и набором условных вероятностей получения того или иного сообщения на выходе при данном входном сообщении. Эти условные вероятности описывают влияние «помех», искажающих передаваемые сообщения. «Присоединяя» к каналу к.-л. источник сообщений, можно рассчитать количество информации относительно сообщения на входе, содержащееся в сообщении на выходе. Верхняя грань таких количеств информации, взятая по всем допустимым источникам, наз. пропускной способностью (ёмкостью) канала. Пропускная способность канала — его основная информационная характеристика. Несмотря на влияние (возможно, сильное) помех в канале, при определённом соотношении между энтропией поступающих сообщений и пропускной способностью канала возможна почти безошибочная передача (при надлежащем кодировании; см. *Шеннона теорема*).

● И. т. отыскивает оптимальные в смысле скорости и надёжности способы передачи информации, устанавливая теоретич. пределы достижимого качества. Как видно из предыдущего, И. т. носит существенно статистич. характер и поэтому значительная часть её математич. методов заимствуется из теории вероятностей.

Основы И. т. были заложены в 1948—49 К. Шенноном. В её теоретич. разделы внесён вклад А. Н. Колмогоровым и А. Я. Хинчиным, а в разделы, соприкасающиеся с применениями,— В. А. Котельниковым и др.

● Шеннон К., в кн.: Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Сб. переводов, М., 1953; Колмогоров А.Н., «Пробл. передачи информ.», 1965, т. 1, № 1; Харкевич А. А., Борьба с помехами, 2 изд., М., 1965; Яглом А. М., Яглом И. М., Вероятность и информация, 3 изд., М., 1973; Бриллюэн Л., Наука и теория информации, пер. с англ., М., 1960; Черри К., Человек и информация, пер. с англ., М., 1972; Галлагер Р., Теория информации и надежная связь, пер. с англ., М., 1974.

Ю. В. Прохоров.

ИНФОРМАЦИОННОЕ МНОЖЕСТВО — см. *Позиционная игра*.

ИНФОРМАЦИЯ (от лат. informatio — разъяснение, изложение) — основное понятие *кибернетики*. Кибернетика изучает машины и живые организмы исключительно с точки зрения их способности воспринимать определённую И., сохранять эту И. в «памяти», передавать её по *каналам* связи и перерабатывать её в «сигналы», направляющие их

деятельность в соответствующую сторону. Интуитивное представление об И. относительно к.-л. величин или явлений, содержащейся в нек-рых данных, в кибернетике ограничивается и уточняется.

В нек-рых случаях возможность сравнения различных групп данных по содержащейся в них И. столь же естественна, как возможность сравнения плоских фигур по «площади»: независимо от способа измерения площадей можно сказать, что фигура A имеет не бо́льшую площадь, чем B, если A может быть целиком помещена в B (сравни примеры 1—3 ниже). Более глубокий факт — возможность выразить площадь числом и на этой основе сравнивать между собой фигуры произвольной формы — является результатом развитой математич. теории. Подобно этому фундаментальным результатом теории И. является утверждение о том, что в определённых, весьма широких условиях можно пренебречь качественными особенностями И. и выразить её количество числом. Только этим числом определяются возможности передачи И. по каналам связи и её хранения в запоминающих устройствах.

Пример 1. Знание положения и скорости частицы, движущейся в силовом поле, даёт И. об её положении в любой будущий момент времени, притом полную, т. е. это положение может быть предсказано точно. Знание энергии частицы также даёт И., но, очевидно, неполную.

Пример 2. Равенство

$$a = b \tag{1}$$

даёт И. относительно переменных a и b. Равенство

$$a^2 = b^2 \tag{2}$$

даёт меньшую И. [т. к. из (1) следует (2), но эти равенства не равносильны]. Наконец, равенство

$$a^3 = b^3, \tag{3}$$

равносильное (1), даёт ту же И., то есть (1) и (3) — это различные формы задания одной и той же И.

Пример 3. Результаты произведённых с ошибками независимых измерений к.-л. физич. величины дают И. об её точном значении. Увеличение числа наблюдений увеличивает эту И.

Пример 3а. Среднее арифметическое результатов наблюдений также содержит нек-рую И. относительно рассматриваемой величины. Как показывает математич. статистика, в случае нормального распределения вероятностей ошибок с известной дисперсией среднее арифметическое содержит всю И.

Пример 4. Пусть результатом нек-рого измерения является случайная величина X. При передаче по нек-рому каналу связи X искажается, в результате чего на приёмном конце получают величину

$$Y = X + Z,$$

где Z не зависит от X (в смысле теории вероятностей). «Выход» Y даёт И. о «входе» X, причём естественно ожидать, что эта И. тем меньше, чем больше «рассеяние» значений Z.

В каждом из приведённых примеров данные сравнивались по большей или меньшей полноте содержащейся в них И. В примерах 1—3 смысл такого сравнения ясен и сводится к анализу равносильности или неравносильности нек-рых соотношений. В примерах 3а и 4 этот смысл требует уточнения. Это уточнение даётся соответственно математич. статистикой и теорией И. (для к-рых эти примеры являются типичными).

В основе *информации теории* лежит предложенный в 1948 К. Шенноном способ измерения количества информации, содержащейся в одном случайном объекте (событии, величине, функции и т. п.) относительно другого случайного объекта. Этот способ приводит к выражению количества И. числом. Положение можно всего лучше объяснить в простейшей обстановке, когда рассматриваемые случайные объекты являются случайными величинами, принимающими лишь конечное число значений.

Пусть X — случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а Y — случайная величина, принимающая значения $y_1, y_2, \ldots, y_m$ с вероятностями $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Тогда И. $I(X, Y)$ относительно Y, содержащаяся в X, определяется формулой

$$I(X, Y) = \sum_{i,j} p_{ij} \log_2 (p_{ij}/p_i q_j), \tag{4}$$

где p_{ij} — вероятность совмещения событий $X = x_i$ и $Y = y_j$. И. $I(X, Y)$ обладает рядом свойств, к-рые естественно требовать от меры количества И. Так, всегда $I(X, Y) \geqslant 0$ и равенство $I(X, Y) = 0$ возможно тогда и только тогда, когда $p_{ij} = p_i q_j$ при всех i и j, т. е. когда случайные величины X и Y независимы. Далее, всегда $I(X, Y) \leqslant I(Y, Y)$ и равенство возможно только в случае, когда Y есть функция от X (напр., $Y = X^2$ и т. д.). Неожиданным может казаться лишь равенство $I(X, Y) = I(Y, X)$.

Величина

$$H(X) = I(X, X) = \sum_i p_i \log_2 (1/p_i)$$

носит название *энтропии* случайной величины X. Понятие энтропии относится к числу основных понятий теории И. Количество И. и энтропия связаны соотношением

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y), \tag{5}$$

где $H(X, Y)$ — энтропия пары (X, Y), т. е.

$$H(X, Y) = \sum_{ij} p_{ij} \log_2 (1/p_{ij}).$$

Величина энтропии указывает среднее число двоичных знаков (см. *Двоичная единица*), необходимое для различения (записи) возможных значений случайной величины. Это обстоятельство позволяет понять роль количества И. (4) при «хранении» И. в запоминающих устройствах. Если случайные величины X и Y независимы, то для записи значения X требуется в среднем $H(X)$ двоичных знаков, для записи значения Y требуется $H(Y)$ двоичных знаков, а для пары (X, Y) требуется $H(X) + H(Y)$ двоичных знаков. Если же случайные величины X и Y зависимы, то среднее число двоичных знаков, необходимое для записи пары (X, Y), оказывается меньше суммы $H(X) + H(Y)$, так как

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) - I(X, Y).$$

С помощью значительно более глубоких теорем выясняется роль количества И. (4) в вопросах передачи И. по каналам связи. Основная информационная характеристика каналов, т. н. пропускная способность, определяется через понятие «И.».

Если X и Y могут принимать бесконечное число значений, то предельным переходом из (4) получается формула

$$I(X, Y) = \int\int p(x, y) \log_2 \frac{p(x, y)}{p(x)\, q(y)}\, dx\, dy, \tag{6}$$

где p и q обозначают соответствующие плотности вероятности. При этом энтропии $H(X)$ и $H(Y)$ не существуют, но имеет место формула, аналогичная (5),

$$I(X, Y) = h(X) + h(Y) - h(X, Y), \tag{7}$$

где

$$h(X) = \int p(x) \log_2 \frac{1}{p(x)}\, dx$$

— дифференциальная энтропия X [$h(Y)$ и $h(X, Y)$ определяются подобным же образом].

Пример 5. Пусть в условиях примера 4 случайные величины X и Z имеют нормальное распределение вероятностей с нулевыми средними значениями и дисперсиями, равными соответственно σ_X^2 и σ_Z^2. Тогда, как можно подсчитать по формулам (6) или (7):

$$I(Y, X) = I(X, Y) = \frac{1}{2} \log_2 \left[1 + \sigma_X^2/\sigma_Z^2\right].$$

Таким образом, количество И. в «принятом сигнале» Y относительно «переданного сигнала» X стремится к нулю при возрастании уровня «помех» Z (т. е. при $\sigma_Z^2 \to \infty$) и неограниченно возрастает при исчезающе малом влиянии «помех» (т. е. при $\sigma_Z^2 \to 0$).

Особенный интерес для теории И. представляет случай, когда в обстановке примеров 4 и 5 случайные величины X и Y заменяются случайными функциями (или, как говорят, случайными процессами) $X(t)$ и $Y(t)$, к-рые описывают изменение нек-рой величины на входе и на выходе передающего устройства. Количество И. в $Y(t)$ относительно $X(t)$ при заданном уровне помех («шумов», по акустич. терминологии) $Z(t)$ может служить критерием качества самого этого устройства.

В задачах математич. статистики также пользуются понятием И. (сравни примеры 3 и 3а). Однако как по своему формальному определению, так и по своему назначению оно отличается от вышеприведённого (из теории И.). Математич. статистика имеет дело с большим числом результатов наблюдений и заменяет обычно их полное перечисление указанием нек-рых сводных характеристик. Иногда при такой замене происходит потеря И., но при нек-рых условиях сводные характеристики содержат всю И., содержащуюся в полных данных (разъяснение смысла этого высказывания дано в конце примера 6). Понятие «И.» в статистике было введено Р. Фишером (1921).

Пример 6. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — результаты n независимых наблюдений нек-рой величины, распределённые по нормальному закону с плотностью вероятности

$$p(x;\ a,\ \sigma^2)\quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-(x-a)^2/2\sigma^2\right],$$

где параметры a и σ^2 (среднее и дисперсия) неизвестны и должны быть оценены по результатам наблюдений. Достаточными статистиками (т. е. функциями от результатов наблюдений, содержащими всю И. о неизвестных параметрах) в этом примере являются среднее арифметическое

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

и т. н. эмпирическая дисперсия

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

Если параметр σ^2 известен, то достаточной статистикой будет только $\overline{X}$ (сравни пример 3а выше).

Смысл выражения «вся И.» может быть пояснён следующим образом. Пусть имеется к.-л. функция неизвестных параметров $\varphi=\varphi(a, \sigma^2)$ и пусть

$$\varphi^*=\varphi^*(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$$

— к.-л. её оценка, лишённая систематич. ошибки. Пусть качество оценки (её точность) измеряется (как это обычно делается в задачах математич. статистики) дисперсией разности $\varphi^*-\varphi$. Тогда существует другая оценка φ^{**}, зависящая не от отдельных величин X_i, а только от сводных характеристик $\overline{X}$ и s^2, не худшая (в смысле упомянутого критерия), чем φ^*. Р. Фишером была предложена также мера (среднего) количества И. относительно неизвестного параметра, содержащейся в одном наблюдении. Смысл этого понятия раскрывается в теории статистич. оценок.

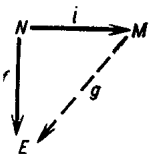
● См. лит. при ст. *Информации теория*. *Ю. В. Прохоров.*

ИНЦИДЕ́НТНОСТИ МА́ТРИЦА — матрица, состоящая из нулей и единиц и характеризующая принадлежность элементов блокам в *блок-схеме*. См. также *Граф*.

ИНЦИДЕ́НТНОСТЬ (от лат. incidens, род. падеж incidentis — попадающий, наталкивающийся) — термин, употребляемый для обозначения отношения принадлежности ($\in$) элемента нек-рому множеству. Напр., принадлежность точек прямой (см. группу аксиом принадлежности в *евклидовой геометрии*).

ИНЪЕКТИ́ВНОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ, инъекция, множества A в множество B — отображение, при к-ром различные элементы из A имеют различные образы в B. И. о. наз. также взаимно однозначным отображением множества A в множество B или вложением.

ИНЪЕКТИ́ВНЫЙ МО́ДУЛЬ — модуль E над ассоциативным кольцом с единицей, удовлетворяющий следующему условию: для любого мономорфизма $i: N \to M$, если существует гомоморфизм $f: N \to E$, то найдётся и такой гомоморфизм $g: M \to E$, что $ig=f$ (см. диаграмму). Каждый R-модуль M содержится в своей инъективной оболочке, т. е. существует И. м. $E(M)$, содержащий M, каждый ненулевой подмодуль к-рого имеет ненулевое пересечение с M. Прямое произведение И. м. есть И. м. Модуль над кольцом целых чисел (абелева группа) инъективен тогда и только тогда, когда он, как абелева группа, делим.



ИНЪЕ́КЦИЯ (от лат. injectio — вбрасывание) — то же, что *инъективное отображение*.

ИРРАЦИОНА́ЛЬНОЕ ВЫРАЖЕ́НИЕ — алгебраическое выражение, содержащее радикалы, напр. $\sqrt{x+y}, \sqrt[3]{a+b^2}$.

ИРРАЦИОНА́ЛЬНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, напр. $\sqrt[3]{x-1}=3$.

ИРРАЦИОНА́ЛЬНОЕ ЧИСЛО́ [лат. irrationalis — неразумный, от in(ir) — отрицательная приставка и ratio — счёт, отношение] — число, не являющееся рациональным (т. е. целым или дробным). Действительные И. ч. могут быть представлены бесконечными непериодическими десятичными дробями, напр. $\sqrt{2}=1{,}41\ldots$, $\pi=3{,}14\ldots$. И. ч. разделяются на нерациональные *алгебраические числа* и *трансцендентные числа*. Существование иррациональных отношений (напр., иррациональность отношения диагонали квадрата к его стороне) было известно ещё в древности. Термин ввёл М. Штифель (1544). Иррациональность числа π была установлена И. Ламбертом (1766). Строгая теория И. ч. была построена только во 2-й пол. 19 в.

ИСКАЖЕ́НИЕ ДЛИНЫ — см. *Картографическая проекция*.

ИСКЛЮЧЕ́НИЯ ТЕО́РИЯ — теория исключения неизвестных из системы алгебраических уравнений. Более точно, пусть имеется система уравнений

$$f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n)=0,\ i=1,\ \ldots,\ m. \qquad (1)$$

Задача исключения неизвестных $x_1, \ldots, x_k$ из системы (1) (неоднородная задача теории исключения) может быть сформулирована следующим образом: найти проекцию множества решений системы (1) на пространство координат $x_{k+1}, \ldots, x_n$. В том случае, когда каждое из уравнений однородно по совокупности неизвестных $x_1, \ldots, x_k$, рассматривается также однородная задача теории исключения: найти проекцию на пространство координат $x_{k+1}, \ldots, x_n$ множества тех решений системы (1), в к-рых не все неизвестные $x_1, \ldots, x_k$ равны нулю.

Неоднородная задача И. т. может также трактоваться как нахождение условий на коэффициенты системы алгебраич. уравнений, при к-рых эта система совместна, а однородная задача И. т.— как нахождение условий на коэффициенты системы однородных алгебраич. уравнений, при к-рых эта система имеет ненулевое решение.

Основные результаты И. т. формулируются следующим образом. Пусть коэффициенты многочленов f_i системы (1) заданы в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ (или, более общо, в нек-ром алгебраически замкнутом поле K) и решения ищутся в этом поле. Тогда решение однородной задачи И. т. является алгебраическим множеством, т. е. множеством решений системы алгебраич. уравнений, а решение неоднородной задачи — конструктивным множеством в смысле алгебраич. геометрии, т. е. конечным объединением множеств вида $M \setminus N$, где M и N суть алгебраич. множества. В нек-рых простейших случаях решение задач И. т. известно в явном виде.

1) Пусть рассматриваемая система уравнений линейна и однородна относительно $x_1, \ldots, x_k$, т. е. имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k}a_{ij}x_j=0,\quad i=1,\ \ldots,\ m, \qquad (2)$$

где a_{ij} — многочлены от $x_{k+1}, \ldots, x_n$. При заданных значениях $x_{k+1}, \ldots, x_n$ система (2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы $A=\|a_{ij}\|$ меньше k. Решением однородной задачи И. т. в этом случае будет множество в пространстве координат $x_{k+1}, \ldots, x_n$, выделяемое условиями равенства нулю всех миноров порядка k матрицы A.

2) Пусть рассматриваемая система уравнений линейна относительно $x_1, \ldots, x_k$, т. е. имеет вид

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

где a_{ij}, b_i — многочлены от $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Пусть $\tilde{A}$ — матрица, получаемая приписыванием к матрице $A=\|a_{ij}\|$ столбца $\|b_i\|$. При заданных значениях $x_{k+1}, \ldots, x_n$ система (3) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\tilde{A}$ равен рангу матрицы A. Следовательно, результатом исключения $x_1, \ldots, x_k$ из системы (3) является

$$\bigcup_{r=0}^{k} M_r \setminus N_r,$$

где M_r — множество точек $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$, в к-рых $rk\tilde{A} \leqslant r$, а N_r — множество точек, в к-рых $rkA < r$ (множества M_r и N_r алгебраические).

3) Пусть $k=2$, поле K алгебраически замкнуто и рассматриваемая система состоит из двух уравнений, однородных по x_1, x_2:

$$\left.\begin{aligned} a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1}x_2 + \ldots + a_nx_2^n = 0, \\ b_0x_1^m + b_1x_1^{m-1}x_2 + \ldots + b_mx_2^m = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ — многочлены от $x_3, \ldots, x_n$. При заданных значениях $x_3, \ldots, x_n$ система (4) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда равен нулю результант

$$R(a_0, a_1, \ldots, a_n; b_0, b_1, \ldots, b_m).$$

Это и даёт решение однородной задачи И. т. в рассматриваемом случае.

4) Пусть $k=1$, поле K алгебраически замкнуто и рассматриваемая система состоит из двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \\ b_0x_1^m + b_1x_1^{m-1} + \ldots + b_m = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ — многочлены от $x_2, \ldots, x_n$. При заданных значениях $x_2, \ldots, x_n$, не обращающих в нуль a_0 или b_0, система (5) совместна тогда и только тогда, когда

$$R(a_0, a_1, \ldots, a_n; b_0, b_1, \ldots, b_m) = 0.$$

Если же $a_0=b_0=0$, то следует рассмотреть

$$R(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_m)$$

и т. д. Это позволяет описать в явном виде результат исключения x_1 из системы (5).

Исключение неизвестных из произвольной системы алгебраич. уравнений может быть проведено последовательно (т. е. исключается сначала одно неизвестное, затем другое и т. д.) при помощи описываемых ниже «элементарных преобразований». Поскольку после исключения одного неизвестного получается, вообще говоря, не алгебраическое, а конструктивное множество, то следует рассмотреть задачу проектирования на пространство координат $x_2, \ldots, x_n$ произвольного конструктивного множества в K^n.

Всякое конструктивное множество $X \subset K^n$ может быть представлено как объединение множеств решений совокупности систем алгебраич. уравнений и неравенств (под алгебраич. неравенством здесь понимается неравенство вида $f(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, где f — многочлен). Элементарным преобразованием такой совокупности наз. преобразование одного из следующих типов: в одной из систем к одному из уравнений прибавляется другое, умноженное на многочлен; в системе, содержащей неравенство $f \neq 0$, одно из уравнений умножается на f; в одной из систем к одному из неравенств прибавляется одно из уравнений, умноженное на многочлен; одна из систем заменяется на две, получаемые из неё приписыванием уравнения $f=0$ и неравенства $f \neq 0$ соответственно (f — нек-рый многочлен); в одной из систем два неравенства заменяются их произведением.

Элементарные преобразования не изменяют объединения множеств решений систем, входящих в данную совокупность. Применяя элементарные преобразования, можно привести любую совокупность систем алгебраич. уравнений и неравенств с неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ к такому виду, когда в каждую из систем входит не более одного уравнения или неравенства, содержащего x_1, причём наряду с таким уравнением $f=0$ или неравенством $f \neq 0$ в эту же систему входит неравенство $f_0 \neq 0$, где f_0 — многочлен от $x_2, \ldots, x_n$, являющийся старшим коэффициентом в разложении f по степеням x_1. Если поле K алгебраически замкнуто, то, отбросив в системах полученной совокупности уравнения и неравенства, содержащие x_1, получают совокупность систем алгебраич. уравнений и неравенств с неизвестными $x_2, \ldots, x_n$, к-рая и задаёт проекцию множества X на пространство координат $x_2, \ldots, x_n$.

Последовательное исключение неизвестных с помощью элементарных преобразований позволяет в принципе свести решение произвольной системы алгебраич. уравнений с n неизвестными к решению ряда алгебраич. уравнений с одним неизвестным.

● Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, пер. с англ., т. 1, М., 1954.

Э. Б. Винберг.

ИСКЛЮЧЁННОГО ТРЕТЬЕГО ЗАКОН — аксиома классической логики, состоящая в том, что одно из двух высказываний «A» и «не A» является истинным. В математической логике И. т. з. выражается формулой $A \vee \neg A$ (читается «A или не A»), где $\vee$ — знак дизъюнкции, $\neg$ — знак отрицания. С интуиционистской (конструктивной) точки зрения установление истинности высказывания вида $A \vee \neg A$ означает установление истинности A или истинности $\neg A$. Поскольку не существует общего метода, позволяющего для каждого высказывания за конечное число шагов установить его истинность или истинность его отрицания, И. т. з. подвергается критике со стороны представителей интуиционистского и конструктивного направлений в основаниях математики.

ИСПЫТА́НИЕ — один из основных специфических терминов классической теории вероятностей. При аксиоматич. подходе определяется как любое разбиение пространства элементарных событий $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ на попарно несовместимые случайные события $A_1, A_2, \ldots$, к-рые называются «исходами И.» Вероятности $P(A_k)$ наз. «вероятностями исходов», при этом $\sum_k P(A_k)=1$. Всевозможные объединения событий A_k (элементы порождаемой событиями A_k σ-алгебры) наз. «событиями, связанными с данным И.». Термин «И.» употребляется в основном в сочетаниях «повторные И.», «независимые И.», «схема И.», «И., связанные в цепь Маркова».

ИССЛЕ́ДОВАНИЕ ОПЕРА́ЦИЙ — научный метод выработки количественно обоснованных рекомендаций по принятию решений. Важность количественного фактора в И. о. и целенаправленность вырабатываемых рекомендаций позволяют определить И. о. как теорию принятия оптимальных решений. И. о. способствует превращению искусства принятия решений в научную, и притом математическую, дисциплину. Термин «И. о.» возник в результате буквального перевода выражения operations research, введённого в кон. 30-х гг. 20 в. как условное наименование одного из подразделений британских ВВС, занимавшегося вопросами использования радиолокационных установок в общей системе обороны. Первоначально И. о. было связано с решением задач военного содержания, но уже с кон. 40-х гг. оно используется для решения как чисто технических, так и технико-экономич. задач, а также задач управления на различных уровнях.

Содержательно всякая задача И. о. является оптимизационной, т. е. состоит в выборе среди нек-рого множества допустимых (т. е. допускаемых обстоятельства-

ми дела) решений тех решений, к-рые можно в том или ином смысле квалифицировать как оптимальные. При этом допустимость каждого решения понимается в смысле возможности его фактического осуществления, а оптимальность — в смысле его целесообразности (см. *Оптимальности принцип*).

Точное описание непосредственных последствий от принятия решения в содержательном смысле этого слова является решением в формальном математич. смысле. Обычно, хотя и необязательно, всякое решение в И. о. описывается числом или системой чисел. Допустимость того или иного решения определяется возможностью реализации соответствующих последствий при имеющихся ресурсах. Ограниченность ресурсов выражается в виде математич. ограничений, чаще всего имеющих вид неравенств. Наконец, оптимальность, целесообразность решения предполагает наличие в каждой задаче И. о. нек-рой системы целей, называемых также критериями оптимальности (не смешивать с принципами оптимальности!).

Теоретически мыслимы задачи И. о. с любыми множествами допустимых решений и с весьма произвольными критериями оптимальности. Последние могут иметь вид требований о максимизации (или минимизации) значений одной или нескольких числовых функций, значения к-рых выражают меру (степень) осуществления целей соответствующим допустимым решением. Каждая такая функция обычно наз. целевой функцией. Если такая функция одна, то говорят о задаче *математического программирования* (оптимального программирования, что не следует смешивать с программированием на ЭВМ), а если более одной, то говорят о задаче векторной оптимизации, или многокритериальной задаче (см. *Многокритериальная оптимизация*). Нередко теорию многокритериальных задач также относят к математич. программированию, хотя в ряде своих аспектов она смыкается с *игр теорией*. Критерий оптимальности можно задавать не только целевой функцией, но и отношением предпочтения, когда применительно к парам допустимых решений указывается, какое из решений этой пары предпочтительней. Возможности и пути замены отношений предпочтения численными критериями составляют один из основных вопросов *полезности теории*. С 70-х гг. 20 в. всё чаще переходят от рассмотрения отдельных задач И. о. к изучению систем, пространств, исчислений таких задач и исследованию связей между различными задачами или сведению одних задач к другим, более просто устроенным.

Пример 1. «Задача о диете» (исторически одна из первых задач И. о., относящихся к линейному программированию). Для нормальной жизнедеятельности человеку ежесуточно требуется питание, содержащее не менее b_1 калорий, b_2 единиц белков такой-то структуры, b_3 единиц белков другой структуры, b_4 витамина С и т. д. (перечисляются все m необходимых ингредиентов питания). Эту потребность в пище можно покрыть (или даже перекрыть), употребляя ежесуточно x_1 хлеба, x_2 мяса нек-рого сорта, x_3 мяса другого сорта, x_4 молока, x_5 капусты и т. д. (перечисляются все возможные в данных условиях n продуктов питания). Пусть единица i-го продукта питания стоит c_i и содержит a_{ij} единиц питательного ингредиента j. Задача состоит в составлении наиболее дешёвого суточного рациона.

Здесь решением является набор употребляемых в пищу продуктов, характеризуемый набором чисел, вектором количеств продуктов $(x_1, \ldots, x_n)$. Решение допустимо, если соответствующий набор содержит достаточное количество каждого из ингредиентов питания:

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m$$

(можно также учитывать диетические ограничения сверху, но по содержанию это будет уже другая задача, хотя и того же типа). Целью является минимизация цены потребляемого набора продуктов, равной

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n.$$

Эта сумма и будет здесь целевой функцией. В данной задаче целевая функция одна.

Пример 2. «Задача о рюкзаке» (или задача о ранце; точнее, один из вариантов задачи под этим названием). Имеется n предметов, причём i-й из них обладает массой m_i, объёмом v_i, ценой c_i и численной оценкой полезности в походе p_i. Турист составляет набор предметов с номерами $i_1, \ldots, i_k$ (число k не фиксировано) так, чтобы суммарная их масса и объём не превосходили заданных границ (веса M, к-рый может нести турист, и объёма его рюкзака V):

$$m_{i_1} + \ldots + m_{i_k} \leqslant M,$$
$$v_{i_1} + \ldots + v_{i_k} \leqslant V,$$

суммарная цена

$$c_{i_1} + \ldots + c_{i_k}$$

была бы по возможности наименьшей, а суммарная полезность

$$p_{i_1} + \ldots + p_{i_k}$$

по возможности наибольшей.

Здесь решениями являются всевозможные наборы предметов; допустимые среди них те, к-рые удовлетворяют ограничениям по массе и объёму, а оптимальные те из допустимых, к-рые обеспечивают наибольшую целесообразность в смысле критериев цены и полезности. Эта задача имеет две целевые функции — суммарную цену и суммарную полезность. Она многокритериальна.

Пример 3. Выработка группового решения. Имеется множество из m предметов, и для каждого из n лиц задано отношение его индивидуального предпочтения на этом множестве. Возникает задача нахождения такого группового предпочтения, к-рое было бы оптимальным (т. е. «наиболее разумным») образом согласовано с индивидуальными предпочтениями.

Здесь решениями (и притом допустимыми) являются все отношения группового предпочтения (если ограничиться строгими, и притом линейными, упорядочениями, то число отношений-решений равно $m!$, а если допускать произвольные отношения, то 2^{m^2}). Вопрос о том, какими соображениями следует руководствоваться при выборе оптимального из них, есть вопрос о принципе оптимальности, к-рый требует специальных рассмотрений.

Содержанием теоретич. аспекта И. о. является математич. анализ оптимизационных задач и нахождение их оптимальных решений. Прикладной аспект И. о. состоит в составлении оптимизационных задач и в осуществлении их оптимальных решений. Постановка задачи И. о. охватывает прежде всего формальное описание множества допустимых решений и критериев оптимальности выбора. Оно должно соответствовать содержательным представлениям о возможном и целесообразном в данных условиях. Напротив, проверка адекватности самих содержательных представлений объективной реальности уже выходит за пределы И. о. Все решения (в том числе оптимальные) принимаются всегда на основе информации, к-рой располагает принимающий решения субъект (или субъекты), и только на ней. Поэтому каждая задача И. о. должна в своей постановке отражать структуру и динамику знаний принимающего решения субъекта о множестве допустимых решений и о критерии оптимальности. Так, если принятие решения происходит в наперёд известном и не изменяющемся информационном состоянии, то задача наз. статической. В таких условиях весь процесс принятия решения может быть сведён к единому мгновенному акту. В противном случае, если приходится иметь дело с несколькими различными информационными состояниями, то решение будет заключаться в установлении соответствия между каждым информационным состоянием и доступной в нём альтернативой, т. е. в выборе функции, выражающей это соответствие. Если информационные состояния в ходе принятия решения сменяют друг друга, то задача наз. дина-

мической; в ней часто целесообразно принимать поэтапные, многошаговые решения или даже развёртывать принятие решения в непрерывный во времени процесс.

Информационные состояния принимающего решения субъекта могут по-разному характеризовать его истинное («физическое») состояние. Может оказаться, что одно информационное состояние субъекта охватывает целое множество его физич. состояний. В этом случае задача принятия решений наз. неопределённой. Такие задачи И. о. относятся либо непосредственно к теории игр, либо к теории принятия решений при неопределённости. Если информационное множество содержит несколько физич. состояний, но субъект кроме их множества знает ещё и (априорные) вероятности каждого из этих физич. состояний, то задача наз. стохастической. Наконец, если информационное состояние состоит из единственного физич. состояния, то задача наз. детерминированной. Иногда представляет интерес одновременно рассматривать семейства задач, зависящих от численного, векторного или пробегающего значения из к.-л. другого множества параметра, объединяя их в единую параметрическую задачу. Основное отличие параметрич. задачи от неопределённой заключается в том, что решение первой состоит в указании оптимальных решений для всех задач, отвечающих конкретным значениям параметра, а решение второй — в нахождении такого допустимого решения, к-рое было бы достаточно приемлемым, как бы конкретно ни реализовалась неопределённость.

В математич. программировании чаще других рассматриваются задачи, в к-рых множество допустимых решений X есть подмножество конечномерного евклидова пространства E^n. Если при этом X — выпуклый многогранник с конечным числом вершин, а целевая функция f линейна, то имеют дело с задачами *линейного программирования* (пример — задача о диете); если X — произвольное выпуклое множество, а f — выпуклая функция, подвергаемая минимизации, то имеют дело с задачей *выпуклого программирования*, и т. д. Множество допустимых решений X может быть также подмножеством функционального пространства, и поэтому формально вариационное исчисление и круг вопросов, связанный с принципом максимума Понтрягина, могут быть отнесены к математич. программированию. Задачи, в к-рых всякое допустимое решение конструируется в результате нек-рого многошагового процесса, составляют предмет *динамического программирования*. В других задачах математич. программирования X может быть конечным множеством; такие задачи относятся к *дискретному программированию*. В них допустимые решения могут быть точками целочисленной решётки в E^n (целочисленное программирование) или векторами, каждая компонента к-рых принимает лишь два значения (булево программирование); к булеву программированию относится, напр., задача о рюкзаке в случае единственной целевой функции. В отдельных задачах элементы X суть перестановки конечного числа символов, пути в заданном графе и т. д. Особым случаем задач оптимального программирования является нахождение максимина, т. е. максимального значения функции, имеющей вид минимума (аналогично — минимакса). Теория решения стохастич. задач линейного программирования (а с 1970-х гг. и нелинейного) образует *стохастическое программирование*.

Нек-рые классы задач И. о., выделяемые специфич. содержательными интерпретациями, проблематикой и терминологией, носят название моделей И. о. Обычно каждая модель И. о. имеет присущие ей методы решения. Размах масштабов моделей И. о. широк: от конкретных задач, различающихся лишь численными значениями входящих в них параметров (к их числу можно отнести задачу о назначениях, транспортную задачу, задачи о раскрое, о размещении и теорию сетевых графиков), до таких разветвлённых дисциплин, как теория *управления запасами*, *расписаний теория* или *надёжности теория*. Большое число моделей И. о. даёт теория игр. К числу моделей И. о. принято относить *массового обслуживания теорию*, хотя большинство её задач пока ещё не приобрело оптимизационного характера.

Каждый класс (однокритериальных) задач математич. программирования может служить отправным пунктом для построения теории и методов решения многокритериальных задач. Так, можно говорить о многокритериальном линейном (выпуклом, дискретном и т. д.) программировании.

Наряду с задачами математич. программирования (в том числе многокритериальными) рассматриваются оптимизационные задачи с критериями, основанными на отношении предпочтения (напр., задача о групповом решении). Как в многокритериальных задачах, так и в задачах с предпочтениями (за исключением тривиальных случаев) уже сам вопрос о сущности оптимизации, как таковой, требует специального рассмотрения. Основания, по к-рым те или иные допустимые решения квалифицируются как оптимальные, наз. принципами оптимальности.

Математич. аппарат, разрабатываемый для целей решения задач И. о., принято называть математическими методами И. о. По своему характеру математич. методы И. о. в принципе не отличаются от математич. методов любой другой математич. дисциплины, имеющей содержательные приложения или хотя бы интерпретации. Разработанность математич. методов для разных задач И. о. и их классов неодинакова. Наиболее разработана теория линейного и выпуклого программирования.

От математич. методов И. о. следует отличать математические основы И. о., т. е. разделы математики, созданные независимо от И. о., но аппарат к-рых систематически употребляется для решения задач И. о. По традиции к математич. основам И. о. принято относить математич. анализ (вместе с обыкновенными дифференциальными уравнениями и вариационным исчислением), теорию вероятностей (с теорией информации) и линейную алгебру. С известными основаниями в этот список можно включить выпуклый анализ и теорию игр.

Решение каждой задачи И. о. начинается с выбора принципа оптимальности. Если задача однокритериальна, то этот выбор тривиален: принцип оптимальности состоит в максимизации (или минимизации) целевой функции. Таким образом, в этом случае принцип оптимальности задачи формально совпадает с её критерием оптимальности. В остальных случаях нахождение принципа оптимальности оказывается существенным этапом решения задачи и может реализоваться неоднозначно. Употребительны приёмы сведения векторного критерия или отношения предпочтения к численным критериям. Напр., в случае многокритериальной задачи принцип оптимальности может состоять в придании отдельным компонентам векторного критерия тех или иных весов и рассмотрении в качестве целевой функции взвешенной суммы; другой принцип оптимальности в такой задаче может заключаться в максимизации минимальной компоненты вектора критерия (принципа максимина) и т. д. Число мыслимых принципов оптимальности может быть огромным. Так, для выработки группового решения из примера 3 уже при $m=n=2$ в случае строгих линейных упорядочений таких принципов оказывается 16, а при тех же m и n, но при произвольных упорядочениях — $1{,}9 \cdot 10^{308}$! Следующим после выбора принципа оптимальности этапом решения задачи И. о. является установление его реализуемости (т. е. существование решений задачи в смысле этого принципа). При этом может оказаться, что та или иная задача И. о. оптимальных решений не имеет. В этих случаях оптимальное решение ищется среди «обобщённых» решений, к-рыми могут быть подмножества множества допустимых решений, схемы случайного выбора решения среди допустимых, а также другие способы зависимого выбора допустимого решения.

Доказательство реализуемости нек-рого принципа оптимальности применительно к тому или иному классу задач может оказаться «неконструктивным» и не давать способа, алгоритма нахождения соответствующих оптимальных

решений. В других случаях такой алгоритм может быть указан, но его реализация оказывается практически неосуществимой ввиду объёма встречающихся при этом вычислений. Поэтому фактич. получение оптимального решения задачи И. о. является третьим этапом её разработки.

Задачи И. о. обладают рядом черт, обусловливающих методику их составления и решения. Во-первых, даже для наиболее простых параметрич. классов задач не удаётся представить решение в виде аналитич. выражения от соответствующих параметров (в виде формулы). Поэтому задачи И. о. в подавляющем большинстве не поддаются аналитич. решению и должны решаться численно. Во-вторых, большинство практически интересных задач И. о. содержит в своих формулировках весьма большое количество числового материала, не сводящегося к аналитич. выражениям; поэтому численное решение этих задач, за немногими исключениями, возможно лишь с использованием ЭВМ. В-третьих, процесс решения многих задач И. о. заключается в выполнении простых однотипных операций над числами, составляющими большие массивы. Поэтому задачи И. о. предъявляют к ЭВМ требования, касающиеся в большей степени их памяти, чем быстродействия. Фактически требования И. о. оказывают значительное влияние на развитие ЭВМ и формирование их парка.

Круг приложений И. о. очень широк. И. о. используется для решения технических (в основном технологических), технико-экономических, социально-экономических задач, а также задач управления в различных сферах и на различных уровнях, вытесняя постепенно традиционные «интуитивные» методы принятия решений.

Практич. внедрение результатов И. о. встречается с трудностями различного рода. Первая из них связана с построением концептуальной структуры модели реальной задачи принятия решения (или с подбором уже имеющейся структуры модели). Этим устанавливается принципиальная возможность моделирования класса реальных задач, включающего рассматриваемую задачу, нек-рым классом задач И. о. Следующая трудность состоит в выборе из этого класса задач И. о. именно той, к-рая моделирует интересующую исследователя конкретную задачу. Для этого, в частности, необходимо измерить значения параметров, определяющих решаемую задачу. Но поскольку эти параметры имеют не обязательно физический или технический, а часто экономический или даже социально-экономический характер, их измерение с требуемой точностью может представлять самостоятельную проблему. Эту трудность сбора информации для построения конкретной модели можно считать основным препятствием на пути выработки оптимального решения. Затем, после построения модели возникают чисто математические и в том числе вычислительные трудности её анализа и решения. В сущности, именно преодоление всех этих трудностей и составляет содержание теории И. о. Наконец, после нахождения решения возникает последняя трудность, уже организационного и психологич. плана: найденное решение нередко существенно отличается от традиционных и потому может восприниматься с недоверием. Всё это ограничивает практич. применения И. о. Для более успешного их преодоления коллективы, работающие в области И. о., формируются как комплексные: в них включаются, кроме математиков, обычно и инженеры, и экономисты, и специалисты в области конкретных дисциплин, иногда психологи, администраторы и т. д.

Применение И. о. в практических оптимизационных задачах даёт значительный экономич. эффект: по сравнению с традиционными «интуитивными» методами принятия решений увеличение выигрыша от использования оптимальных решений при одинаковых затратах около 10%.

● Морз Ф. М., Кимбелл Д. Е., Методы исследования операций, пер. с англ., М., 1956; Кофман А., Методы и модели исследования операций, пер. с франц., М., 1966; Чуев Ю. В., Исследование операций в военном деле, М., 1970; Вентцель Е. С., Исследование операций, М., 1972; Вагнер Г., Основы исследования операций, т. 1—3, пер. с англ., М., 1972—73; Современное состояние теории исследования операций, М., 1979; Исследование операций, пер. с англ., т. 1—2, М., 1981.

Н. Н. Воробьёв.

ИСТИННАЯ ОШИБКА — см. *Ошибок теория.*

ИСТИННОСТНАЯ ТАБЛИ́ЦА — таблица, выражающая *истинностное значение* сложного высказывания через истинностные значения входящих в него простых высказываний. С помощью И. т. в математич. логике определяются *логические функции*, соответствующие *логическим операциям*, напр. дизъюнкции, конъюнкции, импликации, отрицанию и др. Так, И. т. для конъюнкции (&; табл. 1) и импликации ($\supset$; табл. 2) имеют следующий вид (И означает «истина», Л — «ложь»): Каждая строка И. т. соответствует одной из возможных комбинаций истинностных значений простых высказываний; в столбце, соответствующем сложному высказыванию, указывается истинностное значение, к-рое принимает сложное высказывание, если простые высказывания имеют истинностные значения, указанные в этой строке.

Табл. 1

A	B	$A\&B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Табл. 2

A	B	$A \supset B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

ИСТИННОСТНОЕ ЗНАЧЕ́НИЕ — абстрактный объект («истина» или «ложь»), сопоставляемый высказыванию в зависимости от того, является ли это высказывание истинным или ложным. «Истина» — это то общее, что присуще всем истинным высказываниям. Для обозначения И. з. «истина» и «ложь» в математич. логике чаще всего используются числа 1 и 0 или символы И (T) и Л (F) соответственно.

Переход от рассмотрения конкретных высказываний к их И. з. способствовал проникновению в логику математических (прежде всего алгебраических) методов, что лучше всего можно проиллюстрировать на примере логики высказываний. Поскольку в логике высказываний интересуются не конкретным содержанием высказывания, а лишь его истинностью или ложностью, то оказалось удобным вместо высказываний рассматривать их И. з., а вместо *логических операций* над высказываниями — *логические функции*, т. е. операции над И. з. Так, если в качестве И. з. выбраны числа 1 и 0, то логич. операциям соответствуют логич. функции: $x \cdot y$ — для конъюнкции, $\min(x+y,\ 1)$ — для дизъюнкции, $1-x$ — для отрицания. Это позволяет вместо системы высказываний рассматривать алгебраич. систему, состоящую из двух элементов 1 и 0 с определёнными на них логич. функциями. Изучение этой системы составляет предмет *алгебры логики.*

ИСТО́ЧНИК векторного поля — точка, в к-рой *дивергенция* положительна.

ИСТО́ЧНИКА ФУ́НКЦИЯ — см. *Грина функция.*

ИСЧЕ́РПЫВАНИЯ МЕ́ТОД — метод доказательства, применявшийся математиками древности при определении площадей и объёмов. Название «метод исчерпывания» было введено лишь в 17 в.

Одна из типичных схем доказательства при помощи И. м. может быть изложена в современных обозначениях так: для определения величины A строится нек-рая последовательность величин $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, так, что

$$C_n < A, \tag{1}$$

известно такое B, что

$$C_n < B \tag{2}$$

и при любом целом K для достаточно больших n удовлетворяются неравенства

$$K(A-C_n) < D, \tag{3}$$

$$K(B-C_n) < D, \tag{4}$$

где D постоянно. С современной точки зрения для перехода от неравенств (3) и (4) к равенству

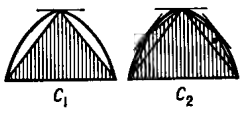
$$A = B \tag{5}$$

достаточно заметить, что в силу условий (1), (2), (3) и (4)

$$\lim_{n\to\infty}(A-C_n)=0, \quad \lim_{n\to\infty}(B-C_n)=0,$$

$$A=\lim_{n\to\infty} C_n = B.$$

Математики древности, не располагавшие теорией пределов, обращались к доказательству от противного и доказывали невозможность каждого из неравенств $A<B$, $B<A$. Чтобы опровергнуть первое из них, при помощи аксиомы Евдокса — Архимеда устанавливали, что для $R=B-A$ существует такое K, что $KR>D$, и в силу условия (1) получали



$$K(B-C_n) > K(B-A) > D,$$

что противоречит неравенству (4). Аналогично опровергалось другое предположение и оставалось только принять равенство (5).

Введение И. м. вместе с лежащей в его основе аксиомой приписывается Евдоксу Книдскому. Этим методом широко пользовался Евклид, с особенным искусством и разнообразием — Архимед. Напр., для определения площади сегмента A параболы Архимед строит площади C_1, C_2, . . ., «исчерпывающие» при их постепенном нарастании площадь сегмента A, по схеме, ясной из рисунка. При этом

$$C_2 \quad C_1+\tfrac{1}{4}C_1,$$

$$C_3=C_1+\tfrac{1}{4}C_1+\tfrac{1}{16}C_1,$$

. . . . . .

$$C_n=C_1+\tfrac{1}{4}C_1+\ldots+\tfrac{1}{4^{n-1}}C_1.$$

Вместо того чтобы прибегнуть к предельному переходу

$$A=\lim_{n\to\infty} C_n=\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}+\ldots\right)C_1=\tfrac{4}{3}C_1,$$

Архимед геометрически доказывает, что при любом n

$$A-C_n<\tfrac{1}{4^{n-1}}C_1.$$

Вводя площадь

$$B=\tfrac{4}{3}C_1,$$

Архимед получает, что

$$B-C_n=\tfrac{1}{3\cdot 4^{n-1}}C_1,$$

и, следуя изложенному выше порядку, заканчивает доказательство того, что

$$A=B=\tfrac{4}{3}C_1.$$

Дальнейшие примеры и освещение историч. роли И. м. см. в статьях *Бесконечно малых исчисление* и *Интегральное исчисление*.

А. Н. Колмогоров.

ИСЧИСЛЕ́НИЕ — 1) И.— составная часть названия некоторых разделов математики, трактующих правила вычислений и оперирования с объектами того или иного типа; напр., *дифференциальное исчисление*, *вариационное исчисление*.

2) И.— д е д у к т и в н а я с и с т е м а, т. е. способ задания того или иного множества путём указания исходных элементов (аксиом И.) и правил вывода, каждое из к-рых описывает, как строить новые элементы из исходных и уже построенных. В ы в о д о м в И. Ξ наз. такая конечная последовательность элементов, что всякий её член p является аксиомой в Ξ или заключением применения к.-л. принадлежащего Ξ правила вывода, причём все посылки этого применения предшествуют p в данном выводе. Элемент наз. в ы в о д и м ы м в Ξ, если в Ξ можно построить вывод, кончающийся этим элементом. Выводы могут быть снабжены а н а л и з о м, т. е. дополнительной информацией, облегчающей проверку правильности вывода (напр., при каждом элементе вывода указываются правило и номера предшествующих элементов, при помощи к-рых получен данный элемент).

П р и м е р. Пусть Ξ — И., задающее множество M записей в однобуквенном алфавите $\{|\}$ всех чисел вида 2^n при $n=1, 2, \ldots$. Исчисление Ξ имеет одну аксиому $||$ и одно правило вывода: «из слова P можно получить слово PP». Тогда слова из M и только они выводимы в Ξ.

Помимо интересующего нас множества, И. может порождать также нек-рые вспомогательные элементы, к-рые обычно отличаются от основных элементов при помощи к.-л. алгоритма. При отсутствии вспомогательных слов говорят о с т р о г о м п р е д с т а в л е н и и множества M исчислением Ξ. Таков, в частности, приведённый выше пример.

Понятие И. является формализацией интуитивного представления об индуктивно порождаемом множестве. Такие множества широко используются в математике; в частности, построение формальной теории опирается на большое количество индуктивно определяемых множеств, начиная с простейших (множества *переменных*, *термов*, *формул* и т. п.) и кончая множеством *теорем*, к-рые выводятся из аксиом теории при помощи соответствующих логич. переходов. Поэтому И. являются одним из основных аппаратов математич. логики. Именно логич. исчисления были первыми примерами полностью формализованных дедуктивных систем (на базе этих И. вырабатывались основные понятия и методы общей теории И.). Нек-рые специальные виды И. хорошо используются для задания алгебраич. систем (групп, подгрупп и др.), описания формальных *грамматик* (этим определяется роль И. в *математической лингвистике*) и для задания множеств, распознаваемых *конечными автоматами*.

Одной из основных сфер применения общей теории И. является *алгоритмов теория*. Это объясняется тем, что понятие И. имеет такой же фундаментальный характер, как и понятие алгоритма. В частности, класс множеств, к-рые могут быть заданы при помощи И., совпадает с классом *перечислимых множеств*.

Понятие дедуктивной системы, пригодной для порождения произвольных перечислимых множеств слов, впервые было предложено Э. Постом (1943).

ИТЕРАЦИО́ННЫЙ АЛГОРИ́ТМ — алгоритм, реализующий на некотором множестве V последовательность отображений A_k: $V \to V$ (метод последовательных приближений), при помощи которых по начальной точке $u^0 \in V$ вычисляют последовательность точек по формулам

$$u^{k+1}=A_k u^k,\ k=0, 1, \ldots . \qquad (1)$$

Операцию (1) наз. *итерацией*, а последовательность u^k — итерационной последовательностью. И. а. применяют или для нахождения решения u операторного уравнения

$$Au=f, \qquad (2)$$

или минимума нек-рого функционала, или собственных значений и элементов и т. п.

И. а. наз. сходящимся при начальном приближении u^0 к решению u упомянутых задач, если $u^k \to u$ при $k \to \infty$. Операторы A_k для решения уравнения (2) обычно строят по формулам

$$A_k u^k \quad u^k - H_k(Au^k - f), \qquad (3)$$

где H_k — нек-рая определяющая тип И. а. последовательность операторов. В основе построения И. а. типа (1), (3) могут лежать *сжимающих отображений принцип* или вариационные методы минимизации нек-рого функционала. Существуют различные методы построения операторов A_k, напр. варианты *Ньютона метода* или *спуска метода*. Операторы H_k стараются выбрать так, чтобы быстрая сходимость u^k к u обеспечивалась при достаточно простой численной реализации операции $A_k u^k$.

Хорошо разработаны и исследованы И. а. решения линейных уравнений (2). И. а. делятся при этом на линейные и нелинейные. К линейным относятся, напр., *Зейделя метод*, *релаксации метод*, *чебышевский итерационный метод*; к нелинейным — вариационные методы: *наискорейшего спуска метод*, *минимальных невязок метод* и т. д.

Существуют И. а., использующие r предыдущих приближений $u^k, u^{k-1}, \ldots, u^{k-r+1}$, они наз. r-шаговыми и могут обладать повышенной скоростью сходимости; широко развиты двухшаговые И. а., напр. *сопряжённых градиентов метод*.

И. а. широко применяются при решении многомерных задач математич. физики.

● Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, 2 изд., М., 1981. *В. И. Лебедев.*

ИТЕРА́ЦИЯ (от лат. iteratio — повторение) — результат повторного применения к.-л. математич. операции. Так, если $y=f(x)=f_1(x)$ есть нек-рая функция от x (отображающая область определения в себя), то функции $f_2(x)=f[f_1(x)]$, $f_3(x)=f[f_2(x)]$, . . ., $f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$ наз. соответственно второй, третьей, . . ., n-й итерациями функции $f(x)$. Напр., полагая $f(x)=x^\alpha$, получают $f_2(x)=(x^\alpha)^\alpha=x^{\alpha^2}$, $f_3(x)=(x^{\alpha^2})^\alpha=x^{\alpha^3}$, . . ., $f_n(x)=(x^{\alpha^{n-1}})^\alpha=x^{\alpha^n}$. Индекс n наз. показателем И., а переход от функции $f(x)$ к функциям $f_2(x)$, $f_3(x)$, . . .— итерированием.

И. являются при решении различного рода уравнений и систем уравнений итерационными методами (см., напр., *Последовательных приближений метод*). В частности, они играют важную роль в теории интегральных уравнений. Для нек-рых классов функций можно определить И. с произвольным действительным и даже комплексным показателем.

ЙОРДАНОВА А́ЛГЕБРА — алгебра, в которой справедливы тождества:

$$xy \quad yx, \quad (x^2y)\,x = x^2\,(yx).$$

Такие алгебры впервые появились в работе П. Йордана (1933), посвящённой аксиоматизации основ квантовой механики, а затем нашли применение в алгебре, математич. анализе и геометрии.

Со всякой ассоциативной алгеброй A (над полем, характеристика к-рого $\neq 2$) связана Й. а. $A^{(+)}$. Она строится на том же множестве A, с той же операцией сложения, а умножение $\circ$ в ней определяется следующим образом:

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab+ba)$$

(где ab, ba — произведения элементов a и b в A). Конечномерные простые (без идеалов) Й. а. над алгебраически замкнутым полем характеристики $\neq 2$ полностью классифицированы.

К

КАВАЛЬЁРИ ПРИ́НЦИП: если при пересечении двух тел любой плоскостью, параллельной нек-рой заданной плоскости, получаются сечения равной площади, то объёмы тел равны между собой. Это положение (и аналогичное ему для случая плоских фигур) наз. обычно К. п.; оно было известно ещё древнегреческим математикам, но Б. Кавальери в своей «Геометрии» (1635) обосновал его.

КАЗА́НСКОЕ ФИ́ЗИКО-МАТЕМАТИ́ЧЕСКОЕ О́БЩЕСТВО — русское научное общество, возникшее в 1880 как секция физико-математич. наук Общества естествоиспытателей при Казанском ун-те. В 1890 секция преобразовалась в физико-математич. общество. На заседаниях общества читаются доклады по математике, физике и др. вопросам. Общество проводит большую работу по пропаганде идей Н. И. Лобачевского; в 1893 было организовано празднование 100-летия со дня его рождения. На собранные (по подписке) обществом средства был воздвигнут (1896) в Казани памятник Н. И. Лобачевскому и учреждена (1897) международная премия им. Н. И. Лобачевского (до 1937 было проведено 8 конкурсов).

● Казанское физико-математическое общество, «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 2.

КАЛЕНДА́РНОЕ ПЛАНИ́РОВАНИЕ — см. *Расписаний теория*.

КАНА́Л связи — устройство, предназначенное для передачи *информации*. В отличие от техники, *информации теория* отвлекается от конкретной природы этих устройств, подобно тому как геометрия изучает объёмы тел, отвлекаясь от материала, из к-рого они изготовлены. Различные конкретные системы связи рассматриваются в теории информации только с точки зрения количества информации, к-рое может быть надёжно передано с их помощью. Таким образом приходят к понятию К.: канал задаётся множеством «допустимых» сообщений (или сигналов) x на входе, множеством сообщений (сигналов) y на выходе и набором условных вероятностей $p(y|x)$ получения сигнала y на выходе при входном сигнале x. Условные вероятности $p(y|x)$ описывают статистич. свойства шумов (помех), искажающих сигналы в процессе передачи. В случае когда $p(y|x)=1$ при $y=x$ и $p(y|x)=0$ при $y\neq x$, К. наз. каналом без шумов. В соответствии со структурой входных и выходных сигналов выделяют дискретные К. и непрерывные К. В дискретных К. сигналы на входе и на выходе представляют собой последовательности букв из одного и того же или различных алфавитов (см. *Код*). В непрерывных К. входной и выходной сигналы суть функции непрерывного параметра t — времени. Возможны также смешанные случаи, но обычно в качестве идеализации предпочитают рассматривать один из указанных двух случаев.

Способность К. передавать информацию характеризуется нек-рым числом — пропускной способностью (ёмкостью) К., к-рая определяется как максимальное количество информации относительно сигнала на входе, содержащееся в сигнале на выходе (в расчёте на единицу времени).

Точнее: пусть входной сигнал X принимает нек-рые значения x с вероятностями $p(x)$. Тогда по формулам теории вероятностей можно рассчитать как вероятности $q(y)$ того, что сигнал y на выходе примет значение y:

$$q(y)=\sum_x p(x)\,p(y|x),$$

так и вероятности $p(x, y)$ совмещения событий $X=x$, $Y=y$:

$$p(x, y) \quad p(x)\,p(y|x).$$

По этим последним вычисляется количество информации (в *двоичных единицах*) $I(Y, X)=I(X, Y)$ и его среднее значение

$$R=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}I(Y, X),$$

где T — длительность X. Верхняя граница C величин R, взятая по всем допустимым сигналам на входе, наз. пропускной способностью К. Вычисление пропускной способности, подобно вычислению *энтропии*, легче в дискретном случае и значительно сложнее в непрерывном, где оно основывается на теории стационарных случайных процессов.

Проще всего положение в случае дискретного К. без шумов. В теории информации устанавливается, что в этом случае общее определение пропускной способности C равносильно следующему:

$$C=\lim_{T\to\infty}\frac{\log_2 N(T)}{T},$$

где $N(T)$ — число допустимых сигналов длительностью T.

Пример 1. Пусть алфавит К. без шумов состоит из двух букв — 0 и 1 длительностью τ сек каждая. Допустимые сигналы длительностью $T=n\tau$ представляются после-

довательностями символов 0 и 1. Их число $N(T)=2^n$. Соответственно

$$C=\lim_{T\to\infty}\frac{\log_2 N(T)}{T}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\tau}=\frac{1}{\tau}\text{ дв. ед./сек.}$$

Пример 2. Пусть символы 0 и 1 имеют длительность τ и 2τ сек соответственно. Здесь допустимых сигналов длительностью $T=n\tau$ будет меньше, чем в примере 1. Так, при $n=3$ их будет всего 3 (вместо 8). Можно подсчитать теперь

$$C=\frac{1}{\tau}\log_2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\approx\frac{0,7}{\tau}\text{ дв. ед./сек.}$$

При необходимости передачи записанных с помощью нек-рого кода сообщений по данному К. приходится преобразовывать эти сообщения в допустимые сигналы К., т. е. производить надлежащее *кодирование*. После передачи надо произвести операцию декодирования, т. е. операцию обратного преобразования сигнала в сообщение. Естественно, что кодирование целесообразно производить так, чтобы среднее время, затрачиваемое на передачу, было возможно меньше. При одинаковой длительности символов на входе К. это означает, что надо выбирать наиболее экономный код с алфавитом, совпадающим с входным алфавитом К.

При описанной процедуре «согласования» источника с К. возникает специфич. явление задержки (запаздывания), к-рое может пояснить следующий пример.

Пример 3. Пусть источник сообщений посылает через промежутки времени длиной $1/v$ (т. е. со скоростью v) независимые символы, принимающие значения x_1, x_2, x_3, x_4 с вероятностями, равными соответственно $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_8$. Пусть К. без шумов такой же, как в примере 1, и кодирование осуществляется мгновенно. Полученный сигнал или передаётся по К., если последний свободен, или ожидает (помещается в память) до тех пор, пока К. не освободится. Если теперь выбран, напр., код $x_1=00$, $x_2=01$, $x_3=10$, $x_4=11$ и $v\leqslant{}^1/_2\tau$ (то есть $1/v\geqslant 2\tau$), то за время между появлением двух последовательных значений x кодовое обозначение успевает передаться и К. освобождается. Таким образом, здесь между появлением к.-л. буквы сообщения и передачей её кодового обозначения по К. проходит промежуток времени 2τ. Иная картина наблюдается при $v>{}^1/_2\tau$; n-я буква сообщения появляется в момент $(n-1)/v$ и её кодовое обозначение будет передано по К. в момент $2n\tau$. Следовательно, промежуток времени между появлением n-й буквы сообщения и моментом её получения после декодирования переданного сигнала будет больше, чем $n(2\tau-1/v)$, что стремится к бесконечности при $n\to\infty$, то есть в этом случае передача будет вестись с неограниченным запаздыванием. Стало быть, для возможности передачи без неограниченного запаздывания при данном коде необходимо и достаточно выполнение неравенства $v\leqslant{}^1/_2\tau$. Выбором более удачного кода можно увеличить скорость передачи, сделав её сколь угодно близкой к пропускной способности К., но эту последнюю границу невозможно превзойти (разумеется, сохраняя требование ограниченности запаздывания). Сформулированное утверждение имеет совершенно общий характер и наз. основной теоремой о К. без шумов.

Специально в отношении примера 3 уместно добавить следующее. Для рассматриваемых сообщений двоичный код $x_1=0$, $x_2=10$, $x_3=110$, $x_4=111$ оптимален. Из-за различной длины кодовых обозначений время запаздывания для n-й буквы первоначального сообщения будет случайной величиной. При $v<{}^1/_\tau$ ($^1/_\tau$ — пропускная способность К.) и $n\to\infty$ его среднее значение приближается к нек-рому пределу $m(v)$, зависящему от v. С приближением v к критич. значению $1/\tau$ значение $m(v)$ растёт пропорционально $(\tau^{-1}-v)^{-1}$. Это опять-таки отражает общее положение: стремление сделать скорость передачи возможно ближе к максимальной сопровождается возрастанием времени запаздывания и необходимого объёма памяти кодирующего устройства.

Утверждение основной теоремы (с заменой безошибочной передачи на «почти безошибочную») справедливо и для К. с шумами. Этот факт, по существу основной для всей теории передачи информации, наз. *Шеннона теоремой*. Возможность уменьшения вероятности ошибочной передачи через К. с шумами достигается применением т. н. помехоустойчивых кодов.

Пример 4. Пусть входной алфавит К. состоит из двух символов 0 и 1 и действие шумов сводится к тому, что каждый из этих символов при передаче может с небольшой (напр., равной $^1/_{10}$) вероятностью p перейти в другой или с вероятностью $q=1-p$ остаться неискажённым. Применение помехоустойчивого кода сводится по сути дела к выбору нового алфавита на входе К. Его буквами являются n-членные цепочки символов 0 и 1, отличающиеся одна от другой достаточным числом D знаков. Так, при $n=5$ и $D=3$ новыми буквами могут быть 00000, 01110, 10101, 11011. Если вероятность более чем одной ошибки на группу из пяти знаков мала, то даже искажённые эти новые буквы почти не перепутываются. Напр., если получен сигнал 10001, то он почти наверняка возник из 10101. Оказывается, что при надлежащем подборе достаточно больших n и D такой способ значительно эффективнее простого повторения (т. е. использования алфавитов типа 000, 111). Однако возможное на этом пути улучшение процесса передачи неизбежно сопряжено с сильно возрастающей сложностью кодирующих и декодирующих устройств. Например, подсчитано, что если первоначально $p=10^{-2}$ и требуется уменьшить это значение до $p_1=10^{-4}$, то следует выбирать длину n кодовой цепочки не менее 25 (или 380) в зависимости от того, желают ли использовать пропускную способность К. на 53% (или на 80%).

● См. лит. при ст. *Информации теория*. *Ю. В. Прохоров.*

КАНТЕ́ЛЛИ УСЛО́ВИЯ применимости усиленного закона больших чисел — см. *Больших чисел усиленный закон*. Установлены Ф. Кантелли (1917).

КА́НТОРА АКСИО́МА, принцип вложенных отрезков,— одна из *непрерывности аксиом*: любая последовательность вложенных друг в друга отрезков, длины к-рых стремятся к нулю, имеет одну общую точку. Сформулирована Г. Кантором (1872). См. *Вложенные отрезки*.

КА́НТОРА АНТИНО́МИЯ — открытая Г. Кантором (1899) *антиномия*.

КА́НТОРА ТЕОРЕ́МА — установленная Г. Кантором (1878) теорема о мощности множества подмножеств; см. *Кардинальное число*.

КАНТОРО́ВИЧА ПРОСТРА́НСТВО, K-пространство,— рассмотренное Л. В. Канторовичем (1937) *упорядоченное векторное пространство*.

КАНТОРО́ВИЧА ПРОЦЕ́СС — итерационный метод уточнения значения корня нелинейного функционального (операторного) уравнения (обобщение метода Ньютона). Для уравнения $P(x)=0$, где P — нелинейный оператор, действующий из одного банахова пространства в другое, вычислительная формула метода имеет следующий вид:

$$x_{n+1}=x_n-[P'(x_n)]^{-1}P(x_n)$$

(здесь P' — производная Фреше). Иногда используется модифицированный процесс, определяемый формулой

$$\tilde{x}_{n+1}=\tilde{x}_n-[P'(x_0)]^{-1}P(\tilde{x}_n).$$

Пусть оператор P дважды непрерывно дифференцируем и выполняются условия:

1) существует линейный оператор $\Gamma_0=[P'(x_0)]^{-1}$,

2) $\|\Gamma_0 P(x_0)\|\leqslant\eta$,

3) $\|\Gamma_0 P''(x)\|\leqslant K$ при $\|x-x_0\|\leqslant r$,

4) $h=K\eta\leqslant\frac{1}{2}$,

5) $r\geqslant r_0=(1-\sqrt{1-2h})\,\eta/h$.

Тогда уравнение $P(x)=0$ имеет решение x^* такое, что

$$\|x^*-x_0\|\leqslant r_0.$$

К этому решению сходятся последовательности x_n и $\tilde{x}_n$, причём

$$\|x^*-x_n\|\leqslant (2h)^{2^n}\eta/(2^n h)$$

и в случае $h<1/2$

$$\|x^*-\tilde{x}_n\|\leqslant (1-\sqrt{1-2h})^{n+1}\eta/h.$$

К. п. всегда сходится к корню x^* уравнения $P(x)=0$, если только P достаточно гладкий, существует $[P'(x^*)]^{-1}$ и начальное приближение x_0 избрано достаточно близким к x^*.

К. п. предложен Л. В. Канторовичем (1948).

КА́НТОРОВО МНО́ЖЕСТВО — совершенное множество точек на прямой, не содержащее ни одного отрезка; построено Г. Кантором (1883). Конструируется следующим образом (рис.): на отрезке [0, 1] удаляется интервал $(1/3, 2/3)$,

составляющий его среднюю треть; далее из каждого оставшегося отрезка $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$ также удаляется интервал, составляющий его среднюю треть; этот процесс удаления интервалов продолжается неограниченно; множество точек отрезка [0, 1], оставшееся после удаления этих интервалов, и наз. к а н т о р о в ы м м н о ж е с т в о м. Удалённые интервалы наз. с м е ж н ы м и и н т е р в а л а м и. К. м. имеет мощность континуума. К. м. (на числовой прямой) можно определить арифметически как множество тех чисел, к-рые записываются с помощью троичных дробей вида $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, где каждая из цифр $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ равна 0 или 2.

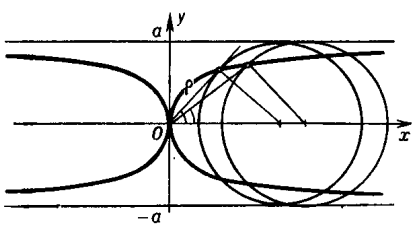
КА́ППА — плоская алгебраическая кривая 4-го порядка (рис.). Уравнение в прямоугольных координатах:

$$(x^2+y^2)\,y^2=a^2x^2,$$

в полярных координатах:

$$\rho=a\operatorname{ctg}\varphi.$$

К.— множество точек касания касательных, проведённых из начала координат к окружности радиуса a, центр к-рой перемещается по оси Ox. К. симметрична относительно осей Ox и Oy. В начале координат узловая точка с совпадающими касательными $x=0$, асимптоты $y=\pm a$. Кривая сходна по форме с греческой буквой $\varkappa$ (каппа), откуда название.



КАРАТЕОДО́РИ ТЕОРЕ́МА о к о н ф о р м н о м о т о б р а ж е н и и — см. *Конформное отображение*. Установлена К. Каратеодори (1912).

КАРДА́НО ФО́РМУЛА — формула для нахождения корней кубического уравнения

$$x^3+px+q=0$$

(к такому виду может быть приведено всякое кубическое уравнение). К. ф. имеет следующий вид:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Значения кубич. корней, стоящих в К. ф., следует брать такими, чтобы их произведение было равно $-p/3$; именно эти значения и нужно складывать, чтобы получить корень уравнения. Таким путём можно найти три корня уравнения (см. *Кубическое уравнение*).

К. ф. наз. по имени Дж. Кардано и впервые была опубликована им в 1545.

КАРДИНА́ЛЬНОЕ ЧИСЛО́ (от позднелат. cardinalis — главный), м о щ н о с т ь м н о ж е с т в а A,— такое свойство этого множества, которое присуще любому множеству B, равномощному A. При этом два множества A и B наз. р а в н о м о щ н ы м и, если существует взаимно однозначное соответствие $f: A\to B$ с областью определения A и множеством значений B. Г. Кантор определял К. ч. множества A как такое его свойство, к-рое остаётся после абстрагирования от качества элементов множества A и от их порядка. Чтобы подчеркнуть этот двойной акт абстрагирования, Г. Кантор для обозначения К. ч. множества A ввёл символ $\overline{A}$. Из других обозначений К. ч. множества A наиболее употребительны символы card A и $|A|$. Если A — конечное множество, содержащее n элементов, то card $A=n$. Если $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, то card $\mathbb{N}=\aleph_0$ (см. *Алефы*). Если $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел, то card $\mathbb{R}=\mathfrak{c}$ — мощность континуума. Множество 2^A всех подмножеств множества A не равномощно ни самому A, ни его подмножеству (т е о р е м а К а н т о р а). В частности, никакие два из множеств

$$A,\ 2^A,\ 2^{2^A},\ 2^{2^{2^A}},\ \ldots \qquad (*)$$

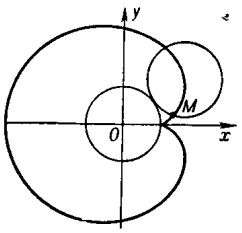
не равномощны. При $A=\mathbb{N}$ получается бесконечно много различных бесконечных К. ч. Другие К. ч. получаются, если взять объединение Q множеств, входящих в (*), и построить последовательность, аналогичную (*), положив $A=Q$. Этот процесс можно продолжать бесконечно. Шкала всех бесконечных К. ч. намного богаче шкалы конечных мощностей. Более того, их так много, что нельзя образовать множества, содержащего по крайней мере по одному К. ч.

КАРДИО́ИДА (от греч. καρδία — сердце и εἶδος — вид) — плоская алгебраическая кривая 4-го порядка. Уравнение в прямоугольных координатах:

$$(x^2+y^2-r^2)^2=4r^2\,[(x-r)^2+y^2],$$

в полярных координатах:

$$\rho=2r\,(1-\cos\varphi).$$



К. описывается точкой M окружности (рис.) радиуса r, катящейся по окружности с таким же радиусом (К. *эпициклоида* с модулем $m=1$). К. симметрична относительно оси Ox. Точка с координатами $(r, 0)$— точка возврата 1-го рода. Длина дуги от этой точки до точки M: $l=16r\sin^2\frac{\varphi}{4}$, длина всей кривой $16r$. Радиус кривизны: $R=\frac{8r}{3}\sin\frac{\varphi}{2}$. Площадь, ограниченная К.: $S=6\pi r^2$. К.— *конхоида* окружности, частный случай *Паскаля улитки* и *синусоидальной спирали*.

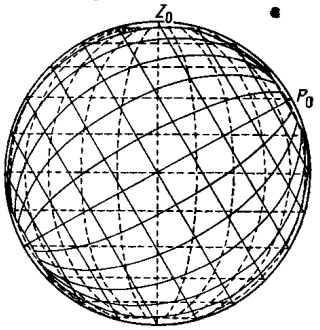
КАРТИ́ННАЯ ПЛО́СКОСТЬ — см. *Проекция*.

КАРТОГРАФИ́ЧЕСКАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — отображение всей поверхности земного эллипсоида или какой-либо её части на плоскость, получаемое в основном с целью построения карты.

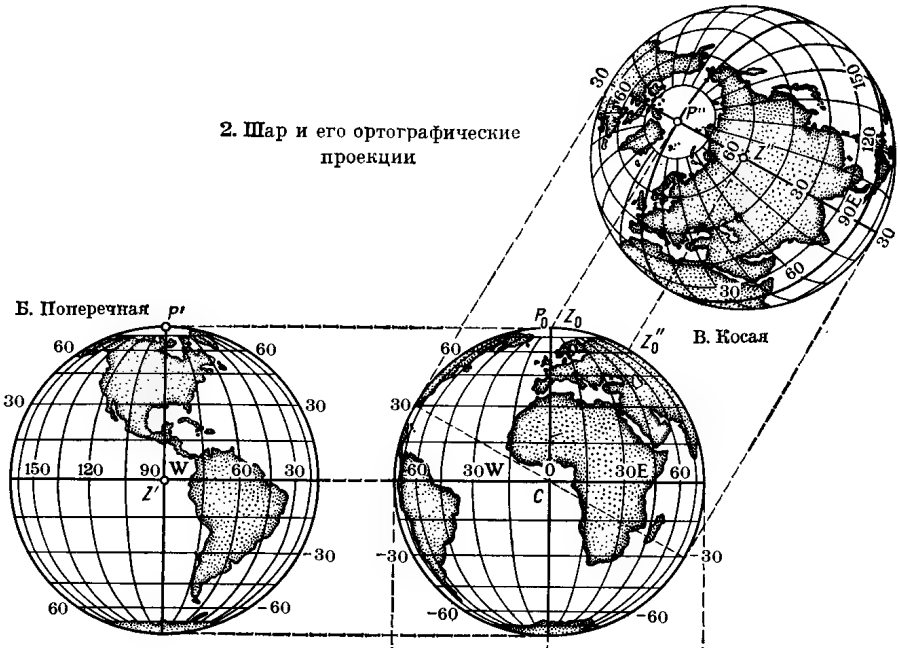
К. п. чертят в определённом масштабе. Уменьшая мысленно земной эллипсоид в M раз, получают его геометрич. модель — глобус, изображение к-рого в натуральную величину на плоскости даёт карту поверхности этого эллипсоида. Величина $1:M$ определяет г л а в н ы й, или о б щ и й, м а с ш т а б карты. Однако основной характеристикой К. п. в любой её точке является ч а с т н ы й м а с ш т а б μ. Это — величина, обратная отношению бесконечно малого отрезка dS на земном эллипсоиде к его изображению $d\sigma$ на плоскости: $1/\mu=dS/d\sigma$, причём μ зависит от положения точки на эллипсоиде и от направления выбранного отрезка. Отношение μ/M наз. о т н о с и т е л ь н ы м м а с ш т а б о м или у в е л и ч е н и е м д л и н ы, разность $(\mu/M-1)$ — и с к а ж е н и е м д л и н ы. Численное значение главного масштаба M учитывается только при вычислениях координат точек К. п. и при использовании карты, а при исследованиях К. п. полагают $M=1$.

КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

1. Сети сферических координатных линий

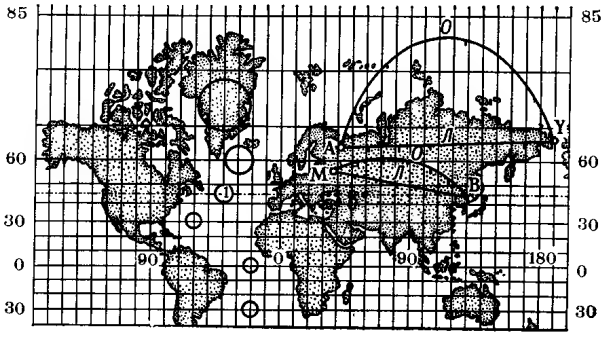


2. Шар и его ортографические проекции

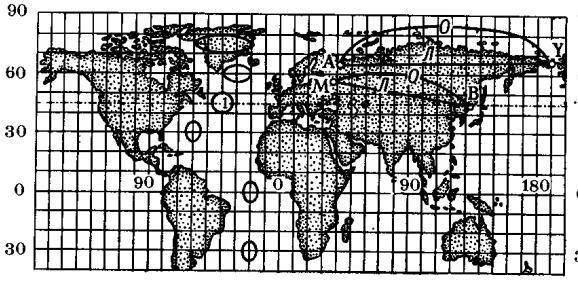


3. Цилиндрические проекции

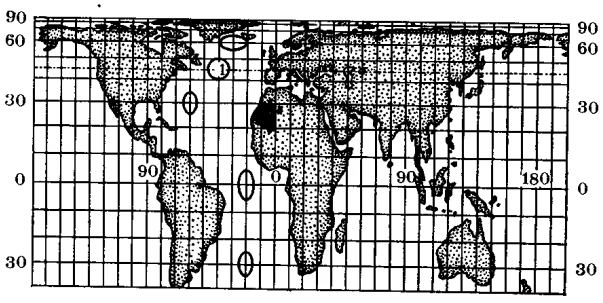
А. Равноугольная Меркатора



Б. Равнопромежуточная (прямоугольная)

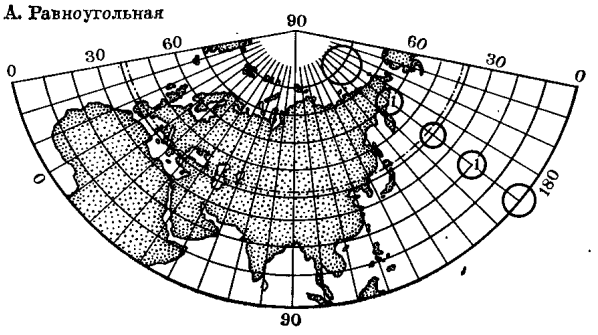


В. Равновеликая (изоцилиндрическая)

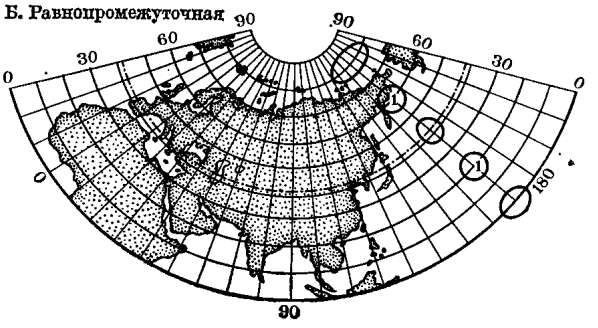


4. Конические проекции

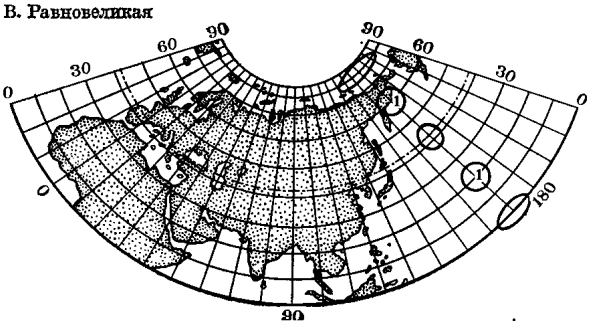
А. Равноугольная



Б. Равнопромежуточная

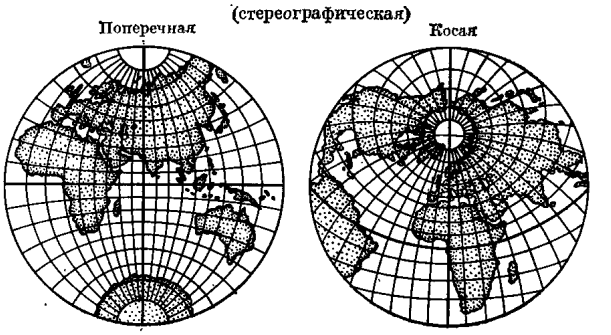


В. Равновеликая

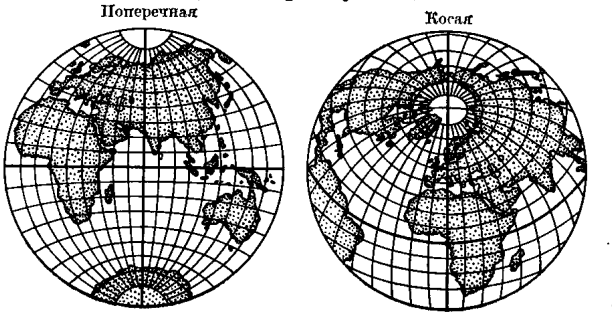


5. Азимутальные проекции

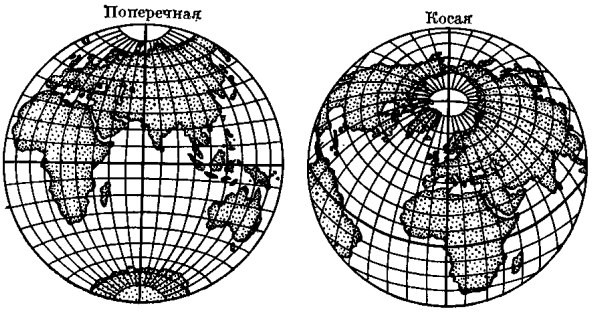
А. Равноугольная (стереографическая)



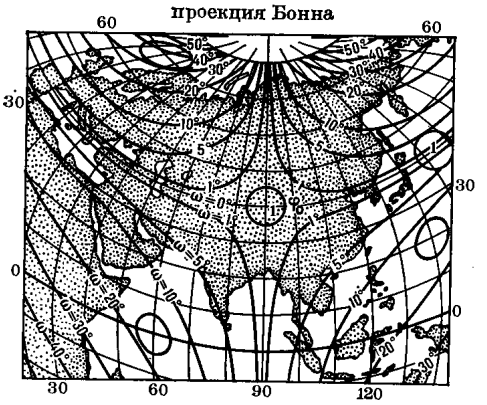
Б. Равнопромежуточная



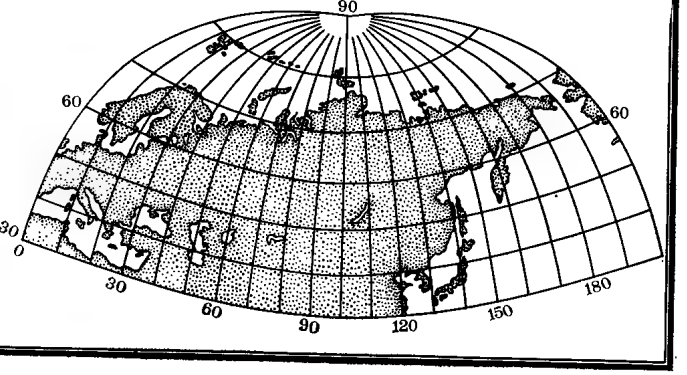
В. Равновеликая



6. Псевдоконическая равновеликая проекция Бонна

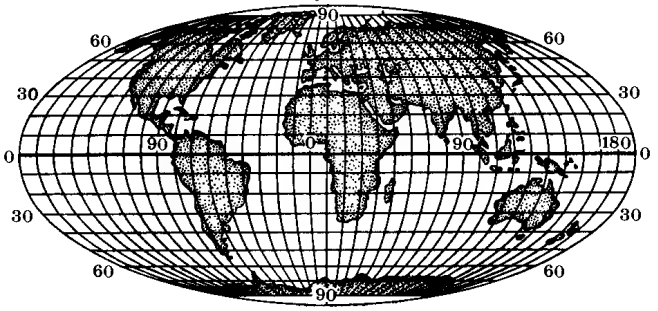


7. Косая перспективно-цилиндрическая проекция М.Д. Соловьёва



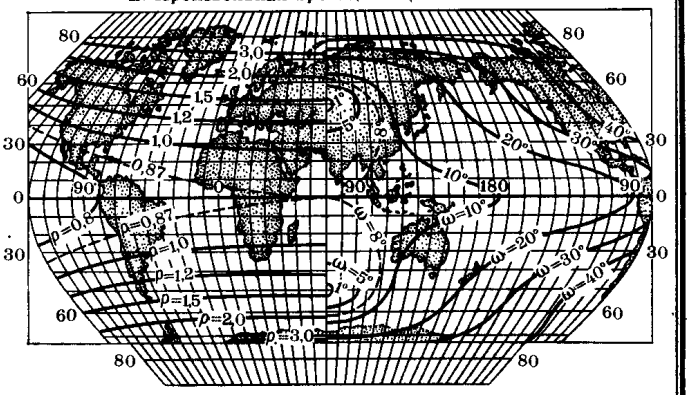
8. Псевдоцилиндрические проекции

А. Равновеликая проекция Мольвейде



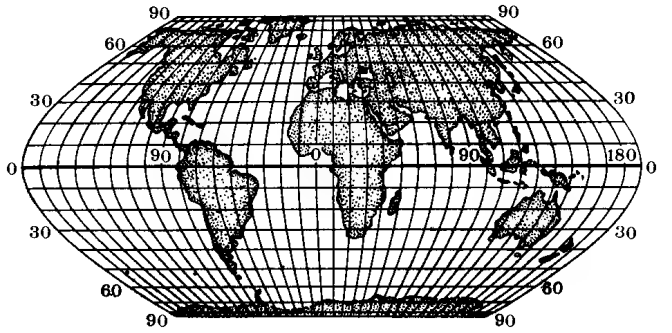
Изображения меридианов-эллипсы. Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 40°,7$

В. Произвольная проекция ЦНИИГАиК



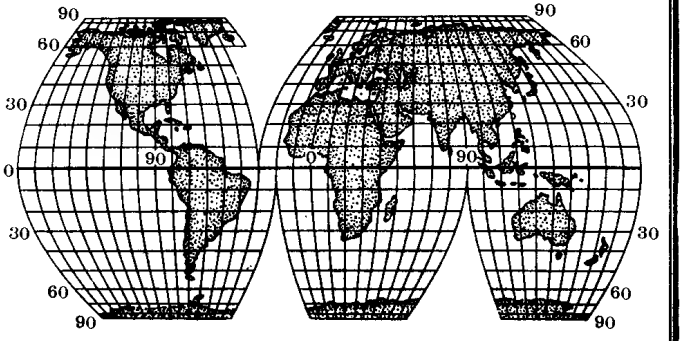
Длины сохраняются вдоль экватора по всем меридианам

Б. Равновеликая синусоидальная проекция В.В. Каврайского



Изображения меридианов-дуги синусоид. Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 46°,5$

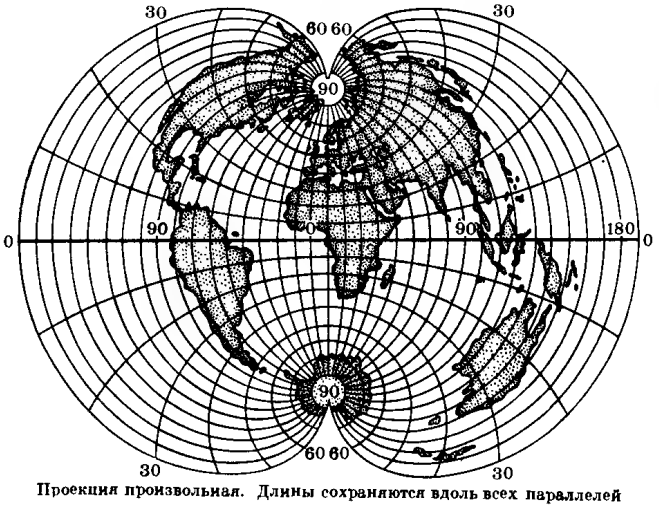
Г. Проекция БСАМ



Использован способ Гуда построения надрезанной проекции: допущены разрывы изображения на океанах с целью уменьшения искажений на континентах

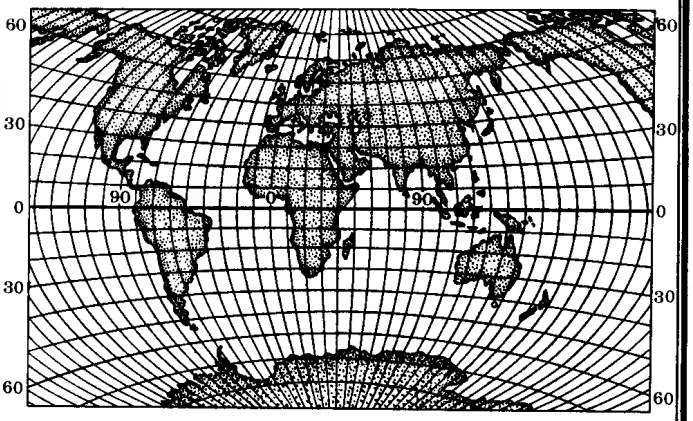
9. Поликонические проекции

А. Простая проекция



Проекция произвольная. Длины сохраняются вдоль всех параллелей и по среднему меридиану

Б. Произвольная проекция Г.А. Гинзбурга



Длины сохраняются вдоль параллелей с широтами $\varphi = \pm 45°$

В картографии часто ограничиваются рассмотрением отображений на плоскость сферы нек-рого радиуса R, отклонениями к-рой от земного эллипсоида можно пренебречь или к.-л. способом их учесть. Поэтому далее имеются в виду отображения на плоскость xOy сферы, отнесённой к географич. координатам φ (широта) и λ (долгота).

Уравнения К. п. имеют вид

$$x = f_1(\varphi, \lambda), \quad y = f_2(\varphi, \lambda), \qquad (*)$$

где f_1 и f_2 — функции, удовлетворяющие нек-рым общим условиям (К. п. может быть определена также уравнениями, в к-рых фигурируют не прямоугольные координаты плоскости x, y, а какие-либо иные). Изображения меридианов $\lambda=\text{const}$ и параллелей $\varphi=\text{const}$ в данной К. п. образуют картографическую сетку.

При картографировании областей, содержащих географич. полюсы, иногда применяют не географич. координаты, а другие, в к-рых полюсы оказываются обыкновенными точками координации. Напр., используют сферич. координаты, координатные линии к-рых (условная долгота на них $a=\text{const}$ и полярные расстояния $z=\text{const}$) аналогичны географич. меридианам и параллелям, но их полюс $Z_0(\varphi_0,\lambda_0)$ не совпадает с географич. полюсом P_0 (рис. 1). Всякая К. п., данная уравнениями (*), наз. нормальной или прямой ($\varphi_0=\pi/2$). Если та же самая проекция сферы вычисляется по формулам (*), в к-рых вместо φ, λ фигурирует z, a, то эта проекция наз. поперечной при $\varphi_0=0$ и косой, если $0<\varphi_0<\pi/2$. На рис. 2 показаны нормальная (А), поперечная (Б) и косая (В) ортографич. проекции шара (т. е. ортогональные проекции шара на плоскость).

Искажения в бесконечно малой области около к.-л. точки проекции подчиняются нек-рым общим законам. Во всякой точке карты, составленной в проекции, не являющейся равноугольной (см. ниже), существуют два таких взаимно перпендикулярных направления, к-рым на отображаемой поверхности соответствуют также взаимно перпендикулярные направления — т. н. главные направления отображения. Масштабы по этим направлениям имеют экстремальные значения $\mu_{max}=a$ и $\mu_{min}=b$. Если в какой-либо К. п. изображения меридианов и параллелей пересекаются под прямым углом, то их направления и есть главные для данной К. п. Искажения длин в данной точке К. п. наглядно представляет эллипс искажений, подобный и подобно расположенный изображению бесконечно малой окружности, описанной вокруг соответствующей точки отображаемой поверхности. Полудиаметры этого эллипса численно равны частным масштабам в данной точке в соответствующих направлениях, полуоси эллипса равны экстремальным масштабам, а направления их — главные.

В равноугольных (конформных) К. п. масштаб зависит только от положения точки и не зависит от направления. Эллипсы искажения — окружности. Примеры: проекция Меркатора, стереографич. проекция, равноугольная конич. проекция и др. (рис. 3А, 5А, 4А).

В равновеликих (эквивалентных) К. п. сохраняются площади; точнее, площади фигур на картах, составленных в таких проекциях, пропорциональны площадям соответствующих фигур в натуре, причём коэффициент пропорциональности — величина, обратная квадрату главного масштаба карты. Эллипсы искажений всюду имеют одинаковую площадь, различаясь формой и ориентировкой (напр., рис. 3В, 4В, 5В).

Произвольные К. п. (см., напр., рис. 7) не относятся ни к равноугольным, ни к равновеликим. Из них выделяют равнопромежуточные, в к-рых один из главных масштабов равен единице (рис. 3Б, 4Б, 5Б), и ортодромические, в к-рых большие круги сферы (ортодромы) изображаются прямыми.

При изображении сферы на плоскости свойства равноугольности, равнопромежуточности и ортодромичности несовместимы.

Для показа искажений в разных местах изображаемой области применяют: эллипс искажений (напр., рис. 3, 4); изоколы — линии равного значения искажений (на рис. 8В см. изоколы наибольшего искажения углов ω и изоколы масштаба площадей p); изображения в нек-рых местах карты нек-рых сферич. линий, обычно ортодромий «О» и изогональных траекторий меридианов — локсодромий «Л» (напр., рис. 3А, 3Б).

По виду картографич. сетки К. п. подразделяют на следующие группы.

Цилиндрические проекции — проекции, в к-рых меридианы изображаются равноотстоящими параллельными прямыми, а параллели — прямыми, перпендикулярными меридианам (рис. 3).

Конические проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются концентрич. окружностями, меридианы — ортогональными им прямыми, причём углы между последними пропорциональны соответствующим разностям долгот (рис. 4).

Азимутальные проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются концентрич. окружностями, меридианы — их радиусами, при этом углы между последними равны соответствующим разностям долгот (рис. 5).

Псевдоконические проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются концентрич. окружностями, средний меридиан — прямой линией, остальные меридианы — кривыми, симметричными относительно изображения среднего меридиана (напр., рис. 6).

Псевдоцилиндрические проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются параллельными прямыми, средний меридиан — прямой линией, перпендикулярной этим прямым, остальные меридианы — кривыми (рис. 8).

Поликонические проекции — проекции, в к-рых параллели изображаются окружностями с центрами, расположенными на одной прямой, изображающей средний меридиан, остальные меридианы — кривыми, также симметричными относительно этой прямой (рис. 9). При построении конкретных поликонич. проекций ставятся дополнительные условия.

Существуют и др. проекции, не относящиеся к указанным видам. Цилиндрические, конические и азимутальные проекции, наз. простейшими, часто относят к круговым проекциям в широком смысле слова, выделяя из них круговые проекции в узком смысле — проекции, в к-рых все меридианы и параллели изображаются окружностями.

Г. А. Мещеряков.

КАСА́НИЕ — понятие, означающее, что в некоторой точке две кривые (кривая и поверхность) имеют общую *касательную* прямую или две поверхности имеют общую *касательную плоскость*. Порядок К.— характеристика близости двух кривых (кривой и поверхности или двух поверхностей) в окрестности их общей точки. См. *Соприкосновение*.

КАСА́ТЕЛЬНАЯ к кривой линии — прямая, представляющая предельное положение секущей. Пусть M — точка кривой L (рис. 1). На L выбирается вторая точка M'

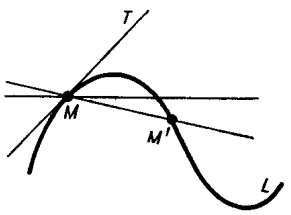


Рис. 1.

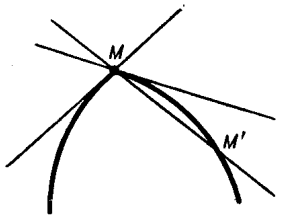


Рис. 2.

и проводится прямая MM'. Точка M считается неподвижной, а точка M' приближается к M по кривой L. Если при неограниченном приближении M' к M прямая MM' стремится к определённой кривой MT, то MT наз. касательной к кривой L в точке M. Не у всякой непрерыв-

ной кривой имеются К., поскольку прямая MM' может не стремиться к предельному положению или может стремиться к двум разным предельным положениям, когда M' стремится к M с разных сторон от M (рис. 2). Встречающиеся в элементарной геометрии кривые имеют вполне определённую К. во всех точках, кроме нек-рого числа «особых» точек. Если кривая на плоскости в прямоугольных координатах определяется уравнением $y=f(x)$ и $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то угловой коэффициент К. в точке M с абсциссой x_0 равен значению производной $f'(x_0)$ в точке x_0; уравнение К. в этой точке имеет вид

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

К а с а т е л ь н о й (прямой) к п о в е р х н о с т и S в точке M называют любую прямую, проходящую через точку M и лежащую в *касательной плоскости* к S в точке M.

КАСА́ТЕЛЬНАЯ ПЛО́СКОСТЬ к п о в е р х н о с т и S в т о ч к е M — плоскость, проходящая через точку M и характеризующаяся тем свойством, что расстояние от этой плоскости до переменной точки M' поверхности S при стремлении M' к M является бесконечно малым по сравнению с расстоянием MM'. Если поверхность S задана уравнением $z=f(x, y)$, то уравнение К. п. в точке (x_0, y_0, z_0), где $z_0=f(x_0, y_0)$, имеет вид

$$z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0)$$

в том и только в том случае, когда функция $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) полный дифференциал. В этом случае A и B суть значения частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точке (x_0, y_0).

КАСА́ТЕЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — преобразование кривых на плоскости (или поверхностей в пространстве), при котором касающиеся кривые (или поверхности) преобразуются в касающиеся кривые (или поверхности). См. *Прикосновения преобразование.*

КАСА́ТЕЛЬНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — см. *Дифференциальная геометрия, Риманова геометрия.*

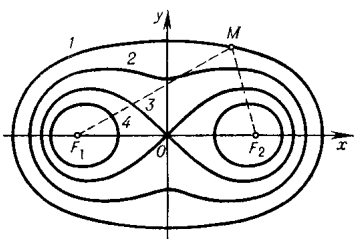
КАСА́ТЕЛЬНЫХ МЕ́ТОД — то же, что *Ньютона метод.*

КАСКА́Д (франц. cascade) — частный случай *динамической системы.*

КАССИ́НИ ОВА́Л — плоская алгебраическая кривая 4-го порядка. Уравнение в прямоугольных координатах:

$$(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=a^4-c^4.$$

К. о. — множество точек M (рис.), произведение расстояний каждой из к-рых от двух фиксированных точек $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$ является постоянной величиной a^2. Форма кривой, симметричной относительно осей Ox и Oy, зависит от соотношения параметров a и c. При $a\geqslant c\sqrt{2}$ — эллипсообразный овал (кривая *1* на рис.), при $c<a<c\sqrt{2}$ — овал «с талией» (кривая *2*), при $a=c$ — *Бернулли лемниската* (кривая *3*), при $a<c$ — два овала (кривая *4*).



К. о. впервые рассмотрены Дж. Кассини (17 в.), к-рый считал, что орбита Земли — овал (а не эллипс).

КАТЕГО́РИЯ (греч. κατηγορία) — совокупность однотипных математических структур (объектов) и отображений (морфизмов) между этими структурами, в которой выполняется ряд естественных дополнительных условий. В понятии К. точно выражена идея одновременного рассмотрения «коллектива» математич. объектов, пронизывающая современную математику.

По определению категория C состоит из класса Ob C, элементы к-рого наз. о б ъ е к т а м и к а т е г о р и и C (в дальнейшем они обозначаются большими латинскими буквами A, B, . . ., X, Y, . . .), и класса Mor C, элементы к-рого наз. м о р ф и з м а м и к а т е г о р и и C (в дальнейшем они обозначаются малыми латинскими или греческими буквами, а также специальными символами), удовлетворяющих следующим аксиомам.

С1. Каждой упорядоченной паре объектов A, B сопоставлено множество $H_C(A, B)$ из Mor C.

С2. Каждый морфизм f принадлежит однозначно определённому множеству $H_C(A, B)$ [объект A наз. началом f, а объект B — концом f; вместо $f\in H_C(A, B)$ пишут также $f: A\to B$ или $A\xrightarrow{f}B$].

С3. Для произвольных трёх объектов A, B, C и любых двух морфизмов $f: A\to B$ и $g: B\to C$ определено произведение $fg: A\to C$. Умножение морфизмов ассоциативно, т. е. для любых трёх морфизмов $f: A\to B$, $g: B\to C$ и $h: C\to D$ выполнено равенство

$$(fg)h=f(gh).$$

С4. В каждом множестве $H_C(A, A)$ задан такой специальный морфизм $1_A: A\to A$ (т о ж д е с т в е н н ы й, и л и е д и н и ч н ы й, м о р ф и з м объекта A), что для любых морфизмов $f: X\to A$ и $g: A\to Y$ выполнены равенства

$$f1_A=f,\ 1_Ag=g.$$

Входящее в определение К. понятие «класс» предполагается отличным от понятия «множество» и, следовательно, опирается на такую аксиоматику теории множеств, к-рая различает множества и классы. Понятие К. применяется к таким совокупностям объектов, как все множества или все группы, неосторожное обращение с к-рыми может привести к парадоксам типа парадокса Рассела. Во избежание парадоксов иногда предполагают, что Ob C и Mor C принадлежат нек-рому *универсальному множеству*. К., объекты к-рой образуют множество, наз. м а л о й. В малой К. морфизмы также образуют множество.

П р и м е р ы к а т е г о р и й.

1. Категория множеств St (обозначается также Ens). Объектами этой К. являются всевозможные множества, а морфизмами объекта A в объект B — любые отображения $f: A\to B$. Умножение морфизмов совпадает с последовательным выполнением (суперпозицией) отображений. Роль единичных морфизмов играют тождественные отображения множеств в себя.

2. Категория топологич. пространств Top. Объектами этой К. являются произвольные топологич. пространства, а морфизмами пространства A в пространство B — любые непрерывные отображения из A в B. Умножение морфизмов и единичные морфизмы определяются так же, как и в St.

3. Категория групп Gr. Объектами этой К. являются произвольные группы, а морфизмами группы A в группу B — любые гомоморфизмы из A в B. Умножение морфизмов и единичные морфизмы снова определяются, как в St.

По аналогии с предыдущими примерами определяются К. векторных пространств над нек-рым телом или модулей над нек-рым кольцом, К. абелевых групп, колец или любых классов универсальных алгебр, К. дифференцируемых многообразий и т. п. Новые примеры К. можно получить, ограничиваясь только конечными множествами или группами, конечномерными векторными пространствами и т. д. Ещё один класс естественных примеров дают К. топологич. групп, топологич. векторных пространств и т. п. Менее привычный пример доставляют К. бинарных отношений.

4. Категория бинарных отношений над категорией множеств Rel (St). Объектами этой К. снова являются произвольные множества, а морфизмами из A в B служат бинарные отношения $R\subseteq A\times B$ (см. *Соответствие*), т. е. подмножества декартова произведения $A\times B$. Если $R\subseteq A\times B$, $S\subseteq B\times C$, то произведение RS определяется следующим образом:

$$RS=\{(a, c)\mid\exists b\ (a, b)\in R,\ (b, c)\in S\}.$$

Роль единичных морфизмов играют отношения тождества, т. е. «диагонали» $\Delta_A=\{(a, a)\mid a\in A\}$. Аналогично можно построить К. бинарных отношений над К. групп, колец и др. алгебраич. объектов, однако для К. топологич. пространств неизвестна «разумная» К. бинарных отношений.

Всякую полугруппу S с единицей 1 (т. н. моноид) можно рассматривать как К. с одним объектом, морфизмами к-рой служат элементы полугруппы S, а умножение морфизмов совпадает с умножением, определённым в S. Обратно, всякая категория с одним объектом однозначно определяет моноид, состоящий из морфизмов категории.

Всякое предупорядоченное множество A, т. е. множество, снабжённое рефлексивным и транзитивным отношением $<$, можно считать множеством объектов К. $C(A)$, в к-рой множества $H_{C(A)}(a, b)$ состоят из пар (a, b), если $a<b$, или пусты. Произведение пар (a, b) и (b, c) равно по определению (a, c); роль единичных морфизмов играют пары (a, a).

Запас примеров К. значительно расширяется при помощи различных конструкций и прежде всего при помощи т. н. категорий диаграмм, или категорий *функторов*. Все указанные выше К. допускают изоморфные вложения в К. St. Категории, обладающие таким свойством, наз. к о н к р е т н ы м и. Примером неконкретной К. может служить К., объекты к-рой — топологич. пространства, а морфизмы — классы гомотопных отображений.

С каждой категорией C связывается д у а л ь н а я, или д в о й с т в е н н а я, к а т е г о р и я C^*. При этом каждый объект A из C помечается знаком * и объявляется объектом К. C^*, каждый морфизм $f\colon A \to B$ помечается знаком * и объявляется морфизмом $f^*\colon B^* \to A^*$, произведение морфизмов $g^*\colon C^* \to B^*$ и $f^*\colon B^* \to A^*$ определяется равенством $g^*f^*=(fg)^*$. К. $(C^*)^*$ можно отождествить с К. C. С каждым высказыванием, сформулированным на языке теории К., связывается дуальное высказывание, к-рое получается интерпретацией исходного высказывания в дуальной К. Другой способ получения дуального высказывания состоит в сохранении логич. структуры исходного высказывания и обращения порядка встречающихся в нём множителей («обращения стрелок»). П р и н ц и п д в о й с т в е н н о с т и д л я т е о р и и к а т е г о р и й утверждает, что в теории К. нек-рое высказывание истинно тогда и только тогда, когда в этой теории истинно дуальное высказывание. Принцип двойственности позволяет выявить формальные связи между понятиями и результатами, к-рые, будучи получены в конкретных К., кажутся не зависящими друг от друга.

Примеры дуальных понятий. Морфизм $m\colon A \to B$ категории C наз. м о н о м о р ф и з м о м, если из равенства $fm=gm$ всегда следует равенство $f=g$; другими словами, m — мономорфизм, если на m можно сокращать справа. Дуальное понятие (э п и м о р ф и з м) — морфизм $n\colon B \to A$ такой, что из равенства $nf=ng$ всегда следует равенство $f=g$ (т. е. возможно сокращение слева). В К. St мономорфизмы — это в точности инъективные отображения, а эпиморфизмы — сюръективные отображения. Морфизм $f\colon A \to B$ наз. б и м о р ф и з м о м, если он одновременно мономорфизм и эпиморфизм. Понятие биморфизма самодвойственно: оно совпадает со своим дуальным понятием. В К. St биморфизмы — это в точности *биективные отображения*.

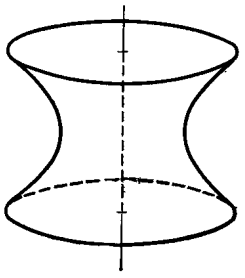
Начиная с сер. 50-х гг. 20 в. теория К. играет в математике роль, параллельную и дополнительную к роли теории множеств. За последние десятилетия была выявлена фундаментальная роль понятий К. и функторов в алгебраич. топологии, алгебраич. геометрии, гомологич. алгебре, современной алгебре, функциональном анализе, математич. логике и в других областях математики.

Современные исследования в области теории К. концентрируются вокруг изучения К. с дополнительной структурой (моноидальные и замкнутые К., топосы, упорядоченные К. с инволюцией). В частности, топосы являются моделями теории множеств, что позволяет развить категорный подход к основаниям математики, использующий как классическую, так и неклассическую логику. В каждом топосе с объектом натуральных чисел можно канонич. образом построить модель интуиционистской теории типов и развить теорию вычислимости.

● Б у к у р И., Д е л я н у А., Введение в теорию категорий и функторов, пер. с англ., М., 1972; Ц а л е н к о М. Ш., Ш у л ь г е й ф е р Е. Г., Основы теории категорий, М., 1974; Г о л д б л а т т Р., Топосы: категорный анализ логики, пер. с англ., М., 1983.

М. Ш. Цаленко.

КАТЕНО́ИД (от лат. catena — цепь и греч. εἶδος — вид) — поверхность, образуемая вращением цепной линии $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{b}$ вокруг оси Ox. Принадлежит к числу минимальных поверхностей. Форму К. (рис.) принимает мыльная плёнка, «натянутая» на два проволочных круга, плоскости к-рых перпендикулярны линии, соединяющей их центры.



Поверхность открыл Ж. Мёнье (1776), назв. «К.» дал Ж. Плато (1831).

КА́ТЕТ (от греч. κάθετος — отвес, перпендикуляр) — сторона прямоугольного треугольника, прилегающая к прямому углу. Из трёх сторон прямоугольного треугольника две являются К.

КАЧЕ́НИЯ КРИВА́Я — то же, что *рулетта*.

КВАДРА́НТ (от лат. quadrans — четвёртая часть) — 1) К. п л о с к о с т и — любая из четырёх областей (углов), на которые плоскость делится двумя взаимно перпендикулярными прямыми, принятыми в качестве осей координат.

2) К. к р у г а — сектор с центральным углом в 90°, $^1/_4$ часть круга.

КВАДРА́Т (лат. quadratus — четырёхугольный) — 1) К.— равносторонний прямоугольник; К. является правильным многоугольником.

2) К. ч и с л а a — произведение $a\cdot a=a^2$; название связано с тем, что именно таким произведением выражается площадь квадрата, сторона к-рого равна a.

3) К. с к а л я р н ы й — см. *Скалярное произведение*.

КВАДРАТИ́ЧНАЯ ОШИ́БКА, к в а д р а т и ч н а я п о г р е ш н о с т ь,— см. *Квадратичное отклонение*.

КВАДРАТИ́ЧНАЯ ПОГРЕ́ШНОСТЬ — см. *Квадратичное отклонение*.

КВАДРАТИ́ЧНАЯ ФО́РМА — однородный многочлен степени 2 от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то есть многочлен вида

$$q=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2+\sum_{i<j} b_{ij}x_ix_j.$$

Коэффициенты b_{ij} обычно предполагаются действительными числами или элементами к.-л. поля. Если характеристика этого поля $\neq 2$ (в дальнейшем это всюду предполагается), то К. ф. записывается в следующем виде:

$$q=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \qquad (*)$$

где $a_{ij}=a_{ji}$. Симметрическая матрица $A=\|a_{ij}\|$ наз. м а т р и ц е й К. ф.

К. ф. можно рассматривать как функцию от n переменных или от вектора в n-мерном векторном пространстве. Получаемые при этом функции тесно связаны с билинейными формами, а именно: любая К. ф. единственным образом представима в виде $q(x)=b(x, x)$, где b — симметрич. билинейная форма. Переход к другой системе координат (другому базису) приводит к замене переменных $x_1, \ldots, x_n$ в К. ф. новыми переменными $y_1, \ldots, y_n$, линейно выражающимися через $x_1, \ldots, x_n$. Матрица К. ф. (*) в новой системе координат имеет вид $\tilde{A}=C^{\top}AC$, где $C=\|c_{ij}\|$ — матрица перехода от старого базиса к новому, т. е. $x_i=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}y_j$. Переход к новому базису используется, напр., для упрощения уравнения линии (поверхности) второго порядка.

Для любой К. ф. существует базис, в к-ром её матрица диагональна, т. е.

$$q=a_{11}x_1^2+\ldots+a_{nn}x_n^2.$$

Такой вид К. ф. наз. каноническим. Базис, в к-ром К. ф. принимает канонич. вид, не единствен, но число ненулевых a_{ii} в канонич. виде не зависит от выбора базиса и наз. рангом формы. Над полем комплексных чисел К. ф. можно привести к канонич. виду, в к-ром все ненулевые $a_{ii}=1$, а над полем действительных чисел — к виду, в к-ром все ненулевые $a_{ii}=\pm 1$. Такой вид К. ф. наз. нормальным. В действительном случае число коэффициентов, равных $+1$ и -1, не зависит от выбора базиса (закон инерции, или теорема Сильвестра). Разность между числом положительных и числом отрицательных членов в нормальном виде К. ф. наз. сигнатурой К. ф. Если все ненулевые a_{ii} в нормальном виде К. ф. равны $+1$ (-1), то К. ф. наз. положительно определённой (отрицательно определённой), если же имеются как положительные, так и отрицательные a_{ii}, то форма наз. неопределённой.

Для К. ф. с действительными коэффициентами, заданных в евклидовом пространстве, справедлива теорема о приведении к главным осям: от любого ортонормированного базиса можно перейти к другому ортонормированному базису такому, что К. ф. в нём имеет канонич. вид. Замена координат осуществляется при этом ортогональной матрицей. В применении к линиям и поверхностям второго порядка это даёт их приведение к главным осям.

Теория К. ф. впервые изложена А. Лежандром (1798). Общая теория К. ф. создана К. Гауссом (1801); ему же принадлежит термин «К. ф.».

КВАДРАТИ́ЧНАЯ ФО́РМА поверхности — см. *Дифференциальная геометрия, Поверхностей теория.*

КВАДРАТИ́ЧНАЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Квадратный трёхчлен.*

КВАДРАТИ́ЧНОЕ ОТКЛОНЕ́НИЕ, квадратичное уклонение, величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от a — квадратный корень из выражения

$$\frac{(x_1-a)^2+(x_2-a)^2+\ldots+(x_n-a)^2}{n}.$$

Наименьшее значение К. о. имеет при $a=\overline{x}$, где $\overline{x}$ — среднее арифметическое величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Употребляют также более общее понятие взвешенного К. о., определяемого как квадратный корень из выражения

$$\frac{p_1(x_1-a)^2+p_2(x_2-a)^2+\ldots+p_n(x_n-a)^2}{p_1+p_2+\ldots+p_n};$$

числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называют при этом весами, соответствующими величинам $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Взвешенное К. о. достигает наименьшего значения при a, равном взвешенному среднему:

$$\frac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}.$$

Такое представление о К. о. соответствует использованию К. о. в теории ошибок.

В теории вероятностей квадратичное отклонение σ_X случайной величины X (от её математич. ожидания) определяют как квадратный корень из дисперсии $\sqrt{DX}$ и называют также стандартным отклонением величины X. Для любой случайной величины X с математич. ожиданием m_X и К. о. σ_X вероятность отклонений X от m_X, больших по абсолютной величине $k\sigma_X$, $k>0$, не превосходит $1/k^2$ (см. *Чебышева неравенство*). В случае нормального распределения указанная вероятность при $k=3$ равна 0,0027. В практич. задачах, приводящих к нормальному распределению, чаще всего пренебрегают возможностью отклонений от среднего, больших $3\sigma_X$ (правило трёх сигм).

В математич. статистике К. о. употребляют как меру качества статистич. оценок и называют в этом случае квадратичной погрешностью (ошибкой).

КВАДРАТИ́ЧНОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — см. *Нелинейное программирование.*

КВАДРАТИ́ЧНОЕ СРЕ́ДНЕЕ n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — число s, равное корню квадратному из среднего арифметического их квадратов:

$$s=\sqrt{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2):n}.$$

КВАДРАТИ́ЧНОЕ УКЛОНЕ́НИЕ — то же, что *квадратичное отклонение.*

КВАДРАТИ́ЧНЫЙ ВЫ́ЧЕТ по модулю m — число a, для которого *сравнение* $x^2\equiv a \pmod m$ имеет решение: при некотором целом x число x^2-a делится на m; если это сравнение не имеет решений, то a называется квадратичным невычетом. Напр., если $m=11$, то число $a=3$ будет К. в., т. к. сравнение $x^2\equiv 3 \pmod{11}$ имеет решения $x=5$, $x=6$, а число $a=2$ будет невычетом, т. к. не существует чисел x, удовлетворяющих сравнению $x^2\equiv 2 \pmod{11}$. К. в. являются частным случаем *вычетов* степени n для $n=2$.

Если m равно простому нечётному числу p, то среди чисел 1, 2, . . ., $p-1$ имеется $\frac{p-1}{2}$ К. в. и $\frac{p-1}{2}$ квадратичных невычетов. Для изучения К. в. по простому модулю p вводится *Лежандра символ* $\left(\frac{a}{p}\right)$, определяемый так: если a взаимно просто с p, то полагают $\left(\frac{a}{p}\right)=1$, когда a — К. в., и $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$, когда a — квадратичный невычет. Основной теоремой в этом круге вопросов является т. н. закон взаимности К. в.: если p и q — простые нечётные числа, то

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Эту закономерность открыл Л. Эйлер (ок. 1772), современная формулировка дана А. Лежандром (1798), полное доказательство впервые дал К. Гаусс (1801). Удобным обобщением символа Лежандра является *Якоби символ.* Закон взаимности К. в. получил многочисленные обобщения в теории алгебраич. чисел.

КВАДРА́ТНАЯ МА́ТРИЦА — см. *Матрица.*

КВАДРА́ТНОГО КО́РНЯ МЕ́ТОД — метод решения системы линейных алгебраических уравнений $Ax=b$ с эрмитовой положительно определённой матрицей A.

Он состоит в факторизации матрицы A в виде

$$A=S^*S \qquad (*)$$

($A=S^{\top}S$ в вещественном случае), где $S=\|s_{ij}\|$ — правая треугольная матрица с положительными диагональными элементами, и последующем решении двух систем $S^*y=b$ и $Sx=y$ с треугольными матрицами. Элементы матрицы S вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$s_{11}=\sqrt{a_{11}},\quad s_{1j}=a_{1j}/s_{11},$$

$$s_{ii}=\left(a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}\left|s_{ki}\right|^2\right)^{1/2},$$

$$s_{ij}=\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}\bar{s}_{ki}s_{kj}\right)s_{ii},$$

$$i>1,\ j>i.$$

Известны схемы К. к. м. для эрмитовых не положительно определённых матриц, однако они не столь эффективны для реализации на ЭВМ.

Факторизация (*) может быть использована и для вычисления определителя:

$$\det A=\prod_{i=1}^{n}s_{ii}^2.$$

КВАДРА́ТНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — алгебраическое уравнение 2-й степени. Общий вид К. у.:

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0.$$

В поле комплексных чисел К. у. имеет два корня, выражающиеся в радикалах через коэффициенты этого уравнения:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (*)$$

Если дискриминант К. у. $D=b^2-4ac$ положителен, то оба корня К. у. действительны и различны, при $D<0$ корни — комплексные (комплексно-сопряжённые) числа, если же $D=0$, то уравнение имеет кратный корень $x_1=x_2=-b/2a$.

Для приведённого К. у.

$$x^2+px+q=0$$

формула (*) принимает вид

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Корни и коэффициенты К. у. связаны соотношениями $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$ (формулы Виета).

Решение задач, по существу сводящихся к К. у., было известно ещё математикам древности. В трактате «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы» Мухаммеда аль-Хорезми (825) рассмотрены и решены (в геометрич. форме) 6 видов К. у., содержащих в обеих частях только члены с положительными коэффициентами, причём рассматривались только положительные корни. Затем в работах европейских математиков в 13—16 вв. даются отдельные методы для решения различных видов К. у. Слияние этих методов в общее правило произвёл М. Штифель (1544), рассматривая и отрицательные корни. Близкое к современному решение К. у. принято у Р. Бомбелли (1572) и С. Стевина (1585) с учётом случая мнимых корней. Термин «К. у.» ввёл Х. Вольф (1710).

КВАДРА́ТНЫЕ ЧИ́СЛА — см. *Фигурные числа*.

КВАДРА́ТНЫЙ ТРЁХЧЛЕ́Н — многочлен 2-й степени, то есть выражение

$$ax^2+bx+c, \qquad (*)$$

где $a\neq0$. К. т. (*) над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел можно разложить на линейные множители

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0.$$

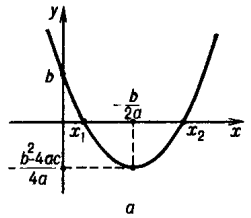
Числа x_1, x_2 наз. также корнями К. т. (*), они же — нули квадратичной функции (к. ф.)

$$y=f(x)=ax^2+bx+c.$$

К. т. можно также представить в виде

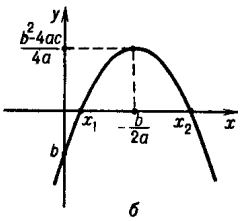
$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Это представление используется при построении графика квадратичной функции действительного переменного, для нахождения наибольшего (при $a<0$) или наименьшего (при $a<0$) значения этой функции. Графиком (рис. 1, 2)



а

Рис. 1.



б

Рис. 2.

к. ф. $y=ax^2+bx+c$ является парабола, вершина к-рой находится в точке $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$. Прямая $x=-\frac{b}{2a}$ является осью симметрии параболы. Ветви параболы при $a>0$ направлены вверх, а при $a<0$ — вниз. В точке $x=-\frac{b}{2a}$ при $a<0$ достигается максимум, а при $a>0$ — минимум: $y=-\frac{b^2-4ac}{4a}$. Парабола пересекает ось ординат в точке $(0, b)$. Если К. т. имеет действительные корни $x_1\neq x_2$, то парабола пересекает ось абсцисс в точках $(x_1,0)$ и $(x_2, 0)$, при $x_1=x_2$ парабола касается оси абсцисс в точке $(x_1, 0)$.

Производная к. ф. находится по формуле

$$(ax^2+bx+c)'=2ax+b.$$

Квадратичная функция w комплексного переменного $z=x+iy$. Для к. ф.

$$w=az^2+bz+c$$

с комплексными коэффициентами a, b, c сохраняются все формулы, справедливые для к. ф. действительного переменного с действительными коэффициентами. В частности, имеет место формула

$$az^2+bz+c=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Поэтому любая к. ф. является суперпозицией к. ф. z^2 и линейных функций. К. ф.

$$w=z^2$$

и обратная к ней функция

$$z=\sqrt{w}$$

широко используются в практике конформных отображений.

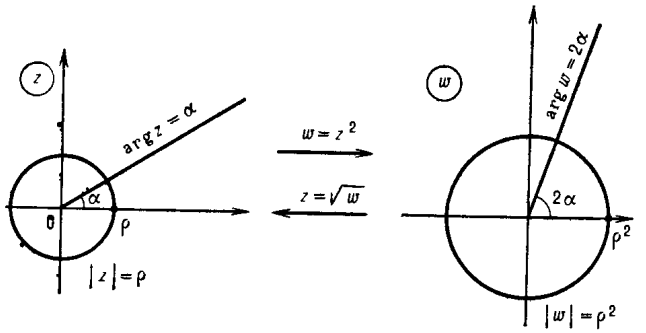


Рис. 3.

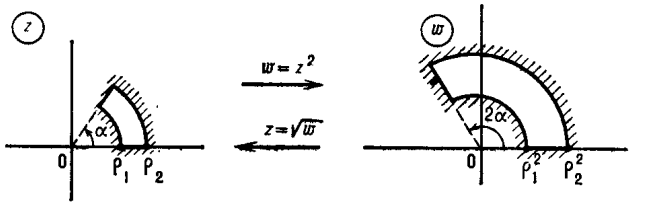


Рис. 4.

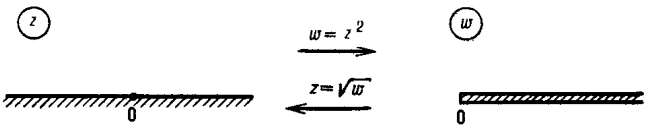


Рис. 5.

К. ф. $w=z^2$ переводит луч $\arg z=\alpha$ взаимно однозначно в луч $\arg w=2\alpha$, окружность $|z|=\rho$ — в окружность $|w|=\rho^2$, проходимую дважды (рис. 3).

К. ф. $w=z^2$ конформно отображает сектор $\rho_1<|z|<\rho_2$, $0<\arg z<\alpha$, где $0\leqslant\rho_1<\rho_2\leqslant+\infty$, $0<\alpha\leqslant\pi$, на сектор $\rho_1^2<|w|<\rho_2^2$, $0<\arg w<2\alpha$ (рис. 4).

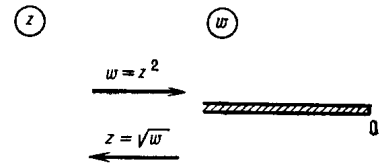


Рис. 6.

В частности, к. ф. $w=z^2$ конформно отображает полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на всю плоскость w с разрезом по лучу $[0,+\infty)$ (рис. 5), а полуплоскость $\operatorname{Re} z>0$ на всю плоскость w с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$ (рис. 6).

КВАДРАТРИ́СА (позднелат. quatratrix) — плоская кривая, с помощью которой может быть осуществлена квадратура круга. К. являются *Динострата квадратриса*, *кохлеоида*, а также Квадратриса Чирнхауза (описана в 1686):

$$y=a\sin\frac{\pi x}{2a}$$

и кривая Озанама (описана в 1691):

$$x=2a\sin^2\frac{y}{2a},$$

где a — параметр.

КВАДРАТУ́РА (лат. quadratura — придание квадратной формы) — 1) К.— построение квадрата, равновеликого данной фигуре.

2) К.— вычисление площади или интеграла (см. *Интегральное исчисление*).

КВАДРАТУ́РА КРУ́ГА — задача о построении квадрата, равновеликого данному кругу. Задачу о К. к. первоначально пытались решить с помощью циркуля и линейки. Математики древности знали ряд случаев, когда с помощью этих инструментов удавалось преобразовать криволинейную фигуру в равновеликую ей прямоугольную (см., напр., *Гиппократовы луночки*). В 19 в. была строго установлена неразрешимость К. к. с помощью циркуля и линейки. Ещё в 1775 Парижская академия наук, а затем и другие академии стали отказываться от рассмотрения работ, посвящённых К. к.

Если радиус данного круга равен r, то сторона равновеликого этому кругу квадрата равна $x=r\sqrt{\pi}$. Таким образом, надо построить отрезок $r\sqrt{\pi}$, т. е. r графически умножить на $\sqrt{\pi}$. Для нек-рых иррациональных множителей такое умножение выполнимо. Так, $r\sqrt{2}$ — диагональ квадрата со стороной r; $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ — сторона правильного 12-угольника, вписанного в круг радиуса r. К. к. тесно связана с арифметич. природой числа π. В кон. 18 в. И. Ламбертом и А. Лежандром была установлена иррациональность числа π. В 1882 Ф. Линдеман доказал трансцендентность числа π (а следовательно, и $\sqrt{\pi}$), т. е. π не удовлетворяет никакому алгебраич. уравнению с целыми коэффициентами. Теорема Линдемана даёт научное обоснование невозможности решения этой задачи циркулем и линейкой. Задача о К. к. становится разрешимой, если расширить средства построения. Так, уже греческим геометрам было известно, что К. к. можно осуществить, используя нек-рые трансцендентные кривые; первое такое решение было выполнено Диностратом (4 в. до н. э.). См. *Динострата квадратриса*.

КВАДРАТУ́РНАЯ СУ́ММА — см. *Квадратурная формула*.

КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — приближённое равенство вида

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx\cong\sum_{j=1}^N C_j\,f(x_j), \qquad (1)$$

в левой части которого стоит интеграл, подлежащий вычислению. Подинтегральная функция записана в виде произведения двух функций. Первая из них $p(x)$ считается фиксированной для данной К. ф. и наз. весовой функцией, функция $f(x)$ принадлежит достаточно широкому классу функций, напр. непрерывных и таких, что интеграл в (1) существует. Сумма в правой части (1) наз. квадратурной суммой, числа x_j наз. узлами К. ф., а числа C_j — коэффициентами К. ф. Узлы $x_1, \ldots, x_N$ — попарно различные точки (обычно принадлежащие $[a, b]$, хотя это требование не является обязательным). Нахождение приближённого значения интеграла с помощью формулы (1) сводится к вычислению квадратурной суммы, при этом значения узлов и коэффициентов берутся из таблиц.

Пусть $L_j(x)$ — фундаментальный многочлен интерполирования, построенный по узлам $x_1, \ldots, x_N$. Он удовлетворяет условиям $L_j(x_k)=\delta_{jk}$, $k=1, 2, \ldots, N$ (δ_{jk} — символ Кронекера). К. ф. (1) наз. интерполяционной, если её коэффициенты имеют значения

$$C_j=\int_a^b p(x)\,L_j(x)\,dx,\ j=1, 2, \ldots, N.$$

Целое число $d\geqslant 0$ наз. алгебраической степенью точности К. ф. (1), если эта формула точна, когда $f(x)$ — любой многочлен степени не выше d, и не точна для $f(x)=x^{d+1}$. Чтобы К. ф. была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы её алгебраич. степень точности d удовлетворяла неравенству $d\geqslant N-1$ (см. также *Интерполирование*). Примером интерполяционной К. ф. является *прямоугольников формула* с одним узлом

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong(b-a)\,f(\alpha),\ \alpha\in[a, b]. \qquad (2)$$

Две К. ф. с весом 1

$$\int_c^d f(t)\,dt\cong\sum_{j=1}^m C_j f(t_j),\ \int_\gamma^\delta \varphi(\tau)\,d\tau\cong\sum_{j=1}^m \gamma_j\varphi(\tau_j)$$

наз. подобными, если $t_j-c=s(\tau_j-\gamma)$, $C_j=s\gamma_j$, $j=1, 2, \ldots, m$, где $s=(d-c)/(\delta-\gamma)$. Если $[a, b]$ конечен, $h=(b-a)/n$ и $x_i=a+ih$, $i=0, 1, \ldots, n$ (n — натуральное), то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx. \qquad (3)$$

Замена интегралов в правой части этого равенства квадратурными суммами К. ф., подобных одной и той же К. ф., приводит к составной К. ф. для вычисления интеграла из левой части (3); напр., замена интегралов в правой части (3) квадратурными суммами К. ф., подобных формуле (2), приводит к составной К. ф.

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong h\sum_{i=1}^n f(\alpha+(i-1)h),\ \alpha\in[a,\ a+h],$$

к-рая также наз. формулой прямоугольников.

Имеются К. ф., у к-рых в квадратурную сумму входят не только значения $f(x)$, но и значения нек-рых её производных. Такие формулы получают, заменяя приближённо $f(x)$ её интерполяционным многочленом Эрмита (см. *Эрмита интерполяционная формула*).

Для погрешности К. ф. (1)

$$R(f):=\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx-\sum_{j=1}^N C_j\,f(x_j)$$

имеются представления, в к-рые входит производная $f^{(n)}(x)$. Эти представления мало пригодны для практич. оценки $R(f)$, т. к. требуется оценка производной, поэтому чаще используются более грубые критерии оценки, напр. основанные на *Ричардсона экстраполяции*. См. также *Лобатто квадратурная формула*, *Мелера квадратурная формула*, *Наивысшей алгебраической степени точности квадратурная формула*, *Ньютона — Котеса квадратурная формула*, *Радо квадратурная формула*, *Симпсона формула*, *Трапеций формула*, *Чебышева квадратурная формула*.

● Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, М., 1966.

И. П. Мысовских.

КВАДРАТУ́РНЫХ СУММ МЕ́ТОД — метод аппроксимации интегрального оператора при построении численных методов решения интегральных уравнений. Простейший вариант К. с. м. состоит в замене интегрального оператора, напр., вида

$$\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds,$$

в интегральном уравнении

$$\lambda\varphi(x)+\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)\,ds=f(s)$$

на оператор с конечномерной областью значений по правилу

$$\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi(s)ds\approx\sum_{i=1}^N a_i^{(N)}\,K(x,\ s_i)\,\varphi(s_i). \qquad (1)$$

Интегральное уравнение в свою очередь аппроксимируется линейным алгебраич. уравнением

$$\lambda\tilde{\varphi}(s_j)+\sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)} K(s_j, s_i)\,\tilde{\varphi}(s_i)=f(s_i),\quad j=1, \ldots, N.$$

В правой части приближённого равенства (1) стоит квадратурная формула для интеграла по s. Возможны разнообразные обобщения аппроксимации (1) вида

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds \approx \sum_{i=1}^{N} a_i^{(N)}(x)\,\varphi(s_i), \qquad (2)$$

где $a_i^{(N)}(x)$ — нек-рые функции, строящиеся по ядру $K(x, s)$. К. с. м., обобщённый в виде (2), может применяться при аппроксимации интегральных операторов с особенностями в ядре и даже сингулярных интегральных операторов.

КВАДРИКА — то же, что *поверхность второго порядка*, см. также *Алгебраическая геометрия*.

КВАДРИЛЛИО́Н (франц. quadrillion) — число, изображаемое единицей с 15 нулями, то есть число 10^{15}. В нек-рых странах К. называют число 10^{24}.

КВАДРИ́РУЕМАЯ КРИВА́Я — см. *Площадь*.

КВАДРИ́РУЕМАЯ О́БЛАСТЬ — область, имеющая определённую площадь. Отличительным свойством К. о. D является возможность заключить её «между» двумя многоугольниками (т. е. областями, ограниченными ломаными) так, чтобы один из них (P — на рис. 1) содержался внутри данной К. о., другой (Q — на рис. 1), напротив, содержал её внутри, а разность их площадей могла бы быть произвольно малой. В этом случае существует только одно число, заключённое между площадями всех «охватываемых» и «охватывающих» многоугольников; его и называют площадью К. о. D.

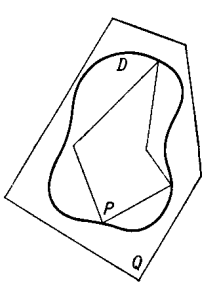


Рис. 1.

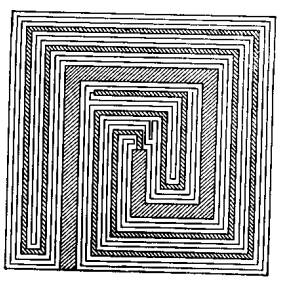


Рис. 2.

Свойства квадратируемых областей. Если К. о. D содержится в К. о. D_1, то площадь D не превосходит площади D_1; область D, состоящая из двух непересекающихся К. о. D_1 и D_2, квадрируема, и её площадь равна сумме площадей областей D_1 и D_2; общая часть двух К. о. D_1 и D_2 снова является К. о.

Для того чтобы область D была квадрируема, необходимо и достаточно, чтобы её граница имела площадь, равную нулю; существуют области, не удовлетворяющие этому условию и, следовательно, неквадрируемые.

Идея построения примера неквадрируемой области такова. Пусть дан квадратный «остров» со стороной, равной 1 м; от берега в глубь острова роют «канал» и притом так, чтобы канал сам себя не пересекал и к концу первого дня работы площадь канала была бы равна $^1/_4$ м^2, а каждая точка острова отстояла от прорытого канала не более чем на $^1/_4$ м, к концу второго дня работы площадь канала была бы равна $^1/_4$ м^2+$^1/_8$ м^2, а каждая точка острова отстояла от прорытого канала не более чем на $^1/_8$ м и т. д. до бесконечности. Тогда весь канал будет представлять собой неквадрируемую область. На рис. 2 представлен вид канала к концу третьего дня работы.

КВАЗИГРУ́ППА (от лат. quasi — как будто, как бы и *группа*) — множество с одной бинарной алгебраической операцией (называемой обычно умножением), в котором каждое из уравнений (относительно этой операции) $ax=b$ и $xa=b$ имеет единственное решение для любых элементов a, b этого множества. К.— одно из обобщений понятия группы; особенно близки группам К. с единицей — *лупы*, определение к-рых получается из аксиом групп отбрасыванием требования ассоциативности. К. можно рассматривать и как *универсальную алгебру* с тремя бинарными операциями (дополнительно левое и правое деление).

Гомоморфный образ К., вообще говоря, не К., а *группоид* с делением. Гомоморфизмам К. на К. соответствуют конгруэнции специального типа (т. н. нормальные конгруэнции). Значительно большую роль, чем гомоморфизмы, в теории и классификации К. играют изотопии. Изотопия — отношение эквивалентности для бинарных операций на фиксированном множестве, определяемое с помощью трёх подстановок этого множества. Оказывается, что всякий группоид, изотопный К.,— сам К., а всякая К. изотопна нек-рой лупе. Для групп понятие изотопии совпадает с понятием изоморфизма.

Таблица умножения конечной К. (её таблица Кэли) в комбинаторике известна под назв. *латинский квадрат*. Одна из задач комбинаторной теории К.— отыскание систем взаимно ортогональных К. на заданном множестве — важна для построения конечных проективных плоскостей.

● Белоусов В. Д., Основы теории квазигрупп и луп, М., 1967.

КВАЗИКОНФО́РМНОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — отображение евклидова пространства в себя, при котором бесконечно малые шары переходят в невырождающиеся эллипсоиды. Точнее, сохраняющее ориентацию отображение f области G в область $G'(G, G'\subset\mathbb{R}^n)$ квазиконформно, если конечна величина коэффициента искажения в точке a

$$Q(f)=\sup_{x\in G} Q(f, x),$$

где

$$Q(f, a)=\lim_{r\to 0}\frac{\sup\limits_{|x-a|<r}|f(x)-f(a)|}{\inf\limits_{|x-a|<r}|f(x)-f(a)|}$$

(вследствие чего К. о. наз. также отображениями с ограниченным искажением).

Если f дифференцируемо в точке $a\in G$, то линейное отображение $f'(a)$ преобразует шар в эллипсоид, отношение наибольшей полуоси к-рого к наименьшей равно $Q(f, a)<\infty$. *Конформное отображение* характеризуется условием $Q(f)\equiv 1$, так что К. о. является естественным его обобщением.

КВАЗИЛИНЕАРИЗА́ЦИЯ — совокупность приёмов численного решения нелинейных задач путём сведения их к последовательности линейных задач. В основе аппарата К. лежат метод Ньютона и его обобщение на функциональные пространства, теория дифференциальных неравенств и метод динамич. программирования. Наиболее простым примером, иллюстрирующим приёмы К., является использование метода Ньютона — Рафсона для отыскания корня r скалярной монотонно убывающей строго выпуклой функции $f(x)$. В этом случае на каждом шаге итеративного процесса исходная нелинейная функция $f(x)$ аппроксимируется линейной $\varphi(x)$, отыскивается корень $\varphi(x)$, к-рый служит следующим приближением, так что

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n),\quad n=0, 1, \ldots.$$

Построенная последовательность обладает свойством монотонности ($x_0<x_1<x_2<\ldots<r$) и квадратичной сходимости:

$$|x_{n+1}-r|\leqslant k|x_n-r|^2.$$

Применение К. для решения уравнений Риккати:

$$v'-v^2-p(t)v+q(t)=0,\ v(0)=c$$

(предполагается, что решение существует на отрезке $[0, t_0]$) выглядит следующим образом. Исходное уравнение заменяется эквивалентным:

$$v'=\min_u[u^2-2uv+p(t)v-q(t)],$$

где минимум берётся по функциям $u(t)$, заданным на $[0, t]$. Данное уравнение обладает рядом свойств, прису-

щих линейным уравнениям, и для его решения используется линейное дифференциальное уравнение

$$w' = u^2 - 2uw - p(t)\,w - q(t),\ w(0) = c,$$

где $u(t)$ — нек-рая фиксированная функция. Опираясь на свойство $v(t) \leqslant w(t)$ [причём равенство имеет место при $u(t) = v(t)$], можно построить систему последовательных приближений

$$v_1 \geqslant v_2 \geqslant \ldots \geqslant v_n \geqslant v_{n+1} \geqslant \ldots,$$

удовлетворяющих линейным уравнениям

$$v'_{n+1} = v_n^2 - 2v_n v_{n+1} - p(t)\,v_{n+1} - q(t),\ v_{n+1}(0) = c.$$

То же самое рекуррентное соотношение может быть получено путём применения метода Ньютона — Канторовича к исходному нелинейному уравнению.

Использование схемы К. при решении краевой задачи для нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$u'' = f(u',\ u,\ t),\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2,$$
$$g_1(u(t_1),\ u'(t_2)) = 0,\ g_2(u(t_2),\ u'(t_2)) = 0,$$

приводит к следующей последовательности функций $\{u_n(t)\}$, удовлетворяющих линейным уравнениям:

$$u''_{n+1} = f(u'_n,\ u_n,\ t) + f_{u'}(u'_n,\ u_n,\ t)(u'_{n+1} - u'_n) + f_n(u'_n,\ u_n,\ t)(u_{n+1} - u_n),$$

с линеаризованными краевыми условиями

$$g_i(u_n(t_i),\ u'_n(t_i)) + g_{iu}(u_n(t_i),\ u'_n(t_i))(u_{n+1}(t_i) - u_n(t_i)) + g_{iu'}(u_n(t),\ u'_n(t_i))(u'_{n+1}(t_i) - u'_n(t_i)) = 0.$$

Существование, единственность и квадратичная сходимость последовательности следуют из соответствующей выпуклости функций f, g_1, g_2 при достаточно малом интервале $[t_1, t_2]$.

Метод К. находит применение при решении двухточечных и многоточечных краевых задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, краевых задач для эллиптич. и параболич. уравнений с частотными производными, вариационных задач, дифференциально-разностных и функционально-дифференциальных уравнений и т. д. Как и всякая итеративная схема, метод К. удобен для реализации на ЭВМ, допускает различные модификации, позволяющие ускорить сходимость для более узких классов задач. Существуют разнообразные примеры его использования как эвристич. способа решения ряда физич., технич. и экономич. задач.

● Беллман Р., Калаба Р., Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, пер. с англ., М., 1968.

Ф. И. Ерешко.

КВАЗИПОРЯДОК, предпорядок,— рефлексивное и транзитивное бинарное отношение; см. также *Порядка отношение.*

КВАЗИПРОЕКТИВНОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ — см. *Алгебраическая геометрия.*

КВАЗИРЕШЕНИЕ — обобщённое решение некорректной задачи, которое (при достаточно общих условиях), в отличие от истинного решения, удовлетворяет условиям корректности по Адамару. Пусть X, Y — метрич. пространства. $A : X \to Y$, M — множество из X. Квазирешением уравнения

$$Ax = y$$

на множестве M при заданном y из Y наз. элемент $\bar{x}$ из M, минимизирующий уклонение $\rho(Ax, y)$ при x из M. Если уравнение имеет на M истинное решение x_0, то x_0 будет также и К.

Удобно представить зависимость К. от y в виде суперпозиции

$$\bar{x} = A^{-1}Py,$$

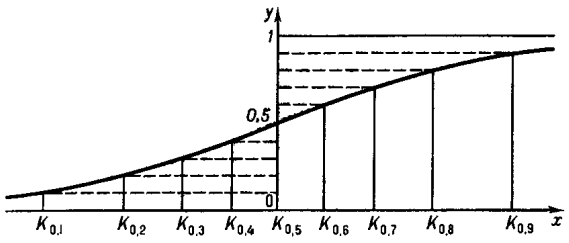
где A^{-1} — обращение (вообще многозначное) отображения A, P — оператор метрич. проектирования в пространстве Y на множество $N = AM$. Напр., если множество N чебышевское, а отображение A^{-1} однозначно и непрерывно на N, то задача нахождения К. — корректна.

КВАНТИЛЬ (от лат. quantum — сколько) — одна из числовых характеристик распределения вероятностей. Если функция распределения $F(x)$ случайной величины X непрерывна и строго монотонна, то для любого p, $0 < p < 1$, квантиль порядка p распределения случайной величины X определяется как корень K_p уравнения $F(K_p) = p$ или, иначе, как значение (при данном p) функции $F^{-1}(p)$, обратной к $F(x)$. Из определения следует, что при $p < p'$ вероятность $\mathsf{P}\{K_p < X < K_{p'}\}$ равна $p' - p$. Квантиль $K_{1/2}$ есть медиана X; квантили $K_{1/4}$ и $K_{3/4}$ наз. квартилями соответственно нижней и верхней; квантили $K_{0,1}$, $K_{0,2}$, . . ., $K_{0,9}$ наз. децилями. Знание К. для некоторого множества значений p даёт представление о расположении и рассеянии значений случайной величины и, в частности, о виде функции распределения. Напр., для нормального распределения с параметрами (0,1) представление о графике функции распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy$$

дают децили (рис.): $K_{0,1} = -1{,}28$; $K_{0,2} = 0{,}84$; $K_{0,3} = -0{,}52$; $K_{0,4} = -0{,}25$; $K_{0,5} = 0$; $K_{0,6} = 0{,}25$; $K_{0,7} = 0{,}52$; $K_{0,8} = 0{,}84$; $K_{0,9} = 1{,}28$. Квартили этого нормального распределения равны $K_{1/4} = -0{,}67$, $K_{3/4} = 0{,}67$.

Для применения в математич. статистике составлены таблицы К. нек-рых важных распределений.



КВАНТОР (от лат. quantum — сколько) — общее название логических операций, которые по предикату $P(x)$ строят высказывание, дающее количественную характеристику области истинности предиката $P(x)$. Наиболее употребительны К. всеобщности $\forall x$ («для всех x») и К. существования $\exists x$ («для нек-рых x»).

Высказывание $\forall x P(x)$ означает, что область истинности предиката $P(x)$ совпадает с областью значений переменной x. Высказывание $\exists x P(x)$ означает, что область истинности предиката $P(x)$ непуста. Если интересуются поведением предиката $P(x)$ не на всей области значений переменной x, а лишь на её части, выделяемой предикатом $R(x)$, то часто употребляют т. н. ограниченные кванторы $(\exists x)_{R(x)}$ и $(\forall x)_{R(x)}$, при этом высказывание $(\exists x)_{R(x)} P(x)$ означает то же, что и $\exists x(R(x) \& P(x))$, а $(\forall x)_{R(x)} P(x)$ — то же, что $\forall x((Rx) \supset P(x))$, где & — знак конъюнкции, $\supset$ — знак импликации.

Из других К. можно указать К. единственности, обозначаемый $\exists! x$ («для одного и только одного x»). Высказывание $\exists! x P(x)$ означает, что в области значений переменной x имеется единственный объект, удовлетворяющий предикату $P(x)$. К. единственности выражается через другие логич. операции и отношение равенства. Так, высказывание $\exists!\, x P(x)$ эквивалентно высказыванию $\exists x (P(x) \& \forall y (P(y) \supset x = y))$.

Термин «К.» ввёл Ч. Пирс (1885).

КВАРТИКА (от лат. quartus — четвёртый) — гиперповерхность степени 4; см. *Алгебраическая геометрия.*

КВАРТИЛЬ — частный случай *квантили.*

КВАТЕРНИОН (от лат. quaterni — по четыре) — один из примеров *гиперкомплексных чисел.* К. образуют 4-мерную ассоциативную (но не коммутативную) алгебру над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Причём это — единственная ас-

сочетативная некоммутативная алгебра над $\mathbb{R}$ без делителей нуля.

Произвольный К. X может быть записан как линейная комбинация

$$X = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k,\ x_l \in \mathbb{R},$$

элементов базиса $1, i, j, k$; причём 1 — единица алгебры К., а умножение для остальных элементов базиса задаётся таблицей:

$$ii = -1,\ ij = k,\ ik = -j,$$
$$ji = -k,\ jj = -1,\ jk = i,$$
$$ki = j,\ kj = -i,\ kk = -1.$$

Часто в записи К. единица 1 опускается, т. е. пишут

$$X = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k.$$

В К. различают скалярную часть x_0 и векторную — $V = x_1 i + x_2 j + x_3 k$, так что

$$X = x_0 + V.$$

Если $x_0 = 0$, то К. V наз. в е к т о р о м; он может отождествляться с обычным 3-мерным вектором. Произведение двух таких К. V_1 и V_2 выражается через скалярное (V_1, V_2) и векторное $[V_1, V_2]$ произведения векторов V_1 и V_2 следующим образом:

$$V_1 V_2 = -(V_1, V_2) + [V_1, V_2],$$

что показывает тесную связь К. с векторным исчислением (последнее и возникло из теории К.).

Всякому К. $X = x_0 + V$ можно сопоставить с о п р я ж ё н н ы й к в а т е р н и о н $\overline{X} = x_0 - V$; при этом

$$X\overline{X} = \overline{X}X = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Это действительное число наз. н о р м о й к в а т е р н и о н а X и обозначается $N(X)$. Норма К. удовлетворяет соотношению $N(XY) = N(X)N(Y)$. У каждого К. X есть единственный обратный К. X^{-1} (т. е. такой, что $XX^{-1} = X^{-1}X = 1$), он равен $\overline{X}/N(X)$. Это даёт возможность решать уравнения вида $XA = B$ и $AY = B$: $X = BA^{-1}$, $Y = A^{-1}B$; таким образом К. образуют алгебру с делением.

К. возникли при попытках построить n-мерный аналог (при $n > 2$) поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. В 1843 У. Гамильтоном была предложена такая система чисел — алгебра К., содержащая поле $\mathbb{C}$, 4-мерная над $\mathbb{R}$ и обладающая всеми свойствами поля, кроме коммутативности умножения (т. е. являющаяся телом). Вскоре были найдены применения К. к электродинамике и механике. Напр., произвольное вращение 3-мерного пространства вокруг начала координат может быть задано при помощи нек-рого К. P с нормой 1 (вращение, соответствующее P, переводит вектор X в вектор PXP^{-1}), а произвольное вращение 4-мерного пространства определяется парой К. P и Q с нормой 1 (соответствующее вращение переводит вектор X в вектор PXQ).

В сер. 19 в. К. воспринимались как обобщение понятия числа, призванное играть в науке столь же значительную роль, как и комплексные числа. Со временем, однако, стало ясно, что роль К. ни в какой мере не может быть сравнима с ролью комплексных чисел, имеющих многочисленные и разнообразные приложения.

КВИНТИЛЛИО́Н (франц. quintillion) — число, изображаемое единицей с 18 нулями, т. е. число 10^{18}. В нек-рых странах К. называют число 10^{30}.

КЕ́ЛДЫША ТЕОРЕ́МА о п р и б л и ж е н и и н е п р е р ы в н ы х ф у н к ц и й м н о г о ч л е н а м и: пусть функция $f(z)$ комплексного переменного z голоморфна в области G и непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$; тогда для того чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовал многочлен $P(z)$ такой, что

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon,\ z \in \overline{G},$$

необходимо и достаточно, чтобы дополнение $C\overline{G}$ состояло из одной единственной области G^*, содержащей бесконечно удалённую точку. К. т. является одним из основных результатов теории равномерных приближений функций многочленами в комплексной области.

Установлена М. В. Келдышем (1945).

КЕ́ЛЬВИНА ФУ́НКЦИИ, ф у н к ц и и Т о м с о н а,— модифицированные *цилиндрические функции*. Предложены У. Томсоном (лордом Кельвином) в 1890.

КЁНИГА ТЕОРЕ́МА — теорема в *комбинаторном анализе*, установленная Д. Кёнигом (1931).

КЁНИГСБЕРГСКИЕ МОСТЫ — см. *Граф, Эйлера задача* о кёнигсбергских мостах.

КИБЕРНЕ́ТИКА [греч. κυβερνητική (τέχνη) — искусство управления, от κυβερνάω — правлю рулём] — наука об управлении, связи и переработке *информации*. Первым, кто употребил этот термин для управления в общем смысле, был, по-видимому, Платон (4 в. до н. э.). А. Ампер (1834) предложил называть К. науку об управлении человеческим обществом. Н. Винер (1948) назвал К. науку об управлении и связи в живом организме и машине. На дальнейшее становление К. огромное влияние оказали электронные вычислительные машины (ЭВМ). К нач. 70-х гг. 20 в. К. окончательно оформилась как наука физико-математич. профиля с собственным предметом исследования — т. н. кибернетич. системами. К и б е р н е т и ч е с к и е с и с т е м ы представляют собой абстракцию под определённым (информационным) углом зрения сложных систем, изучаемых широким спектром естественных, технических и социальных наук (под своими специфич. углами зрения). Выявляя общие аспекты в системах столь различной природы, К. вместе с тем даёт общий и притом принципиально новый метод их изучения. Это — т. н. м е т о д м а ш и н н о г о э к с п е р и м е н т а, промежуточный между классическим дедуктивным и классическим экспериментальным методами. Благодаря этому К., подобно математике, можно использовать в качестве аппарата исследования в других науках. Причём спектр проблем, доступных исследованию кибернетич. методами, по сравнению с классическими (аналитическими) математич. методами значительно шире и охватывает практически все науки. Кибернетич. система в простейшем случае может сводиться к одному элементу. Элемент A кибернетич. системы, рассматриваемый в абстрактном плане, представляет собой набор (x, y, z, f, g) пяти объектов. Через $x = x(t)$ обозначается т. н. в х о д н о й с и г н а л элемента, т. е. конечное множество функций времени t: $\langle x_1(t), \ldots, x_k(t)\rangle$. Во многих конкретных кибернетич. системах время рассматривается как параметр, принимающий лишь дискретные множества значений (обычно целочисленные значения). Однако можно, не нарушая общности, рассматривать и обычное «непрерывное» время (ниже рассматривается именно этот случай). Области значений функций $x_i(t)$ в одном и том же элементе могут быть различными множествами действительных чисел. Чаще всего в качестве областей значений фигурируют обычные непрерывные числовые интервалы, множество целых чисел и различные его конечные подмножества. Сами функции $x_i(t)$ обычно предполагаются кусочно непрерывными. Буквой y обозначается в ы х о д н о й с и г н а л $y = y(t)$ элемента, представляющий собой конечное множество функций $y = \langle y_1(t), \ldots, y_m(t)\rangle$ той же самой природы, что и входные функции $x_i(t)$. Через $z = z(t)$ обозначено в н у т р е н н е е с о с т о я н и е элемента A, также характеризующееся конечным множеством функций $z = \langle z_1(t), \ldots, z_n(t)\rangle$ той же природы. Через f и g обозначены функционалы, задающие текущие значения внутреннего состояния $z(t)$ и выходного сигнала $y(t)$:

$$z(t) = f(t, x(t), D_t z(t));\quad y(t) = g(t, x(t), D_t z(t)). \qquad (1)$$

Здесь через $D_t z(t)$ обозначено сужение векторной функции $z(t) = \langle z_1(t), \ldots, z_n(t)\rangle$ на область, задаваемую системой полуоткрытых интервалов $[\tau_1, t), \ldots, [\tau_n, t)$, где $\tau_i = \tau_i(t)$ — заданные кусочно непрерывные функции от t, удовлетворяющие условию $\tau_i < t$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Приведённое определение элемента кибернетич. системы предполагает, что время t может принимать любые действительные значения. На практике в большинстве

случаев эти значения ограничиваются лишь неотрицательными числами. При этом определение элемента должно быть дополнено заданием его начального состояния $z_0 = z(0)$, а также, возможно, заданием начального выходного сигнала $y_0 = y(0)$. Зависимости (1) рассматриваются в таком случае лишь при положительных значениях t. Другое обстоятельство связано с тем, что наряду с детерминированными элементами в кибернетич. системах часто приходится иметь дело со стохастич. элементами. Для этого обычно оказывается достаточным в правые части соотношений (1) добавить в качестве аргументов функционалов случайную функцию $\omega(t)$, принимающую значения на непрерывном или дискретном множестве действительных чисел.

Возможны и другие варианты обобщений этого определения, в частности введение бесконечномерных векторных функций для входных и выходных сигналов, а также для внутреннего состояния элемента. Однако следует иметь в виду, что, в отличие от математики, для К. характерен конструктивный подход к изучаемым объектам. Это означает возможность фактич. вычисления (с той или иной степенью точности) значений всех рассматриваемых функций. Поэтому на практике рано или поздно при изучении кибернетич. систем, а следовательно и их элементов, приходится переходить к конечным аппроксимациям.

Многоэлементные кибернетические системы строятся из набора (обычно конечного) M элементов путём отождествления выходных сигналов одних элементов с входными сигналами других. Формально такие отождествления задаются системой равенств

$$x_i^p(t) = y_j^r(t) \quad (p \in M,\ r \in M),\ i \in I_p,\ j \in J_p, \qquad (2)$$

где через $x_i^p(t)$ обозначена i-я компонента входного сигнала p-го элемента, а через $y_j^r(t)$ — j-я компонента выходного сигнала r-го элемента. При подобном отождествлении (соединении элементов в систему) часть компонент входных сигналов тех или иных элементов может оказаться свободной, т. е. не отождествлённой ни с какими выходными компонентами. Все такие компоненты объединяются в векторный входной сигнал $x(t)$ построенной системы S. Оставшиеся свободными компоненты выходных сигналов образуют выходной сигнал $y(t)$ построенной системы. В отличие от входного сигнала в выходной сигнал $y(t)$ могут быть включены (по определению строящейся системы) также любые несвободные компоненты выходных сигналов, составляющих систему S элементов. Начальным состоянием системы, по определению, считается вектор, составленный из компонент начальных состояний всех её элементов (упорядоченных тем или иным образом). Аналогичным образом определяется и вектор $z(t)$ состояния системы в произвольный момент времени.

Определяя систему множеством элементов и множеством отождествляющих соотношений (2), необходимо обеспечить корректность такого определения, под к-рой понимается возможность фактич. вычисления выходного сигнала $y(t)$ для всех $t > 0$ при задании начального состояния системы $z(0)$ и входного сигнала $x(t)$ для всех $t \geqslant 0$. Необходимым условием корректности определения системы является, напр., вхождение области значений функции $y_j^r(t)$ в соотношениях (2) в область значений функции $x_i^p(t)$. Для упрощения задачи обеспечения корректности определения систем обычно вводится запрет на отождествление любой входной компоненты более чем с одной выходной компонентой.

Множество соотношений (2) задаёт структуру кибернетич. системы (не путать с абстрактным понятием структуры в математике!). В ряде приложений оказывается полезным рассмотрение систем с переменной структурой. При этом, вводя дополнительные коммутационные элементы, можно любую систему с переменной структурой свести к системе с постоянной структурой.

Приведённое определение абстрактной кибернетич. системы охватывает весьма большой круг конкретных систем, рассматриваемых в различных областях знания. К их числу относятся логич. сети и сети абстрактных автоматов, механические динамич. системы, различного рода электромеханические и электронные устройства (включая ЭВМ), биологич. организмы и различные их подсистемы (напр., нервная система), экологические, экономические и социальные системы. Для возможности рассмотрения конкретных биологических, технических и социальных систем в качестве абстрактных кибернетич. систем необходимо отвлечься от большинства их специальных свойств (размеров, массы, химич. состава, многих конкретных форм представления сигналов и состояний и т. д.).

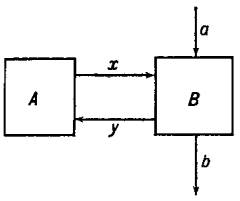
Кибернетич. аспект рассмотрения систем является аспектом чисто информационным. Иными словами состояния элементов и взаимодействие элементов друг с другом описываются системой кодов прежде всего для установления меры их различия (при заданной точности описания), а не для фактич. измерения тех или иных реальных физич. величин. Напр., при наличии в электрич. сети лишь двух уровней напряжения v_1 и v_2 можно задать числовыми кодами 0 и 1, независимо от фактич. величин этих напряжений. Заметим, что, хотя в приведённом выше определении кибернетич. системы употреблялись лишь числовые коды, их нетрудно, в случае необходимости, заменить буквенно-цифровыми кодами с использованием букв любых конечных алфавитов.

Всякая система, имеющая нетривиальный входной сигнал $x(t)$ и выходной сигнал $y(t)$, может рассматриваться как преобразователь информации, перерабатывающий поток информации $x(t)$ в поток информации $y(t)$. В случае дискретного времени и конечных областей определения функций $x(t)$ и $y(t)$ преобразование (при соответствующем кодировании входной информации) можно интерпретировать как соответствие между словами в той или иной паре фиксированных алфавитов. В этом случае система может рассматриваться как дискретный преобразователь информации. Системы с нетривиальным входным сигналом $x(t)$ наз. открытыми. В отличие от них замкнутые системы не оставляют свободных входных компонент ни у одного из своих элементов. Вектор входного сигнала $x(t)$ в таких системах имеет нулевое число компонент и не может, следовательно, нести никакой информации. Замкнутые системы в строгом смысле слова не должны иметь не только входа, но и выхода. Однако даже в этом случае их можно интерпретировать как генераторы информации, рассматривая изменение их внутреннего состояния во времени. В дальнейшем генерацию удобно рассматривать как частный случай преобразования информации.

Для кибернетич. систем важное значение имеют задачи их анализа и синтеза. Задача анализа системы состоит в нахождении различного рода свойств задаваемого системой преобразования информации, в частности представление в удобной форме алгоритма преобразования. В последнем случае речь идёт фактически об агрегации (композиции) системы в один единственный элемент. Задача синтеза системы противоположна задаче анализа. Необходимо по описанию осуществляемого системой преобразования построить систему, фактически выполняющую это преобразование. При этом должен быть предварительно определён класс элеменов, из к-рых должна строиться искомая система.

Важное значение имеет задача нахождения формальных преобразований кибернетич. систем, не меняющих задаваемых ими преобразований (а возможно, и нек-рых других инвариантов). Тем самым вводятся различные определения эквивалентности систем, делающие возможными постановку задач оптимизации систем, т. е. задач нахождения в классе эквивалентных систем системы с экстремальными значениями определяемых на системах функционалов.

Задача декомпозиции системы означает представление части системы или всех её элементов в виде систем, состоящих из более мелких элементов (подсистем). Для большого числа применений важное значение имеют системы, представляемые в виде комбинации двух подсистем (элементов), наз. обычно управляющей системой и объектом управления. Для наглядности подобную систему можно представить в виде графа (рис.), где через A обозначена управляющая система, через B — объект управления; буквой x обозначен т. н. канал прямой связи (выход элемента A), через y — канал обратной связи, через a — входной сигнал системы (воздействие окружающей среды, различного рода помехи) и через b — выходной сигнал, характеризующий качество функционирования подсистемы B (качество управления).



Для подобных систем задача синтеза ставится обычно следующим образом: при заданной системе B, заданном классе внешних воздействий a и заданном критерии качества управления b построить управляющую систему A, обеспечивающую заданное поведение критерия качества b. Под такое определение попадают задачи синтеза систем программного управления (b — заданная векторная функция времени), следящие системы (минимизирующие в том или ином смысле вектор $b - a$), системы оптимального управления (системы, выводящие объект управления в желательную область значений его состояния за кратчайшее время) и т. п.

Важное место в теории кибернетич. систем занимают задачи обеспечения надёжности их функционирования. Причём кибернетич. аспект надёжности связан не с обеспечением физич. надёжности элементов и связей между ними, а с вопросами организации самой системы (избыточность элементов и связей, специальные системы кодирования и т. п.).

Для достаточно простых систем большинство из перечисленных задач (если не в полных, то хотя бы в упрощённых постановках) могут быть решены средствами классич. математики, дополненными тривиальным перебором вариантов. Для сложных систем, с к-рыми приходится обычно иметь дело на практике, эти методы оказываются, как правило, непригодными. При этом сложность систем в К. понимается не только и не столько в простом количественном смысле (число элементов системы, число связей, размерность векторов состояний, входов и выходов), а прежде всего — в принципиальном качественном смысле. Сложной в этом смысле наз. система, не имеющая простых описаний. А это предполагает наряду с большими количествами используемых элементов и параметров большое их разнообразие (не сводящееся к простым закономерностям), а также большое разнообразие и нерегулярность связей между элементами. Эффективное исследование таких систем классическими дедуктивными методами оказывается практически невозможным. Классический экспериментальный метод исследования также оказывается применимым лишь в весьма ограниченных пределах. Во многих случаях его применение ограничивается высокой стоимостью эксперимента, а в ряде случаев (метеорология, экология, макроэкономика и др.) натурные эксперименты становятся либо вовсе невозможными, либо, по крайней мере, чересчур рискованными.

Поэтому в качестве основного метода исследования сложных систем К. использует метод машинного эксперимента, превратившийся в новый мощный универсальный метод научного познания в результате появления быстродействующих универсальных ЭВМ. Метод машинного эксперимента в чистом виде основан на использовании т. н. имитационных моделей. Такие модели по существу являются простым переложением на машинный язык описаний моделируемых систем. Специальные программы, обслуживающие модель, генерируют различные конкретные реализации входного сигнала $x(t)$ моделируемой системы и строят в соответствии с введённым в ЭВМ описанием системы (включая её начальное состояние) выходной сигнал $y(t)$. Далее, как и в обычном (натурном) эксперименте, полученные результаты обрабатываются с помощью специальных программ, строящих, напр., гистограммы распределений тех или иных величин, характеризующих поведение исследуемой системы, определяющих различные качественные характеристики (принадлежность системы и определяемого ею преобразования информации к тому или иному классу), и т. п. Таким способом решаются прежде всего задачи анализа кибернетич. систем. Для решения задач синтеза и оптимизации методом машинного эксперимента обслуживающая эксперимент система машинных программ дополняется средствами, обеспечивающими диалог ЭВМ с человеком-исследователем, внесение изменений в описание моделируемой системы по подсказке человека, а также процедуры направленного перебора для организации подобных изменений в автоматич. режиме.

Перевод описаний кибернетич. систем на машинный язык представляет собой достаточно трудоёмкую процедуру. Поэтому в современные средства машинного эксперимента включаются специальные программы —транслято-ры (или интерпретаторы), автоматизирующие перевод на машинный язык описаний систем на специально разрабатываемых для этой цели языках системного моделирования. Основу таких языков составляют средства (удобные для исследователя) фактич. описания параметров, функций и связей, входящих в описание систем. Сохраняя, как правило, универсальность (т. е. возможность описания произвольных систем), языки моделирования обычно ориентированы на более простое и лёгкое описание систем тех или иных специальных классов. Кроме того, в языки системного моделирования включаются дополнительные средства для описания процедур, обслуживающих машинный эксперимент, к-рые были описаны выше. Разработаны многие десятки универсальных и специализированных языков системного моделирования и основанных на них систем машинного эксперимента.

Во многих системах машинного эксперимента имитационное моделирование дополняется возможностями использования аналитич. аппарата тех или иных разделов математики (напр., теории массового обслуживания), а также современных вычислительных методов. В первую очередь это касается различного рода оптимизационных методов: линейного программирования, динамич. программирования, градиентных методов, стохастич. программирования и др.

В ряде случаев для изучения кибернетич. систем оказывается целесообразным дополнять машинный эксперимент натурным. Нек-рые части моделируемой кибернетич. системы при этом подключаются к универсальной ЭВМ (через специальные преобразователи) в виде натурных моделей, моделирование же остальных частей, управление экспериментом и обработка его результатов производятся в универсальной ЭВМ уже описанным способом. Использование универсальных и специализированных ЭВМ для автоматизации управления натурными экспериментами, а также для сбора и обработки получаемых экспериментальных данных является важным направлением совершенствования исследовательского процесса во всех экспериментальных науках. Не менее широкие возможности применения имеет и чистый машинный эксперимент.

Взаимоотношения К. с математикой не ограничиваются одним лишь использованием К. математич. методов. Математика и К. имеют и общие объекты исследования. Так, напр., алгоритмы, являющиеся объектом исследования и математич. теории алгоритмов, могут рассматриваться в то же время как кибернетич. системы и служить для К. не только средством, но и объектом исследования. Однако подход к изучению этого объекта и, следовательно, возникающие при этом задачи у математики и К. сильно от-

личаются друг от друга. Для математики алгоритм выступает прежде всего как одно из фундаментальных понятий оснований математики. Поэтому главная задача состоит в изучении общих свойств этого понятия, для чего необходимо свести его определение к минимальному числу простейших фундаментальных понятий и операций. К. ставит своей задачей разработку практически удобных методов синтеза конкретных систем, в том числе и алгоритмов. Эта практическая направленность приводит к необходимости разработать достаточно удобные для пользования процедурно и проблемно ориентированные алгоритмич. языки. Вместо характерного для математики интереса к принципиальной возможности установления эквивалентности в тех или иных классах алгоритмов К. интересуется прежде всего созданием аппарата, удобного для фактич. выполнения эквивалентных преобразований алгоритмов. Вместо простейшей формы представления информации в виде слов в абстрактном алфавите К. изучает сложные структуры данных, необходимые для эффективной реализации алгоритмов на ЭВМ. Приведённые примеры достаточно ясно характеризуют особенности подхода К. к изучаемым ею математич. объектам (абстрактные автоматы, логич. сети и т. п.).

Особый интерес с точки зрения взаимоотношения К. с математикой представляет их подход к аппарату классической математич. логики. Математич. аспект предполагает максимальное упрощение системы аксиом и правил вывода, без чего невозможен эффективный анализ общих свойств и возможностей логич. исчислений. К., ставящая задачу автоматизации дедуктивных построений на практич. путь, начала развивать язык практич. математич. логики. Этот язык относится к языку классич. математич. логики, как современный язык программирования — к языку алгоритмов Поста или нормальных алгорифмов Маркова. Правила вывода в этом языке (во взаимодействии с конкретными содержательными математич. текстами) имеют доказательную силу, не меньшую, чем сила, к-рая скрывается за словом «очевидно» в современных математич. монографиях.

Автоматизация дедуктивных построений представляет собой одну из наиболее важных частей раздела К., получившего наименование «искусственный интеллект». Естественный человеческий интеллект (мозг вместе с органами восприятия информации и выдачи её во вне) представляет собой одну из наиболее интересных и сложных кибернетич. систем. Вопрос о том, как человек мыслит, был и продолжает оставаться одним из самых интересных и увлекательных научных вопросов. К. подходит к его решению не только с теоретической, но и с практич. стороны. Речь идёт об автоматизации (полной или частичной — с подсказкой человека) различных аспектов интеллектуальной деятельности человека, а в конце концов — и всего интеллекта в целом.

Помимо автоматизации логич. мышления (дедуктивных построений), важными составными частями проблемы «искусственного интеллекта» являются задачи распознавания образов (прежде всего зрительных и слуховых), операции в естественных человеческих языках (распознавание смысла фраз и выражений, поддержание диалога и т. п.), задачи обучения и самообучения и т. д. Важное значение имеют задачи изучения и синтеза эффективных алгоритмов управления движениями искусственных конечностей человекоподобных роботов, синтеза искусственного голоса, управления им и др. Особая группа задач возникает при изучении целенаправленного поведения, методов выбора целей и подцелей и планов их достижения. Практич. путь к созданию искусственного интеллекта лежит в создании диалоговых (человеко-машинных) систем, повышающих производительность труда человека в различных областях умственной деятельности (логич. вывод, переводы с одних естественных языков на другие, шахматная игра и т. п.). По мере их совершенствования доля ЭВМ в совместной работе будет непрерывно повышаться вплоть до достижения полной автоматизации соответствующего процесса.

Очень важным является вопрос о взаимоотношениях К. с современной вычислительной техникой. Эти взаимоотношения имеют две различные стороны. Во-первых, ЭВМ являются для К. основным инструментом исследований, а во-вторых, будучи сами сложными кибернетич. системами, они выступают в качестве важного объекта исследований К. Разумеется, в задачу К. не входят многие технич. вопросы, разрешающиеся при реальном проектировании ЭВМ. Однако вопросы архитектуры ЭВМ и вычислительных систем, организация управления вычислительным процессом (включая организацию баз данных) входят в компетенцию К. и представляют один из важных её разделов. На это обстоятельство следует обратить особое внимание, ибо оно отличает понимание предмета К., сложившееся в СССР, от западного (прежде всего американского) понимания, где вопросы архитектуры и управления вычислительными системами относят к специальной компьютерной науке (computer science) и не включают их в К.

Кибернетич. системы встречаются практически во всех областях знания. Отличаясь теми или иными специфич. свойствами, такие системы могут изучаться кибернетич. методами, специально приспособленными к системам соответствующих классов. Тем самым становится возможным более глубокое их изучение. Так возникли и продолжают развиваться специализированные прикладные разделы К.: технич. К., экономич. К., биологич. К., медицинская К., военная К. Применение математич. и кибернетич. методов в языкознании привело к возникновению т. н. математич. лингвистики. Эта наука имеет непосредственное отношение к языковым проблемам искусственного интеллекта.

В последнее время происходит интенсивное формирование новой области знаний и деятельности — и н ф о р м а т и к и, объектом исследования к-рой являются информационные технологии (т. е. технологич. процессы сбора, хранения и преобразования информации) и проблемы встраивания их в социальную среду. Коль скоро информационная технология может рассматриваться как кибернетич. система, она представляет интерес и для К. С другой стороны, всякая кибернетич. система реализует некую информационную технологию и в этом смысле она является объектом изучения информатики. Т. к. проблемы и методы информатики находятся в стадии становления, следует ограничиться лишь этим замечанием относительно взаимодействия кибернетики и информатики.

● Винер Н., Кибернетика..., пер. с англ., 2 изд., М., 1968; Эшби У. Р., Введение в кибернетику, пер. с англ., М., 1959; Глушков В. М., Введение в кибернетику, К., 1964; его же, Основы безбумажной информатики, 2 изд., М., 1987; Энциклопедия кибернетики, т. 1—2, К., 1974.

В. М. Глушков.

«КИБЕРНЕТИКА», научный журнал Академии наук УССР. Издаётся в Киеве с 1965. Выходит 6 номеров в год. Публикует оригинальные статьи по математич. и прикладным проблемам кибернетики, а также обзоры новейших достижений советской и зарубежной кибернетики. Тираж (1987) ок. 3500 экз.

КИБЕРНЕТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА — см. *Кибернетика.*

КЛАСС — термин, употребляемый в математике в основном как синоним термина «множество» для обозначения произвольных совокупностей объектов, обладающих каким-либо определённым свойством или признаком (напр., в алгебре классы эквивалентности относительно данного отношения эквивалентности). Иногда К. предпочитают называть совокупности, элементами к-рых являются множества. В нек-рых случаях под влиянием аксиоматич. теории множеств термин «К.» применяется для того, чтобы подчеркнуть, что данная совокупность оказывается собственно К., а не множеством в узком смысле. Теоретико-множественные операции над К. определяются так же, как и над множествами.

КЛАССИЧЕСКАЯ ГРУППА — группа линейных преобразований n-мерного векторного пространства V^n над

некоторым полем K, связанная с той или иной геометрией в этом пространстве (а также изоморфная ей группа матриц над полем K).

Над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел классическими обычно называют группы из следующих пяти серий.

1) Полная линейная группа $GL(V^n)$ всех невырожденных линейных преобразований (автоморфизмов) пространства V^n. Она изоморфна группе $GL_n(\mathbb{C})$ невырожденных матриц порядка n над $\mathbb{C}$.

2) Специальная линейная, или унимодулярная, группа $SL(V^n)$ всех линейных преобразований (матриц) с определителем единица. Это — группа линейных преобразований, сохраняющих объём n-мерного параллелепипеда; она соответствует эквиаффинной геометрии.

3) Ортогональная группа $O(V^n, f)$ всех невырожденных линейных преобразований, сохраняющих невырожденную симметрич. билинейную форму f в пространстве V^n. В нормальном базисе формы f (т. е. в том базисе, в к-ром форма f приводится к нормальному виду) преобразования из этой группы записываются ортогональными матрицами, что определяет изоморфизм группы $O(V^n, f)$ на группу ортогональных матриц $O_n(\mathbb{C})$. Таким образом, все ортогональные группы (при фиксированной размерности пространства V^n) изоморфны между собой.

4) Симплектическая группа $Sp(V^n, f)$ всех линейных преобразований, сохраняющих невырожденную кососимметрич. билинейную форму f; определена только для чётных n. Как и ортогональные группы, все симплектич. группы при фиксированном n изоморфны между собой и изоморфны группе симплектич. матриц $Sp_n(\mathbb{C})$ порядка n.

5) Унитарная группа $U(V^n, f)$ всех линейных преобразований, сохраняющих невырожденную эрмитову форму f. В отличие от предыдущих примеров, различным формам f могут соответствовать неизоморфные группы. А именно: пусть p и q — соответственно положительный и отрицательный индексы инерции формы f, тогда группа $U(V^n, f)$ изоморфна группе псевдоунитарных матриц $U_{p,q}$. При этом $U_{p,q} \cong U_{q,p}$. Часто группу $U_{p,q}$ называют псевдоунитарной группой, а термин «унитарная группа» сохраняется только для групп $U_n = U_{n,0} \cong U_{0,n}$. Если с помощью формы f задать в V^n скалярное произведение, то V^n превращается в псевдоэрмитово (соответственно, эрмитово) пространство, а группа $U(V^n, f)$ будет группой автоморфизмов этого пространства.

В случае поля $\mathbb{R}$ действительных чисел существуют К. г. только первых четырёх типов. При этом в случае 3) существует не одна, а $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ ортогональных групп; соответствующие группы матриц обозначаются $O_{p,q}$ (в соответствии с индексами инерции формы f). Аналогично унитарному случаю группы $O_{p,q}$ часто называют псевдоортогональными, сохраняя термин «ортогональная группа» для группы $O_n = O_{n,0} \cong O_{0,n}$. Группа O_n есть группа автоморфизмов пространства V^n с евклидовой геометрией.

Важную роль в физике играет группа $O_{1,3}$, наз. группой Лоренца и являющаяся группой автоморфизмов пространства Минковского, к-рое даёт геометрич. интерпретацию пространства-времени специальной теории относительности.

Иногда к К. г. относят также и др. группы, тесно связанные с перечисленными выше, напр. специальную ортогональную группу SO_n всех ортогональных матриц с определителем единица и специальную унитарную группу SU_n всех унитарных матриц с определителем единица. Аналогичные серии К. г. определяются также над произвольным полем и даже над телом (особенно важен случай тела кватернионов).

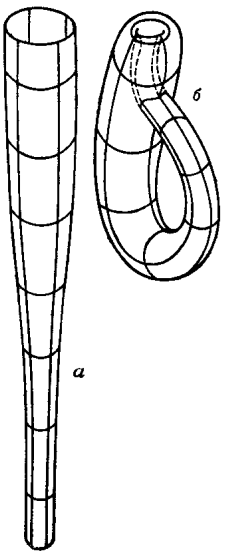
А. Л. Онищик.

КЛАССИ́ЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕ́НИЕ ВЫСКА́ЗЫВАНИЙ — см. *Высказываний исчисление.*

КЛАССИ́ЧЕСКОЕ ИСЧИСЛЕ́НИЕ ПРЕДИКА́ТОВ — см. *Предикатов исчисление.*

КЛЕ́ЙНА ИНТЕРПРЕТА́ЦИЯ — модель, реализующая систему аксиом *Лобачевского геометрии*. Предложена Ф. Клейном (1871).

КЛЕ́ЙНА ПОВЕ́РХНОСТЬ, бутылка Клейна,— односторонняя поверхность, рассмотренная Ф. Клейном. В 3-мерном пространстве К. п. может быть получена из трубы (рис., *а*), открытой с обеих сторон, если, изогнув трубу, пропустить более узкий её конец через стенку и склеить обе граничные окружности, изгибая внешнюю широкую окружность внутрь, а внутреннюю узкую окружность наружу. Таким образом получается поверхность (рис., *б*), имеющая линию самопересечения. К. п. без самопересечения может быть реализована лишь в 4-мерном пространстве.



С топологич. точки зрения К. п.— 2-мерное замкнутое неориентируемое многообразие, эйлерова характеристика к-рого равна нулю.

КЛЕРО́ УРАВНЕ́НИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$y = xy' + f(y'),$$

где f — заданная дифференцируемая функция. Это уравнение впервые рассматривалось А. Клеро (1734). К. у. интегрируется в конечном виде. Общее решение К. у.— семейство прямых

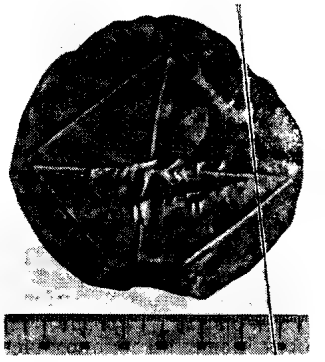
$$y = Cx + f(C), \qquad (*)$$

где C — произвольная постоянная. Кроме этого общего решения, К. у. имеет особое решение:

$$x = -f'(p),\ y = -pf'(p) + f(p)$$

(p — параметр), к-рое является огибающей семейства прямых (*). К. у.— частный случай *Лагранжа уравнения*.

КЛИНОПИ́СНЫЕ МАТЕМАТИ́ЧЕСКИЕ ТЕ́КСТЫ — математические тексты Древней Вавилонии и Ассирии; охватывают период с начала 2-го тыс. до н. э. до начала н. э. К. м. т. написаны клинописью на глиняных пластинках



Клинописный математический текст из коллекции Йельского университета (США). Изображён квадрат с его диагоналями. Сторона равна 30 (число написано над левой верхней стороной). На диагонали написано число

1; 24, 51, 10,

что есть $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 \approx 1{,}41417 \approx \sqrt{2}$, выражающее отношение диагонали квадрата к стороне. Под диагональю стоит её длина

42; 25, 36,

то есть $42 + 25/60 + 36/60^2$.

(рис.). Среди К. м. т. имеются математич. таблицы (таблицы умножения, таблицы обратных величин, служащие для замены деления умножением, таблицы квадратов и кубов и др.) и специальные математич. тексты, содержащие задачи с решениями. Большинство специальных текстов (их известно более сотни) относится ко 2-му тыс. до н. э. Найдены 5—6 текстов 1-го тыс. до н. э., относящихся к эллинистич. эпохе, и один текст ассирийской эпохи. В истории математики К. м. т. имеют большое значение; в них впервые встречаются позиционная система счисления и квадратные уравнения.

Вавилонские математики пользовались шестидесятеричной системой счисления, в к-рой единицы обозначались ▼, а десятки ❮; эти знаки употреблялись также для обозначения единиц и десятков следующих разрядов; напр., число 153=2·60+33 изображалось так:

▼▼❮❮❮▼▼▼

Особенностью вавилонской системы письменного счисления было то, что абсолютное значение чисел оставалось неопределённым.

Так, упомянутое число можно было прочесть и как $2\cdot60^2+33\cdot60=9180$ и даже как $2+33\cdot60^{-2}=2\frac{33}{60}$; кроме того, в текстах классич. эпохи (2-е тысячелетие до н. э.) отсутствовал знак, соответствующий нашему нулю. Подробное изучение текстов показывает, что такой способ обозначения употреблялся лишь для записи вычислений; что касается условий задачи, а также ответов, то в них в громадном большинстве случаев числа записывались или специальными знаками, различными для каждого разряда и даже различных величин (длины, площади и т. д.), или сопровождались названиями единиц меры, так что абсолютная величина каждого числа определялась вполне однозначно. Если учесть, что в К. м. т. никогда не даются записи промежуточных вычислений (нашего расположения действий при умножении и делении), даже в том случае, когда в тексте нет никаких словесных пояснений, то указанное явление проще всего объяснить тем, что промежуточные вычисления производились на счётной доске (типа абака или наших счётов), на к-рой отмечались и абсолютные величины чисел. Тем же самым можно объяснить и отсутствие нуля, к-рый при вычислениях на абаке не нужен (столбец, соответствующий отсутствующему разряду, просто оставлялся пустым). Можно думать, что и появление позиционного принципа связано с употреблением счётной доски.

Квадратные уравнения появились у вавилонян в тесной связи с землемерной практикой, что отразилось даже на терминологии: неизвестные назывались «длина» и «ширина»; исходной задачей, по-видимому, была следующая: по данному периметру и площади прямоугольника определить его стороны, что в современных обозначениях соответствует решению системы уравнений:

$$x+y=p,\ xy=q.$$

В дальнейшем неизвестные понимались уже гораздо более абстрактно, так что у вавилонян можно отметить зачатки алгебраич. мышления.

КЛОТО́ИДА (от греч. κλώθω — пряду) — то же, что *Корню спираль*.

КОАЛИ́ЦИЯ в теории игр — группа лиц или сторона, принимающая решение в конфликте (К. действия) либо отстаивающая некоторые интересы (К. интересов). См. также *Игр теория*.

КОБО́Л (COBOL — сокращение от слов Common Business Oriented Language, англ. common — общепринятый, business — деловой, oriented — ориентированный, language — язык) — *программирования язык*, предназначенный для решения экономических задач. Разработан в 60-х гг. (в США). Программа на языке К. состоит из 4 разделов: идентификации (имя программы, автора и т. п.); оборудования (описание конфигурации используемой ЭВМ); данных (описание иерархической структуры обрабатываемых данных, указания на их размещение во внешней памяти ЭВМ и способа доступа к ним); процедур (собственно программа, имеющая вид последовательности помеченных команд). Элементарными командами К. являются присваивание, передача управления по метке и вызов процедур. Основу любой программы на языке составляет использование стандартных обрабатывающих модулей: работа с таблицами, организация обмена с внешней памятью, сортировка и слияние данных, печать результатов и сопроводительного текста (генератор отчётов) и т. п.

● Кобол, под ред. Е. Л. Ющенко, 2 изд., К., 1974.

КОВАРИА́НТНЫЙ ТЕ́НЗОР — см. *Тензорное исчисление*.

КОВАРИАЦИО́ННАЯ МА́ТРИЦА — см. *Многомерный статистический анализ*.

КОД (франц. code, от лат. codex — свод законов) — система условных знаков (символов) для передачи, обработки и хранения (запоминания) различной *информации*. Конечная последовательность кодовых знаков (буква) наз. словом. Число различных символов (составляющих алфавит К.), к-рые используются в словах данного К., называют его основанием. Если все слова имеют одинаковую длину (количество элементов) n, то это — равномерный n-значный К. Если слова имеют переменную длину, то К. называют неравномерным (напр., код Морзе). К. называют полным, когда к нему без нарушения его различимости нельзя добавить ни одной новой кодовой комбинации. Полный равномерный n-значный К. содержит m^n слов, где m — основание кода. К., содержащий кодовые комбинации, служащие для отделения одного сообщения от другого, наз. К. с разделительными знаками; К., в к-ром все без исключения кодовые комбинации символов служат лишь для обозначения элементов сообщения, является К. без разделительных знаков.

Выбор К. определяется условиями передачи, обработки или хранения информации и связан гл. обр. с наиболее эффективным использованием *каналов* связи, обеспечением необходимой помехоустойчивости передачи и т. п. (см. *Кодирование*). С целью улучшения помехоустойчивости К. усложняются: к т. н. информационным знакам добавляются дополнительные — контрольные. По такому принципу строятся К. обнаружения и исправления ошибок.

Для записи чаще всего используют либо цифры и числа, либо знаки (плюс, минус, точка, тире и т. п.).

КОДИ́РОВАНИЕ — операция отождествления символов или групп символов одного *кода* с символами или группами символов другого кода. Необходимость К. возникает прежде всего из потребности приспособить форму сообщения к данному *каналу* связи или к.-л. другому устройству, предназначенному для преобразования или хранения *информации*. Так, с помощью телеграфных кодов сообщения, представленные в виде последовательности букв, напр. русского языка, и цифр, преобразуются в определённые комбинации посылок тока.

К. в *информации теории* преследует более значительные цели: уменьшение т. н. *избыточности* сообщений и влияния помех, искажающих сообщения при передаче по каналам связи (см. *Шеннона теорема*). Поэтому выбор нового кода стремятся наиболее удачным образом согласовать со статистич. структурой рассматриваемого источника сообщений. В какой-то степени это согласование имеется уже в коде Морзе, в к-ром чаще встречающиеся буквы обозначаются более короткими комбинациями точек и тире.

Приёмы, применяемые в теории информации для достижения указанного согласования, можно пояснить на примере построения «экономных» двоичных кодов. Пусть канал может передавать только символы 0 и 1, затрачивая на каждый одно и то же время t. Для уменьшения времени передачи (или, что то же самое, увеличения её скорости) целесообразно до передачи кодировать сообщения таким образом, чтобы средняя длина L кодового обозначения была наименьшей. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначают возможные сообщения нек-рого источника, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — соответствующие им вероятности. Тогда, как устанавливается в теории информации, при любом способе К.

$$L\geqslant H, \qquad (1)$$

где $H=\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 (1/p_i)$ — *энтропия* источника. Граница для L в формуле (1) может не достигаться. Однако при любых p_i существует метод К. (метод Шеннона — Фэно),

для к-рого

$$L \leqslant H + 1. \qquad (2)$$

Метод состоит в том, что сообщения располагаются в порядке убывания вероятностей и полученный ряд делится на две части с вероятностями, по возможности близкими друг к другу. В качестве первого двоичного знака принимают 0 в 1-й части и 1 — во 2-й. Подобным же образом делят пополам каждую из частей и выбирают второй двоичный знак и т. д., пока не придут к частям, содержащим только по одному сообщению.

x_i	p_i	Кодовое обозначение		
x_1	9/16	0		
x_2	3/16	1	0	
x_3	3/16	1	1	0
x_4	1/16	1	1	1

Пример 1. Пусть $n=4$ и $p_1={}^9/_{16}$, $p_2=p_3={}^3/_{16}$, $p_4={}^1/_{16}$. Применение метода иллюстрируется таблицей.

В данном случае

$$L=1\cdot\frac{9}{16}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{1}{16}=\frac{27}{16}=1{,}688$$

и можно показать, что никакой другой код не даёт меньшего значения. В то же время $H=1{,}623$. Всё сказанное применимо и к случаю, когда алфавит нового кода содержит не 2, как предполагалось выше, а $m>2$ букв. При этом лишь величина H в формулах (1) и (2) должна быть заменена величиной $H/\log_2 m$.

Задача о «сжатии» записи сообщений в данном алфавите (т. е. задача об уменьшении избыточности) может быть решена на основе метода Шеннона — Фэно. Действительно, с одной стороны, если сообщения представлены последовательностями букв длины N из m-буквенного алфавита, то их средняя длина L_N после К. всегда удовлетворяет неравенству

$$L_N \geqslant NH/\log_2 m,$$

где H — энтропия источника на букву. С другой стороны, при сколь угодно малом $\varepsilon>0$ можно добиться выполнения при всех достаточно больших N неравенства

$$L_N < N\left(\frac{H}{\log_2 m}+\varepsilon\right). \qquad (3)$$

С этой целью пользуются кодированием блоками: по данному ε выбирают натуральное число s и делят каждое сообщение на равные части — блоки, содержащие по s букв. Затем эти блоки кодируют методом Шеннона — Фэно в тот же алфавит. Тогда при достаточно больших N будет выполнено (3). Справедливость этого утверждения легче всего понять, рассматривая случай, когда источником является последовательность независимых символов 0 и 1, появляющихся с вероятностями p и q, $p\neq 1$, соответственно. Энтропия на блок равна s-кратной энтропии на одну букву, т. е. равна

$$sH = s\,(p\log_2 1/p + q\log_2 1/q).$$

Кодовое обозначение блока требует в среднем не более $sH+1$ двоичных знаков. Поэтому для сообщения длины N букв

$$L_N \leqslant (1+N/s)\,(sH+1) = N\,(H+1/s)\,(1+s/N),$$

что при достаточно больших s и N/s приводит к неравенству (3). Соответственно, при таком К. энтропия на букву приближается к своему максимальному значению — единице, а избыточность — к нулю.

Пример 2. Пусть источником сообщений является последовательность независимых знаков 0 и 1, в к-рой вероятность появления нуля равна $p={}^3/_4$, а единицы $q={}^1/_4$. Здесь энтропия H на букву равна 0,811, а избыточность — 0,189. Наименьшие блоки ($s=2$), т. е. 00,01,10, 11, имеют соответственно вероятности $p^2={}^9/_{16}$, $pq={}^3/_{16}$, $qp={}^3/_{16}$, $q^2={}^1/_{16}$. Применение метода Шеннона — Фэно (см. пример 1) приводит к правилу К.:

$$00 \longrightarrow 0{,}01 \longrightarrow 10{,}10 \longrightarrow 110{,}11 \longrightarrow 111.$$

При этом, напр., сообщение 00111000 ... примет вид 01111100... На каждую букву сообщения в прежней форме приходится в среднем 27/32=0,844 буквы в новой форме (при нижней границе коэффициента сжатия, равной $H=0{,}811$). Энтропия на букву в новой последовательности равна 0,811/0,844=0,961, а избыточность равна 0,039.

Ю. В. Прохоров.

КОЛЕБА́НИЕ ФУ́НКЦИИ — величина ω, связанная с данной функцией $f(x)$ следующим образом:

$$\omega = \sup_{x_1\in E,\ x_2\in E}\{f(x_1)-f(x_2)\},$$

где E — заданное множество. Здесь $f(x)$ — действительная числовая функция от одного или нескольких переменных.

К. ф. $f(x)$ на множестве E равно $\omega=M-m$, где

$$M=\sup_{x\in E} f(x),\quad m=\inf_{x\in E} f(x).$$

Если

$$M_\delta=\sup_{|x-x_0|<\delta,\ x\in E} f(x),\quad m_\delta=\inf_{|x-x_0|<\delta,\ x\in E} f(x),$$

то величина

$$\omega_0=\lim_{\delta\to+0}|M_\delta-m_\delta|$$

наз. К. ф. в точке x_0. К. ф. в точке равно нулю тогда и только тогда, когда $f(x)$ — непрерывная функция в этой точке.

КОЛЛИНЕА́РНЫЕ ВЕ́КТОРЫ (от лат. con — вместе и linea — линия) — векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. Для того чтобы два ненулевых вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны. Нулевой вектор коллинеарен всякому вектору.

Термин «коллинеарность» ввёл Дж. Гиббс (опубл. 1901); истоки понятия восходят к У. Гамильтону (ок. 1843).

КОЛЛИНЕА́ЦИЯ — см. *Проективное преобразование.*

КОЛЛОКА́ЦИИ МЕ́ТОД (от лат. collocatio — размещение, расстановка) — проекционный метод решения интегральных и дифференциальных уравнений, в котором приближённое решение определяется из условия удовлетворения уравнению в некоторых заданных точках. Напр., для приближённого решения интегрального уравнения

$$u(t)=\int_a^b K(t,\ s,\ u(s))\,ds + f(t)$$

выбираются нек-рое n-параметрич. семейство функций $\varphi(t,\ C_1,\ \ldots,\ C_n)$ и нек-рые точки (узлы коллокации) $t_1,\ \ldots,\ t_n$ на отрезке $[a,\ b]$. Приближённое решение $u_n(t)=\varphi(t,\ C_1,\ \ldots,\ C_n)$ определяется из условий

$$u_n(t_i)=\int_a^b K(t_i,\ s,\ u_n(s))\,ds + f(t_i),$$
$$i=1,\ \ldots,\ n,$$

представляющих собой систему n уравнений относительно n неизвестных $C_1,\ \ldots,\ C_n$. Если решаемое уравнение линейно, а приближённое решение ищется в виде линейной комбинации $u_n(t)=C_1\varphi_1(t)+\ldots+C_n\varphi_n(t)+\ldots$ от заданных (т. н. координатных) функций $\varphi_1,\ \ldots\ \varphi_n$, то и система уравнений относительно $C_1,\ \ldots,\ C_n$ получается линейная.

КОЛМОГО́РОВА АКСИО́МА, аксиома T_0,— самая слабая из *отделимости аксиом*; введена А. Н. Колмогоровым (1935). Топологич. пространство удовлетворяет К. а., если никакие две различные точки его не имеют одинаковых замыканий или, что равносильно, из любых двух точек его, по крайней мере, одна имеет окрестность, не содержащую другую точку.

КОЛМОГО́РОВА КРИТЕ́РИЙ — статистический критерий, предназначенный для проверки статистической гипотезы о неизвестном распределении вероятностей, сформулированной в непараметрической форме. Пусть результаты наблюдений $X_1,\ \ldots,\ X_n$ — взаимно независимые случайные величины с одинаковым распределением вероятностей, к-рому соответствует функция распределения $F(x)$. Согласно гипотезе H_0 : $F(x)=F_0(x)$, где $F_0(x)$ — заданная непрерывная функция распределения. Проверка гипотезы

с помощью К. к. основана на статистике

$$D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |\hat{F}_n(x) - F(x)|,$$

где $\hat{F}_n(x)$ — эмпирич. функция распределения, соответствующая результатам наблюдения $X_1, \ldots, X_n$:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\mu_n(x; X_1, \ldots, X_n)}{n},$$

где для любого действительного значения x $\mu_n(x; X_1, \ldots, X_n)$ есть число тех X_k, к-рые меньше x. По теореме Колмогорова (1933): если гипотеза H_0 справедлива, то распределение величины D_n не зависит от $F_0(x)$ и

$$\lim \{\sqrt{n}\, D_n < \lambda\} = K(\lambda), \quad \lambda > 0,$$

где

$$K(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}.$$

Применение К. к. состоит в следующем: пусть $0<\alpha<1$; если $D_n \geqslant \lambda_n(\alpha)$, где $\lambda_n(\alpha)$ — корень уравнения $\{D_n \geqslant \lambda_n(\alpha)\} = \alpha$, то гипотезу H_0 отвергают с уровнем значимости α ($\lambda_n(\alpha)$ наз. критич. значением К. к., соответствующим уровню значимости α). В ином случае делают заключение о согласии результатов наблюдения с гипотезой. Функция $K(\lambda)$ табулирована, что позволяет приближённо находить критич. значение $\lambda_n(\alpha)$, отвечающее заданному α. На основе статистики D_n можно построить доверительную зону для неизвестной функции распределения.

Функция $K(\lambda)$ используется также для построения критерия однородности двух выборок $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$, к-рый основан на статистике

$$D'_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |\hat{F}_n(x) - \hat{G}_m(x)|,$$

где $\hat{F}_n(x)$ и $\hat{G}_m(x)$ — эмпирические функции распределения, соответственно, для результатов наблюдения $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ (т. н. критерий Колмогорова — Смирнова).

К. к. является классич. процедурой, относящейся к непараметрич. статистич. методам. См. *Непараметрические методы* статистики.

● Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

КОЛМОГО́РОВА ПРОСТРА́НСТВО, T_0-пространство,— топологическое пространство, удовлетворяющее *Колмогорова аксиоме*. В К. п., в отличие от T_1-пространств (см. *Отделимости аксиомы*), одноточечные множества могут не быть замкнутыми.

КОЛМОГО́РОВА ТЕОРЕ́МА — 1) К. т.— доказанная А. Н. Колмогоровым (1934) теорема о *нормированных пространствах*.

2) К. т.— установленная А. Н. Колмогоровым (1928) теорема о применимости *больших чисел закона*.

3) К. т.— установленная А. Н. Колмогоровым (1930, 1933) теорема о применимости *больших чисел усиленного закона*.

КОЛМОГО́РОВА — ЧЕ́ПМЕНА УРАВНЕ́НИЕ в теории случайных процессов — см. *Маркова цепь*.

КОЛЬЦО́ — одно из основных понятий современной алгебры. В различных областях математики часто приходится иметь дело с разнообразными множествами, над элементами к-рых можно производить две операции, весьма похожие по своим свойствам на сложение и умножение обычных чисел. Предметом теории К. является изучение свойств обширного класса такого рода множеств.

Кольцом наз. непустое множество R, для элементов к-рого определены две бинарные операции — сложение и умножение (обозначаемые $+$ и $\cdot$ соответственно; знак $\cdot$ обычно опускается), причём предполагаются выполненными следующие аксиомы К. ($a, b, c \in R$):

I. Коммутативность сложения: $a+b=b+a$.

II. Ассоциативность сложения: $a+(b+c)=(a+b)+c$.

III. Обратимость сложения (возможность вычитания): уравнение $a+x=b$ имеет решение $x=b-a \in R$.

IV. Дистрибутивность умножения относительно сложения: $a(b+c)=ab+bc$ и $(b+c)a=ba+ca$.

Из свойств I—III ясно, что элементы К. образуют абелеву группу относительно сложения; она наз. аддитивной группой кольца. Нуль 0 этой группы относительно умножения является «поглощающим» элементом, т. е. $a\cdot 0=0\cdot a=0$ для любого элемента a кольца. Кольцо, вообще говоря, может содержать и т. н. делители нуля, т. е. такие ненулевые элементы a и b, произведение к-рых равно 0. Единицей наз. такой элемент 1 кольца R, что $a\cdot 1=1\cdot a=a$ для всех $a \in R$. Кольцо не обязано обладать единицей, но если она есть, то только одна.

Примеры К.: 1) множество всех целых чисел; 2) множество всех чётных чисел и вообще целых чисел, кратных данному числу m; 3) множество всех рациональных чисел; 4) множество всех действительных чисел; 5) множество всех комплексных чисел; 6) множество всех гауссовых чисел, т. е. комплексных чисел $a+bi$ с целыми a и b; 7) множество всех многочленов от одного или нескольких переменных с рациональными, действительными или комплексными коэффициентами; 8) множество всех функций, непрерывных на данном отрезке числовой прямой; 9) множество всех квадратных матриц порядка n с действительными (или комплексными) элементами; 10) множество всех кватернионов; 11) множество всех чисел Кэли; 12) множество всех симметрич. матриц порядка n с действительными элементами относительно сложения матриц и йорданова умножения $a \circ b = \frac{1}{2}(ab+ba)$, где в правой части стоят обычные произведения матриц; 13) множество всех векторов 3-мерного пространства относительно обычного сложения и векторного умножения.

Во многих случаях на умножение в К. накладывают дополнительные ограничения. Так, если $a(bc)=(ab)c$, то К. наз. ассоциативным (примеры 1—10); если в К. выполняются равенства $(aa)b=a(ab)$, $(ab)b=a(bb)$, то оно наз. альтернативным (пример 11); если в К. выполняются равенства $ab=ba$ и $(ab)(aa)=((aa)b)a$, то оно наз. йордановым кольцом (пример 12); если в К. выполняются равенства $a^2=0$, $a(bc)+b(ca)+c(ab)=0$, то оно наз. кольцом Ли (пример 13); если $ab=ba$, то К. наз. коммутативным (примеры 1—8, 12). Ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля наз. областью целостности (примеры 1—7). Ассоциативное К., в к-ром при $a\neq 0$ разрешимы оба уравнения $ax=b$ и $xa=b$, наз. телом (примеры 3—5, 10); тело обладает единицей и не имеет делителей нуля. Коммутативное тело наз. полем. Множество всех ненулевых элементов тела (поля) относительно умножения образует группу (абелеву группу), наз. мультипликативной группой тела (поля).

Весьма важны для многих разделов алгебры К. многочленов над произвольным полем и К. матриц над телами, определяемые аналогично К. примеров 7 и 9. Многие классы К. находят приложения и вне алгебры. Важнейшими из них являются К. функций и К. операторов, сыгравшие большую роль в развитии функционального анализа.

Пусть Φ — произвольное ассоциативное кольцо с единицей 1. Кольцо A (не обязательно ассоциативное) наз. алгеброй над Φ или операторным кольцом с кольцом операторов Φ, если определено произведение любого элемента из Φ на элемент из A, лежащее в A, причём так, что для всех $\alpha, \beta \in \Phi$, $a, b \in A$ справедливы соотношения

$$(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a, \quad \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b,$$

$$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \quad 1a = a, \quad \alpha(ab) = (\alpha a)b.$$

А если кольцо Φ коммутативно, то принято требовать усиления последнего условия:

$$\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b).$$

Любое К. можно считать алгеброй над кольцом целых чисел, если понимать произведение na (где n — целое число), как сумму n экземпляров элемента a: $a+a+\ldots+a$. Поэтому К. можно рассматривать как частный случай алгебр.

Если A — алгебра над полем (наз. также линейной алгеброй), то, по определению, A является векторным пространством над этим полем, а значит имеет базис. Это даёт возможность строить алгебры над полем по базису, для чего достаточно задать таблицу умножения базисных элементов. Алгебра над полем наз. конечномерной, если она конечномерна как векторное пространство. Размерность этого векторного пространства наз. также рангом алгебры. Напр., поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел есть алгебра ранга 2 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, кватернионы образуют алгебру ранга 4 над полем $\mathbb{R}$, полное К. матриц порядка n с элементами из поля Φ — алгебра ранга n^2 над Φ.

В теории К. важную роль играют понятия гомоморфизма и изоморфизма. Многие рассуждения и описания проводятся «с точностью до изоморфизма», т. е. изоморфные К. и алгебры не различаются. Гомоморфизм — это такое отображение φ кольца R в кольцо R', что для любых $a, b \in R$

$$(a+b)\varphi = a\varphi + b\varphi, \quad (ab)\varphi = (a\varphi)(b\varphi),$$

т. е. φ перестановочно с кольцевыми операциями. Для алгебр (над одним и тем же Φ) требуют также, чтобы было $(\alpha a)\varphi = \alpha(a\varphi)$ для любого $\alpha \in \Phi$. Если при этом φ — биективное отображение (т. е. взаимно однозначное отображение на R'), то оно наз. изоморфизмом, а кольца (алгебры) R и R' изоморфными.

Множество M элементов кольца (алгебры) A наз. подкольцом (подалгеброй), если M само является К. (алгеброй) относительно операций, определённых в A; M наз. левым (правым или двусторонним) идеалом, если, кроме того, для любых элементов $m \in M$ и $a \in A$ произведение am (соответственно ma или как am, так и ma) лежит в M. Элементы $a, b \in A$ наз. сравнимыми по идеалу M, если $b - a \in M$. Всё A разбивается на классы сравнимых элементов — классы вычетов по идеалу. Таким образом, всякий идеал определяет на множестве A отношение эквивалентности, причём для двустороннего идеала это отношение — конгруэнция, и можно определить сложение и умножение (умножение на элемент поля) классов вычетов по двустороннему идеалу M через сложение и умножение элементов этих классов. Относительно этих операций классы вычетов образуют К. (алгебру), называемое факторкольцом (факторалгеброй) A/M. Имеет место теорема о гомоморфизмах: если каждому элементу из A поставить в соответствие содержащий его класс, то получается гомоморфизм A на A/M; обратно, если A гомоморфно отображается на A', то множество M элементов из A, отображающихся в нуль К. (алгебры) A', будет двусторонним идеалом в A и A/M изоморфно A'. Кольцо без двусторонних идеалов наз. простым.

Переход от алгебры к её подалгебрам и факторалгебрам является одним из способов получения новых алгебр. Напр., из алгебры многочленов от достаточно большого числа переменных над полем Φ (в качестве гомоморфного образа) может быть получена любая ассоциативно-коммутативная алгебра над полем Φ.

Историческая справка. Примерно до сер. 19 в. были известны лишь отдельные примеры К.: числовые кольца, т. е. подкольца поля комплексных чисел, кольца вычетов целых чисел. Первые примеры некоммутативных К. и алгебр встречаются в работах У. Гамильтона и Г. Грассмана (1843—44). Это — тело кватернионов и внешняя алгебра. Начинает формироваться понятие гиперкомплексной системы, т. е. (в современной терминологии) конечномерной алгебры над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, а после 1870 начинается общее исследование гиперкомплексных систем. В работах Р. Дедекинда встречается общее понятие ассоциативного кольца, тела и алгебры над полем, хотя К. у него называлось ещё порядком. Термин «К.» был введён Д. Гильбертом позднее. К. Вейерштрасс и Р. Дедекинд доказали, что любая конечномерная ассоциативно-коммутативная алгебра без нильпотентных элементов над полем является прямой суммой полей, изоморфных либо полю $\mathbb{R}$, либо полю $\mathbb{C}$. Г. Фробениус (1878) доказал, что единственное некоммутативное тело конечной размерности над $\mathbb{R}$ — тело кватернионов.

К нач. 20 в. уже была достаточно развита теория гомоморфизмов, выяснена их связь с идеалами, появилось понятие прямой суммы. Ф. Э. Молин, рассматривая конечномерные ассоциативные алгебры над полем $\mathbb{C}$, ввёл понятие простой алгебры и доказал, что простые алгебры — это в точности полные матричные алгебры над $\mathbb{C}$. Он же ввёл первые понятия радикала и доказал, что алгебра с нулевым радикалом является прямой суммой простых алгебр. Эти результаты были вновь найдены Э. Картаном, к-рый распространил их и на алгебры над полем $\mathbb{R}$. В нач. 20 в. Дж. Веддербёрн перенёс результаты Ф. Э. Молина и Э. Картана на случай алгебр (ассоциативных и конечномерных) над произвольным полем. Он же доказал, что любое конечное тело коммутативно. Наконец, в 20—30-х гг. 20 в. стали изучать произвольные ассоциативные К. При этом большую роль начинают играть левые и правые идеалы К. и условия максимальности и минимальности, накладываемые на них (см. *Артиново кольцо*, *Нётерово кольцо*). К 1940 теория Молина — Картана — Веддербёрна была перенесена на случай ассоциативных колец с условием минимальности для левых (или правых) идеалов.

В 40-х гг. развилась также теория неассоциативных колец и бесконечномерных неассоциативных линейных алгебр. Центральная часть этой теории — изучение т. н. алгебр, близких к ассоциативным (альтернативных, алгебр Ли, йордановых алгебр и нек-рых их обобщений).

Теория ассоциативно-коммутативных колец составляет особый большой раздел алгебры, развивающийся в непосредственном контакте с алгебраич. теорией чисел и алгебраич. геометрией,— *коммутативную алгебру*.

● Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971.

КОМБИНА́ТОР — см. *Комбинаторная логика*.

КОМБИНАТО́РИКА (от позднелат. combino — соединяю) — то же, что *комбинаторный анализ*.

КОМБИНАТО́РНАЯ ЛО́ГИКА — раздел логики, посвящённый изучению и анализу таких понятий и методов, как переменная, функция, операция подстановки, классификация предметов по типам или категориям и др.

В качестве основных понятий в К. л. выбираются одноместная функция и операция применения функции к аргументу (аппликация), при этом понятие функции рассматривается как первичное по отношению к понятию множества и обобщается таким образом, что функция может принимать объекты одного с ней уровня как в качестве аргументов, так и в качестве значений. В частности, аргументом функции f может служить сама эта функция. Поскольку функции могут выступать в качестве как аргументов, так и значений, понятие многоместной функции сводится к понятию одноместной функции. Результат аппликации функции f к аргументу x обозначают (fx). Для простоты часто скобки опускают, понимая при этом запись $fx_1x_2\ldots x_n$ как $(\ldots((fx_1)x_2)\ldots x_n)$. Функция f, удовлетворяющая равенству

$$fx_1x_2\ldots x_n = \mathfrak{X},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geqslant 1$,— произвольные функции, а $\mathfrak{X}$ — объект, построенный из этих функций (быть может, не из всех) с помощью операции аппликации, наз. комбинатором (существование комбинаторов неявно постулируется). Всякий комбинатор может быть выражен

через два комбинатора S и K, удовлетворяющих следующим равенствам:

$$Sxyz = xz\,(yz),\quad Kxy = x$$

(здесь x, y, z — произвольные функции).

Одной из первых в К. л. была задача, к-рая состояла в сведении первичных логич. понятий к минимальному числу достаточно простых понятий. Была введена индивидуальная функция U, к-рая обобщала штрих Шеффера [если f и g — одноместные пропозициональные функции, то Ufg интерпретируется как $(\forall x)\,(f(x)) \Rightarrow \neg g(x)]$, и было показано, что каждую формулу исчисления предикатов можно представить в виде комбинации из букв U, S, K (и скобок), откуда и назв. «К. л.». Переменные в таком представлении совсем не использовались, что позволило избавиться от переменной как исходного понятия (понятия индивидуальной константы, высказывания и пропозициональной функции при этом также элиминировались как исходные понятия). Однако, как показало дальнейшее развитие К. л., построение на такой основе логич. систем встретило значительные трудности. Первые логич. исчисления такого типа оказались противоречивыми. Чтобы избежать этого противоречия, К. л. приходится строить либо как обладающую очень бедными дедуктивными возможностями, либо как содержащую объекты разных категорий. Основное развитие К. л. пошло по второму пути.

Часть К. л., к-рая не имеет дела с «логикой», а интересуется только свойствами комбинаторов, наз. теорией комбинаторов. Показано, что эта теория непротиворечива. В результате формализации она принимает вид различных исчислений.

КОМБИНАТО́РНАЯ МАТЕМА́ТИКА — то же, что *комбинаторный анализ*.

КОМБИНАТО́РНАЯ ТОПОЛО́ГИЯ — раздел топологии, в котором топологические свойства геометрических фигур изучаются при помощи их разбиений на более элементарные фигуры (напр., разбиение полиэдров на симплексы) или при помощи покрытий системами множеств. Эти методы применимы в самых широких предположениях об изучаемых фигурах.

● Александров П. С., Комбинаторная топология, М.— Л., 1947; Понтрягин Л. С., Основы комбинаторной топологии, 2 изд., М., 1976.

КОМБИНАТО́РНЫЕ ЗАДА́ЧИ классические — задачи выбора и расположения элементов конечного множества, имеющие в качестве исходной некоторую формулировку развлекательного содержания типа головоломок.

Одной из классических К. з., фигурирующей ещё в мифах Др. Востока, является задача построения *магического квадрата*. Ряд К. з. был рассмотрен Л. Эйлером. Одна из них — задача о 36 офицерах, состоящая в том, чтобы указанное число офицеров 6 различных воинских званий и из 6 различных полков так расположить в ячейках квадрата 6×6 (каре), чтобы каждая колонна и каждая шеренга содержали одновременно одного и только одного офицера каждого ранга и каждого полка. Эта задача эквивалентна задаче построения *латинского квадрата* порядка 6. Другая К. з., рассмотренная Л. Эйлером,— задача о кёнигсбергских мостах (см. *Эйлера задача*).

Типичными К. з. являются также *коммивояжёра задача*, *размещения задача*, перечислительные задачи различных комбинаторных конфигураций (см. *Комбинаторный анализ*) и др.

КОМБИНАТО́РНЫЙ АНА́ЛИЗ, комбинаторная математика, комбинаторика,— раздел математики, посвящённый решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения нек-рой конструкции из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией. Поэтому можно сказать, что целью К. а. является изучение комбинаторных конфигураций, в частности вопросы их существования, алгоритмы построения, решение задач на перечисление. Примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, размещения и сочетания; блок-схемы и латинские квадраты.

Возникновение основных понятий и развитие К. а. шло параллельно с развитием других разделов математики, таких, как алгебра, теория чисел, теория вероятностей, с к-рыми К. а. тесно связан. Ещё математикам Др. Востока были известны формула, выражающая число сочетаний через биномиальные коэффициенты, и формула бинома Ньютона с натуральным показателем n. С мистич. целями изучались магич. квадраты 3-го порядка. Рождение К. а. как раздела математики связано с трудами Б. Паскаля и П. Ферма по теории азартных игр. Эти труды, составившие основу теории вероятностей, одновременно содержали принципы определения числа комбинаций элементов конечного множества.

Большой вклад в развитие комбинаторных методов был сделан Г. Лейбницем, Я. Бернулли, Л. Эйлером. С 50-х гг. 20 в. интерес к К. а. возрождается в связи с бурным развитием кибернетики, дискретной математики, теории планирования и теории информации. На формирование направления исследований в дальнейшем оказывают влияние два фактора. С одной стороны, выбор объектов исследований, с другой — формулировка целей исследования, зависящая в конечном счёте от сложности изучаемых объектов. Если исследуемая комбинаторная конфигурация имеет сложный характер, то целью исследования является выяснение условий её существования и разработка алгоритмов построения.

Другое направление К. а. связано с теоремами выбора, т. е. теоремами, связанными с выбором элементов из данного множества, тем или иным способом соответствующих семейству подмножеств этого множества. В основе целого ряда результатов этого направления лежит теорема Холла о существовании системы различных представителей (трансверсали) семейства подмножеств нек-рого множества.

Пусть $T=\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ — данное множество, $S=\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ — нек-рое семейство подмножеств T. Набор $R=\{t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_n}\}$ различных элементов множества T наз. системой различных представителей (с. р. п.) семейства S, если $t_{i_j}\in S_j$, $i=1, 2, \ldots, n$; элемент t_{i_j} наз. представителем множества S_j.

Теорема Холла о с. р. п.: семейство S тогда и только тогда имеет с. р. п., когда объединение каждых k множеств из S содержит, по крайней мере, k различных элементов, $k=1, 2, \ldots, n$.

Пусть

$$T = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_l, \qquad (1)$$

$$T = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_l \qquad (2)$$

суть два разбиения множества T, в к-рых ни одно из составляющих не пусто. Множество $R=\{t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_l}\}$ наз. системой общих представителей (с. о. п.) разбиений (1) и (2), если R есть с. р. п. как для семейства $A=\{A_1, A_2, \ldots, A_l\}$, так и для семейства $B=\{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$.

Теорема о с. о. п.: разбиения (1) и (2) имеют с. о. п. тогда и только тогда, когда объединение каждых k множеств из семейства A содержит не более k множеств из семейства B, $k=1, 2, \ldots, l$.

Теореме Холла о с. р. п. эквивалентна теорема Кёнига о (0, 1)-матрице: минимальное число линий (строк и столбцов), содержащих все единицы, равно максимальному числу единиц, к-рые могут быть выбраны таким образом, чтобы среди них не нашлось двух, расположенных на одной и той же линии (строке или столбце).

Значительную часть К. а. составляют перечислительные задачи. При их решении либо указывается метод перебора комбинаторных конфигураций из данного класса, либо определяется их число, либо делается

то и другое. Типичные результаты перечислительных задач: число подстановок степени n с k циклами равно $|S(n, k)|$, где $S(n, k)$ — числа Стирлинга 1-го рода, определяемые равенством

$$x(x-1)\dots(x-n+1)=\sum_{k=0}^{n} S(n, k)\,x^k;$$

число разбиений множества из n элементов на k подмножеств равно числу Стирлинга 2-го рода:

$$\sigma(n, k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n;$$

число размещений m различных предметов в n различных ячейках, когда пустых ячеек нет, равно $n!\sigma(m, n)$ (см. также *Полиномиальный коэффициент*).

Полезным инструментом для решений перечислительных задач является перманент матрицы. Перманент матрицы $A=||a_{ij}||$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$, $n\leqslant m$, с элементами из нек-рого кольца определяется равенством

$$\operatorname{per} A=\sum_{(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n},$$

где суммирование производится по всевозможным размещениям объёма n из m различных элементов. Число трансверсалей нек-рого семейства подмножеств конечного множества равно перманенту соответствующей матрицы инцидентности.

При решении перечислительных задач существенную роль играет формализация понятия неразличимости объектов. Использование для этих целей понятия эквивалентности объектов относительно нек-рой группы подстановок в сочетании с применением метода производящих функций было положено в основу т. н. теории перечисления Пойа.

● Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; Рыбников К. А., Введение в комбинаторный анализ, 2 изд., М., 1985. *В. Н. Сачков.*

КОММИВОЯЖЁРА ЗАДА́ЧА (франц. commisvoyageur, от commis — служащий и voyageur — странствующий), задача о бродячем торговце,— одна из комбинаторных задач теории графов. В простейшем случае формулируется следующим образом: даны n городов и известны расстояния между каждыми двумя городами; коммивояжёр, выходящий из какого-нибудь города, должен посетить $n-1$ других городов и вернуться в исходный. В каком порядке ему нужно посещать города (по одному разу каждый), чтобы общее пройденное расстояние было минимальным?

К задачам типа К. з. относятся задачи доставки продуктов питания в магазины, подвода электроэнергии к потребителям, построения кольцевой линии электропередачи и т. д. Методы решения К. з. по существу сводятся к организации полного перебора вариантов.

КОММУТА́НТ (от лат. commutans, род. падеж commutantis — меняющий) группы G, производная группы G,— подгруппа, порождаемая всевозможными коммутаторами элементов группы G, т. е. элементами вида $a^{-1}b^{-1}ab$, $a, b\in G$. Обычно К. группы G обозначается $[G, G]$, или G'. Любая подгруппа, содержащая К., является нормальным делителем в G. Факторгруппа G/H абелева тогда и только тогда, когда H содержит К. группы G. Любой эндоморфизм отображает К. в себя, т. е. К. является вполне характеристич. подгруппой. Ряд подгрупп

$$G_0=G\supseteq G_1=[G, G]\supseteq G_2=[G_1, G_1]\supseteq\dots,$$

содержащий последовательные коммутанты группы G, наз. производным рядом группы. Он является нормальным рядом группы G.

КОММУТАТИ́ВНАЯ А́ЛГЕБРА — раздел алгебры, изучающий свойства полей, коммутативных колец и связанных с ними объектов (идеалов, модулей, нормирований и т. д.).

К. а. выросла из задач, возникавших в теории чисел и алгебраич. геометрии. Задачи эти, как правило, относились к конкретным классам колец. Фундаментальным объектом теории чисел является кольцо целых рациональных чисел, и основной факт его арифметики состоит в том, что любое целое число по существу однозначно разлагается в произведение простых чисел. В 1-й пол. 19 в. К. Гауссом, Э. Куммером и другими была обнаружена связь различных вопросов теории чисел с арифметикой некрых расширений поля рациональных чисел. Распространению классич. рассуждений мешало однако отсутствие однозначности разложения в произведение далее неразложимых множителей для алгебраич. чисел (см. *Алгебраическая теория чисел*). Эта трудность была преодолена Э. Куммером (в одном частном случае — для круговых полей) путём введения т. н. *идеальных чисел*, с присоединением к-рых к полю однозначность разложения на множители восстанавливалась. Р. Дедекинд и Л. Кронекер распространили эту теорию на произвольные кольца алгебраич. чисел. При этом в построенной Р. Дедекиндом теории были введены важнейшие понятия К. а.— понятия *идеала* и *простого идеала*.

Параллельно происходило формирование К. а. внутри алгебраич. геометрии. Алгебраич. геометрия того времени изучала свойства алгебраич. кривых на плоскости, а также более общих алгебраич. многообразий, задаваемых как множество общих нулей нескольких многочленов. То же многообразие M можно задавать и другими уравнениями, так что более естественно с многообразием M связывать идеал всех многочленов, обращающихся в нуль на M. Это ещё один путь, приводящий к понятию идеала.

Бурное развитие К. а. началось после опубликования в 1890-х гг. работ Д. Гильберта, доказавшего ряд фундаментальных теорем о кольце многочленов. К нач. 20 в. были получены результаты, относящиеся к кольцам алгебраич. чисел и многочленов. Однако конкретность материала мешала увидеть нек-рые общие закономерности и связи. Толчком к развитию современной К. а. послужила теория *p-адических чисел*: именно возможность применения классич. методов к такому нетрадиционному объекту позволила осознать и выделить общие идеи, применимые к произвольным кольцам (удовлетворяющим тем или иным условиям). Начинается новый этап К. а.— систематич. изучение строения различных классов коммутативных колец (см. также *Артиново кольцо*, *Нётерово кольцо*).

Последующее развитие идей К. а. связано с гомологич. методами, функториальным подходом и дальнейшей геометризацией, к-рая соответствует взгляду на элементы кольца как на функции на нек-ром пространстве. К. а. становится составной частью алгебраич. геометрии, значительно расширившей благодаря этому свои рамки и возможности.

● Атья М., Макдональд И., Введение в коммутативную алгебру, пер. с англ., М., 1972; Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1—2, М., 1963; Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; Бурбаки Н., Коммутативная алгебра, пер. с франц., М., 1971.

КОММУТАТИ́ВНАЯ А́ЛГЕБРА ЛИ — см. *Ли алгебра*.

КОММУТАТИ́ВНАЯ ГРУ́ППА — то же, что *абелева группа*.

КОММУТАТИ́ВНОЕ КОЛЬЦО́ — кольцо, умножение в котором удовлетворяет закону коммутативности. Теория ассоциативно-коммутативных колец с единицей составляет основное содержание *коммутативной алгебры*.

КОММУТАТИ́ВНОСТЬ [от позднелат. commutativus — меняющий(ся)], переместительность, переместительный закон,— свойство сложения и умножения чисел, выражаемое тождествами: $a+b=b+a$, $ab=ba$. В общем случае бинарная операция $a*b$ наз. коммутативной, если $a*b=b*a$. Свойством К. обладают, напр., сложение и умножение многочленов; векторное умножение и умножение матриц не являются коммутативными. Термин «коммутативный» ввёл Ф. Сервуа (1815).

КОММУТА́ТОР — см. *Векторное поле*, *Коммутант*.

КОМПА́КТ (от лат. compactus — плотный), то же, что *компактное пространство*. Иногда под термином «К.» понимается отделимое компактное пространство. Наряду с «К.» употребляется термин «бикомпакт».

КОМПА́КТНОЕ МНО́ЖЕСТВО — множество A в топологическом пространстве X такое, что подпространство $A \subset X$ — компактно. К. м. в отделимом пространстве — замкнутое множество.

КОМПА́КТНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — топологическое пространство, обладающее свойством *компактности*. Иногда компактным считается лишь отделимое пространство. К. п. называют также компактом, однако наряду (или даже вместо) с термином «компакт» употребляется термин «бикомпакт», а компактом называют лишь матризуемое бикомпактное пространство.

Примеры К. п.: отрезок, куб, шар, окружность, канторово множество, гильбертов кирпич; n-мерное евклидово пространство не является К. п., а подмножества такого пространства будут компактными тогда и только тогда, когда они замкнуты и ограничены.

КОМПА́КТНОСТЬ — свойство топологического пространства, состоящее в том, что из любого его открытого покрытия можно выделить конечное покрытие. Наряду с термином «К.» употребляется бикомпактность, а термин «К.» относят к пространствам со счётной локальной базой, и тогда К. определяется как свойство любого бесконечного подмножества иметь предельную точку.

КОМПА́КТНЫЙ ОПЕРА́ТОР — оператор $A : X \to Y$, отображающий любое ограниченное множество в топологическом векторном пространстве X во множество топологического векторного пространства Y, замыкание которого компактно. Для К. о., действующих в банаховых пространствах, построена теория разрешимости уравнения $x - Ax = y$, вполне аналогичная конечномерному случаю (и содержащая, в частности, теорию интегральных уравнений с ограниченным ядром). Непрерывный К. о. наз. вполне непрерывным оператором.

КОМПИЛЯ́ТОР (лат. compilator, букв.— похититель) — то же, что *транслятор*.

КОМПИЛЯ́ЦИЯ (лат. compilatio, букв.— похищение, присваивание) — то же, что *трансляция* в программировании.

КОМПЛАНА́РНЫЕ ВЕ́КТОРЫ (от лат. com- — вместе и planum — плоскость) — векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов

$$a = \{a_1, a_2, a_3\},\ b = \{b_1, b_2, b_3\},\ c = \{c_1, c_2, c_3\}$$

является равенство

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Термин «компланарный» встречается впервые у Я. Бернулли; в векторный анализ его ввёл Дж. Гиббс (опубл. 1901); истоки понятия восходят к У. Гамильтону (ок. 1843).

КО́МПЛЕКС (от лат. complexus — связь, сочетание) — одно из основных понятий комбинаторной топологии; для её целей существенно рассматривать геометрич. фигуры разбитыми на более элементарные фигуры. Проще всего составлять геометрич. фигуры из симплексов, т. е. в случае 3-мерного пространства — из точек, отрезков, треугольников и тетраэдров. В соответствии с этим чаще всего имеют дело с симплициальными К.

Симплициальный К. есть конечное множество симплексов, расположенных в нек-ром евклидовом (или гильбертовом) пространстве и обладающих следующим свойством: два симплекса этого множества или не имеют ни одной общей точки, или совокупность всех их общих точек есть общая грань обоих симплексов. Если в К. имеется n-мерный симплекс и нет симплексов большего числа измерений, то К. наз. n-мерным. Это простейшее понятие подвергалось многим обобщениям, идущим в разных направлениях: наряду с только что определёнными конечными К. можно определить счётные К.; далее, можно от симплициальных К. перейти к аналогично определяемым клеточным К., элементы к-рых суть уже не непременно симплексы, а любые выпуклые многогранники или даже любые фигуры, им гомеоморфные; в последнем случае говорят о «криволинейных» К. Обычно рассматривают лишь К., удовлетворяющие следующему условию замкнутости: всякая грань симплекса, входящего в данный К., также входит в этот К. Множество, к-рое может быть представлено как (теоретико-множественная) сумма симплексов, образующих n-мерный К., наз. n-мерным полиэдром.

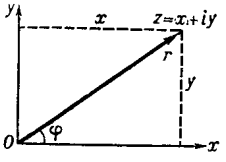
КО́МПЛЕКС ПРЯМЫ́Х — множество прямых в трёхмерном пространстве, зависящее от трёх параметров. См. *Линейчатая геометрия*.

КОМПЛЕ́КСНАЯ ПЛО́СКОСТЬ, плоскость $\mathbb{C}$ комплексного переменного,— плоскость с прямоугольной декартовой системой координат x, y, каждая точка к-рой (x, y) отождествлена с комплексным числом $z = x + iy$. Поэтому на К. п. говорят о точках z или же о векторах z, подразумевая вектор, приложенный в начале координат с концом в точке z. Ось абсцисс Ox на К. п. принято называть действительной осью, а ось ординат Oy — мнимой осью. Если к К. п. присоединяют воображаемую бесконечно удалённую точку $z = \infty$, то получается расширенная комплексная плоскость $\bar{\mathbb{C}}$, к-рая взаимно однозначно отображается на *Римана сферу*.

КОМПЛЕ́КСНАЯ ПРОЕКТИ́ВНАЯ ПЛО́СКОСТЬ — см. *Алгебраическая геометрия*.

КОМПЛЕ́КСНО ЕВКЛИ́ДОВО ПРОСТРА́НСТВО — то же, что *унитарное пространство*.

КОМПЛЕ́КСНОЕ ЧИСЛО́ — число вида (рис.) $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ — т. н. мнимая единица, т. е. число, квадрат которого равен -1 (в технической литературе применяется также обозначение $j = \sqrt{-1}$); x называется действительной или вещественной частью К. ч. z, а y — его мнимой частью (обозначения: $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$). Действительные числа — частный случай К. ч. при $y = 0$. К. ч., не являющиеся действительными (т. е. с $y \neq 0$), наз. иногда мнимыми, а К. ч. с $x = 0$, $y \neq 0$ — чисто мнимыми.



Операции сложения и умножения К. ч. определяются естественным образом из правил сложения и умножения многочленов с учётом условия $i^2 = -1$, то есть

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y'),$$

$$z \cdot z' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Эти операции коммутативны и ассоциативны и связаны соотношением дистрибутивности. Для них существуют обратные действия — вычитание и деление (кроме деления на нуль):

$$z - z' = (x + iy) - (x' + iy') = (x - x') + i(y - y'),$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{x + iy}{x' + iy'} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + i\frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}.$$

Таким образом, К. ч. образуют поле (обозначаемое $\mathbb{C}$). Это поле является алгебраич. расширением поля $\mathbb{R}$ действительных чисел и получается присоединением к полю $\mathbb{R}$ корня i многочлена $x^2 + 1$. Поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто: любой многочлен с коэффициентами из $\mathbb{C}$ разлагается над $\mathbb{C}$ на линейные множители. Поле К. ч. является единственным (с точностью до изоморфизма) минимальным расширением поля $\mathbb{R}$, в к-ром уравнение $x^2 + 1$ имеет корень.

К. ч. $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ наз. (комплексно) сопряжёнными. Для любого К. ч. z выполняется

соотношение $z=\bar{\bar{z}}$; $z=\bar{z}$ тогда и только тогда, когда z — действительное число. Операция сопряжения перестановочна с арифметич. операциями:

$$\overline{z \mp z'} = \bar{z} \mp \bar{z'},$$

$$\overline{z \cdot z'} = \bar{z}\bar{z'}, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}.$$

Если z — корень алгебраич. уравнения с действительными коэффициентами, то $\bar{z}$ — также корень этого уравнения.

Геометрическая интерпретация. К. ч. $z=x+iy$ изображается на плоскости с декартовыми прямоугольными координатами (наз. комплексной плоскостью и обозначаемой $\mathbb{C}$) точкой, имеющей координаты (x, y). Эта точка обозначается той же буквой z. Соответствие между К. ч. и точками комплексной плоскости взаимно однозначно. Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые — точками оси ординат (поэтому ось абсцисс наз. действительной осью, а ось ординат — мнимой осью). Точки z и $\bar{z}$ симметричны относительно действительной оси, а z и $-z$ симметричны относительно точки O (начала координат).

К. ч. изображается также вектором на комплексной плоскости с началом в точке O и концом в точке z. При такой интерпретации сумма и разность К. ч. строятся по обычному правилу сложения векторов, т. е. по правилу параллелограмма. Однако умножение и деление К. ч. не имеют непосредственных аналогов в векторной алгебре.

Применяя полярные координаты на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т. е. радиус-вектор $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ (модуль, или абсолютная величина, К. ч.) и полярный угол $\varphi=\operatorname{Arg} z$ (наз. аргументом К. ч. z, иногда также фазой или амплитудой), получают тригонометрическую, или полярную, форму К. ч.:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

$$r\cos\varphi=\operatorname{Re} z,\ r\sin\varphi=\operatorname{Im} z.$$

Аргумент $\varphi=\operatorname{Arg} z$ является многозначной действительной функцией К. ч. $z\neq 0$; обычно используется главное значение аргумента $\varphi=\arg z$, определяемое дополнительным условием:

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi.$$

Формулы Эйлера

$$e^{\pm i\varphi}=\cos\varphi \pm i\sin\varphi$$

преобразуют тригонометрич. форму К. ч. в показательную:

$$z=re^{i\varphi}.$$

При умножении (делении) К. ч. модули перемножаются (модуль делимого делится на модуль делителя), а аргументы складываются (из аргумента делимого вычитается аргумент делителя):

$$zz'=rr'[\cos(\varphi+\varphi')+i\sin(\varphi+\varphi')]=rr'e^{i(\varphi+\varphi')},$$

$$\frac{z'}{z}=\frac{r'}{r}[\cos(\varphi'-\varphi)+i\sin(\varphi'-\varphi)]=\frac{r'}{r}e^{i(\varphi-\varphi')},\ r>0.$$

Возведение в степень К. ч. и извлечение корня из К. ч. производятся по формулам Муавра:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^n e^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)=$$

$$=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\ k=0, 1, \ldots, n-1,$$

причём первая из них применима и для целых отрицательных показателей n. Геометрически умножение К. ч. z на К. ч. $z'=r'e^{i\varphi'}$ сводится к повороту вектора z на угол φ' (против часовой стрелки при $\varphi'>0$) и последующему изменению его длины в $|z'|=r'$ раз.

Историческая справка. Впервые, по-видимому, мнимые величины появились в труде Дж. Кардано «Великое искусство, или Об алгебраических правилах» (1545), к-рый счёл их бесполезными, непригодными к употреблению. Пользу мнимых величин, в частности при решении кубич. уравнения в т. н. неприводимом случае (когда действительные корни выражаются через кубич. корни из мнимых), впервые оценил Р. Бомбелли (1572). Он же дал нек-рые простейшие правила действий с К. ч. Вообще, выражения вида $a+b\sqrt{-1}$, $b\neq 0$, появляющиеся при решении квадратных и кубич. уравнений, стали называть в 16—17 вв. «мнимыми». Однако даже для многих крупных учёных 17 в. алгебраич. и геометрич. сущность мнимых величин представлялась неясной и даже загадочной и мистической. Известно, напр., что И. Ньютон не включал мнимые величины в понятие числа, а Г. Лейбницу принадлежит фраза: «Мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием».

Задача о выражении корней степени n из данного числа была в основном решена в работах А. Муавра (1707, 1724) и Р. Котеса (1722). Символ $i=\sqrt{-1}$ предложил Л. Эйлер (1777, опубл. 1794). Он же высказал в 1751 мысль об алгебраич. замкнутости поля $\mathbb{C}$, к такому же выводу пришёл Ж. Д'Аламбер (1747), но первое строгое доказательство этого факта принадлежит К. Гауссу (1799). Термин «К. ч.» ввёл (1803) Л. Карно, но в употребление термин вошёл после работ К. Гаусса (1831). Полное геометрич. истолкование К. ч. и действий над ними появилось впервые в работе К. Весселя (1799). Геометрич. представление К. ч., иногда наз. «диаграммой Аргана», вошло в обиход после опубликования в 1806 и 1814 работы Ж. Аргана, повторявшей в основном независимо выводы К. Весселя.

Чисто арифметич. теория К. ч. как пар действительных чисел была построена У. Гамильтоном (1837). Ему же принадлежит важное пространственное обобщение К. ч.— кватернионы. Вообще, в кон. 19 в. было доказано, что всякое расширение понятия числа за пределы поля К. ч. возможно только в случае отказа от к.-л. привычных свойств действий (см. *Гиперкомплексное число*).

● Маркушевич А. И., Комплексные числа и комформные отображения, 2 изд., М., 1960.

Е. Д. Соломенцев.

КОМПЛЕ́КСНО-СОПРЯЖЁННАЯ МА́ТРИЦА — см. *Матрица.*

КО́МПЛЕКСНЫЙ ЧЕРТЁЖ — см. *Начертательная геометрия.*

КОМПОЗИЦИО́ННЫЙ РЯД группы — конечный нормальный ряд подгрупп

$$E=G_0\subset\ldots\subset G_{k-1}\subset G_k=G,$$

не имеющий отличных от него самого уплотнений, т. е. такой, что всякая подгруппа G_{i-1}, $i=2, \ldots, k$, является максимальной истинной нормальной подгруппой в G_i. Для К. р. групп имеет место *Жордана — Гёльдера теорема*. Аналогично определяются и аналогичными свойствами обладают К. р. колец.

КОМПОЗИ́ЦИЯ (от лат. compositio — составление) — общее название для операции, производящей из двух элементов a и b третий элемент $c=a*b$. Напр., К. (или суперпозицией) двух функций $f(x)$ и $g(x)$ называют функцию $h(x)=f[g(x)]$. В математич. анализе и теории вероятностей К. (или свёрткой) наз. также и другие способы образования из двух функций $f(x)$ и $g(x)$ третьей функции $h(x)=f(x)*g(x)$; напр.:

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

КОМПОНЕ́НТА (от лат. componens, род. падеж componentis — составляющий) вектора, координата,— см. *Векторная алгебра.*

КОМПОНЕ́НТА связности пространства — связное множество C такое, что для любого связного множества C_1 из $C\subset C_1$ вытекает $C=C_1$. Любое пространство представляется в виде объединения своих К.

КОМПОНЕ́НТА тензора, координата,— см. *Тензорное исчисление.*

КОМПОНЕ́НТА точки — наибольшее *связное множество*, содержащее эту точку (т. е. объединение всех связных множеств, её содержащих).

КОНВЕРГЕ́НЦИЯ (от лат. convergo — схожусь) — величина, обратная *дивергенции*; употреблялась до кон. 19 в.; обозначение: conv.

КОНГРУЭ́НТНОСТИ АКСИО́МЫ — группа аксиом *евклидовой геометрии*.

КОНГРУЭ́НТНОСТЬ (от лат. congruens, род. падеж congruentis — соразмерный, соответствующий, совпадающий) — термин, употребляемый для обозначения равенства отрезков, углов, треугольников и др. фигур и тел в элементарной геометрии. Понятие К. может быть принято в качестве одного из основных понятий элементарной геометрии. Его свойства могут быть в этом случае охарактеризованы соответствующими аксиомами, наз. аксиомами конгруэнтности. Если основным понятием считать движение (см. *Движение* в геометрии), то понятию К. уже даётся прямое определение: две фигуры наз. конгруэнтными, если одна из них может быть переведена в другую при помощи движения. Отношение К. обозначается знаком $\cong$.

КОНГРУЭ́НЦИЯ (лат. congruentia — согласие, соответствие) на универсальной алгебре A — отношение эквивалентности π на множестве элементов алгебры A, перестановочное с любой из операций. Последнее означает, что для любой n-арной операции ω, заданной в A, если

$$a_i \pi a_i', \ i=1, \ \ldots, \ n, \ a_i, \ a_i' \in A,$$

то и

$$(a_1, \ \ldots, \ a_n\omega) \ \pi \ (a_1', \ \ldots, \ a_n'\omega).$$

К. π задаёт на множестве классов, эквивалентных по π элементов, структуру универсальной алгебры (однотипной с исходной алгеброй A). Эта алгебра обозначается A/π и наз. факторалгеброй алгебры A по конгруэнции π. С К. π связан естественный эпиморфизм $A \to A/\pi$, ставящий в соответствие каждому элементу $a \in A$ тот класс A/π, к-рому этот элемент принадлежит. Обратно, всякий гомоморфизм φ: $A \to B$ однозначно определяет К., классами к-рой служат полные прообразы элементов алгебры B.

Аналогично определяется К. в случае алгебраич. системы.

КОНГРУЭ́НЦИЯ прямых — множество прямых трёхмерного пространства, зависящее от двух параметров. См. *Дифференциальная геометрия*, *Линейчатая геометрия*.

КОНДЕНСА́ЦИИ ТО́ЧКА (от позднелат. condensatio — уплотнение, сгущение) множества — точка множества X, каждая окрестность которой содержит несчётное множество точек X.

КОНЕ́ЧНАЯ ГРУ́ППА — группа с конечным числом элементов. Это число наз. порядком группы. Исторически К. г. послужили исходным материалом для формирования многих понятий абстрактной теории групп.

После периода становления в теории К. г., связанного с именами О. Коши, Ж. Лагранжа, К. Гаусса, Н. Абеля и, в первую очередь, Э. Галуа, К. г. изучались почти исключительно как группы подстановок, причём эта точка зрения остаётся плодотворной и в наши дни. Вычислительные методы, развившиеся в этой теории за последние годы, отчасти вызваны к жизни запросами комбинаторики, теории графов, теории кодирования, необходимостью проверки различных гипотез.

В нач. 20 в. трудами Г. Фробениуса, У. Бёрнсайда, И. Шура и др. была развита теория линейных представлений К. г., давшая мощный инструмент исследования абстрактных групп и послужившая прототипом для аналогичной теории представлений групп Ли, а затем и других алгебраич. систем. Выражение свойств групп и их представлений на языке теории характеров — одно из проявлений взаимных связей между различными разделами алгебры. Интенсивно изучаются представления К. г. над коммутативными кольцами и над полями ненулевой характеристики.

Обычно говорят, что целью теории К. г. является описание, с точностью до изоморфизма, групп любого порядка. Это верно лишь отчасти. Наивный подход, основанный на полном переборе всех групп, заведомо обречён на неудачу. Напр., составление списка всех попарно неизоморфных групп сравнительно небольшого порядка 1024 явилось бы трудным испытанием для лучших современных ЭВМ. Вообще, перебор конечных p-групп (групп порядка p^n, p — простое) — плохо поставленная задача. Описание К. г. целочисленных матриц — ещё один пример важной классификационной задачи, решённой лишь для небольших размеров матриц. Напротив, существуют некие экстремальные классы групп, играющие принципиальное значение в теории, для к-рых проблема классификации (перечисления с точностью до изоморфизма) либо решена, либо представляется вполне осмысленной. Так, для абелевых К. г. имеется законченная теория. Отдельные типы конечных p-групп также допускают качественное описание.

Особый интерес представляют простые группы, т. е. группы с тривиальными нормальными подгруппами, являющиеся «строительными блоками» для всех К. г. В результате многолетних настойчивых усилий была создана сложная в технич. плане классификационная теория. В соответствии с её выводами, всякая неабелева простая К. г. является либо знакопеременной, либо группой лиева типа, либо одной из 26 спорадич. групп. Связный, чётко выверенный текст доказательства, предположительно из многих тысяч страниц, пока (на 1987) не написан, поэтому вся ситуация сохраняет известную долю неопределённости. Тем не менее многочисленные идеи и глубокие, точно установленные классификационные результаты совершенно преобразили теорию К. г., к к-рой уже неприменимы слова Ф. Клейна: «Для многих особая прелесть этой области заключается в том, что в ней можно работать, не зная слишком много об остальной математике и не будучи, таким образом, вынужденным комбинировать много различных циклов идей».

Успехи современной компьютерной техники значительно расширили традиционное представление об эксперименте. Ярким свидетельством открывшихся возможностей служит создание атласа К. г., близких к простым и имеющих порядок 10^{25}, а в отдельных случаях и выше. Деятельность по вычислению различных инвариантов К. г., порядков максимальных групп Бёрнсайда, таблиц характеров простых К. г. и пр. служит хорошим дополнением к теоретич. исследованиям.

● Горенстейн Д., Конечные простые группы, пер. с англ., М., 1985; Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., Основы теории групп, 3 изд., М., 1982; Кострикин А. И., Вокруг Бернсайда, М., 1986.

А. И. Кострикин.

КОНЕ́ЧНАЯ ИГРА́ — см. *Игр теория*.

КОНЕ́ЧНАЯ МАТЕМА́ТИКА — то же, что *дискретная математика*.

КОНЕ́ЧНАЯ РА́ЗНОСТЬ — соотношение, связывающее дискретный набор значений

$$y_1 = f(x_1), \ y_2 = f(x_2), \ \ldots, \ y_k = f(x_k), \ldots$$

функции $y=f(x)$, соответствующих дискретной последовательности значений аргумента $x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_k, \ \ldots$ См. *Конечных разностей исчисление*.

КОНЕ́ЧНО ОПРЕДЕЛЁННАЯ УНИВЕРСА́ЛЬНАЯ АЛГЕБРА — алгебра, задаваемая конечными системами *порождающих элементов* и *определяющих соотношений*.

КОНЕ́ЧНО ПОРОЖДЁННАЯ УНИВЕРСА́ЛЬНАЯ АЛГЕБРА — см. *Порождающие элементы*.

КОНЕ́ЧНОЕ ИНТЕГРА́ЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — см. *Интегральное преобразование*.

КОНЕ́ЧНОЕ ПО́ЛЕ — то же, что *Галуа поле*.

КОНЕ́ЧНОЕ РАСШИРЕ́НИЕ поля — см. *Поле*.

КОНЕЧНОМЕ́РНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ случайного процесса — см. *Вероятностей теория*, *Случайный процесс*.

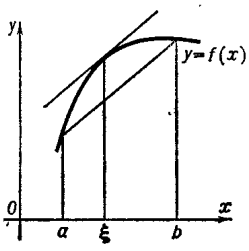
КОНЕ́ЧНЫЙ АВТОМА́Т — математическая модель устройства с конечной памятью, преобразующего дискретную информацию. К. а. является одним из важнейших видов *управляющих систем*. Содержательно К. а. можно охарактеризовать как устройство, имеющее входной и выходной каналы и находящееся в каждый из моментов дискретного времени, наз. тактовыми моментами, в одном из состояний. По входному каналу в каждый тактовый момент в устройство поступают сигналы a — буквы входного алфавита A; в те же моменты по выходному каналу устройство выдаёт сигналы b — буквы выходного алфавита B, причём b определяется состоянием s из алфавита состояний S и буквой a; внутреннее состояние s' в следующий тактовый момент также определяется состоянием s и буквой a из предыдущего момента. Таким образом, для нек-рых функций φ и ψ имеет место

$$b=\varphi(a,\ s),\ s'=\psi(a,\ s);$$

эти функции наз. соответственно выходной и переходной функциями; они определяют закон «переработки» слов в алфавите A, подаваемых побуквенно на входной канал устройства при условии задания начального состояния устройства.

Для К. а. предполагается конечность алфавитов A, S, B. Если считать указанную «переработку» слов главной характеристикой устройства, то его можно отождествить с набором $(A,\ S,\ B,\ \varphi,\ \psi)$, к-рый и называют К. а. Для этой формы описания К. а. характерно отношение исследователя к устройству как внешнего наблюдателя. Само задание К. а. наз. при этом абстрактным К. а. В случае когда устройство рассматривается с учётом того, что оно собрано по нек-рым композиционным правилам из абстрактных К. а., приходят к понятию структурного К. а., к-рый в итоге также реализует нек-рый абстрактный К. а.

КОНЕ́ЧНЫХ ПРИРАЩЕ́НИЙ ФО́РМУЛА, формула Лагранжа,— одна из основных формул дифференциального исчисления, дающая связь между приращением функции $f(x)$ и значениями её производной; эта формула имеет вид



$$f(b)-f(a)=(b-a)\,f'(\xi),\quad (*)$$

где ξ — нек-рое число, удовлетворяющее неравенствам $a<\xi<b$. Формула $(*)$ справедлива, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и имеет производную в каждой точке интервала $(a,\ b)$. Геометрически (рис.) формула $(*)$ выражает, что на кривой $y=f(x)$ найдётся точка $(\xi,\ f(\xi))$, касательная к к-рой параллельна хорде, проходящей через точки $(a,\ f(a))$ и $(b,f(b))$. Формулу $(*)$ часто записывают в другой форме:

$$f(a+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),$$

где θ — нек-рое число, зависящее, вообще говоря, от x и от h и удовлетворяющее неравенству $0<\theta<1$. К. п. ф. была открыта Ж. Лагранжем (1797), она является простейшим случаем формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. К. п. ф. для функций от многих переменных $f(x,\ y,\ \ldots,z)$ имеет вид

$$f(x+h,\ y+k,\ \ldots,\ z+l)-f(x,\ y,\ \ldots,\ z)=$$
$$=hf'_x(x+\vartheta h,\ y+\vartheta k,\ \ldots,\ z+\vartheta l)+$$
$$+kf'_y(x+\vartheta h,\ y+\vartheta k,\ \ldots,\ z+\vartheta l)+\ldots$$
$$\ldots+lf'_z(x+\vartheta h,\ y+\vartheta k,\ \ldots,\ z+\vartheta l),$$

где $0<\vartheta<1$.

Наиболее известно обобщение К. п. ф.: формула Бонне

$$\begin{vmatrix} f'(\xi) & \varphi'(\xi) & \psi'(\xi) \\ f(a) & \varphi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \varphi(b) & \psi(b) \end{vmatrix}=0$$

и её частный случай — формула Коши

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

КОНЕ́ЧНЫХ РА́ЗНОСТЕЙ ИСЧИСЛЕ́НИЕ — раздел математики, в котором изучаются функции при дискретном изменении аргумента, в отличие от дифференциального и интегрального исчислений, где аргумент изменяется непрерывно. Пусть функция $y=f(x)$ задана в точках $x_k=x_0+kh$ (h — постоянная, k — целое). Тогда

$$\Delta y_k=\Delta f_k=f(x_{k+1})-f(x)$$

— (конечные) разности первого порядка,

$$\Delta^2 y_k=\Delta^2 f_k=\Delta f_{k+1}-\Delta f_k=f(x_{k+2})-2f(x_{k+1})+f(x_k)$$

— разности второго порядка, ...,

$$\Delta^n y_k=\Delta^n f_k=\Delta^{n-1}f_{k+1}-\Delta^{n-1}f_k$$

— разности n-го порядка. Разности удобно располагать в таблицу:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y\ldots$
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$	
		Δy_3		
x_4	y_4			
$\ldots$				

Разность n-го порядка через величины $y_0,\ y_1,\ \ldots$ выражается формулой

$$\Delta^n y_n=y_{k+n}-C_n^1 y_{k+n-1}+$$
$$+C_n^2 y_{k+n-2}-\ldots+(-1)^n y_k.$$

Наряду с разностями вперёд Δy_k употребляются разности назад:

$$\nabla y_k=f(x_k)-f(x_{k-1}).$$

В ряде вопросов (в частности, при построении интерполяционных формул) используют центральные разности:

$$\delta^{2m-1}y_{i+\frac{1}{2}},\ \delta^{2m}y_i,$$

к-рые определяются следующим образом:

$$\delta y_{i+\frac{1}{2}}=y_{i+1}-y_i,$$
$$\delta^2 y_i=\delta y_{i+\frac{1}{2}}-\delta y_{i-\frac{1}{2}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta^{2m-1}y_{i+\frac{1}{2}}=\delta^{2m+2}y_{i+1}-\delta^{2m+2}y_i,$$
$$\delta^{2m}y_i=\delta^{2m+1}y_{i+\frac{1}{2}}-\delta^{2m+1}y_{i-\frac{1}{2}}.$$

Между центральными $\delta^n y_i$ и обычными разностями $\Delta^n y_k$ имеется связь:

$$\delta^{2m}y_i=\Delta^{2m}y_{i-m},\ \delta^{2m+1}y_{i+\frac{1}{2}}=\Delta^{2m+1}y_{i-m}.$$

В случае когда промежутки $x_{k+1}-x_k$ непостоянны, рассматривают т. н. разделённые разности:

$$[x_0;\ x_1]=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1},$$
$$[x_0;\ x_1;\ x_2]=\frac{[x_0;\ x_1]-[x_1;\ x_2]}{x_0-x_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n]=\frac{[x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_{n-1}]-[x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n]}{x_0-x_n}.$$

Имеет место формула

$$[x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n]=\sum_{j=0}^{n}\frac{y_j}{\prod_{i\neq j}(x_j-x_i)}.$$

Иногда вместо $[x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n]$ употребляется обозначение

$f(x_0; x_1; \ldots; x_n)$. Если $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$[x_0; x_1; \ldots; x_n] = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}.$$

Если функция $f(x)$ в интервале $x_k < x < x_{k+n}$ имеет n-ю производную $f^{(n)}(x)$, то

$$\Delta^n y_k = h^n f^{(n)}(\xi), \quad x_k < \xi < x_{k+n}.$$

К. р.и. тесно связано с общей теорией приближения функций, используется в приближённом дифференцировании и интегрировании, в приближённом решении дифференциальных уравнений и других вопросах. Пусть поставлена задача (интерполяционная задача) о восстановлении функции $f(x)$, если известны значения $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Строится многочлен $P(x)$ степени n, к-рый в указанных точках принимает те же значения, что и $f(x)$. Его можно записать в различных формах — в форме Лагранжа, в форме Ньютона и т. д. В форме Ньютона интерполяционный многочлен имеет вид

$$P_n(x) = f(x_0) + [x_0; x_1](x - x_0) + [x_0; x_1; x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + [x_0; x_1; \ldots; x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}),$$

а в случае равноотстоящих значений независимого переменного:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k f(x_0)}{n! h^n}(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}).$$

Функцию $f(x)$ принимают приближённо равной $P_n(x)$. Если $f(x)$ имеет $n+1$ производную, то ошибка от замены $f(x)$ на $P_n(x)$ оценивается соотношением

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)\ldots(x - x_n),$$

где ξ лежит в интервале, в к-ром находятся точки $x, x_0, \ldots, x_n$. В случае если $f(x)$ — многочлен степени $\leqslant n$, то $f(x) = P_n(x)$.

При неограниченном увеличении числа узлов интерполяции многочлен $P_n(x)$ становится в пределе многочленом $P(x)$ «бесконечной» степени и естественно возникает вопрос: когда $f(x) = P(x)$, т. е. когда будет выполняться равенство

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta^k f(x_0)}{h^k}(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1}) \quad (1)$$

(для простоты рассматривается случай равноотстоящих узлов). Пусть $x_0 = 0$, $h = 1$, так что $x_n = n$, $n \geqslant 0$. Если ряд (1) сходится в точке α, отличной от узлов [ряд (1) всегда сходится в узлах $x_0, x_1, \ldots$], то он сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} x > \alpha$ и представляет собой в этой полуплоскости аналитич. функцию, к-рая в полуплоскости $\operatorname{Re} x \geqslant \beta > \alpha$ удовлетворяет условию ($\varepsilon > 0$):

$$|f(re^{i\varphi})| < ce^{rh(\varphi)} r^{\alpha + \frac{1}{2} + \varepsilon},$$

$$h(\varphi) = \cos\varphi \ln(2\cos\varphi) + \varphi \sin\varphi.$$

Обратно, если $f(x)$ аналитична в нек-рой полуплоскости и имеет оценку роста, подобную указанной (несколько лучше её), то она представляется рядом (1). Таким образом, в ряд (1) разлагаются функции из весьма узкого класса (только аналитич. функции с определённым ростом).

Другая важная задача К. р. и.— задача суммирования функций. Пусть дана нек-рая функция $f(x)$. Требуется найти в конечном виде, точно или приближённо, сумму

$$S_n = f(x_0) + f(x_0 + h) + \ldots + f(x_0 + nh)$$

при фиксированных x_0 и h и большом n, если известны нек-рые аналитич. свойства $f(x)$. Иначе говоря, исследуется асимптотич. поведение S_n при $n \to \infty$. Пусть $x_0 = 0$, $h = 1$ (для простоты) и найдена функция $F(x)$ такая, что

$$\Delta F(x) = F(x + 1) - F(x) = f(x). \quad (2)$$

Тогда

$$S(n) = F(n + 1) - F(0). \quad (3)$$

Напр., пусть $f(x) = x^2$. Решение уравнения (2) ищется в виде многочлена 3-й степени

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

с неопределёнными коэффициентами. После подстановки в уравнение (2) и приравнивания коэффициентов левой и правой частей при соответствующих степенях многочлен приобретает вид

$$Q(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}$$

и

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Не всегда удаётся в конечном виде получить решение уравнения (2). Поэтому полезно иметь приближённые формулы для S_n. Такой формулой является *Пуассона формула суммирования*.

Имеется аналогия между задачами К. р. и. и дифференциальным и интегральным исчислением. Операция разыскания разности соответствует нахождению производной; решение уравнения (2) как операция, обратная разысканию конечной разности, соответствует нахождению первообразной, т. е. неопределённому интегрированию. Формула (3) есть прямой аналог формулы Ньютона — Лейбница. Эта аналогия проявляется при рассмотрении уравнений в конечных разностях. Уравнением в конечных разностях наз. соотношение

$$F(x, f(x), \Delta f(x), \ldots, \Delta^n f(x)) = 0,$$

где F — заданная функция, а $f(x)$ — искомая. Если выразить все $\Delta^n f(x)$ через $f(x), f(x+1), \ldots, f(x+n)$, то уравнение в конечных разностях запишется в виде

$$\Phi(x, f(x), f(x+1), \ldots, f(x+n)) = 0. \quad (4)$$

Его решение относительно $f(x+n)$:

$$f(x+n) = \psi(x, f(x), \ldots, f(x+n-1)).$$

При задании начальных значений $f(x_0), f(x_0+1), \ldots, f(x_0+n-1)$ можно последовательно найти $f(x_0+n), f(x_0+n+1)$ и т. д. После решения уравнения (4) относительно $f(x)$:

$$f(x) = \varphi(x, f(x+1), \ldots, f(x+n)),$$

можно, положив $x = x_0 - 1$, найти $f(x_0 - 1)$, затем найти $f(x_0 - 2)$, и т. д. Таким образом, из уравнения через начальные данные могут быть найдены значения $f(x)$ во всех точках $x_0 + k$, где k — целое. Пусть рассматривается линейное уравнение

$$f(x+k) + P_1(x) f(x+k-1) + \ldots + P_k(x) f(x) = Q(x), \quad (5)$$
$$x = 0, 1, \ldots,$$

где $P_1(x), \ldots, P_k(x)$ и $Q(x)$ — заданные функции на множестве $x = 0, 1, 2, \ldots$ Общее решение неоднородного уравнения (5) есть сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения

$$f(x+k) + P_1(x) f(x+k-1) + \ldots + P_n(x) f(x) = 0. \quad (6)$$

Если $f_1(x), \ldots, f(x)$ — линейно независимые решения уравнения (6), то общее решение уравнения (6) выражается формулой

$$f(x) = c_1 f_1(x) + \ldots + c_k f_k(x),$$

где $c_1, \ldots, c_k$ — произвольные постоянные. Постоянные $c_1, \ldots, c_k$ можно найти, задав начальные условия — значения $f(0), f(1), \ldots, f(k-1)$. Линейно независимые решения $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ (фундаментальная система) легко находятся в случае уравнения с постоянными коэффициентами:

$$f(x+n) + a_1 f(x+n-1) + \ldots + a_n f(x) = 0. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) ищется в виде $f(x) = \lambda^x$. Характеристич. уравнение для λ:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — его корни и все они различны. Тогда фундаментальная система решений уравнения (7) есть система $\lambda_1^x, \ldots, \lambda_n^x$ и общее решение уравнения (7) представляется формулой

$$f(x) = c_1\lambda_1^x + \ldots + c_n\lambda_n^x.$$

Если λ_1 есть s-кратный корень характеристич. уравнения, то ему соответствуют частные решения

$$\lambda_1^x, x\lambda_1^x, \ldots, x^{s-1}\lambda_1^x.$$

Пусть, напр., рассматривается последовательность чисел, начинающаяся с нуля и единицы, в к-рой каждый последующий член равен сумме двух непосредственно предшествующих ему: 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... (числа Фибоначчи). Ищется выражение для общего члена последовательности. Пусть $f(x)$, $x=0, 1, 2, 3, \ldots$,— общий член последовательности; условие

$$f(x+2)=f(x+1)+f(x),\ f(0)=0,\ f(1)=1,$$

является разностным уравнением с заданными начальными условиями. Характеристич. уравнение имеет вид $\lambda^2-\lambda-1=0$, его корни:

$$\lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

поэтому

$$f(x)=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x;$$

$c_1=1/\sqrt{5}$ и $c_2=-1/\sqrt{5}$ находятся из начальных условий.

К. р. и. развивалось параллельно с основными разделами математич. анализа. Начала К. р. и. содержатся в трудах П. Ферма, И. Барроу, Г. Лейбница. В 18 в. К. р. и. приобрело характер самостоятельной математич. дисциплины. Первое систематич. изложение К. р. и. было дано Б. Тейлором в 1715. Труды математиков 19 в. подготовили почву для современных глав К. р. и. и теории метода конечных разностей. Идеи и методы К. р. и. получили существенное развитие в применении к аналитич. функциям комплексного переменного и задачам вычислительной математики.

● Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; 2 изд., т. 2, М., 1962; Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967; Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975. *А. Ф. Леонтьев.*

КОНЕ́ЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ МЕ́ТОД — см. *Разностных схем теория.*

КОНЕ́ЧНЫХ ЭЛЕМЕ́НТОВ МЕ́ТОД — сеточный метод численного решения задач математической физики, в котором дискретизация исходных краевых задач производится на основе вариационных или проекционных методов при использовании специальных конечномерных подпространств функций, определяемых выбранной сеткой. Специфика этих подпространств состоит в том, что они имеют базисы с локальными носителями, содержащимися внутри объединения небольшого числа ячеек сетки. Обычно в качестве базисных функций в К. э. м. берутся кусочно полиномиальные функции, являющиеся на каждой ячейке сетки интерполяционными многочленами Лагранжа или Эрмита. Название метода происходит от нек-рых его вариантов решения задач строительной механики и теории упругости, в к-рых он трактовался как метод разбиения упругого тела на отдельные элементы, определяемые ячейками сетки и взаимодействующие между собой в узлах сетки. К. э. м. сочетает в себе математич. достоинства вариационных и проекционных методов с разрежённостью матриц получаемых систем алгебраич. уравнений, характерной для систем уравнений разностного метода и существенно облегчающей процесс нахождения решений таких систем. Поэтому методы подобного типа также наз. вариационно-разностными, проекционно-разностными, проекционно-сеточными, методом Галёркина. Проекционно-сеточные методы допускают и подпространства, в к-рых отдельные базисные функции могут и не иметь локального носителя, что может быть вызвано, напр., стремлением лучше приблизить сингулярную часть решения. Среди различных вариантов К. э. м. следует отметить методы граничных конечных элементов решения интегральных граничных уравнений, к к-рым иногда могут быть сведены исходные краевые задачи. Выделяются также классы смешанных, гибридных, конформных и неконформных К. э. м. Нек-рые варианты К. э. м. используют идеи метода колокации. К. э. м. получил широкое распространение на практике как эффективное средство решения многих стационарных задач, включая краевые задачи, вариационные неравенства, задачи на собственные значения, особенно в тех ситуациях, когда сложность исходной задачи, напр. из-за геометрии рассматриваемой области, делает применение разностных методов затруднительным. На его основе строятся и многие важные сеточные методы решения нестационарных задач, в к-рых конечноэлементная дискретизация по пространственным переменным дополняется той или иной дискретизацией по времени.

КОНИ́ЧЕСКАЯ ПОВЕ́РХНОСТЬ — то же, что *конус.*

КОНИ́ЧЕСКАЯ ПРОЕ́КЦИЯ—см. *Картографическая проекция, Проекция.*

КОНИ́ЧЕСКИЕ КООРДИНА́ТЫ — числа u, v, w, связанные с прямоугольными координатами x, y, z формулами

$$x^2=\frac{u^2v^2w^2}{b^2c^2},\ y^2=\frac{u^2}{b^2}\frac{(v^2-b^2)(w^2-b^2)}{b^2-c^2},$$

$$z^2=\frac{u^2}{c^2}\frac{(v^2-c^2)(w^2-c^2)}{c^2-b^2},$$

где $c^2>v^2>b^2>w^2$, $c>b$. Координатные поверхности: сферы (u=const):

$$x^2+y^2+z^2=u^2,$$

конусы, ось к-рых совпадает с осью Oz (v=const):

$$\frac{x^2}{v^2}+\frac{y^2}{v^2-b^2}+\frac{z^2}{v^2-c^2}=0,$$

конусы, ось к-рых совпадает с осью Ox (w=const):

$$\frac{x^2}{w^2}+\frac{y^2}{w^2-b^2}+\frac{z^2}{w^2-c^2}=0.$$

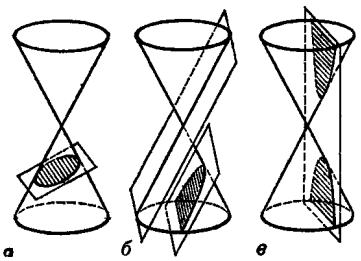
К. к.— ортогональные криволинейные координаты.

Коэффициенты Ламе:

$$L_u=1,\ L_v=\sqrt{\frac{u^2(v^2-w^2)}{(v^2-b^2)(-v^2+c^2)}},$$

$$L_w=\sqrt{\frac{u^2(v^2-w^2)}{(w^2-b^2)(w^2-c^2)}}.$$

КОНИ́ЧЕСКОЕ СЕЧЕ́НИЕ — линия, к-рая получается сечением прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через его вершину. К. с. могут быть трёх типов. 1) Секущая плоскость пересекает все образующие конуса в точках одной его полости (рис., *а*); линия пересечения есть замкнутая овальная кривая — *эллипс*; окружность как частный случай эллипса получается, когда секущая плоскость перпендикулярна оси конуса. 2) Секущая плоскость параллельна одной из касательных плоскостей конуса (рис., *б*); в сечении получается незамкнутая, уходящая в бесконечность кривая — *парабола*, целиком лежащая на одной полости. 3) Секущая плоскость пересекает обе полости конуса (рис., *в*); линия пересечения — *гипербола* — состоит из двух одинаковых незамкнутых, простирающихся в бесконечность частей (ветвей гиперболы), лежащих на обеих полостях конуса.



С точки зрения аналитич. геометрии К. с.— действительные, нераспадающиеся *линии второго порядка.* В тех случаях, когда К. с. имеет центр симметрии (центр), т. е. является эллипсом или гиперболой, его уравнение в декартовой системе координат может быть приведено (путём перенесения начала координат в центр) к виду

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=a_{33}.$$

Дальнейшие исследования таких (наз. центральными) К. с. показывают, что их уравнения могут быть при-

ведены к ещё более простому виду:

$$Ax^2+By^2=C, \qquad (*)$$

если за направления осей координат выбрать т. н. главные направления — направления главных осей (осей симметрии) К. с. Если A и B имеют одинаковые знаки (совпадающие со знаком C), то уравнение (*) определяет эллипс; если A и B разного знака, то — гиперболу.

Уравнение параболы привести к виду (*) нельзя. При надлежащем выборе осей координат (одна ось координат — единственная ось симметрии параболы, другая — перпендикулярная к ней прямая, проходящая через вершину параболы) её уравнение можно привести к виду $y^2=2px$.

К. с. были известны уже математикам Др. Греции. Менехм (ок. 340 до н. э.) открыл, что эллипс, гипербола и парабола являются сечениями конусов. Наиболее полным сочинением, посвящённым этим кривым, были «Конические сечения» Аполлония Пергского (ок. 200 до н. э.). Дальнейшие успехи теории К. с. связаны с созданием в 17 в. новых геометрич. методов: проективного (Ж. Дезарг, Б. Паскаль) и в особенности координатного (Р. Декарт, П. Ферма).

При надлежащем выборе системы координат (ось абсцисс — ось симметрии К. с., ось ординат — касательная к вершине К. с.) уравнение К. с. может быть приведено к виду

$$y^2=2px+\lambda x^2$$

(p и λ — постоянные, $p\neq0$). При $\lambda=0$ уравнение определяет параболу, при $\lambda<0$ — эллипс, при $\lambda>0$ — гиперболу. Геометрич. свойство К. с., содержащееся в последнем уравнении, было известно уже древнегреч. геометрам и послужило для Аполлония Пергского поводом присвоить отдельным типам К. с. названия, сохранившиеся до сих пор: слово «парабола» (греч. παραβολή) означает приложение (т. к. в греч. геометрии превращение прямоугольника данной площади y^2 в равновеликий ему прямоугольник с данным основанием $2p$ наз. приложением данного прямоугольника к этому основанию); слово «эллипс» (греч. ἔλλειψις) — недостаток (приложение с недостатком); слово «гипербола» (греч. ὑπερβολή) — избыток (приложение с избытком).

С переходом к современным методам исследования стереометрич. определение К. с. было заменено планиметрич. определениями этих кривых как множеств точек на плоскости. Так, напр., эллипс определяется как множество точек, для к-рых сумма расстояний от двух данных точек (фокусов) имеет данное значение. Можно дать другое планиметрич. определение К. с., охватывающее все три типа этих кривых: К. с.— множество точек, для каждой из к-рых отношение расстояний до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) равно данному положительному числу (эксцентриситету) e. При $e<1$ К. с.— эллипс; при $e>1$ — гипербола; при $e=1$ — парабола. См. также *Данделена шары*.

Интерес к К. с. всегда поддерживался тем, что эти линии часто встречаются в различных явлениях природы и в человеческой деятельности. В науке К. с. приобрели особое значение после того, как И. Кеплер (1609) открыл из наблюдений, а И. Ньютон (1687) теоретически обосновал законы движения планет (один из них утверждает, что планеты и кометы Солнечной системы движутся по К. с., в одном из фокусов к-рого находится Солнце).

● Александров П. С., Лекции по аналитической геометрии, М., 1968; Бандер Барден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

В. И. Битюцков.

КОНКРЕ́ТНАЯ КАТЕГО́РИЯ (от лат. concretus, букв. — сгущённый, уплотнённый) — *категория*, допускающая изоморфное вложение в категорию множеств St.

КОНСЕ́РВАТИ́ВНОЕ ПО́ЛЕ (от лат. conservativus — сохраняющий) — то же, что *потенциальное поле*.

КОНСТА́НТА (от лат. constans, род. падеж constantis — постоянный, неизменный) — постоянная величина при рассмотрении математических, физических и др. процессов. Постоянство величины x символически записывают $x=\text{const}$. К. обычно обозначают буквой C. Часто термин «К.» употребляется в узком смысле — как постоянная, имеющая определённое числовое значение. Таковы, напр., фундаментальные физич. константы — численные коэффициенты, входящие в уравнения физич. законов.

К. в математической логике — символ формального языка для обозначения нек-рого фиксированного элемента (индивида), фиксированной операции или отношения на к.-л. структуре, описываемой этим языком.

КОНСТРУКТИ́ВНАЯ ЛО́ГИКА (от лат. constructivus — служащий для построения) — совокупность логических законов, применяемых в *конструктивной математике*.

Конструктивная математика имеет ряд общих черт с интуиционистской, поэтому К. л. во многом сходна с интуиционистской логикой. В частности, близки конструктивная и интуиционистская трактовки дизъюнкции и квантора существования, что приводит к отказу в К. л. (так же, как и в интуиционистской) от закона исключённого третьего и закона двойного отрицания. Все формулы, выводимые в интуиционистском исчислении предикатов (исчислении Гейтинга), выражают логич. законы, приемлемые и с конструктивной точки зрения. Поэтому часто исчисление Гейтинга называют также конструктивным исчислением предикатов.

Различия между интуиционистской и К. л. связаны со значительными расхождениями между исходными принципами конструктивного и интуиционистского направлений. Рассмотрения конструктивной математики ограничиваются конструктивными объектами, а интуитивная концепция эффективности отождествляется с одним из точных понятий алгоритма (нормальные алгорифмы, рекурсивные функции и т. д.). Тем самым, в отличие от интуиционистской математики, принимается тезис Чёрча. Своеобразие К. л. проявляется также в принятии ею т. н. принципа конструктивного подбора (принципа Маркова), утверждающего, что если опровергнуто утверждение о неприменимости алгоритма $\mathfrak{A}$ к нек-рому исходному данному, то алгоритм $\mathfrak{A}$ применим к этому исходному данному. Являясь частным случаем закона исключённого третьего и двойного отрицания, принцип конструктивного подбора безусловно приемлем классически. Вместе с тем он отклоняется интуиционистами. Для К. л. характерно большое внимание к вопросам семантики математич. суждений (при этом, ввиду возможности нумерации конструктивных объектов, можно в принципе ограничиться суждениями о натуральных числах). В основе соответствующих семантич. построений лежат идеи А. Гейтинга и А. Н. Колмогорова, развитые затем С. Клини на базе теории рекурсивных функций. Предложенное С. Клини понятие рекурсивной реализуемости позволяет получить нек-рое разъяснение конструктивного смысла арифметич. формул. Напр., реализуемость формулы вида $\forall x\exists y A(x, y)$ означает существование алгоритма, к-рый по всякому натуральному числу m строит такое число n, что предложение $A(m, n)$ истинно. К идеям А. Гейтинга, А. Н. Колмогорова и С. Клини близка теория конструктивного понимания математич. суждений, позволяющая свести истолкование произвольных формул к разъяснению т. н. нормальных формул, не содержащих вхождений дизъюнкции и квантора существования. Дальнейшая трактовка нормальных формул связана, однако, с существенными затруднениями. Оригинальный подход к этому кругу вопросов был развит в 70-х гг. А. А. Марковым, осуществившим ступенчатое построение конструктивной семантики посредством иерархии расширяющихся семантич. систем. В рамках подхода А. А. Маркова была развита также конструктивная семантика импликации.

Дедуктивные системы К. л. не получили столь же значительного развития, поскольку практически все результаты конструктивного математич. анализа могут быть формализованы в интуиционистской арифметике А. Гейтинга, пополненной схемами, выражающими принцип кон-

структивного подбора и эквивалентность арифметич. формулы утверждению о её реализуемости.

● Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; Новиков П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977; Шанин Н. А., О конструктивном понимании математических суждений, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 52, с. 226—311; Марков А. А., Нагорный Н. М., Теория алгорифмов, М., 1984.

Б. А. Кушнер, В. Е. Плиско.

КОНСТРУКТИВНАЯ МАТЕМАТИКА — абстрактная наука о конструктивных процессах, человеческой способности осуществлять их и об их результатах — конструктивных объектах. Абстрактность К. м. проявляется прежде всего в том, что в ней систематически применяются две абстракции: абстракция потенциальной осуществимости и абстракция отождествления. *Абстракцию потенциальной осуществимости* используют, когда отвлекаются от практич. ограничений конструктивных возможностей в пространстве, времени и материале. Абстракцию отождествления используют, когда говорят о двух в том или ином смысле одинаковых объектах как об одном и том же объекте. В К. м. не применяется характерная для теоретико-множественной математики *абстракция актуальной бесконечности*, связанная с рассмотрением никогда не завершаемых процессов как бесконечно продолженных и тем самым как бы завершённых.

Конструктивный процесс, результатом к-рого является объект, одинаковый с A, наз. построением объекта A. Высказывания, связанные с человеческой способностью осуществлять конструктивные процессы, часто формулируются в К. м. в виде теорем существования, утверждающих, что существует объект, удовлетворяющий таким-то требованиям. Под этим подразумевают, что построение такого объекта потенциально осуществимо, т. е. что владеют способом его построения. Это понимание теорем существования отличается от их понимания в теоретико-множественной математике, что вынуждает строить для К. м. свою логику, отличную от обслуживающей теоретико-множественную математику классической математич. логики,— конструктивную математич. логику (см. *Конструктивная логика*).

Понятие конструктивного процесса и конструктивного объекта не определяются в К. м. В таких общих определениях и нет надобности, поскольку в К. м. обычно имеют дело не с конструктивными процессами и конструктивными объектами вообще, а с определёнными видами тех и других.

Простейшим видом конструктивных объектов являются слова в фиксированном алфавите, т. е. ряды букв этого алфавита (слово «буква» понимается здесь как «элементарный знак», т. е. как «знак, частями к-рого мы не интересуемся»; алфавит — это набор букв). Конструктивный процесс, результатом к-рого является слово, состоит в данном случае в выписывании этого слова буква за буквой. Частным случаем слов являются натуральные числа, к-рые мы рассматриваем как слова в алфавите {0,1}, начинающиеся с нуля и не содержащие других вхождений нуля, т. е. как слова 0, 01, 011, 0111, ... Добавляя к этому алфавиту знак минус — и знак дроби /, получают возможность строить рациональные числа как нек-рые слова в алфавите {0,1—, /}. Таким образом, рациональные числа оказываются конструктивными объектами.

Естественно, возник вопрос о построении действительных чисел в рамках К. м. и, далее, вопрос о включении математич. анализа в эти рамки. Эти цели достигнуты на основе уточнённого понятия алгоритма. Каким из известных уточнений этого понятия (*Тьюринга машина*, *рекурсивная функция*, *нормальный алгорифм*) здесь пользоваться, при этом несущественно. В дальнейшем под «алгоритмом» будет пониматься нормальный алгорифм.

Конструктивной последовательностью рациональных (натуральных) чисел будет называться алгоритм, перерабатывающий всякое натуральное число в рациональное (натуральное) число. Без существенного ограничения общности можно считать конструктивную последовательность рациональных чисел алгоритмом в алфавите $\{0,1,-,/,a,b\}$. Запись такого алгоритма будет осуществляться как слово в алфавите {0,1}. О конструктивной последовательности рациональных чисел $\mathfrak{A}$ говорят, что она регулярно сходится, если для всякого натурального числа n соблюдается условие

$$|\mathfrak{A}(n)-\mathfrak{A}(n+1)|\leqslant 2^{-n-1}.$$

Записи регулярно сходящихся последовательностей рациональных чисел наз. конструктивными действительными числами (к. д. ч.; см. также *Конструктивный анализ*). Естественным образом определяются равенство двух к. д. ч., порядковые отношения между ними, а также арифметич. действия над ними и операция взятия абсолютной величины. Арифметич. операции оказываются алгоритмическими: имеется, напр., алгоритм, перерабатывающий всякую пару к. д. ч. в сумму этих к. д. ч. С другой стороны, невозможен алгоритм, распознающий к. д. ч. среди слов в алфавите {0,1}; невозможен алгоритм, распознающий равенство двух к. д. ч.

Далее, на основе теории алгоритмов можно определить понятие конструктивной последовательности к. д. ч. Для всякой такой последовательности оказывается возможным построить к. д. ч., не равное ни одному члену этой последовательности. Это — конструктивный аналог теоремы Кантора о несчётности континуума.

Могут быть определены понятия конструктивной сходимости конструктивной последовательности к. д. ч. в себе и к к. д. ч. Имеет место теорема полноты, утверждающая, что всякая конструктивная последовательность к. д. ч., конструктивно сходящаяся в себе, конструктивно сходится к нек-рому к. д. ч. Однако конструктивный аналог известной теоремы о сходимости ограниченной возрастающей последовательности опровергается на примере.

Согласно определению, к. д. ч. суть слова в алфавите {0,1}. Алгоритмы над этим алфавитом можно применять к к. д. ч., что открывает возможность строить функцию от действительного переменного как алгоритм, перерабатывающий к. д. ч. в к. д. ч. Надо только, чтобы такой алгоритм был согласован с равенством — равные к. д. ч. он должен перерабатывать в равные к. д. ч. Таким образом, получается следующее определение. Алгоритм F над алфавитом {0,1} есть конструктивная функция действительного переменного, если соблюдаются следующие условия: 1) F перерабатывает всякое к. д. ч., к к-рому он применим, в к. д. ч.; 2) всякий раз, когда F применим к какому-либо к. д. ч. x, он применим и ко всякому к. д. ч. y, равному x, и к. д. ч. $F(x)$ и $F(y)$ равны.

На основе этого определения была разработана конструктивная теория функций действительного переменного. Одним из наиболее интересных её результатов является теорема о непрерывности конструктивных функций: всякая конструктивная функция действительного переменного непрерывна всюду, где она определена. Вместе с тем выяснено, что в теории конструктивных функций не имеют места аналоги классич. теорем Вейерштрасса и Кантора о непрерывных функциях на сегменте. В частности, были построены: 1) пример неограниченной конструктивной (и потому непрерывной) функции на сегменте [0,1]; 2) пример ограниченной на этом сегменте конструктивной функции, не имеющей точной верхней границы; 3) пример конструктивной функции, имеющей на сегменте [0,1] точную верхнюю границу, но не достигающей её; 4) пример ограниченной на сегменте [0,1] конструктивной функции, не являющейся равномерно непрерывной ни на каком сегменте, содержащемся в сегменте [0,1]. Эти результаты выявляют глубокое отличие конструктивного математич. анализа от анализа теоретико-множественного.

Успешно разрабатываются многие отделы К. м.: конструктивные теории дифференцирования и интегрирования, конструктивная теория метрич. пространств, конст-

руктивный функциональный анализ, конструктивная теория функций комплексного переменного и др.

● Марков А. А., Нагорный Н. М., Теория алгорифмов, М., 1984; Кушнер Б. А., Лекции по конструктивному математическому анализу, М., 1973. *А. А. Марков.*

КОНСТРУКТИ́ВНАЯ ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ натуральных (рациональных) чисел — *нормальный алгорифм*, перерабатывающий всякое натуральное (рациональное) число в натуральное (рациональное) число. См. также *Конструктивная математика.*

КОНСТРУКТИ́ВНАЯ ТЕО́РИЯ ФУ́НКЦИЙ — понятие, введённое С. Н. Бернштейном, назвавшим конструктивной теорией функций «направление теории функций, которое ставит себе целью дать возможно более простую и удобную основу для качественного изучения и вычисления как эмпирических функций, так и всяких функций, являющихся решениями естественно поставленных задач математического анализа». Имелось в виду, что К. т. ф. должна содержать теорию приближения (аппроксимации) функций в качестве одного из своих разделов. Однако фактически название К. т. ф. получило употребление в более узком смысле, как другое название теории *приближения функций*. В последнее время термин «К. т. ф.» используется реже.

КОНСТРУКТИ́ВНАЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Конструктивный анализ.*

КОНСТРУКТИ́ВНОЕ ДЕЙСТВИ́ТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО́ — см. *Конструктивная математика, Конструктивный анализ.*

КОНСТРУКТИ́ВНОЕ НАПРАВЛЕ́НИЕ в математике — математическое мировоззрение, связанное с признанием исследования конструктивных процессов и конструктивных объектов основной задачей математики.

К кон. 19 в. в математике возникло неконструктивное, теоретико-множественное направление, получившее существенное развитие в трудах К. Вейерштрасса, Р. Дедекинда и в особенности Г. Кантора. Началось построение теории множеств, претендовавшей на роль фундамента всей математики. В этой теории, в соответствии с изречением Г. Кантора «Сущность математики в её свободе», допускался большой произвол при введении «множеств», к-рые затем рассматривались как законченные «объекты». Однако в нач. 20 в. в теории множеств были открыты т. н. *антиномии*, т. е. противоречия, показавшие, что нельзя любым образом объединить «объекты» в «множества». Попытки преодолеть возникающие трудности были сделаны на пути аксиоматизации теории множеств, т. е. превращения её в аксиоматич. науку наподобие геометрии (см. *Аксиоматическая теория множеств*). Это осуществляется так, чтобы всё требуемое для обоснования математики, получалось на основе аксиом, тогда как известные до сих пор антиномии не проходили бы.

Первая попытка в этом направлении была предпринята Э. Цермело, опубликовавшим свою систему аксиом теории множеств в 1908. Известные антиномии теории множеств не проходили в системе Э. Цермело, однако гарантий против появления противоречий не было. Возникла проблема обеспечения непротиворечивости аксиоматически построенной теории множеств. Эту проблему выдвинул и пытался решить Д. Гильберт, основная мысль к-рого состояла в полной формализации аксиоматич. теории множеств, в трактовке её как формальной системы. Задача установления непротиворечивости рассматриваемой теории сводилась бы тогда к доказательству формальной недоказуемости формул определённого вида. Это доказательство должно было быть убедительным рассуждением о конструктивных объектах — формальных доказательствах. Оно, таким образом, должно было укладываться в рамки конструктивной математики. Цель, поставленная Д. Гильбертом, оказалась недостижимой, что было доказано К. Гёделем в 1931. Однако большой интерес представляет предложенное Д. Гильбертом средство — *метаматематика* — конструктивная наука о формальных доказательствах, являющаяся частью конструктивной математики. Программу Д. Гильберта можно охарактеризовать как неудавшуюся попытку обосновать теоретико-множественную математику на базе математики конструктивной, в надёжности к-рой он не сомневался. Самого же Д. Гильберта следует считать одним из основоположников конструктивной математики.

К. н. можно рассматривать как ответвление основанного Л. Брауэром *интуиционизма*, программа к-рого состоит в исследовании умственных математич. построений. Близость К. н. к интуиционизму проявляется в понимании дизъюнкций и теорем существования, а также в трактовке закона исключённого третьего. Расхождения между этими двумя направлениями состоят прежде всего в том, что конструктивисты, в отличие от интуиционистов, не считают свои построения чисто умственным занятием; кроме того, интуиционисты рассуждают о неких «свободно становящихся последовательностях» и рассматривают континуум как «среду свободного становления», тем самым привлекая к рассмотрению неконструктивные объекты. К. н. в математике привело к построению особой науки — *конструктивной математики.* *А. А. Марков.*

КОНСТРУКТИ́ВНЫЙ АНАЛИЗ, рекурсивный анализ, вычислимый анализ,— название, объединяющее различные течения в основаниях математики и математическом анализе. При развитии К. а., как правило, преследуются следующие две принципиальные цели: (1) нетрадиционное построение тех или иных фрагментов анализа на основе более ясных и в большей степени учитывающих реальные вычислительные возможности исходных концепций, нежели теоретико-множественные посылки обычного анализа; (2) изучение эффективности в анализе; введение и изучение вычислимых объектов анализа, в частности исследование вопроса о том, по каким исходным данным можно эффективно находить те или иные вычислимые объекты.

В зависимости от того, преследуются ли обе цели или только вторая из них, исследования по К. а. можно грубо разделить на два типа. Для исследований 1-го типа характерны либо использование нестандартных логик, либо существенные ограничения в употреблении традиционных логич. и математич. средств, в то время как в работах 2-го типа свободно используются традиционная математика и логика. Ко 2-му типу относятся работы А. Тьюринга, С. Банаха, С. Мазура и др., в к-рых выработаны современные концепции вычислимого действительного числа. К 1-му типу относятся, в первую очередь, исследования по интуиционистскому анализу, возникшие в связи с выдвинутой Л. Брауэром интуиционистской программой построения математики (см. *Интуиционизм*) и оказавшие существенное влияние на формирование задач и методов К. а., а также оригинальная и далеко продвинутая система К. а., занимающая промежуточное положение между интуиционистским анализом и системами, использующими точные концепции алгоритма. С 50-х гг. в трудах А. А. Маркова и его учеников интенсивно разрабатывалась система К. а., относящаяся к 1-му типу и укладывающаяся в рамки *конструктивного направления* в математике. Являясь частью *конструктивной математики*, эта система (за к-рой ниже для краткости закрепляется термин «К. а.») сохраняет характерные черты последней. В частности, рассмотрения ограничиваются конструктивными объектами (обычно словами в нек-рых алфавитах или объектами, допускающими очевидное кодирование словами) и проводятся в рамках абстракции потенциальной осуществимости с применением специальной *конструктивной логики*, вырабатываемой с учётом специфики конструктивных объектов как результатов потенциально выполнимых конечных построений. При этом полностью исключается использование абстракций актуальной бесконечности и интуитивное понятие эффективности связывается с одним из точных понятий алгоритма (в большинстве работ, относящихся к рассматриваемой системе К. а., используется понятие нормального алгорифма).

Фундаментальное значение в К. а. имеют понятия конструктивного действительного числа (к. д. ч.) и конструк-

тивной функции. Наиболее распространённое понятие к. д. ч. можно ввести следующим образом. Натуральные числа трактуются как слова вида 0, 01, 011... в алфавите {0,1}. Аналогично рациональные числа вводятся как слова нек-рого вида в алфавите {0,1, /, —}. Наконец, под к. д. ч. подразумеваются рациональные числа или надлежащим образом кодированные словами в нек-ром фиксированном алфавите пары нормальных алгорифмов α, β такие, что α задаёт последовательность рациональных чисел, β (регулятор фундаментальности α) — последовательность натуральных чисел, причём для любых i, j, k из i, $j \geqslant \beta(k)$ следует $|\alpha(i)-\alpha(j)|<2^{-k}$. Таким образом, каждое к. д. ч. является словом, содержащим информацию, позволяющую эффективно находить сколь угодно точные рациональные аппроксимации этого к. д. ч. На к. д. ч. естественным образом вводятся отношения равенства и порядка, а также арифметич. операции, причём последние задаются алгоритмами. Система к. д. ч. с этими отношениями и операциями оказывается полем. Далее можно рассмотреть алгоритмич. последовательности к. д. ч. и развить для них конструктивную теорию сходимости. Центральным фактом такой теории является теорема о полноте конструктивного континуума: по каждой паре нормальных алгорифмов α, β, где α — последовательность к. д. ч., β — её регулятор фундаментальности, можно эффективно найти к. д. ч., к к-рому (конструктивно) сходится α. Имеет место также и теорема о конструктивной несчётности конструктивного континуума: по каждой алгоритмич. последовательности к. д. ч. можно эффективно найти к. д. ч., отличное (в смысле равенства к. д. ч.) от всех членов этой последовательности. Теорема о полноте придаёт значительное сходство классической и конструктивной теории пределов, особенно сильно проявляющееся в вопросах сходимости конкретных, используемых в анализе последовательностей и рядов. Вместе с тем имеются и существенные различия, группирующиеся вокруг принципов компактности и теоремы о сходимости монотонной ограниченной последовательности. На эти различия указывает, в частности, следующий принципиальный результат: можно построить алгоритм γ, задающий последовательность рациональных чисел такую, что $0<\gamma(i)<\gamma(i+1)<1$ при любом i, и вместе с тем невозможен регулятор фундаментальности γ. Таким образом, последовательность γ не сходится ни к какому к. д. ч. и этим же свойством обладает любая её подпоследовательность. Кроме того, множество значений γ не имеет точной верхней грани в конструктивном континууме. Известны также контрпримеры, показывающие, что для конструктивного континуума нарушается лемма Гейне — Бореля о выборе конечного покрытия.

Понятие конструктивной функции (к. ф.) является естественным уточнением интуитивного понятия точечной вычислимой функции над вычислимыми действительными числами. Конструктивной функцией (одного действительного переменного) наз. нормальный алгорифм F такой, что для любых равных к. д. ч. x и y, если F применим к x, то F применим и к y, причём $F(x)$ и $F(y)$ суть равные к. д. ч. В терминах к. ф. могут быть введены элементарные функции (показательная, тригонометрическая и др.), обладающие обычными свойствами; для к. ф. могут быть развиты теории дифференцирования, интегрирования по Риману и т. д., близкие к традиционным и обеспечивающие обычные практич. приложения анализа. Вместе с тем существуют к. ф. с непривычными с точки зрения традиционного анализа свойствами, напр.: может быть построена к. ф., всюду определённая, непрерывная на единичном сегменте и не ограниченная на нём. Не имеет традиционных аналогов и теорема К. а., согласно к-рой всякая к. ф. конструктивно непрерывна в каждой точке, где она определена.

Система понятий и методы К. а., позволяя существенно продвинуться с точки зрения цели (1), оказались также удобными для выявления вычислительных связей в анализе, поскольку многие теоремы К. а. являются либо утверждениями об осуществимости алгоритмов, строящих нек-рые конструктивные объекты по тем или иным исходным данным, либо утверждениями, что искомые алгоритмы невозможны. В частности, установлена неразрешимость большого числа естественных алгоритмич. проблем анализа. Результаты этого типа (совершенно отсутствующие в курсах традиционного анализа) имеют очевидную теоретич. и практич. ценность, т. к. они выявляют потенциальные вычислительные тупики и способствуют чёткому уяснению принципиальных границ вычислительных возможностей. Теоремы о невозможности алгоритмов часто сопровождаются в К. а. теоремами о существовании алгоритмов, решающих рассматриваемые задачи по более полным исходным данным или с произвольной наперёд фиксированной точностью. Сопоставление таких результатов позволяет во многих случаях получить отчётливое представление о том, как можно корректно ставить ту или иную алгоритмич. проблему анализа.

● Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; Кушнер Б. А., Лекции по конструктивному математическому анализу, М., 1973; Гудстейн Р. Л., Рекурсивный математический анализ, пер. с англ., М., 1970; Мартин-Лёф П., Очерки по конструктивной математике, пер. с англ., М., 1975.

Б. А. Кушнер.

КОНСТРУКТИ́ВНЫЙ ОБЪЕ́КТ — одно из первоначальных понятий *конструктивной математики*.

КОНТА́КТНАЯ СХЕ́МА (от лат. contactus — прикосновение) — специальная *управляющая система*, одна из математических моделей реальных устройств, построенных из контактов реле. К. с.— модельный класс управляющих систем, и для него рассматриваются все те же задачи, что и для прочих классов управляющих систем; он особенно удобен при изучении «геометрических» свойств управляющих систем.

КОНТИ́НУУМ (от лат. continuum — непрерывное) — термин, употребляемый для обозначения образований, обладающих известными свойствами непрерывности (полные формулировки см. в пп. 1 и 2), и для обозначения определённой мощности (см. *Мощность* множества), а именно: мощности множества действительных чисел (см. п. 3).

1) Наиболее изученным непрерывным образованием в математике является система действительных чисел, или числовой континуум. Свойства непрерывности системы действительных чисел могут быть охарактеризованы различными способами (при помощи различных *непрерывности аксиом*). Если основным понятием считать понятие неравенства ($a<b$), то непрерывность числового К. можно, напр., охарактеризовать следующими двумя положениями: а) между любыми двумя числами $a<b$ лежит, по крайней мере, ещё одно число c (для к-рого $a<c<b$); б) если все числа разбиты на два класса A и B так, что каждое число a класса A меньше любого числа b класса B, то либо в классе A есть наибольшее число, либо в классе B есть наименьшее число (аксиома непрерывности Дедекинда).

2) В топологии свойства непрерывности пространства или любого множества формируются при помощи понятия предельной точки. Основное понятие связности множества, лежащего в топологич. пространстве (или всего пространства), определяется так: множество M наз. связным, если при любом разбиении его на два непересекающихся непустых подмножества A и B найдётся хотя бы одна точка, принадлежащая одному из них и предельная для другого. Континуумом в топологии наз. любой связный *компакт*. Среди множеств, лежащих на прямой или в n-мерном евклидовом пространстве, компактами являются замкнутые ограниченные множества. Таким образом, в евклидовых пространствах К. можно определить как связные замкнутые ограниченные множества. Единственными К. в этом смысле, лежащими на числовой прямой, являются отрезки (т. е. множества чисел, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$).

3) Мощность множества действительных чисел наз. мощностью континуума и обозначают готич.

буквой c или древнееврейской буквой $\aleph$ («алеф») (в отличие от других мощностей — без индекса). Каждый топологич. К. имеет ту же мощность c. Известно, что мощность c больше мощности $\aleph_0$ счётных множеств. В решении вопроса, является ли мощность К. ближайшей, следующей за $\aleph_0$ мощностью, заключается т. н. *континуума проблема*.

КОНТИ́НУУМА ПРОБЛЕ́МА — задача, состоящая в том, чтобы доказать или опровергнуть средствами теории множеств следующее утверждение, называемое континуум-гипотезой (к.-г.): мощность континуума есть первая мощность, превосходящая мощность множества всех натуральных чисел. Обобщённая континуум-гипотеза (о. к.-г.) гласит, что для любого множества P первая мощность, превосходящая мощность этого множества, есть мощность множества всех подмножеств множества P.

К.-г. была высказана Г. Кантором в нач. 80-х гг. 19 в. Многочисленные попытки доказать к.-г., предпринятые самим Г. Кантором и многими выдающимися математиками кон. 19 — нач. 20 вв., оказались безуспешными. Сложившаяся ситуация привела ряд крупных математиков (Р. Бэр, А. Лебег, Н. Н. Лузин и др.) к убеждению, что К. п. не может быть решена традиционными средствами теории множеств. Это убеждение было решающим образом подтверждено точными методами математич. логики и *аксиоматической теории множеств*. В 1936 К. Гёдель доказал, что о. к.-г. совместна с одной естественной системой аксиоматич. теории множеств и, следовательно, не может быть опровергнута традиционными средствами. Наконец, в 1963 П. Коэн, используя изобретённый им т. н. метод вынуждения, сумел доказать, что и отрицание к.-г. совместно с этой системой, так что к.-г. невозможно доказать с помощью обычных методов теории множеств. Последователи П. Коэна затем получили методом вынуждения много результатов, проливающих свет на роль к.-г. и о. к.-г. и их взаимоотношение с другими теоретико-множественными принципами.

Полученные результаты свидетельствуют, что на современном этапе развития теории множеств возможны различные подходы к основаниям этой науки, существенно различным образом отвечающие на естественные проблемы, такие, напр., как К. п., возникающие в теории множеств.

● Манин Ю. И., Доказуемое и недоказуемое, М., 1979; Коэн П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969.

КОНТИ́НУУМ-ГИПО́ТЕЗА — предположение о том, что всякое бесконечное подмножество множества мощности континуума либо равномощно множеству натуральных чисел, либо имеет мощность континуума. См. *Аксиоматическая теория множеств*, *Континуума проблема*.

КОНТРАВАРИА́НТНЫЙ ТЕ́НЗОР — см. *Тензорное исчисление*.

КО́НУС (лат. conus, от греч. κῶνος) — 1) К., или коническая поверхность,— множество прямых (образующих) пространства, соединяющих все точки некоторой линии (направляющей) с данной точкой (вершиной) пространства. Если направляющая — прямая, то К. превращается в плоскость. Если направляющая — кривая 2-го порядка, не лежащая в одной плоскости с вершиной, то получают К. 2-го порядка (рис. 1, где направляющей служит эллипс). Простейший из К. 2-го порядка является круглый К., или прямой круговой К., направляющей к-рого служит окружность, а вершина ортогонально проецируется в её центр.

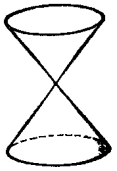


Рис. 1.

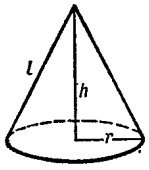


Рис. 2.

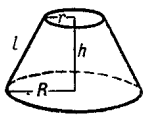


Рис. 3.

2) В элементарной геометрии круглым К. наз. геометрич. тело, ограниченное поверхностью круглого К. и плоскостью, содержащей направляющую окружность (рис. 2). Его объём равен $v=\pi r^2h/3$, а боковая поверхность равна $S=\pi rl$. Если пересечь К. второй плоскостью, параллельной первой, то получается усечённый К. (рис. 3), объём к-рого равен $v=\pi(R^2+r^2+Rr)h/3$, а боковая поверхность равна $s=\pi(R+r)l$.

3) К. в функциональном анализе — см. *Упорядоченное векторное пространство*.

КОНФИГУРА́ЦИЯ (от позднелат. configuratio — расположение) — конечное множество точек, прямых, плоскостей, связанных между собой отношениями принадлежности (инцидентности). К. на плоскости — конечная система p точек и g прямых, расположенных таким образом, что всякая точка системы инцидентна с одним и тем же числом γ прямых этой системы, а всякая прямая инцидентна с одним и тем же числом π точек этой системы. Обозначается К. символом $(p_\gamma g_\pi)$; если $p=g$, то (p_γ). Числа p, g, γ, π связаны соотношением $p\gamma=g\pi$. Пример: К. $(6_2 4_3)$ — полный четырёхсторонник — четыре прямые и шесть точек их попарного пересечения.

КОНФЛИ́КТ (от лат. conflictus — столкновение) — см. *Игр теория*.

КОНФОКА́ЛЬНЫЕ КРИВЫ́Е (от лат. con- — вместе и *фокус*) — то же, что *софокусные кривые*.

КОНФО́РМНАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ (от позднелат. conformis — подобный, соответствующий) — раздел геометрии, в к-ром изучаются свойства фигур, инвариантные относительно конформных преобразований (см. *Конформное отображение*). Частными случаями конформных преобразований являются движение, подобие и инверсия. Всякое конформное преобразование пространства составляется из движения, подобия и инверсии (исключение составляет двумерное пространство, т. е. плоскость, где конформные преобразования образуют гораздо более обширное множество; однако под К. г. плоскости обычно подразумевают раздел геометрии, в к-ром изучаются свойства фигур, неизменные только при круговых преобразованиях, т. е. преобразованиях, разложимых на движения, подобия и инверсии).

Для взаимной однозначности конформных преобразований пространство дополняется одной бесконечно удалённой точкой, к-рая при конформных преобразованиях может перейти в конечную точку. Круговые преобразования плоскости переводят окружности в окружности; при числе измерений $n\geqslant 3$ преобразования, переводящие сферы в сферы, исчерпывают все преобразования, сохраняющие углы (теорема Лиувилля).

● Бушманова Г. В., Норден А. П., Элементы конформной геометрии, Каз., 1972.

КОНФО́РМНАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция*.

КОНФО́РМНАЯ СВЯ́ЗНОСТЬ — см. *Дифференциальная геометрия*.

КОНФО́РМНОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ (от позднелат. conformis — подобный) — непрерывное отображение, сохраняющее форму бесконечно малых фигур.

Основные сведения. Непрерывное отображение $w=f(z)$ области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ наз. конформным в точке $z_0\in D$, если оно в этой точке обладает свойством постоянства растяжений и сохранения углов. Свойство постоянства растяжений в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ (рис. 1) состоит в том, что отношение

$$k(z, z_0; f)=|f(z)-f(z_0)|/|z-z_0|$$

расстояния между $f(z)$ и $f(z_0)$ к расстоянию между z и z_0 стремится к нек-рому конечному пределу

$$\lim_{z\to z_0} k(z, z_0; f)=k(z_0, f),$$

когда z стремится к z_0 произвольным образом; число $k(z_0, f)$ наз. коэффициентом растяжения в точке z_0 при рассматриваемом отображении. Свойство сохранения (консерватизма) углов в точке $z_0 \in D$ при отображении $w=f(z)$ (рис. 2) состоит в том, что любая пара непрерывных кривых γ_1, γ_2, расположенных в D и пересекающихся в точке z_0 под нек-рым углом α (т. е. имеющих касательные в точке z_0, образующие между собой угол α), при рассматриваемом отображении переходит в пару непрерывных кривых Γ_1, Γ_2, пересекающихся в точке $w_0=f(z_0)$ под тем же углом α. Непрерывное отображение области D наз. конформным, если оно конформно в каждой точке этой области. По определению, К. о. области D обязано быть непрерывным и конформным лишь во внутренних точках D, и если говорят о К. о. замкнутой области, то, как правило, имеют в виду непрерывное отображение замкнутой области, конформное в её внутренних точках.

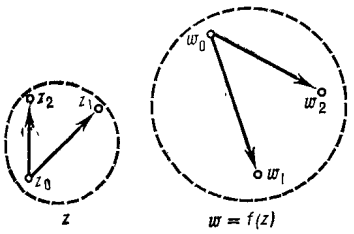


Рис. 1.

Если отображение $w=f(z)$ является конформным в точке $z_0 \in D$, то углы между кривыми в точке z_0 при этом отображении либо все сохраняют свою абсолютную величину и направление отсчёта, либо все сохраняют свою абсолютную величину, изменяя направление отсчёта на противоположное. В первом случае говорят, что отображение в точке z_0 является К. о. 1-го рода, во втором — К. о. 2-го рода. Если функция $w=f(x)=u(z)+iv(z)$ ($u(z)$ и $v(z)$ — действительные функции) задаёт К. о. 2-го рода в точке z_0, то комплексно сопряжённая функция $w=\overline{f(z)}=u(z)-iv(z)$ задаёт К. о. 1-го рода в точке z_0 и наоборот. Поэтому изучаются лишь К. о. 1-го рода и именно их обычно имеют в виду, когда говорят (как ниже) о К. о., не уточняя их род.

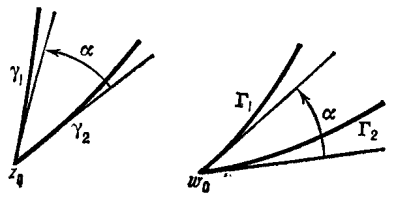


Рис. 2.

Если отображение $w=f(z)$ конформно в точке z_0, то при $z \to z_0$ существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0),$$

равный производной $f'(z_0)$ функции $f(z)$ в точке z_0. При дополнительном предположении, что $f'(z_0) \neq 0$, верно и обратное. Таким образом, если существует $f'(z_0) \neq 0$, то каждый бесконечно малый вектор с началом в точке z_0 при отображении $w=f(z)$ растягивается в $k(z_0, f)=|f'(z_0)|$ раз, поворачивается на угол $\arg f'(z_0)$ и параллельно сдвигается на вектор $f(z_0)-z_0$, а бесконечно малые круги с центром z_0 переходят в бесконечно малые круги с центром $w_0=f(z_0)$.

Отображение $w=f(z)$ является конформным в области D конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ является аналитической в D и $f'(z) \neq 0$ в D. Для конформности отображения $w=f(z)$ (и аналитичности $f(z)$ в области D) достаточно потребовать, чтобы непрерывная функция $f(z)$ обладала в каждой точке $z \in D$ лишь свойством сохранения углов (с сохранением не только величин углов, но и направлений их отсчёта). Если же от непрерывного отображения $w=f(z)$, $z \in D$, потребовать однолистности его (т. е. взаимной однозначности) и постоянства растяжений в каждой точке, то это отображение будет конформным 1-го или 2-го рода, так что либо $f(z)$, либо $\overline{f(z)}$ является аналитич. функцией, производная к-рой всюду в D отлична от нуля.

В случае аналитичности $f(z)$ в нек-рой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ следующие три свойства эквивалентны: а) отображение $w=f(z)$ конформно (1-го рода) в точке z_0; б) функция $f(z)$ — однолистная функция в нек-рой окрестности точки z_0; в) $f'(z_0) \neq 0$. Всякая однолистная аналитическая в области D функция $f(z)$ совершает К. о. области D на область $f(D)$ той же связности; при этом обратная функция $f^{-1}(z)$ является в области $f(D)$ однолистной аналитич. функцией с ненулевой производной. Существуют и неоднолистные К. о. (напр., отображение $w=z^4$ конформно и неоднолистно в полуплоскости $y=\operatorname{Im} z>0$, а $w=e^z$ — во всей плоскости $\mathbb{C}$).

В теории плоских К. о. и её приложениях принципиальным является вопрос о возможности однолистно и конформно отобразить одну заданную область на другую, а в практич. приложениях — вопрос о возможности это сделать посредством сравнительно простых функций.

Первую задачу для случая односвязных областей, границы к-рых не пусты и не вырождаются в точки, решает в положительном смысле теорема Римана о К. о., согласно к-рой, каковы бы ни были две односвязные области D_1 и D_2 расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, отличные от $\overline{\mathbb{C}}$, а также от $\overline{\mathbb{C}}$ с к.-л. исключённой из неё точкой, найдётся бесконечное число аналитических и однолистных в области D_1 функций, каждая из к-рых осуществляет взаимно однозначное и конформное отображение D_1 на D_2. При этом для любой пары конечных точек $a \in D_1$ и $b \in D_2$ и любого действительного числа α, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, найдётся, и притом единственная, отображающая функция f, для к-рой $f(a)=b$, $\arg f'(a)=\alpha$. К. о. $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$ совершают *дробно-линейные функции*

$$w=(az+b)/(cz+d) \neq \text{const}$$

и только они, как и К. о. $\overline{\mathbb{C}}$ с исключённой точкой на $\overline{\mathbb{C}}$ с исключённой точкой.

Вторая задача для нек-рых областей специального вида решается применением элементарных функций комплексного переменного (см. ниже); принципа симметрии; формулы Кристоффеля — Шварца для отображения полуплоскости или круга на многоугольник; приближённых методов К. о. (в частности, метода растяжения, вариационного метода, графич. метода, сведением задачи К. о. к задаче приближённого решения интегральных уравнений и систем таких уравнений); численных методов и всевозможных комбинаций этих приёмов. Если функция $w=f(z)$ конформно отображает односвязную область D на единичный круг $U=\{w: |w|<1\}$ и при этом переводит точку $z_0 \in D$ в точку $w_0=0$, то функция $g(z, z_0) = -\log|f(z)| = -\operatorname{Re} \operatorname{Log} f(x)$ является функцией Грина для задачи Дирихле в области D. Обратно, зная $g(z, z_0)$, из последнего уравнения можно найти $f(z)$. Эта связь К. о. с задачей Дирихле позволяет использовать многочисленные методы решения задачи Дирихле (с целью нахождения функции Грина), в том числе приближённые и численные методы (напр., альтернирующий метод Шварца), для отыскания нужного К. о. Применение К. о. в дифференциальных уравнениях основано также на том, что гармонич. функция $u(z)=u(x, y)$ переменных x, y при конформной замене переменных $z=x+iy=f(\zeta)=f(\xi+i\eta)=g(\xi, \eta)+ih(\xi, \eta)$ превращается в гармонич. функцию $U(\zeta)=U(f(\zeta))=U(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta))=U(\xi, \eta)$ переменных ξ, η. Это позволяет сводить решение задачи Дирихле в области D к решению этой задачи в круге U (последнее даётся интегралом Пуассона).

По теореме Римана все односвязные области расширенной комплексной плоскости с непустыми границами, не вырождающимися в точки, конформно эквивалентны, т. е. каждая из областей этого типа может быть взаимно однозначно и конформно отображена на любую другую область этого типа.

Иначе обстоит дело с К. о. многосвязных областей. Поскольку однолистное К. о. нек-рой области D_1 на другую область D_2 является взаимно однозначным и взаимно непрерывным, то для существования такого отображения необходимо, чтобы D_1 и D_2 имели один и тот же порядок связности, т. е. они одновременно должны быть либо односвязными, либо двусвязными и т. д., либо бесконечносвязными. Однако это необходимое условие не является достаточным, что проявляется уже в случае односвязных областей. Так, круг $|z|<1$ нельзя однолистно и конформно отобразить на конечную плоскость $\mathbb{C}$, а расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ нельзя конформно и однолистно отобразить на круг $|z|<1$ или плоскость $\mathbb{C}$ (на самом деле последние два отображения невозможно выполнить даже топологически). Ещё более жёсткая ситуация имеет место в случае многосвязных областей. Напр., круговое кольцо $D_1=\{z: r_1<|z|<R_1\}$ $(0<r_1<R_1)$ можно однолистно и конформно отобразить на другое круговое кольцо $D_2=\{z: r_2<|z|<R_2\}$ $(0<r_2<R_2)$ тогда и только тогда, когда эти кольца подобны, т. е. $R_1 : r_1 = R_2 : r_2$; в этом случае всякое К. о. D_1 на D_2 является целой линейной функцией $w=e^{i\beta}r_2z/r_1$, где β — нек-рое действительное число. Всякое однолистное К. о. (если таковое существует) области D_i с границей в виде конечного числа попарно непересекающихся окружностей и прямых на область D_2 этого же типа является дробно-линейным отображением.

Всякую конечносвязную область D расширенной комплексной плоскости с непустой границей можно однолистно и конформно отобразить на нек-рую из т. н. канонических областей той же связности (содержащую точку ∞) любого из следующих типов: (I) расширенная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с конечными горизонтальными разрезами; (II) $\overline{\mathbb{C}}$ с исключёнными непересекающимися замкнутыми кругами, (III) $\overline{\mathbb{C}}$ с исключёнными дугами логарифмич. спиралей заданного наклона θ; (IV) $\overline{\mathbb{C}}$ с исключёнными параболич. дугами, и т. п. При этом отдельные отрезки, круги и дуги могут вырождаться в точки. Если потребовать, чтобы заданная точка $a\in D$ при таком отображении перешла в ∞ и при $z\to a$ выполнялось соотношение $f(z)=(z-a)^{-1}+O(z-a)$ при $a\neq\infty$ или соотношение $f(z)=z+O(1/z)$ при $a=\infty$, то в случае канонич. областей первых двух перечисленных типов отображающая функция $w=f(z)$ существует и определяется единственным образом; такое К. о. наз. каноническим.

Эти требования дают пример т. н. условий нормировки или условий единственности К. о., к-рые обеспечивают выделение одной единственной функции из рассматриваемого бесконечного класса К. о. одной заданной области на другую (в случае односвязных областей) или заданной области на канонич. область определённого типа (в случае областей любой связности). Наиболее употребительные условия нормировки К. о. в случае односвязных областей D_1 и D_2 с непустыми границами Γ_i и Γ_2 соответственно, не вырождающимися в точки, таковы.

1) Заданная конечная точка $a\in D_1$ переходит в заданную конечную точку $b\in D_2$, при этом требуется выполнение равенств $f(a)=b$ и $\arg f'(a)=\alpha$, где α — наперёд заданное действительное число, $0\leqslant\alpha<2\pi$; если каждая из областей D_i и D_2 содержит бесконечно удалённую точку ∞ внутри себя, то в качестве условия нормировки можно потребовать выполнения равенств $f(\infty)=\infty$, $\arg(\lim\limits_{z\to\infty} f'(z))=\alpha$ (последнее равенство эквивалентно равенству $\arg(\lim f(z)/z)=\alpha$).

2) Заданная точка $a\in D_1$ переходит в заданную точку $b\in D_2$, а заданная точка $\zeta\in\Gamma_1$ переходит в заданную точку $\omega\in\Gamma_2$, при этом требуется выполнение равенств $f(a)=b$ и $f(\zeta)=\omega$; необходимо, чтобы Γ_1 и Γ_2 были замкнутыми жордановыми кривыми, т. к. именно тогда К. о. $w=f(z)$ области D_1 на область D_2 и обратное К. о. $z=f^{-1}(w)$ непрерывно продолжаются на Γ_1 и Γ_2 соответственно.

3) Заданные три различные точки ζ_1, ζ_2, ζ_3 кривой Γ_i при отображении $w=f(z)$ переходят соответственно в заданные различные между собой точки ω_1, ω_2, ω_3 кривой Γ_2, где Γ_1 и Γ_2 — замкнутые жордановы кривые. При этом нужно обращать внимание на то, чтобы обе тройки точек были одинаково ориентированы на границах соответствующих областей: если при движении по Γ_1 от ζ_1 к ζ_3 через ζ_2 область D_i остаётся слева (справа), то при движении по Γ_2 от ω_1 к ω_3 через ω_2 область D_2 также должна оставаться слева (справа).

Свойства функций, конформно отображающих одну область комплексной плоскости на другую, проявляющиеся вблизи границы отображаемой области или на самой границе, наз. граничными. К числу таких свойств функции $w=f(z)$, однолистно и конформно отображающей рассматриваемую область D_1 с границей Γ_1 на область D_2 с границей Γ_2, относятся: возможность непрерывного продолжения функции $f(z)$ в нек-рую точку $\zeta\in\Gamma_1$ или на всю границу Γ_1; характер разрыва в случае невозможности такого продолжения; наличие конформности продолженного отображения в граничных точках $\zeta\in\Gamma_1$; дифференциально-гладкостные свойства продолженной функции на Γ_1 и на замкнутой области $\bar{D}_1=D_1\cup\Gamma_1$; возможность аналитич. продолжения $f(z)$ через нек-рую дугу $\sigma\subset\Gamma_1$ за пределы области D_1; принадлежность f или её производных к различным классам функций, аналитических в D_1, и т. п. Эти свойства зависят от свойств Γ_1 и Γ_2. Обычно в теории К. о. односвязных областей рассматривается случай, когда одна из областей является единичным кругом $U=\{z : |z|<1\}$ с границей $L=\{z : |z|=1\}$ или верхней полуплоскостью $P=\{z=x+iy : y>0\}$; общий же случай по возможности сводится к одному из этих случаев. Если ограниченная область $D\subset\mathbb{C}$ ограничена жордановой кривой Γ, то всякое (однолистное) К. о. $w=f(z)$ области D на круг U непрерывно продолжается на Γ до взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения замкнутой области $\bar{D}=D\cup\Gamma$ на замкнутый круг $U=U\cup L$ (теорема Каратеодори).

К. о. областей n-мерного евклидова пространства при $n\geqslant 3$ образуют весьма узкий класс т. н. мёбиусовых отображений, каждое из к-рых является либо линейным преобразованием подобия, либо композицией такого линейного преобразования подобия и одной инверсии (теорема Лиувилля). Существенно более обширный класс отображений (как на плоскости, так и в пространстве) образуют т. н. квазиконформные отображения. При этих отображениях формы бесконечно малых фигур искажаются, но в ограниченных пределах; в частности, в ограниченных пределах меняются величины углов, а бесконечно малые шары переходят в бесконечно малые эллипсоиды с ограниченным отношением наибольшей полуоси к наименьшей.

К. о. имеют обширные применения в теории функций, теории потенциала, при решении краевых задач для уравнений математич. физики, прежде всего при решении первой краевой задачи для уравнений Лапласа (задачи Дирихле) и уравнений Пуассона, в гидромеханике плоских течений, в электростатике и магнитостатике, картографии и т. д.

Первые нетривиальные К. о. появились в картографии (т. н. равноугольные картографич. проекции). Это были стереографич. проекция (известная ещё до Птолемея), проекция Меркатора (1569) и равноугольная конич. проекция Ламберта (1772). Л. Эйлер применил к задачам картографии функции комплексного переменного (1777). К. Гаусс создал теорию К. о. двумерных поверхностей друг на друга (1825). Ж. Лиувилль охарактеризовал К. о. пространственных областей (1850). В 1851 Б. Риман сформулировал и доказал методами физики основную теорему теории К. о. плоских односвязных областей. Строгое обоснование доказательства Б. Римана и новое доказательство

его теоремы были даны ок. 1900 Д. Гильбертом, А. Пуанкаре и К. Каратеодори.

Некоторые конформные отображения и их приложения. Растяжения, повороты и параллельные переносы областей комплексной плоскости осуществляют целые линейные функции вида $w=az+b$ при $a\neq 0$. Так, функция $w=kz$ при $k>0$ осуществляет растяжение плоскости (гомотетию) с коэффициентом растяжения k и центром в точке $z=0$ (рис. 3, *а*); функция $w=e^{i\alpha}z=(\cos\alpha+i\sin\alpha)z$ при действительном α осуществляет преобразование поворота плоскости на угол α с центром в точке $z=0$ (рис. 3, *б*); функция $w=z+b$ при каждом комплексном b представляет собой преобразование параллельного переноса на вектор b (рис. 3, *в*). Таким образом, функция $w=az+b$ осуществляет линейное К. о. плоскости, к-рое можно представить как последовательное выполнение трёх преобразований:

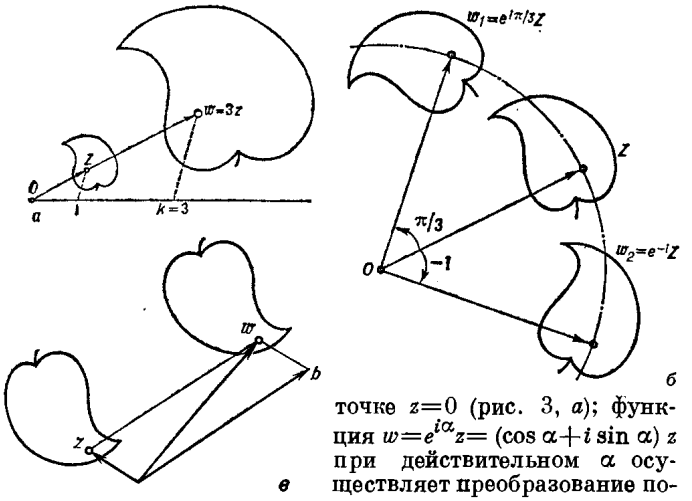


Рис. 3.

$$w_1=|a|z;\ w_2=e^{i\arg a}w_1;\quad w=w_2+b.$$

К. о. полуплоскостей, кругов и внешностей кругов друг на друга осуществляется посредством дробно-линейной функции

$$w=L(z)=\frac{az+b}{cz+d}.$$

При этом каковы бы ни были три различные точки ζ_1, ζ_2, ζ_3, принадлежащие границе одной такой области D_1 (занумерованные так, что при движении по границе D_1 от ζ_1 к ζ_3 через ζ_2 область D_1 остаётся слева), и различные точки ω_1, ω_2, ω_3, принадлежащие границе другой такой области D_2 (занумерованные аналогичным образом), существует, и притом единственная, дробно-линейная функция $w=L(z)$, однолистно и конформно отображающая D_1 на D_2 с условиями нормировки третьего типа: $L(\zeta_k)=\omega_k$ ($k=1, 2, 3$). Эта функция находится из уравнения

$$\frac{w-\omega_1}{w-\omega_2}:\frac{\omega_3-\omega_1}{\omega_3-\omega_2}=\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2}:\frac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_2},\qquad (*)$$

в к-ром каждый числитель или знаменатель заменяется числом 1, если в его запись должна войти точка $\omega_k=\infty$ или точка $z_k=\infty$.

Особо следует отметить общий вид отображений единичного круга $U=\{z:|z|<1\}$ на себя:

$$w=L_1(z)=e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

и отображений верхней полуплоскости $P=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ на этот круг:

$$w=L_2(z)=e^{i\alpha}\frac{z-c}{z-\bar{c}}.$$

Здесь a и c — соответственно прообразы точки 0 при этих отображениях, $\alpha=\arg L_1'(a)=\arg L_2'(a)$, $0\leqslant\alpha<2\pi$. Числа a, где $|a|<1$, c, где $\operatorname{Im}c>0$ и α могут задаваться произвольно. Таким образом, указанный общий вид однолистных К. о. единичного круга U и верхней полуплоскости P на единичный круг позволяет легко учитывать условия нормировки 1-го типа при этих отображениях. Условия нормировки 2-го типа с $b=0$ при этих же отображениях также легко выполнить, если воспользоваться указанным общим видом с заданным a (или c), после чего множитель $e^{i\alpha}$ подобрать из условия соответствия заданных граничных точек ζ и ω. Выражение для К. о., учитывающего нормировку 3-го типа, находится из уравнения (*). Лёгкостью, с к-рой условия нормировки могут быть выполнены при отображении единичного круга на себя или верхней полуплоскости на себя, как раз и объясняется употребительность следующего приёма, с помощью к-рого учитывают условия нормировки при однолистных К. о. друг на друга произвольных областей D_1, D_2 с непустыми невырожденными границами. Именно, обе области D_1 и D_2 к.-л. образом конформно и однолистно отображают на U (или на P) с помощью нек-рых функций $w=f_1(z)$ и $w=f_2(z)$ соответственно, после чего задача об отображении D_1 на D_2 с нек-рыми условиями нормировки сводится к задаче об отображении L единичного круга U (соответственно, верхней полуплоскости P) на себя с выполнением соответствующих условий нормировки. Если функция L найдена, то $f(z)=f_2^{-1}(L(f_1(z)))$ решает исходную задачу. Поэтому ниже приводятся лишь однолистные К. о. различных областей на U (или на P) без к.-л. условий нормировки.

Примеры конформных отображений.

1) Горизонтальная полоса $0<\operatorname{Im}z<\pi$ отображается на верхнюю полуплоскость функцией $w=e^z$. Каждая горизонталь $\operatorname{Im}z=d$ переходит при этом в луч $\arg w=d$, каждый вертикальный отрезок $\operatorname{Re}z=c$, $0<\operatorname{Im}z<\pi$, переходит в дугу $|w|=e^c$, $0<\arg w<\pi$ (рис. 4).

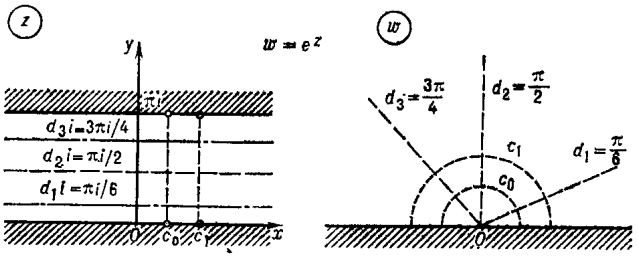


Рис. 4.

2) Вертикальная полоса $|\operatorname{Re}z|<\frac{\pi}{4}$ отображается на единичный круг функцией $w=\operatorname{tg}z$. Каждая вертикаль $\operatorname{Re}z=c$, где $-\frac{\pi}{4}\leqslant c\leqslant\frac{\pi}{4}$, переходит в «меридиан» — круговую дугу с концами i и $-i$, проходящую через точку $z=\operatorname{tg}c$; каждый горизонтальный отрезок $\operatorname{Im}z=d$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant\operatorname{Re}z\leqslant\frac{\pi}{4}$, $-\infty<d<\infty$, переходит в «параллель» — круговую дугу, ортогональную «меридианам», к-рая соединяет левую часть единичной окружности с её правой частью и проходит через точку $w=i\operatorname{th}d$ (рис. 5).

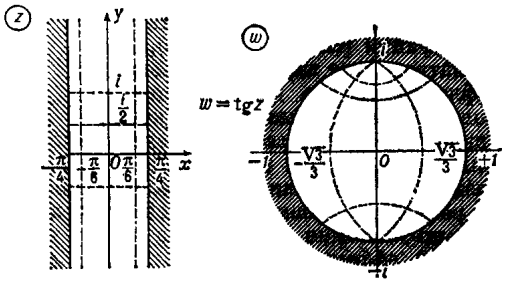


Рис. 5.

3) Угол $V_\alpha=\{z: 0<\arg z<\alpha\}$, $0<\alpha\leqslant 2\pi$, функцией $w=z^{\beta/\alpha}$ отображается на угол $V_\beta=\{z: 0<\arg w<\beta\}$, $0<\beta\leqslant 2\pi$. Каждый луч $\arg z=c$ переходит в луч $\arg w=c\beta/\alpha$, дуга окружности $|z|=d$ переходит в дугу окружности $|z|=d^{\beta/\alpha}$ (рис. 6), $z^{\beta/\alpha}=|z|^{\beta/\alpha}e^{i\beta\arg z/\alpha}$.

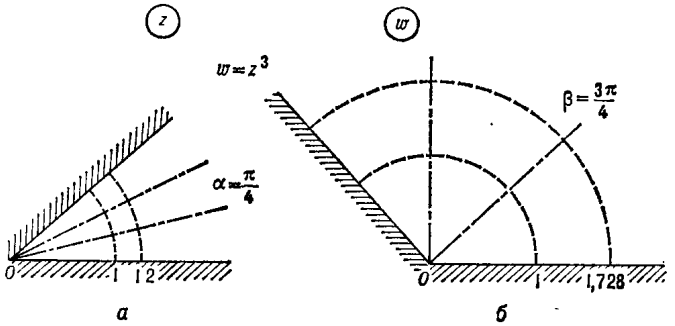


Рис. 6.

● Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973; Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 13 изд., М., 1984; Маркушевич А. И., Краткий курс теории аналитических функций, 4 изд., М., 1978; Коппенфельс В., Штальман Ф., Практика конформных отображений, пер. с нем., М., 1963.

Е. П. Долженко.

КОНХО́ИДА кривой (от греч. κογχοειδής — похожий на раковину) — плоская кривая, получающаяся при увеличении или уменьшении радиус-вектора каждой точки данной плоской кривой на постоянный отрезок l. Если уравнение данной кривой в полярных координатах: $\rho=f(\varphi)$, то уравнение её К. имеет вид $\rho_1=f(\varphi)\pm l$. Примеры: К. прямой — *Никомеда конхоида*, К. окружности — *Паскаля улитка*, К. *Ферма спирали — параболическая спираль.*

КОНЪЮНКТИ́ВНАЯ НОРМА́ЛЬНАЯ ФО́РМА — см. *Алгебра логики.*

КОНЪЮ́НКЦИЯ (от лат. conjunctio — союз, связь) — логическая операция, заключающаяся в соединении двух данных высказываний A и B в новое высказывание «A и B». В формализованных языках К. высказываний A и B обозначается $A\&B$, $A\wedge B$, $A\cdot B$, AB (читается: «A и B», «имеет место A и имеет место B»), A и B — конъюнктивные члены высказывания $A\&B$. Употреблению К. в математич. логике соответствует следующая истинностная таблица (И означает «истина», Л — «ложь»):

A	B	$A\&B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

из к-рой видно, что высказывание $A\&B$ истинно только при истинности обоих высказываний A и B.

КООПЕРАТИ́ВНАЯ ИГРА́ (от лат. cooperativus — сотрудничающий) — модель конфликтной ситуации (см. *Игр теория*), в которой рассматривается зависимость результата конфликта только от объединения участников в те или иные союзы (коалиции). В виде К. и. естественно представляются различные модели рынка, схемы голосования, проблемы обоснования дележа прибыли (или распределения потерь), полученной в результате совместных действий, а также другие социально-экономич. явления, в к-рых присутствует кооперативный эффект.

Наиболее простым и хорошо изученным объектом является т. н. классическая К. и., к-рая задаётся как пара $\Gamma=\langle I, v\rangle$, где I — конечное множество участников (игроков), а v — действительная функция, определённая на семействе всех подмножеств I (коалиций) и наз. характеристической функцией. Значение $v(S)$ трактуется, как тот суммарный выигрыш, к-рый могут гарантировать себе (т. е. обеспечить независимо от действий остальных игроков) игроки из S, если они объединятся в одну коалицию. Данная модель правомерна, если выполнены следующие условия. Во-первых, полезности игроков, определяемые их выигрышами, измеряются в одной шкале и могут передаваться игроками друг другу (в этих условиях для коалиции важен именно суммарный выигрыш её членов); во-вторых, гарантированный выигрыш коалиции S определяется только самой этой коалицией. Так будет, напр., если всякий раз, когда образуется к.-л. коалиция S, остальные игроки из $I\setminus S$ заведомо объединяются с целью противодействия коалиции S. Примером теории, к к-рой приводит отказ от первого условия, может служить теория *игр без побочных платежей.* Отказ от второго условия приводит к играм в форме функции разбиения. В последней теории рассматриваются игры, в к-рых выигрыш коалиции S зависит от того, как группируются в коалиции не вошедшие в S игроки. Формально такие игры задаются функциями v, к-рые каждому разбиению $P=\{P_1, \ldots, P_k\}$ множества I на коалиции ставят в соответствие вектор

$$v^P=(v^P(P_1), \ldots, v^P(P_k))$$

выигрышей этих коалиций.

Если число участников конфликта велико, то целесообразно моделировать его К. и. с бесконечным числом игроков. При континуальном множестве I функция v, обладающая нек-рыми чертами меры, задаётся не на множестве всех подмножеств I, а на нек-рой σ-алгебре подмножеств I. Наиболее изученным частным случаем таких игр являются кооперативные *неатомические игры.*

Под решением К. и. $\langle I, v\rangle$ понимается выбор некрого «разумного» подмножества векторов выигрышей из $\mathbb{R}^I$. Различные варианты условий такой разумности отражают те или иные интуитивные представления об оптимальности и наз. принципами оптимальности. Нек-рые из них опираются на те или иные варианты отношения предпочтения на $\mathbb{R}^I$, наз. в теории К. и. доминированием. По определению, для $x, y\in\mathbb{R}^I$ вектор x доминирует y, если найдётся такая коалиция S, что

$$\sum_{i\in S} x_i\leqslant v(S) \text{ и } x_i>y_i \text{ для } i\in S.$$

Исторически первый принцип оптимальности, связанный с К. и., приводит к решению по Нейману—Моргенштерну (Н — М-решению): для произвольного $A\subset\mathbb{R}^I$ множество V наз. Н—М-решением множества A, если $V\subset A$, векторы из V друг друга не доминируют и любой вектор из $A\setminus V$ доминируется вектором из V. Обычно в качестве A рассматривают множество

$$\left\{x\in\mathbb{R}^I \,\middle|\, \sum_{i\in I} x_i=v(I);\ x_i\geqslant v(\{i\}),\ i\in I\right\},$$

наз. множеством дележей. Реализацией другого принципа оптимальности является множество всех недоминируемых дележей, к-рое наз. c-ядром. Кроме этих представлений о решениях в К. и. рассматриваются и другие.

● Розенмюллер И., Кооперативные игры и рынки, пер. с нем., М., 1974.

КООРДИНА́ТЫ (от лат. co- — совместно и ordinatus — упорядоченный, определённый) — числа, заданием которых определяется положение точки на плоскости, на поверхности или в пространстве. Первыми вошедшими в систематич. употребление К. являются астрономич. и географич. К.— широта и долгота, определяющие положение точки на небесной сфере или на поверхности земного шара. В 14 в. Н. Орем пользовался К. на плоскости для построения графиков, называя долготой и широтой то, что теперь называют абсциссой и ординатой. Более систематически К. стали применяться к вопросам геометрии на плоскости в 17 в. Заслуга выяснения всего значения метода К., позволяющего систематически переводить задачи геометрии на язык математич. анализа и обратно, истолковывать геометрически факты анализа, принадлежит Р. Декарту. Кроме К. точки, рассматривают также К. прямой, плоскости и др. геометрич. объектов.

Координаты точки на плоскости. Аффинные, или общие декартовы координаты, точки на плоскости получают, выбирая точку O (начало коор-

динат) и два не лежащих на одной прямой вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (базисных вектора), исходящих из точки O. Положение точки M определяется (в выбраной системе координат) двумя К.: абсциссой

$$x=\frac{\overrightarrow{OX}}{\overrightarrow{OA}}$$

и ординатой

$$y=\frac{\overrightarrow{OY}}{\overrightarrow{OB}},$$

где XM параллельно OB и YM параллельно OA (рис. 1, где $x=2$, $y=-1$).

В частном случае, когда векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ перпендикулярны и имеют одну и ту же длину, получают наиболее употребительные прямоугольные координаты. Если угол между $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ произволен, но длины этих векторов одинаковы, то получают те косоугольные координаты, рассмотрением к-рых ограничивался сам Р. Декарт. См. также *Декартова система координат*.

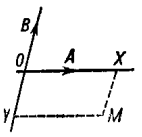


Рис. 1.

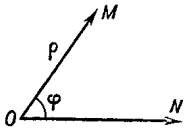


Рис. 2.

Полярные координаты точки на плоскости получают (рис. 2), выбирая точку O (полюс), выходящий из неё луч ON (полярная ось) и единицу измерения длин. Координатами точки M служат расстояние (полярный радиус) $\rho=OM$ и угол (полярный угол) $\varphi=\angle NOM$. Чтобы получить возможность поставить в соответствие каждой точке плоскости M пару чисел (полярные координаты) (ρ, φ), достаточно рассматривать ρ и φ, подчинённые неравенствам $0\leqslant\rho<\infty$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. За исключением точки O, для к-рой $\rho=0$, а угол φ не определён, соответствие между точками M, отличными от O и парами (ρ, φ), подчинёнными указанным условиям, взаимно однозначно. См. также *Полярные координаты*.

О других специальных системах К. на плоскости см. *Биполярные координаты*, *Параболические координаты*, *Эллиптические координаты*.

В случае общих декартовых К. линии $x=\text{const}$ образуют пучок прямых, параллельных оси Oy, а линии $y=\text{const}$ — другой пучок прямых, параллельных оси Ox; через каждую точку плоскости $M(x_0, y_0)$ проходит одна прямая первого пучка ($x=x_0$) и одна прямая второго пучка ($y=y_0$). В случае полярных К. линии $\rho=\text{const}$ являются окружностями, а линии $\varphi=\text{const}$ — лучами, выходящими из начальной точки O; через каждую точку M, отличную от O, проходит ровно по одной линии каждого из двух семейств; отметки ρ_0 и φ_0 этих двух линий и являются К. точки M. В более общем случае можно рассмотреть в к.-л. области G плоскости две функции точки $u(M)$ и $v(M)$ такого рода, что каждая линия $u(M)=\text{const}$ пересекается с каждой линией семейства $v(M)=\text{const}$ в пределах области G не более чем в одной точке. В этом случае числа $u(M)$ и $v(M)$ однозначно определяют положение точки M в области G, т. е. являются К. точки M в этой области; линии, определяемые уравнениями $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$, называют при этом координатными линиями.

Криволинейные координаты на поверхности. Изложенная идея применима к введению криволинейных координат на произвольной поверхности. Напр., для случая долготы φ и широты θ на сфере линиями $\varphi=\text{const}$ являются меридианы, а линиями $\theta=\text{const}$ — параллели. Криволинейные К. на произвольной поверхности используются в дифференциальной геометрии поверхностей. См. также *Криволинейные координаты*.

Однородные координаты на плоскости. Евклидова плоскость, дополненная бесконечно удалёнными элементами, может рассматриваться с проективной точки зрения как замкнутая поверхность (см. *Проективная плоскость*). На всей проективной плоскости в целом введение К., характеризующих положение точки парой чисел (u, v) с сохранением взаимной однозначности и непрерывности соответствия, невозможно. Вместо этого пользуются однородными координатами. При этом каждой точке ставятся в соответствие не пары, а тройки чисел (x_1, x_2, x_3), причём двум тройкам (x_1, x_2, x_3) и (x_1', x_2', x_3') соответствует одна и та же точка только тогда, когда входящие в них числа пропорциональны, т. е. существует такой множитель λ, что

$$x_1'=\lambda x_1,\quad x_2'=\lambda x_2,\quad x_3'=\lambda x_3.$$

См. также *Проективные координаты*, *Тангенциальные координаты*.

Координаты точки в пространстве. Аффинные, или общие декартовы координаты, в трёхмерном пространстве вводятся заданием точки O и трёх векторов $e_x=\overrightarrow{OA}$, $e_y=\overrightarrow{OB}$, $e_z=\overrightarrow{OC}$, не лежащих в одной плоскости. Для получения К. x, y, z точки M вектор $\overrightarrow{OM}$ представляют в виде

$$\overrightarrow{OM}=xe_x+ye_y+ze_z.$$

В простейшем случае прямоугольных координат векторы e_x, e_y, e_z попарно перпендикулярны и имеют единичную длину. В пространстве возможны два существенно различных типа систем прямоугольных К.: правая система (рис. 3, *а*, где e_y и e_z лежат в плоскости чертежа, а e_x направлен вперёд, к читателю) и левая система (рис. 3, *б*, где e_x и e_z лежат в плоскости чертежа, а e_y направлен к читателю).

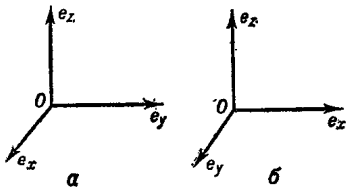


Рис. 3.

В пространстве пользуются также системами криволинейных К., общая схема к-рых такова: в к.-л. области G пространства рассматриваются три функции точки $u(M)$, $v(M)$, $w(M)$, подчинённые условию, чтобы через каждую точку M области G проходила одна поверхность семейства $u=\text{const}$, одна поверхность семейства $v=\text{const}$ и одна поверхность семейства $w=\text{const}$. Тем самым каждой точке ставятся в соответствие три числа (u, v, w) — её К. на поверхности, определяемые уравнениями $u=\text{const}$ или $v=\text{const}$, или $w=\text{const}$, называемые *криволинейными координатами*.

А. Н. Колмогоров.

КОРЕНЬ — 1) К. степени n из числа a — число x (обозначаемое $\sqrt[n]{a}$), n-я степень x^n которого равна a. Действие нахождения корня наз. *извлечением корня*. При $a\neq0$ в области комплексных чисел существует n различных значений К., напр., значениями $\sqrt[3]{8}$ являются: 2; $-1+i\sqrt{3}$; $-1-i\sqrt{3}$. К нахождению К. из чисел приводили математиков древности различные геометрич. задачи. Среди вавилонских клинописных текстов (2-е тыс. до н. э.) имеются описания приближённого нахождения К. и таблицы квадратных К., а в египетских папирусах встречается для действия извлечения К. и особый знак. Древнегреч. математики установили несоизмеримость стороны квадрата с его диагональю (равной $a\sqrt{2}$, если a — его сторона), что позднее привело к открытию иррациональности. Ариабхата (5 в.) дал правила для извлечения квадратных и кубич. корней. Омар Хайям (2-я пол. 11 — нач. 12 вв.), аль-Каши (15 в.), М. Штифель (16 в.) извлекали К. высших степеней, исходя из формулы для $(a+b)^n$. Л. Эйлер (18 в.) дал сохранившие своё значение до наших дней приближённые способы извлечения К. Квадратные К. из отрицательных чисел, встречающиеся в 16 в. у Дж. Кардано и Р. Бомбелли, привели к открытию комплексных чисел. Об истории знака для К. см. в ст. *Математические знаки*.

2) К. а л г е б р а и ч е с к о г о у р а в н е н и я

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0 \qquad (*)$$

— число c, которое после подстановки его вместо x обращает уравнение в тождество. К. уравнения (*) наз. также и к о р н е м м н о г о ч л е н а

$$f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

Если c является К. многочлена $f_n(x)$, то $f_n(x)$ делится без остатка на $x-c$. См. также *Алгебраическое уравнение.*

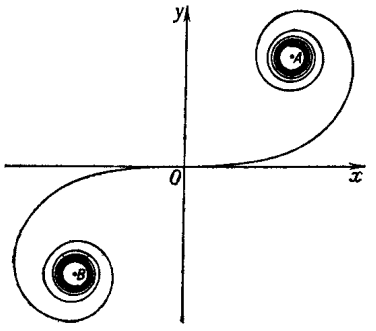
3) К. и з е д и н и ц ы — решение *двучленного уравнения* $x^n=1$.

КОРНЕВО́Й ВЕ́КТОР о п е р а т о р а A — обобщение понятия собственного вектора; элемент x векторного пространства X, в котором действует оператор A такой, что $(A-\lambda I)^n x=0$. Наименьшее из таких натуральных чисел n наз. в ы с о т о й К. в. Таким образом, собственный вектор — это К. в. высоты 1.

КО́РНЮ СПИРА́ЛЬ, к л о т о и д а,— плоская трансцендентная кривая (рис.). Натуральное уравнение:

$$R=\frac{k}{s},$$

т. е. радиус кривизны R обратно пропорционален длине дуги s; относится к псевдоспиралям (см. *Спирали*). Параметрич. уравнения:



$$x=\int_0^s \cos\frac{s^2}{2k}\,ds;$$

$$y=\int_0^s \sin\frac{s^2}{2k}\,ds.$$

К. с. состоит из двух ветвей, симметричных относительно начала координат, являющегося точкой перегиба (касательная — ось Ox). Две асимптотич. точки:

$$A\left(\frac{\sqrt{\pi k}}{2},\ \frac{\sqrt{\pi k}}{2}\right) \text{ и } B\left(-\frac{\sqrt{\pi k}}{2},\ -\frac{\sqrt{\pi k}}{2}\right).$$

К. с. иногда наз. с п и р а л ь ю Э й л е р а по имени Л. Эйлера, у к-рого она впервые встречается (1744). М. Корню (1874) исследовал кривую в связи с графич. расчётами дифракции света.

КОРРЕ́КТНЫЕ ЗАДА́ЧИ (от лат. correctus — исправленный) — классы математических задач, отвечающих некоторым условиям определённости их решений. Многие математич. задачи состоят в том, что по исходным данным u ищется решение z. При этом считается, что u и z связаны функциональной зависимостью $z=R(u)$. Задача наз. к о р р е к т н о й з а д а ч е й (или к о р р е к т н о п о с т а в л е н н о й), если выполнены следующие условия (у с л о в и я к о р р е к т н о с т и): 1) задача имеет решение при любых допустимых исходных данных (существование решения); 2) каждым исходным данным u соответствует только одно решение (однозначность задачи); 3) решение устойчиво.

Смысл первого условия заключается в том, что среди исходных данных нет противоречащих друг другу условий, что исключало бы возможность решения задачи.

Второе условие означает, что исходных данных достаточно для однозначной определённости решений задачи. Эти два условия обычно наз. условиями математич. определённости задачи.

Третье условие заключается в следующем. Если u_1 и u_2 — два различных набора исходных данных, мера уклонения к-рых друг от друга достаточно мала, то мера уклонения решений $z_1=R(u_1)$ и $z_2=R(u_2)$ меньше любой наперёд заданной меры точности. При этом предполагается, что в многообразии $U=\{u\}$ допустимых исходных данных и в многообразии возможных решений $Z=\{z\}$ установлено понятие меры уклонения (или меры близости) $\rho(u_1, u_2)$ и $\rho^*(z_1, z_2)$. Третье условие обычно трактуется как физическая детерминированность задачи. Это объясняется тем, что исходные данные физич. задачи, как правило, задаются с нек-рой погрешностью; при нарушении же третьего условия как угодно малые возмущения исходных данных могут вызвать большие отклонения в решении.

Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному условию корректности, наз. *некорректными задачами* (или н е к о р р е к т н о п о с т а в л е н н ы м и).

Внимание к корректности задач было привлечено Ж. Адамаром (1923) в связи с решением краевых задач для уравнений с частными производными. Понятие корректности задач явилось, в частности, поводом для классификации краевых задач таких уравнений.

КОРРЕЛЯ́ЦИИ КОЭ́ФФИЦИЕ́НТ — числовая характеристика совместного распределения двух случайных величин, выражающая их взаимосвязь. См. *Корреляция.*

КОРРЕЛЯЦИО́ННАЯ МА́ТРИЦА — матрица коэффициентов *корреляции* нескольких случайных величин.

КОРРЕЛЯЦИО́ННАЯ ФУ́НКЦИЯ — характеристика случайного процесса. К. ф. определяется равенством

$$B(t, s)=\mathsf{E}[X(t)-\mathsf{E}X(t)][X(s)-\mathsf{E}X(s)],$$

где $\{X(t);\ t\in T\}$ — случайный процесс и $t, s\in T$. Для того чтобы К. ф. была определена, следует предположить, что процесс $X(t)$ при всех $t\in T$ имеет 2-й момент $\mathsf{E}X(t)^2$. Параметр t пробегает здесь нек-рое подмножество T действительной прямой и обычно интерпретируется как «время». См. также *Стационарный случайный процесс.*

КОРРЕЛЯЦИО́ННОЕ ПО́ЛЕ — см. *Корреляционный анализ, Регрессионный анализ.*

КОРРЕЛЯЦИО́ННЫЙ АНА́ЛИЗ — совокупность основанных на математической теории *корреляции* методов обнаружения корреляционной зависимости между случайными величинами или признаками. К. а. экспериментальных данных для двух случайных величин заключает в себе следующие основные практич. приёмы: 1) построение корреляционного поля и составление корреляционной таблицы; 2) вычисление выборочных коэффициентов корреляции и корреляционных отношений; 3) проверка статистич. гипотезы значимости связи. Дальнейшее исследование заключается в установлении конкретного вида зависимости между величинами (см. *Регрессионный анализ*). Зависимость между тремя и большим числом случайных величин или признаков изучается методами многомерного К. а. (вычисление частных и множественных коэффициентов корреляции и корреляционных отношений).

К о р р е л я ц и о н н о е п о л е и к о р р е л я ц и о н н а я т а б л и ц а являются вспомогательными средствами при анализе выборочных данных. При нанесении на координатную плоскость двумерных выборочных точек получают к о р р е л я ц и о н н о е п о л е. По характеру расположения точек поля можно составить предварительное мнение о форме зависимости случайных величин (напр., о том, что одна величина в среднем возрастает или убывает при возрастании другой). Для численной обработки результаты обычно группируют и представляют в форме к о р р е л я ц и о н н о й т а б л и ц ы. В каждой клетке корреляционной таблицы (см. пример в ст. *Корреляция*) приводятся численности n_{ij} тех пар (x, y), компоненты к-рых попадают в соответствующие интервалы группировки по каждой переменной. Предполагая длины интервалов группировки (по каждому из переменных) равными между собой, выбирают центры x_i (соответственно, y_j) этих интервалов и числа n_{ij} в качестве основы для расчётов.

К о э ф ф и ц и е н т к о р р е л я ц и и и к о р р е л я ц и о н н о е о т н о ш е н и е дают более точную информацию о характере и силе связи. Выборочный коэффициент корреляции определяется по формуле

$$\hat{\rho}=\frac{\sum_i\sum_j (x_i-\bar{x})(y_j-\bar{y})n_{ij}}{\sqrt{\sum_i n_{i\cdot}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_j n_{\cdot j}(y_j-\bar{y})^2}},$$

где

$$n_{i\cdot} = \sum_j n_{ij}, \quad n_{\cdot j} = \sum_i n_{ij},$$
$$\bar{x} = \sum_i n_{i\cdot} x_i / n, \quad \bar{y} = \sum_j n_{\cdot j} y_j / n.$$

При большом числе независимых наблюдений, подчиняющихся одному и тому же распределению, и при надлежащем выборе интервалов группировки коэффициент $\hat{\rho}$ близок к истинному коэффициенту корреляции ρ. Поэтому использование $\hat{\rho}$ как меры связи имеет чётко определённый смысл для тех распределений, для к-рых естественной мерой зависимости служит ρ (т. е. для нормальных или близких к ним распределений). Во всех других случаях в качестве характеристики силы связи рекомендуется использовать корреляционное отношение η, интерпретация к-рого не зависит от вида исследуемой зависимости. Выборочное корреляционное отношение $\hat{\eta}_{Y|X}$ вычисляется по данным корреляционных таблиц:

$$\hat{\eta}^2_{Y|X} = \frac{\frac{1}{n}\sum_i n_{i\cdot}(\bar{y}_i - \bar{y})^2}{\frac{1}{n}\sum_j n_{\cdot j}(y_j - \bar{y})^2},$$

где числитель характеризует рассеяние условных средних значений $\bar{y}_i = \sum_j n_{ij} y_j / n_i$ около безусловного среднего $\bar{y}$; аналогично определяется выборочное значение $\hat{\eta}_{X|Y}$. Величина $\hat{\eta}^2_{Y|X} - \hat{\rho}^2$ используется в качестве меры отклонения зависимости от линейной, т. к. обычно $\hat{\eta}^2_{Y|X} > \rho^2$, $\hat{\eta}^2_{X|Y} > \rho^2$ и лишь в случае линейной зависимости $\rho^2 = \hat{\eta}^2_{Y|X} = \hat{\eta}^2_{X|Y}$. Так, при анализе корреляции между высотой и диаметром северной сосны было обнаружено, что условные средние значения высоты сосны для заданного диаметра связаны нелинейной зависимостью. Корреляционное отношение (высоты к диаметру) в этом случае равно 0,813, а коэффициент корреляции равен 0,762.

Проверка гипотезы значимости связи основывается на знании законов распределения выборочных корреляционных характеристик. В случае нормального распределения величина выборочного коэффициента корреляции $\hat{\rho}$ считается значимо отличной от нуля, если выполняется неравенство

$$(\hat{\rho})^2 > \left[1 + (n-2)/t^2_\alpha\right]^{-1},$$

где t_α есть критич. значение t-распределения Стьюдента с $n-2$ степенями свободы, соответствующее выбранному уровню значимости α (см. *Стьюдента распределение*, *Стьюдента критерий*). Если же известно, что $\rho \neq 0$, то необходимо воспользоваться z-преобразованием Фишера (не зависящим от ρ и n):

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}.$$

Исходя из приближённой нормальности z, можно определить доверительные интервалы для истинного коэффициента корреляции ρ.

В случае, когда изучаются не количественные признаки, а качественные, обычные меры зависимости не годятся. Однако если удаётся к.-л. упорядочить изучаемые объекты в отношении нек-рого признака, т. е. приписать им порядковые номера — ранги (по два номера в соответствии с двумя признаками), то в качестве выборочной характеристики связи можно воспользоваться, напр., коэффициентом корреляции (ранговым коэффициентом корреляции):

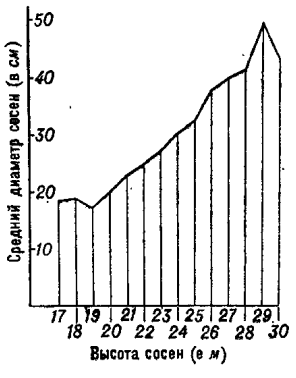
$$R = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2-1)},$$

где d_i — разность рангов по обоим признакам для каждого объекта. По степени уклонения R от нуля можно сделать нек-рое заключение о степени зависимости качественных признаков. Проверка гипотезы независимости признаков при небольшом объёме выборки производится с помощью специальных таблиц, а при $n > 10$ для вычисления критич. значений выборочных коэффициентов пользуются тем, что эти величины распределены приближённо нормально.

А. В. Прохоров.

КОРРЕЛЯЦИЯ (от позднелат. correlatio — соотношение) в математической статистике — вероятностная (статистическая) зависимость между величинами, не имеющая, вообще говоря, строго функционального характера. В отличие от функциональной, корреляционная зависимость возникает тогда, когда одна из величин зависит не только от данной второй, но и от ряда случайных факторов, или когда среди условий, от к-рых зависят и та и другая величины, имеются общие для них обоих условия. Зависимости такого рода можно описать, напр., при помощи корреляционной таблицы. Из таблицы (стр. 296) видно, что при увеличении высоты сосен в среднем растёт и диаметр их стволов; однако сосны заданной высоты (напр., 23 м) имеют распределение диаметров с довольно большим рассеянием. Если в среднем 23-метровые сосны толще 22-метровых, то для отдельных сосен это соотношение может заметным образом нарушаться. Статистическая К. в обследованной конечной совокупности наиболее интересна тогда, когда она указывает на существование закономерной связи между изучаемыми явлениями.

В основе математич. теории К. лежит предположение о том, что изучаемые явления подчинены определённым вероятностным закономерностям (см. *Вероятность*, *Вероятностей теория*). Зависимость между двумя случайными событиями проявляется в том, что условная вероятность одного из них при наступлении другого отличается от безусловной вероятности. Аналогично, влияние одной случайной величины на другую характеризуется условными распределениями первой при фиксированных значениях второй. Пусть для каждого значения x случайной величины X определено условное математическое ожидание $y(x) = \mathsf{E}(Y|X=x)$ случайной величины Y. Функция $y(x)$ наз. *регрессией* величины Y по X, а её график — линией регрессии Y по X. Зависимость Y от X проявляется в изменении средних значений Y при изменении X, хотя при каждом фиксированном значении $X=x$ величина Y остаётся случайной величиной с определённым рассеянием.



Линия регрессии может быть приближённо восстановлена по достаточно обширной корреляционной таблице: за приближённое значение $y(x)$ принимают среднее из тех наблюдённых значений Y, к-рым соответствует значение $X=x$. На рисунке изображена приближённая линия регрессии для зависимости среднего диаметра сосен от высоты в соответствии с таблицей. В средней части эта линия, по-видимому, хорошо выражает действительную закономерность. Если число наблюдений, соответствующих нек-рым значениям X, недостаточно велико, то такой метод может привести к ненадёжным результатам. Так, точки линии, соответствующие высотам 29 и 30 м, ненадёжны ввиду малочисленности материала.

Пусть $m_Y = \mathsf{E}(Y)$ — безусловное математич. ожидание Y. Если величины независимы, то все условные математич. ожидания Y не зависят от X и совпадают с безусловным математич. ожиданием:

$$y(x) = \mathsf{E}(Y \mid X = x) = \mathsf{E}(Y) = m_Y.$$

Обратное заключение не всегда справедливо. Для выяснения вопроса, насколько хорошо регрессия передаёт

КОРРЕЛЯЦИЯ МЕЖДУ ДИАМЕТРАМИ И ВЫСОТАМИ 624 СТВОЛОВ СЕВЕРНОЙ СОСНЫ

Диаметр, см	Высота, м														Итого
	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
14—17	2	2	5	1											10
18—21	1	3	3	12	15	9	4								47
22—25	1	1	1	3	18	24	29	14	7						98
26—29					7	18	30	43	31	3	2				134
30—33					1	5	18	29	35	18	7	1			114
34—37						1	3	17	33	26	12	6			98
38—41							2	2	10	19	16	4			53
42—45									4	13	6	8		1	32
46—49								3	3	7	6	2	1		22
50—53									1	4	4	2	1		12
54—57										1	1	1			3
58 и более											1				1
Итого	4	6	9	16	41	57	86	108	124	91	55	24	2	1	624
Средний диаметр . .	18,5	18,6	17,7	20,0	22,9	25,0	27,2	30,1	32,7	38,3	40,0	41,8	49,5	43,5	31,2

изменение Y при изменении X, используется условная дисперсия Y при данном значении $X=x$ или её средняя величина — д и с п е р с и я Y о т н о с и т е л ь н о л и н и и р е г р е с с и и (мера рассеяния около линии регрессии):

$$\sigma^2_{Y\mid X}=\mathsf{E}\,[Y-\mathsf{E}\,(Y\mid X)]^2.$$

При точной функциональной зависимости величина Y при данном $X=x$ принимает лишь одно определённое значение, т. е. рассеяние около линии регрессии равно нулю. Аналогично определяется и интерпретируется

$$x\,(y)=\mathsf{E}\,(X\mid Y=y)$$

— регрессия X по Y.

В случае К. двух количественных случайных признаков обычным показателем концентрации распределения вблизи линии регрессии служит к о р р е л я ц и о н н о е о т н о ш е н и е

$$\eta^2_{Y\mid X}=1-\sigma^2_{Y\mid X}/\sigma^2_Y,$$

где σ^2_Y — дисперсия Y (аналогично определяется корреляционное отношение $\eta^2_{X\mid Y}$, но между $\eta_{Y\mid X}$ и $\eta_{X\mid Y}$ нет к.-л. простой зависимости). Величина $\eta^2_{Y\mid X}$, изменяющаяся от 0 до 1, равна нулю тогда и только тогда, когда регрессия имеет вид $y(x)=m_Y$, в этом случае говорят, что Y н е к о р р е л и р о в а н а с X; $\eta^2_{Y\mid X}$ равняется единице в случае точной функциональной зависимости Y от X. Наиболее употребителен при измерении степени зависимости к о э ф ф и ц и е н т к о р р е л я ц и и между X и Y

$$\rho=\frac{\mathsf{E}\,[(Y-m_Y)(X-m_X)]}{\sigma_Y\sigma_X};$$

всегда $-1\leqslant\rho\leqslant 1$. Однако практич. использование коэффициента К. в качестве меры зависимости оправдано лишь тогда, когда совместное распределение пары (X, Y) нормально или приближённо нормально; употребление ρ как меры зависимости между произвольными Y и X приводит иногда к ошибочным выводам, т. к. ρ может равняться нулю даже тогда, когда Y и X связаны строгой функциональной зависимостью (отличной от линейной). Если двумерное распределение X и Y нормально, то линии регрессии Y по X и X по Y суть прямые

$$y=m_Y+\beta_Y(x-m_X)\ \text{ и }\ x=m_X+\beta_X(y-m_Y),$$

где

$$\beta_Y=\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\ \text{ и }\ \beta_X=\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$$

наз. к о э ф ф и ц и е н т а м и р е г р е с с и и, причём

$$\rho=\pm\sqrt{\beta_Y\beta_X}.$$

Так как в этом случае

$$\mathsf{E}\,[Y-y\,(x)]^2=\sigma^2_Y\,(1-\rho^2)$$

и

$$\mathsf{E}\,[X-x\,(y)]^2=\sigma^2_X\,(1-\rho^2),$$

то очевидно, что ρ (корреляционные отношения совпадают с ρ^2) полностью определяет степень концентрации распределения вблизи линий регрессии: в предельном случае $\rho=\pm 1$ прямые регрессии сливаются в одну, что соответствует строгой линейной зависимости между Y и X, при $\rho=0$ величины некоррелированы. Таким образом, коэффициент К. ρ служит мерой зависимости, к-рой соответствует л и н е й н а я р е г р е с с и я.

При изучении К. между несколькими случайными величинами $X_1, \ldots, X_n$ с совместным распределением пользуются множественными и частными коэффициентами К. и корреляционными отношениями. Основной характеристикой линейной К. является матрица, составленная из ρ_{ij} — обычных коэффициентов корреляции между X_i и X_j, называемая к о р р е л я ц и о н н о й м а т р и ц е й $\|\rho_{ij}\|$ (очевидно, $\rho_{ij}=\rho_{ji}$ и $\rho_{kk}=1$). Мерой линейной К. между X_1 и совокупностью остальных величин $X_2, \ldots, X_n$ служит м н о ж е с т в е н н ы й к о э ф ф и ц и е н т к о р р е л я ц и и, к-рый определяется как обычный коэффициент К. между X_1 и наилучшим линейным приближением X_1 по $X_2, \ldots, X_n$, т. е. регрессией

$$\mathsf{E}\,(X_1\mid X_2, \ldots, X_n)=\beta_1+\beta_2X_2+\cdots+\beta_nX_n$$

величины X_1 по $X_2, \ldots, X_n$ ($\beta_1, \ldots, \beta_n$ — коэффициенты регрессии). Множественный коэффициент К. выражается через элементы корреляционной матрицы ρ_{ij}, напр. при $n=3$ он равен

$$\rho_{1\cdot 23}=\sqrt{\frac{\rho^2_{12}+\rho^2_{13}-2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}{1-\rho^2_{23}}}.$$

Если предполагается, что изменение величин X_1 и X_2 определяется в какой-то мере изменением остальных величин $X_3, \ldots, X_n$, то показателем линейной связи между X_1 и X_2 при исключении влияния $X_3, \ldots, X_n$ является ч а с т н ы й к о э ф ф и ц и е н т к о р р е л я ц и и между X_1 и X_2 относительно $X_3, \ldots, X_n$, к-рый определяется как обычный коэффициент К. между $X_1-X_1^*$ и $X_2-X_2^*$, где X_1^* и X_2^* — соответственно наилучшие линейные приближения X_1 и X_2 по $X_3, \ldots, X_n$. Напр., в случае $n=3$ этот коэффициент равен

$$\rho_{1\cdot 23}=\frac{\rho_{12}-\rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{(1-\rho^2_{13})\,(1-\rho^2_{23})}}.$$

Множественные и частные корреляционные отношения выражаются несколько сложнее.

В математич. статистике разработаны методы оценки коэффициентов, характеризующих К. между случайными величинами или признаками, и методы проверки гипотез

об их значениях, использующие их выборочные аналоги. Совокупность этих методов наз. *корреляционным анализом*.

● Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике. (Общая часть), М., 1955; Хальд А., Математическая статистика с техническими приложениями, пер. с англ., М., 1956; Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983. *А. В. Прохоров.*

КОРРЕЛЯ́ЦИЯ в проективной геометрии — неточечное преобразование проективной плоскости, при котором между множеством всех точек проективной плоскости и множеством всех прямых этой плоскости установлено такое взаимно однозначное соответствие, что любым трём точкам, лежащим на одной прямой, соответствуют три прямые, проходящие через одну точку, а любым трём прямым, проходящим через одну точку, соответствуют три точки, лежащие на одной прямой.

КОРТЕ́Ж (франц. cortège) — конечная последовательность (допускающая повторения) элементов какого-нибудь множества X. К. обозначается $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ или $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где n — длина К. ($n\geqslant 0$), а x_i есть i-й член К. и $x_i\in X (1\leqslant i\leqslant n)$. При $n=0$ получается пустой К., не имеющий членов.

КОСА́Я ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция.*

КОСЕ́КАНС [новолат. cosecans, от co(mplementi) secans — *секанс* дополнения] — 1) одна из *тригонометрических функций*; обозначение: cosec.

2) К. острого угла в прямоугольном треугольнике называют отношение гипотенузы к катету, лежащему против этого угла.

КО́СИНУС [новолат. cosinus, от co(mplementi) sinus — *синус* дополнения] — 1) одна из *тригонометрических функций*; обозначение: cos.

2) К. острого угла в прямоугольном треугольнике называют отношение катета, прилежащего к этому углу, к гипотенузе.

КО́СИНУС АМПЛИТУ́ДЫ — одна из *эллиптических функций* Якоби.

КО́СИНУС ГИПЕРБОЛИ́ЧЕСКИЙ — одна из *гиперболических функций.*

КО́СИНУСОВ ТЕОРЕ́МА: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

где a, b, c — стороны треугольника, а C — угол между сторонами a и b.

КОСИНУСО́ИДА — см. *Синусоида.*

КО́СИНУС-ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — то же, что *Фурье преобразование* чётной функции.

КОСОСИММЕТРИ́ЧЕСКАЯ МА́ТРИЦА — квадратная матрица A с элементами, удовлетворяющими условию $a_{ik}=-a_{ki}$, т. е. квадратная матрица, совпадающая со своей транспонированной, умноженной на число -1:

$$A = -A^{\top}.$$

Матрица A наз. знакопеременной, если $a_{ik}=-a_{ki}$, $i\neq k$, и $a_{ii}=0$ для всех i. Для матриц над полем характеристики $\neq 2$ понятия К. м. и знакопеременной матрицы совпадают.

Действительная К. м. является нормальной действительной матрицей, имеющей чисто мнимые собственные значения над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Любая квадратная матрица B над полем характеристики $\neq 2$ единственным образом представима в виде $B=B_1+B_2$, где B_1 — симметрич. матрица, а B_2 — К. м., причём

$$B_1 = \frac{1}{2}(B+B^{\top}),\quad B_2 = \frac{1}{2}(B-B^{\top}).$$

КОСОСИММЕТРИ́ЧЕСКИЙ ТЕ́НЗОР — см. *Тензорное исчисление.*

КОСОСИММЕТРИ́ЧЕСКОЕ ЛИНЕ́ЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — см. *Нормальное линейное преобразование.*

КОСОУГО́ЛЬНАЯ АКСОНОМЕ́ТРИЯ — см. *Аксонометрия.*

КОСОУГО́ЛЬНЫЕ КООРДИНА́ТЫ — координаты точки на плоскости в декартовой системе координат, в которой оси координат составляют угол $\omega\neq\pi/2$, а длины базисных векторов равны. При переходе от одной системы К. к. с координатным углом ω к другой системе К. к., оси к-рой образуют с осью абсцисс данной системы углы α и β (начало координат не меняется), координаты x, y точки меняются по формулам

$$x = \frac{x'\sin(\omega-\alpha)+y'\sin(\omega-\beta)}{\sin\omega},\quad y = \frac{x'\sin\alpha+y'\sin\beta}{\sin\omega},$$

где x', y' — координаты точки в новой системе К. к., координатный угол к-рой $\omega'=\beta-\alpha$.

КОСОЭРМИ́ТОВА МА́ТРИЦА — квадратная матрица $A=\|a_{ik}\|_1^n$ с комплексными элементами, удовлетворяющими условию $a_{ik}=-\bar{a}_{ki}$ (здесь $\bar{a}$ — число, комплексно сопряжённое числу a), т. е. матрица A, совпадающая со своей сопряжённой матрицей, умноженной на -1: $A=-A^*$. Все диагональные элементы и собственные значения К. м.— чисто мнимые числа. К. м. является нормальной матрицей. Матрица A есть К. м. тогда и только тогда, когда матрица $B=iA$ эрмитова.

КОСОЭРМИ́ТОВО ЛИНЕ́ЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — см. *Нормальное линейное преобразование.*

КОТА́НГЕНС [новолат. cotangens, от co(mplementi) tangens — *тангенс* дополнения] — 1) одна из *тригонометрических функций*; обозначение: ctg.

2) К. острого угла в прямоугольном треугольнике называют отношение катета, прилежащего к этому углу, к катету, лежащему против этого угла.

КОТА́НГЕНС ГИПЕРБОЛИ́ЧЕСКИЙ — одна из *гиперболических функций.*

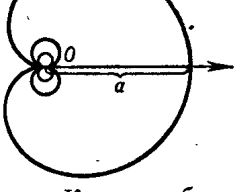
КО́ТЕСА ФО́РМУЛА — формула для приближённого вычисления определённых интегралов по значениям подинтегральной функции в конечном числе равноотстоящих точек, то есть квадратурная формула с равноотстоящими узлами. К. ф. имеет вид

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} f\left(\frac{k}{n}\right),\quad n=1,\ 2,\ \ldots\ . \qquad (*)$$

Числа $a_k^{(n)}$ наз. коэффициентами Котеса, они определяются из того условия, чтобы формула (*) была точной для случаев, когда $f(x)$ является многочленом степени не выше n. Формула предложена Р. Котесом (1722), в более общей форме была рассмотрена И. Ньютоном. См. *Ньютона — Котеса квадратурная формула.*

КОХЛЕО́ИДА (греч. κοχλοειδής — винтообразный, спиральный, от греч. κόχλος — улитка и εἶδος — вид) — плоская трансцендентная кривая (рис.). Уравнение в полярных координатах:

$$\rho = a\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$



К. симметрична относительно полярной оси. При неограниченном возрастании ρ неограниченно приближается к нулю, проходя через затухающие максимумы и обращаясь в нуль при $\varphi=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots$. С помощью К. может быть осуществлена квадратура круга, т. е. К.— одна из *квадратрис.*

КОШИ́ ЗАДА́ЧА — одна из основных задач теории дифференциальных уравнений, впервые изучавшаяся О. Коши и состоящая в отыскании решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным данным (начальным условиям). К. з. обычно возникает при анализе процессов, определяемых дифференциальным законом и начальным состоянием, математич. выражением к-рых и являются уравнение и

начальное условие (откуда терминология и выбор обозначений: начальные данные задаются при $t=0$, а решение отыскивается при $t\geqslant 0$). От краевых задач К. з. отличается тем, что область, в к-рой должно быть определено искомое решение, здесь заранее не указывается.

Если для обыкновенного дифференциального уравнения постановка и исследование К. з. не содержат принципиальных затруднений, то в случае дифференциальных уравнений с частными производными положение существенно усложняется, даже если рассматриваемые функции достаточно регулярны (в частности, это касается вопросов существования, единственности и корректности К. з.).

КОШИ ИНТЕГРА́Л — 1) К. и.— определённый интеграл от непрерывной функции одного действительного переменного. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, n$; предел

$$\lim_{\max \Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x_i$$

называют определённым интегралом по Коши от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

К. и.— частный случай *Римана интеграла*. Определение дано О. Коши (1823).

2) К. и.— интеграл, имеющий важное значение в теории аналитич. функций. К. и. имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

где γ — простая замкнутая спрямляемая жорданова кривая, принадлежащая области D_γ комплексной плоскости вместе со своей внутренностью D_γ, $f(\zeta)$ — функция комплексного переменного ζ, аналитическая на γ и в D_γ. Для любой точки $z\in D_\gamma$ функция $f(z)$ равна К. и. Это соотношение — интегральная формула Коши — позволяет выразить значения аналитич. функции внутри области D через её значения на границе этой области γ. К. и. впервые рассмотрен О. Коши (1831).

Обобщением К. и. являются интегралы типа Коши; они имеют тот же вид, но кривая γ не обязательно замкнутая и функция $f(\zeta)$ не предполагается аналитической. Такие интегралы по-прежнему определяют аналитич. функции; их граничные значения на γ отличаются, вообще говоря, от функции $f(\zeta)$.

КОШИ ИНТЕГРА́ЛЬНАЯ ТЕОРЕ́МА — теорема теории аналитических функций. Пусть $f(z)$ — однозначная аналитич. функция в области D комплексной плоскости, а γ — замкнутая спрямляемая кривая, расположенная в D и такая, что её можно непрерывно деформировать в точку, не выходя за пределы области D. Тогда

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0.$$

О. Коши опубликовал эту теорему в 1825, но полное её доказательство получил Э. Гурса в 1884. К. и. т. выражает одно из основных характеристич. свойств аналитич. функций. Теорема, обратная К. и. т., наз. *Мореры теоремой*.

КОШИ ИНТЕГРА́ЛЬНАЯ ФО́РМУЛА — формула, выражающая значения *аналитической функции* внутри области через её значения на границе этой области. См. также *Коши интеграл*.

КОШИ КРИТЕ́РИЙ — 1) установленный О. Коши критерий равномерной сходимости *ряда*.

2) К. к. сходимости числовой последовательности — см. *Коши условие*.

КОШИ НЕРА́ВЕНСТВО, Коши — Буняковского неравенство,— неравенство для конечных сумм действительных или комплексных чисел, имеющее вид

$$(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+\ldots+a_n^2)\,(b_1^2+\ldots+b_n^2).$$

Доказано О. Коши (1821). Остаётся справедливым и для бесконечных последовательностей a_k и b_k, если сходятся ряды $\sum_k a_k^2$ и $\sum_k b_k^2$. Интегральный аналог К. н. установлен В. Я. Буняковским (см. *Буняковского неравенство*). Обобщение К. н. дано О. Гёльдером (см. *Гёльдера неравенство*).

КОШИ ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ, фундаментальная последовательность, сходящаяся в себе последовательность,— последовательность, удовлетворяющая *Коши условию*.

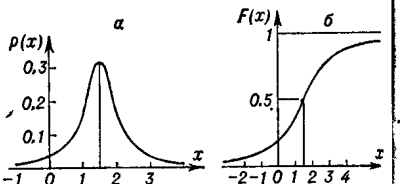
КОШИ ПРИ́ЗНАК — признак сходимости числового *ряда*. Установлен О. Коши (1821).

КОШИ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — распределение вероятностей случайной величины X, заданное плотностью

$$p(x;\ \lambda,\ \mu)=\frac{1}{\pi}\,\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2},\quad -\infty<x<\infty,$$

где $-\infty<\mu<\infty$ и $\lambda>0$ — параметры. К. р. унимодально и симметрично относительно точки $x=\mu$, являющейся модой и медианой этого распределения (рис.). Ни один из моментов положительного порядка, в том числе и математич. ожидание, не существует. Характеристич. функция К. р. имеет вид

$$e^{i\mu t-\lambda|t|}.$$



Распределение Коши: *а* — плотность вероятности; *б* — функция распределения.

Произвольное К. р. с параметрами μ и λ выражается через (стандартное) К. р. с параметрами 0 и 1 формулой

$$p(x;\ \mu,\ \lambda)=\frac{1}{\lambda}\,p\left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right),$$

где

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

Сумма независимых случайных величин, подчинённых К. р., снова имеет К. р. Следствием этого является замечательное свойство К. р.: если независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют одно и то же К. р., то их арифметич. среднее имеет такое же распределение. К. р. с параметрами 0 и 1 может быть получено как распределение отношения X/Y двух независимых случайных величин X и Y, имеющих нормальное распределение с параметрами 0 и 1, или как распределение тангенса $\operatorname{tg} z$ случайной величины z, имеющей равномерное распределение на отрезке $[-\pi/2\ \pi/2]$. К. р. было рассмотрено О. Коши (1853), ранее — С. Пуассоном (ок. 1830).

КОШИ ТЕОРЕ́МА о многогранниках — доказанная О. Коши (1813) теорема о выпуклых *многогранниках*.

КОШИ УСЛО́ВИЕ — 1) К. у. для числовой последовательности: для любого положительного числа ε существует номер N такой, что при всех $n>N$ и любых натуральных m расстояние между членами последовательности x_n и x_{n+m} меньше ε, то есть $|x_n-x_{n+m}|<\varepsilon$.

Напр., числовая последовательность с общим членом $x_n=\frac{n+1}{n}$ удовлетворяет К. у., т. к. для произвольного $\varepsilon>0$ можно выбрать $N>\frac{1}{\varepsilon}$ и для всех $n>N$ и любых натуральных m получить

$$|x_n-x_{n+m}|=\frac{m}{n(n+m)}<\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon.$$

К. у. является необходимым и достаточным условием сходимости числовой последовательности, т. е. если по-

следовательность сходится, то она удовлетворяет К. у., и наоборот, если последовательность удовлетворяет К. у., то она сходится (к р и т е р и й К о ш и).

Числовая последовательность $\{x_n\}$ является расходящейся, если для неё не выполнено К. у.: существует число $\varepsilon>0$ такое, что для любого номера N найдутся номер $n\geqslant N$ и натуральное число m, для к-рых выполняется $|x_n-x_{n+m}|\geqslant\varepsilon$.

Напр., числовая последовательность с общим членом $x_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ расходится, так как К. у. для неё не выполнено: для $\varepsilon=\frac{1}{2}$ и для любого натурального N можно взять $n=N$ и $m=N$, тогда

$$|x_n-x_{n+m}|=|x_N-x_{2N}|=$$
$$=\left|\frac{1}{N+1}+\ldots+\frac{1}{2N}\right|\geqslant N\cdot\frac{1}{2N}=\frac{1}{2}=\varepsilon.$$

2) К. у. д л я ф у н к ц и и $f(x)$, определённой в окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a: для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любых точек x' и x'' таких, что $0<|x'-a|<\delta$ и $0<|x''-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

Для того чтобы функция имела предел в точке a, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла К. у. в окрестности точки a.

3) К. у. д л я п о с л е д о в а т е л ь н о с т и $\{x_n\}$ э л е м е н т о в м е т р и ч е с к о г о п р о с т р а н с т в а с расстоянием $d(x, y)$: для любого $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что при всех $n>N$ и любом натуральном m расстояние $d(x_n, x_{n+m})<\varepsilon$. В полном метрич. пространстве К. у. для последовательности является необходимым и достаточным условием сходимости.

Последовательность, удовлетворяющая К. у., наз. ф у н д а м е н т а л ь н о й, и л и с х о д я щ е й с я в с е б е, и л и п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю К о ш и.

КОШИ ФОРМУЛА — обобщение *конечных приращений формулы*; частный случай ф о р м у л ы Б о н н е.

КОШИ—АДАМАРА ФОРМУЛА — формула для вычисления радиуса сходимости степенного ряда (см. *Круг сходимости*). Впервые была высказана О. Коши (опубликовано 1821), строго доказана Ж. Адамаром (1892).

КОШИ—БУНЯКОВСКОГО НЕРАВЕНСТВО, К о ш и — Ш в а р ц а н е р а в е н с т в о,— общее название для неравенств, относящихся к конечным суммам и рядам (см. *Коши неравенство*) и интегралам (см. *Буняковского неравенство*). В общем случае для двух элементов f и g произвольного евклидова пространства E К.—Б. н. имеет вид

$$(f, g)^2\leqslant(f, f)(g, g),$$

где (f, g) — скалярное произведение в пространстве E.

КОШИ—КОВАЛЕВСКОЙ ТЕОРЕМА — одна из наиболее общих теорем существования и единственности решения задачи Коши для дифференциальных уравнений с частными производными; установлена С. В. Ковалевской (1875). Современная формулировка её в простейшем виде такова. Существует единственное решение $u(t, x)$ уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}=f\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ в окрестности точки $(0, x_0)$, для к-рого $u|_{t=0}=0$, если f — непрерывно зависящая от t аналитическая по остальным аргументам функция; при этом решение $u(t, x)$ оказывается непрерывно дифференцируемой функцией по t в интервале, длина к-рого оценивается снизу в зависимости от величины f, значения к-рой суть аналитич. функции от x. Общий случай задачи Коши для системы уравнений произвольного порядка с ненулевыми начальными данными $u(x_0)$ при определённых условиях (впрочем, достаточно общих) сводится к простейшему.

КОШИ—РИМАНА УРАВНЕНИЯ в т е о р и и а н а л и т и ч е с к и х ф у н к ц и й — дифференциальные уравнения с частными производными 1-го порядка, связывающие действительную и мнимую части аналитической функции $w=u+iv$ комплексного переменного $z=x+iy$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эти уравнения имеют основное значение в теории аналитич. функций и её приложениях к механике и физике. К.—Р. у. названы по имени О. Коши (1814) и Б. Римана (1851), но на самом деле впервые они были рассмотрены задолго до них Ж. Д'Аламбером (1752) и Л. Эйлером (1777).

КОЭФФИЦИЕНТ (от лат. co- — совместно и efficiens — производящий) — числовой множитель при буквенном выражении, известный множитель при той или иной степени неизвестного или постоянный множитель при переменной величине. Так, в одночлене $-\frac{3}{4}a^2b^3$ К. есть $-\frac{3}{4}$; в уравнении $x^2+2px+q=0$ К. при x^2 есть 1, а К. при x равен $2p$; в формуле длины окружности $l=2\pi r$ К. есть 2π. В уравнении прямой $y=kx+b$ число k, выражающее тангенс угла наклона прямой к оси Ox, наз. у г л о в ы м К.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА — задача, в которой из некоторого класса функций, определённых в данной области, требуется найти ту, которая удовлетворяет на границе (крае) этой области заданным условиям. Функции, описывающие конкретные явления природы (физич., химич. и др.), как правило, представляют собой решения уравнений математич. физики, выведенных из общих законов, к-рым подчиняются эти явления. Когда рассматриваемые уравнения допускают целые семейства решений, дополнительно задают т. н. к р а е в ы е (г р а н и ч н ы е) или н а ч а л ь н ы е у с л о в и я, позволяющие однозначно выделить интересующее нас решение. В то время как краевые условия задаются исключительно на граничных точках области, где ищется решение, начальные условия могут оказаться заданными на определённом множестве точек внутри области. Напр., уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0 \qquad (1)$$

имеет бесконечное множество решений $u(x_1, x_2)=f(x_1+x_2)+f_1(x_1-x_2)$, где f и f_1 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Однако в прямоугольнике $-a\leqslant x_2\leqslant a$, $0\leqslant x_1\leqslant l$, плоскости с прямоугольными декартовыми координатами x_1, x_2 уравнение (1) имеет единственное решение $u(x_1, x_2)$, удовлетворяющее краевым

$$u(0, x_2)=0,\quad u(l, x_2)=0,\quad -a\leqslant x_2\leqslant a, \qquad (2)$$

и начальным

$$\left.\begin{array}{l} u(x_1, 0)=\varphi(x_1), \\ \left.\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}=\psi(x_1),\quad 0\leqslant x_1\leqslant l, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

условиям. При этом соответственно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые функции φ и ψ считаются наперёд заданными. Если переменное x_2 есть время t, то решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3), описывает колебание упругой струны длины l с концами, закреплёнными в точках $(0, 0)$ и $(0, l)$. Изложенная задача нахождения решения уравнения (1) при условиях (2) и (3) — простейший пример т. н. с м е ш а н н о й з а д а ч и.

Вообще, к р а е в ы м и наз. задачи, в к-рых в заданной области G пространства независимых переменных $(x_1, \ldots, x_n)=x$ ищется решение $u(x)=u(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения

$$Du(x)=0,\ x\in G, \qquad (4)$$

при требовании, что искомая функция $u(x)$ на границе S в области G удовлетворяет краевому (граничному) условию

$$Bu(y)=0,\ y\in S, \qquad (5)$$

где D и B — заданные операторы, причём, как правило, D — дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор. Граница S наз. н о с и т е л е м к р а е в ы х д а н н ы х (5).

Когда операторы D и B линейны, К. з. (4), (5) наз. линейной. В предположениях, что S является $(n-1)$-мерной

гиперповерхностью, D — линейным дифференциальным оператором 2-го порядка

$$Du(x) \equiv \sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)\, u - F(x),$$

а

$$Bu(y) \equiv u(y) - f(y),$$

где A_{ij}, B_i, C, F, f — заданные функции, задача (4), (5) наз. первой краевой задачей или задачей Дирихле. Если же

$$Bu(y) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i(y) \frac{\partial u}{\partial y_i} - f(y),$$

где a_i, $i=1, \ldots, n$, f — заданные функции, то задача (4), (5) наз. задачей с наклонной (косой) производной. В частности, когда вектор $(a_1, \ldots, a_n)$ совпадает с конормалью к S, задача с наклонной производной носит название второй краевой задачи или задачи Неймана. Задача Дирихле (Неймана) наз. однородной, если

$$F(x) = 0, \quad f(y) = 0.$$

Задачи Дирихле и Неймана хорошо исследованы в ограниченных областях с достаточно гладкой границей в случае равномерной эллиптичности оператора D с действительными коэффициентами.

При требовании достаточной гладкости коэффициентов операторов D и B и равномерной эллиптичности оператора D справедливы следующие утверждения: 1) число k линейно независимых решений однородной задачи Дирихле (Неймана) конечно; 2) для разрешимости задачи Дирихле (Неймана) необходимо и достаточно, чтобы функции $F(x)$ и $f(y)$ были подчинены дополнительным ограничениям типа условий ортогональности, число к-рых равно k; 3) при соблюдении условия

$$C(x) \leqslant 0, \quad x \in G,$$

задача Дирихле всегда имеет, и притом единственное, решение; 4) в области G достаточно малого диаметра задача Дирихле всегда имеет, и притом единственное, решение и 5) при однозначной разрешимости задачи Дирихле (Неймана) малое изменение краевых данных вызывает малое изменение решения (т. е. решение устойчиво).

Когда дифференциальный оператор D не является эллиптическим, К. з. (4), (5) может вовсе не иметь содержательного смысла, если часть границы S области G не освободить от краевых данных и на структуру носителя краевых данных не наложить определённые (порой весьма сильные) ограничения.

Особо ставятся К. з., когда в разных частях рассматриваемой области G дифференциальный оператор D принадлежит различным (эллиптич., гиперболич. и параболич.) типам [т. е. когда уравнение (4) является уравнением смешанного типа].

● Бицадзе А. В., Уравнения математической физики, М., 1976; Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977. *А. В. Бицадзе.*

КРАЕВО́Е УСЛО́ВИЕ — см. *Математической физики уравнения, Краевая задача.*

КРА́МЕРА ПРА́ВИЛО — правило решения определённой системы n линейных уравнений с n неизвестными (над произвольным полем). Пусть

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

— система линейных уравнений и определитель Δ матрицы системы отличен от нуля. Тогда система (*) имеет единственное решение, к-рое находится по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ_i — определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой i-го столбца (т. е. столбца коэффициентов при неизвестном x_i) столбцом свободных членов, т. е.

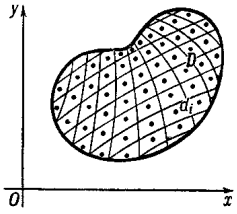
$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1,\,i-1} b_1 a_{1,\,i+1} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{n,\,i-1} b_n a_{n,\,i+1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Формулы найдены Г. Крамером (1750).

КРА́ТНАЯ ТО́ЧКА кривой — см. *Особая точка* кривой.

КРА́ТНОЕ натурального (целого положительного) числа a — натуральное число, делящееся на a без остатка. Число n, к-рое делится на каждое из чисел a, b, ..., m, наз. общим К. этих чисел. Из всех общих К. двух или нескольких чисел одно (не равное нулю) является наименьшим (*наименьшее общее кратное*), а остальные будут К. этого наименьшего. Числа, кратные двум, наз. чётными, остальные — нечётными.

КРА́ТНЫЙ ИНТЕГРА́Л — интеграл от функции, заданной в какой-либо области на плоскости, в 3-мерном или n-мерном пространстве. Среди К. и. различают двойные интегралы, тройные интегралы и т. д., n-кратные интегралы.



Пусть функция $f(x, y)$ задана в нек-рой области D плоскости Oxy, область D разбита на n частичных областей d_i, площади к-рых равны s_i, в каждой области d_i выбрана точка (ξ_i, η_i) (рис.) и составлена интегральная сумма

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, s_i.$$

Если при неограниченном уменьшении максимального диаметра частичных областей d_i суммы S имеют предел независимо от выбора точек (ξ_i, η_i), то этот предел называют двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначают

$$\iint_D f(x, y)\, ds.$$

Аналогично определяется тройной интеграл и вообще n-кратный интеграл.

Для существования двойного интеграла достаточно, напр., чтобы область D была замкнутой квадрируемой областью, а функция $f(x, y)$ была непрерывна в D. К. и. обладают рядом свойств, аналогичных свойствам простых интегралов (см. *Интеграл*, *Интегральное исчисление*). Для вычисления К. и. обычно приводят его к *повторному интегралу*. В специальных случаях для сведения К. и. к интегралам меньшей размерности могут служить *Грина формулы* и *Остроградского формула*. К. и. имеют обширные применения: с их помощью выражаются объёмы тел, их массы, статич. моменты, моменты инерции и т. п.

КРА́ТНЫЙ КО́РЕНЬ многочлена

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

— число c такое, что $P_n(x)$ делится без остатка на нек-рую степень двучлена $x-c$. При этом c называют корнем кратности k, если $P_n(x)$ делится на $(x-c)^k$, но не делится на $(x-c)^{k+1}$. Корень многочлена $P_n(x)$ кратности k является также корнем производных этого многочлена до $(k-1)$-го порядка включительно. К. к. многочлена $P_n(x)$ называют К. к. уравнения $P_n(x)=0$.

КРА́ТНЫЙ НУЛЬ — см. *Нуль* функции.

КРА́ТНЫЙ ПО́ЛЮС — см. *Полюс* функции.

КРА́ТНЫЙ РЯД — см. *Двойной ряд*, *Ряд*.

КРИВА́Я — обычно *линия* вообще, не исключая и частного случая — прямой.

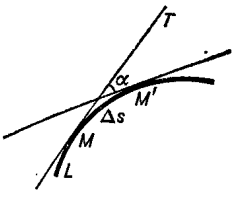
КРИВИ́ЗНА — величина, характеризующая отклонение кривой (поверхности) от прямой (плоскости). Отклонение

дуги (рис.) MM' кривой L от касательной MT в точке M можно охарактеризовать с помощью т. н. средней кривизны $k_{ср}$ этой дуги, равной отношению величины α угла между касательными в точках M и M' к длине Δs дуги MM':

$$k_{ср}=\frac{\alpha}{\Delta s}.$$

Для дуги окружности средняя К. равна обратной величине радиуса этой окружности и, таким образом, наглядно характеризует степень искривлённости окружности — с уменьшением радиуса увеличивается искривлённость дуги.

Предельное значение средней К. при стремлении точки M' кривой к точке M, т. е. при $\Delta s\to 0$, наз. кривизной k кривой L в точке M:



$$k=\lim_{N\to M} k_{ср}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\alpha}{\Delta s}.$$

Величина $R=1/k$, обратная К., обычно наз. радиусом кривизны кривой L в точке M.

Если кривая L является графиком дважды дифференцируемой функции $y=f(x)$, то кривизна k этой кривой может быть вычислена по формуле

$$k=\frac{|f''|}{[1+f'^2]^{3/2}}.$$

Кривизна k кривой L представляет собой, вообще говоря, функцию длины дуги s, отсчитываемой от нек-рой точки M этой кривой. Если для двух плоских кривых L_1 и L_2 К. как функции длины дуги одинаковы, то кривые L_1 и L_2 конгруэнтны — они могут быть совмещены движением. Поэтому задание К. (плоской) кривой как функции длины дуги обычно наз. натуральным уравнением этой кривой.

Для характеристики отклонения пространственной кривой L от плоскости вводят понятие т. н. *кручения*. К. и кручение, заданные как функции длины дуги, определяют кривую L с точностью до положения в пространстве.

Исследование отклонения поверхности от плоскости может быть проведено следующим образом. Через нормаль в данной точке M поверхности проводят всевозможные плоскости. Сечения поверхности этими плоскостями наз. нормальными сечениями, а кривизны нормальных сечений в точке M — нормальными кривизнами поверхности в этой точке. Максимальная и минимальная из нормальных К. в данной точке M именуются главными кривизнами. Если k_1 и k_2 — главные К., то величины $K=k_1k_2$ и $H=1/2(k_1+k_2)$ наз. соответственно *гауссовой кривизной* и *средней кривизной* поверхности в точке M. Эти К. поверхности определяют нормальные К. и поэтому могут служить характеристикой отклонения поверхности от плоскости. В частности, если $K=0$ и $H=0$ во всех точках поверхности, то поверхность представляет собой плоскость.

Гауссова К. не меняется при изгибаниях поверхности (деформация поверхности, не меняющая длин линий на ней). Если, напр., гауссова К. равна нулю во всех точках поверхности, то каждый достаточно малый её кусок может быть изогнут на плоскость. Гауссова К. на поверхности без обращения к объемлющему пространству составляет объект т. н. внутренней геометрии поверхности. Средняя К. связана с внешней формой поверхности.

Понятие К. обобщается на объекты более общей природы. Напр., понятие К. возникает в т. н. *римановых пространствах*, представляя собой меру отклонения этих пространств от евклидовых.

КРИВИЗНЫ ЛИНИЯ — линия поверхности, направление которой в каждой точке совпадает с одним из главных направлений поверхности в этой точке (см. *Поверхностей теория*). К. л. образуют, вообще говоря, прямоугольную сеть, т. е. покрывают поверхность так, что через каждую точку (за исключением нек-рых особых — *округления точек*) проходят две К. л., пересекающиеся под прямым углом. К. л. характеризуются также тем свойством, что нормали к поверхности в точках К. л. образуют развёртывающуюся поверхность. Так, на всякой поверхности вращения меридианы и параллели являются К. л.; на плоскости и на сфере любая линия является К. л.

КРИВИЗНЫ ТЕНЗОР — четырёхвалентный тензор, описывающий кривизну пространства. В римановом пространстве с метрич. тензором g_{ij} К. т. имеет вид

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\,\partial x^m}+\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\,\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\,\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\,\partial x^m}\right)+$$
$$+g_{np}\left(\Gamma^p_{km}\Gamma^n_{il}-\Gamma^p_{im}\Gamma^h_{kl}\right),$$

где $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$ — символы Кристоффеля. В 2-мерном случае К. т. имеет одну существенную координату, к-рая входит в определение внутренней (гауссовой) кривизны поверхности $K=R_{1212}/\det g_{ij}$.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ — координаты точки в плоской области, на поверхности, в пространстве, отличные от прямолинейных (декартовых) координат. Пусть в области D, к-рая может совпадать со всей плоскостью, определены две гладкие функции точки $u(M)$ и $v(M)$ такие, что в области D каждая линия семейства $u(M)=\text{const}$ пересекается с каждой линией семейства $v(M)=\text{const}$ не более чем в одной точке. Пара чисел (u, v) однозначно определяет точку M в области D и наз. криволинейными координатами этой точки (рис. 1). Линии $u(M)=\text{const}$ и $v(M)=\text{const}$ наз. координатными линиями в системе К. к. u, v, они покрывают область D координатной сеткой, как правило криволинейной, что объясняет название «К. к.». Если на

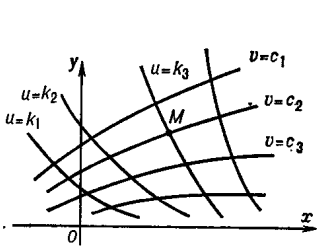


Рис. 1.

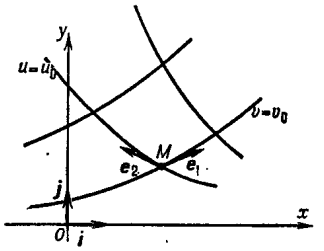


Рис. 2.

плоскости определена прямоугольная система координат Oxy, то функции $u(M)$ и $v(M)$ являются функциями координат (x, y) точки M, т. е.

$$u=u(x, y),\quad v=v(x, y). \qquad (1)$$

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ отображают область D взаимно однозначно на нек-рую область D' переменных (u, v), т. е. система (1) разрешима:

$$x=x(u, v),\quad y=y(u, v). \qquad (2)$$

Гладкость функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ означает, что функции в (1) непрерывно дифференцируемы по x и y до определённого порядка. Предполагается, что функции в (2) той же гладкости.

Если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы и взаимно однозначно отображают область D на область D' и если функции в (2) также непрерывно дифференцируемы, то отличны от нуля определители

$$J_1=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\quad\text{и}\quad J_2=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} \qquad (3)$$

и $J_1J_2=1$. Определители J_1 и J_2 наз. соответственно якобианами отображений (1) и (2). Координатные линии в окрестности каждой точки области D являются непрерывно дифференцируемыми кривыми, допускающими параметрич. представление $x=x(u, v_0)$, $y=y(u, v_0)$ или $x=x(u_0, v)$,

$y=y(u_0, v)$. В каждой точке M (рис. 2) области определены два неколлинеарных вектора:

$$e_1=\frac{\partial x}{\partial u}i+\frac{\partial y}{\partial u}j,\quad e_2=\frac{\partial x}{\partial v}i+\frac{\partial y}{\partial v}j,$$

направленных по касательным к координатным линиям u и v в сторону возрастания параметров (ij — ортонормированный базис в системе координат Oxy). Пара векторов e_1e_2 наз. локальным базисом в системе К. к. u, v. Если локальный и исходный базис ориентированы одинаково, то якобианы J_1 и J_2 положительны, в противоположном случае — отрицательны. К. к. наз. ортогональными, если координатные линии взаимно ортогональны в каждой точке области D. Необходимое и достаточное условие ортогональности К. к.: $(e_1e_2)=0$. Ортогональными К. к. на плоскости являются, напр., *биполярные координаты*, *параболические координаты*, *полярные координаты*, *эллиптические координаты*.

Аналогично вводятся К. к. в области D пространства как непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение $D\to D'$, определяемое функциями

$$u=u(x, y, z),\ v=v(x, y, z),\ w=w(x, y, z), \qquad (4)$$

у к-рого существует непрерывно дифференцируемое обратное отображение

$$x=x(u, v, w),\ y=y(u, v, w),\ z=z(u, v, w). \qquad (5)$$

Определители отображения (4) и обратного ему отображения (5) отличны от нуля. Через каждую точку M (рис. 3) области D проходит по одной поверхности семейства $u(M)=\text{const}$, семейства $v(M)=\text{const}$ и семейства $w(M)=\text{const}$, к-рые наз. координатными поверхностями. Линия пересечения двух координатных поверхностей наз. координатной линией. В каждой точке области D определён локальный базис $e_1e_2e_3$, векторы к-рого направлены по касательным к координатным линиям в сторону возрастания параметра. Если ijk — базис прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$, то

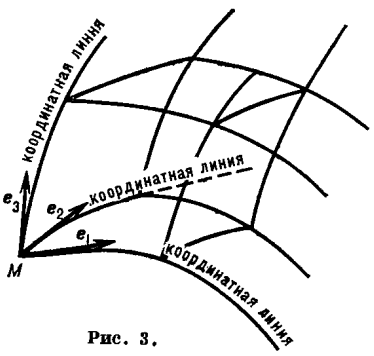


Рис. 3.

$$\left.\begin{aligned} e_1&=\frac{\partial x}{\partial u}i+\frac{\partial y}{\partial u}j+\frac{\partial z}{\partial u}k,\\ e_2&=\frac{\partial x}{\partial v}i+\frac{\partial y}{\partial v}j+\frac{\partial z}{\partial v}k,\\ e_3&=\frac{\partial x}{\partial w}i+\frac{\partial y}{\partial w}j+\frac{\partial z}{\partial w}k. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Если локальный базис и базис ijk одинаково ориентированы, то определитель отображения (5), совпадающий с определителем системы (6), положителен, в противоположном случае — отрицателен. К. к. наз. ортогональными, если в каждой точке области D координатные линии взаимно перпендикулярны. Необходимое и достаточное условие ортогональности К. к.: $(e_k, e_m)=0$ при $k\neq m$.

Ортогональными К. к. в пространстве являются, напр., бисферические, бицилиндрические и тороидальные координаты (для построения к-рых используются *полярные координаты*), *конические координаты*, *параболические координаты*, *сферические координаты*, *цилиндрические координаты*, *эллиптические координаты*.

Связь К. к. с декартовыми прямоугольными координатами осуществляется через *Ламе коэффициенты*.

В ряде случаев К. к. распространяются с области на более широкое множество с нарушением условия взаимно однозначного соответствия между точками и их К. к. (напр., *полярные координаты* на плоскости).

Параметрич. задание поверхности в пространстве позволяет ввести К. к. на поверхности, при этом геометрич. свойства поверхности изучаются методами дифференциальной геометрии.

К. к. используются в различных разделах и особенно вычислительных задачах математики и физики, являясь, в определённом смысле, естественными координатами точек множества (полярные координаты в круговых областях, сферич. координаты в шаровых и т. п.).

К. к. впервые использовал Я. Бернулли (1691), координатами назвал их год спустя Г. Лейбниц. С именем К. Гаусса связаны К. к. на поверхности. К. к. в пространстве и название «К. к.» впервые ввёл Г. Ламе (1833).

● Бронштейн И. Н., Семендяев К. А., Справочник по математике, М.— Лейпциг, 1981.

Т. С. Пиголкина.

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ — интеграл, взятый вдоль какой-либо кривой на плоскости или в пространстве. Различают К. и. 1-го и 2-го родов. К. и. 1-го рода возникает, напр., при рассмотрении задачи о вычислении массы кривой переменной плотности; он обозначается через

$$\int_C f(P)\,ds,$$

где C — заданная кривая, ds — дифференциал её дуги, а $f(P)$ — функция точки на кривой, и представляет собой предел соответствующих интегральных сумм. В случае плоской кривой C, заданной уравнением $y=y(x)$, К. и. 1-го рода сводится к обыкновенному интегралу по формуле

$$\int_C f(P)\,ds=\int_a^b f[x, y(x)]\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

К. и. 2-го рода возникает, напр., при рассмотрении задачи о работе силового поля; в случае плоской кривой C он имеет вид

$$\int_C P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$$

и является также пределом соответствующих интегральных сумм. В случае замкнутой кривой C К. и. часто обозначают символом

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy.$$

К. и. 2-го рода сводится к обыкновенному интегралу по формуле

$$\int_C P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=$$
$$=\int_\alpha^\beta\{P[x(t), y(t)]x'(t)+Q[x(t), y(t)]y'(t)\}\,dt,$$

где $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ — уравнения кривой C в параметрич. форме, и к К. и. 1-го рода по формуле

$$\int_C P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\int_C\{P\cos\alpha+Q\sin\alpha\}\,d\alpha;$$

здесь α — угол между осью Ox и касательной к кривой, направленной в сторону возрастания дуги.

Впервые К. и. встречается у А. Клеро (1743), в общем виде их ввёл О. Коши (1825).

КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЙ МНОГОГРАННИК — см. *Многогранник*.

КРИСТОФФЕЛЯ СИМВОЛ дифференциальной квадратичной формы

$$\sum_{r,\,s=1}^{n}g_{rs}\,dx^r\,dx^s$$

— символ для сокращённого обозначения выражения

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)\equiv\Gamma_{k,\,ij}.$$

Символ $\Gamma_{k,\,ij}$ называют К. с. 1-го рода, в отличие от К. с. 2-го рода Γ_{ij}^k, определяемого соотношением

$$\Gamma_{ij}^k=\sum_{t=1}^{n}g^{kt}\Gamma_{k,\,ij},$$

где g^{kt} определяется из равенств

$$\sum_{k=1}^{n} g^{kt} g_{ks} = \begin{cases} 1, & \text{если } t=s, \\ 0, & \text{если } t \neq s. \end{cases}$$

К. с. введён Э. Кристоффелем (1869).

КРО́НЕКЕРА СИ́МВОЛ — функция δ_{nm}, зависящая от двух целочисленных аргументов n и m, которая определяется условием

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{если } n=m, \\ 0, & \text{если } n \neq m. \end{cases}$$

К. с. был введён Л. Кронекером (1866).

КРО́НЕКЕРА ТЕОРЕ́МА — теорема теории *диофантовых приближений*; доказана Л. Кронекером (1884).

КРО́НЕКЕРА — КАПЕ́ЛЛИ ТЕОРЕ́МА — теорема, выражающая необходимые и достаточные условия существования решения системы m линейных уравнений с n неизвестными над некоторым полем. По коэффициентам a_{ij} и свободным членам b_i системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (*)$$

составляют две матрицы

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & \ldots & a_{1n}\ b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} b_m \end{array} \right\|,$$

наз. соответственно основной и расширенной матрицами системы (*). К.—К. т. формулируется так: для того чтобы система (*) имела хотя бы одно решение (т. е. была совместна), необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы был равен рангу расширенной матрицы системы. Это решение единственно тогда и только тогда, когда ранг равен n. Теорема содержится в лекциях, читавшихся Л. Кронекером в 1883—91. А. Капелли (1892) впервые дал формулировку теоремы с использованием термина «ранг матрицы».

КРУГ — часть плоскости, ограниченная окружностью и содержащая её центр. Площадь К. выражается формулой πr^2, где r — радиус окружности. См. также *Квадратура круга*, *Пи*.

КРУГ КРИВИЗНЫ, точнее, окружность кривизны, — окружность, имеющая с кривой в данной точке соприкосновение не ниже 2-го порядка. Центр К. к. наз. центром кривизны кривой в точке соприкосновения, а радиус К. к. — радиусом кривизны. К. к. располагается в соприкасающейся плоскости кривой.

КРУГ СХОДИ́МОСТИ степенного ряда

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots \qquad (*)$$

— круг $|z-z_0|<R$ в плоскости комплексного переменного z, обладающий тем свойством, что внутри него ряд (*) сходится, а вне соответствующего замкнутого круга расходится (в точках окружности $|z-z_0|=R$ ряд может как сходиться, так и расходиться). Каждый степенной ряд или сходится на всей плоскости (при любых z), или имеет К. с. конечного радиуса R, или сходится только при $z=z_0$. Внутри К. с. ряд сходится к нек-рой аналитич. функции. Число R наз. радиусом сходимости ряда (*) и определяется по формуле Коши — Адамара:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Если $z_0=x_0$ — действительное число, то часть действительной оси Ox, лежащая внутри К. с., наз. интервалом сходимости.

КРУ́ГЛЫЙ КО́НУС — см. *Конус*.

КРУ́ГЛЫЙ ЦИЛИ́НДР — см. *Цилиндр*.

КРУГОВО́Е ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — преобразование, при котором окружность или прямая переходят в окружность или прямую. Каждое К. п. представляет собой произведение движения инверсии и подобия. Осевыми К. п. наз. преобразования в множестве прямых линий плоскости, переводящие совокупность касательных одной окружности снова в совокупность касательных (быть может, другой) окружности; совокупность пересекающихся в одной точке прямых эти преобразования могут перевести в совокупность касательных нек-рой окружности. Касательными К. п. наз. преобразования, переводящие окружность в окружность и сохраняющие касание окружностей. Совокупность окружностей, проходящих через одну точку, и совокупность окружностей, касающихся одной прямой, они могут переводить в совокупность окружностей, касающихся одной окружности.

КРУГОВЫ́Е ТО́ЧКИ — см. *Неевклидовы геометрии*.

КРУГОВЫ́Е ФУ́НКЦИИ — 1) то же, что *обратные тригонометрические функции*; 2) иногда употребляемое название *тригонометрических функций*.

КРУ́ПНЫХ ЧАСТИ́Ц МЕ́ТОД — метод для расчёта нестационарных и стационарных течений сжимаемой сплошной среды. К. ч. м. основывается на расщеплении исходной системы дифференциальных уравнений по физич. процессам.

Разностная схема К. ч. м. описана ниже на примере идеального сжимаемого газа (уравнения неразрывности, импульса и энергии):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0, \\ \dfrac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V u_i) + \dfrac{\partial P}{\partial x_i} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho E V) + \operatorname{div}(PV) = 0. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Для замыкания системы (*) используется уравнение состояния.

Процесс решения эволюционной системы (*) разбивается на шаги по времени, каждый из к-рых состоит из трёх этапов: эйлерова, лагранжева и заключительного.

Эйлеров этап. Жидкость предполагается мгновенно заторможенной. Конвективные члены вида $\operatorname{div}(\psi\rho V)$, $\psi=(1, u_i, E)$, соответствующие эффектам перемещения, из уравнений (*) опускаются. Полученная укороченная система

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0, \quad \rho\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(PV) = 0$$

в простейшем случае аппроксимируется следующим образом:

$$(\tilde{u}_i)^n_{j,k} = (u_i)^n_{j,k} - \frac{P^n_{j+1/2,k} - P^n_{j-1/2,k}}{\Delta x_i}\frac{\Delta t}{\rho^n_{j,k}},$$

$$\tilde{E}^n_{j,k} = E^n_{i,j} - \left[\frac{P^n_{i+1/2,j}\tilde{u}^n_{i+1/2,j} - P^n_{i-1/2,j}\tilde{u}^n_{j-1/2,j}}{\Delta x_l}\right]\frac{\Delta t}{\rho^n_{i,j}}.$$

Здесь $\tilde{u}$; E — промежуточные значения параметров потока, полученные в предположении «замороженности» поля ρ на слое $t^n+\Delta t$, величины с дробными индексами относятся к границам ячеек, напр. $P^n_{j+1/2,k} = \dfrac{P^n_{j,k}+P^n_{j+1,k}}{2}, \ldots$.

Хотя схема эйлерова этапа в данном виде неустойчива, при определённых формах записи последующих этапов вся схема в целом — устойчива. Устойчивости эйлерова этапа можно достигнуть, напр., путём введения в него элементов *интегральных соотношений метода*.

На лагранжевом этапе находятся при $t^n+\Delta t$ потоки массы через границы ячеек. При этом полагают, что масса крупной частицы переносится за счёт нормальной к границе составляющей скорости. Так, напр.,

$$\Delta M^n_{i+1/2,j} = \langle\rho^n_{i+1/2,j}\rangle\langle u^n_{n+1/2,j}\rangle\Delta y\,\Delta t$$

и т. д. Знак $\langle\ \rangle$ определяет параметры ρ и u на границе ячейки. Выбор этих величин имеет важное значение, т. к. сильно влияет на устойчивость и точность счёта. Возможны различные разностные представления для ΔM^n: раз-

ного порядка точности, с учётом и без учёта направления потока, центральные разности, *ZIP*-аппроксимации и др. Потоки импульса (энергии) равны произведению ΔM^n на соответствующие значения скорости (полной удельной энергии). Проводились также аппроксимации не только потоков массы, но и потоков импульса и энергии.

З а к л ю ч и т е л ь н ы й э т а п. На этом этапе находятся окончательные поля эйлеровых параметров потока в момент $t^{n+1}=t^n+\Delta t$ на фиксированной сетке. Уравнения этого этапа представляют собой законы сохранения массы M импульса P и полной энергии E, записанные для данной ячейки (крупной частицы) в разностной форме

$$M^{n+1}=M^n+\sum\Delta M^n,\quad P^n+\sum\Delta P^n,\quad E^{n+1}=E^n+\sum\Delta E^n.$$

Консервативность и полную дивергентность разностной схемы (схема дивергентно-консервативная) обеспечивает уравнение для полной энергии E. На заключительном этапе (в случае использования дискретной модели среды) целесообразно производить дополнительный перерасчёт плотности, что сглаживает флуктуации и повышает точность вычислений. Комбинируя различные представления этапов, получают серию разностных схем К. ч. м., что позволяет осуществить широкий класс численных экспериментов.

К. ч. м. допускает трактовку с различных точек зрения: метод расщепления, смешанный эйлерово-лагранжевый метод, расчёт в локально лагранжевых координатах (эйлеров этап) с пересчётом на прежнюю сетку (лагранжев и заключительный этапы), разностная запись законов сохранения для элемента жидкости — «крупной частицы», эйлерова разностная схема.

Расчёты К. ч. м. проводятся в пространственно одно-, дву- и трёхмерных областях на равномерных и неравномерных сетках как в прямоугольной, так и в криволинейных, в том числе неортогональных, системах координат.

Граничные условия ставятся с помощью рядов фиктивных ячеек (чтобы каждую расчётную точку сделать внутренней и сохранить единый алгоритм для всех ячеек). Для схемы 1-го порядка аппроксимации достаточно одного слоя и т. д.

Приведённые ранее расчётные формулы справедливы для внутренних ячеек поля, со всех сторон окружённых жидкостью, и для ячеек, прилегающих к твёрдому телу, контур к-рого совпадает с границами ячеек.

Пусть, напр., рассматривается задача о расчёте обтекания осесимметричных и плоских тел с образующей произвольной формы. При расчёте обтекания тел конечно-разностными методами можно использовать два подхода: расчёт в координатах S, n; введение в рассмотрение дробных ячеек. В первом случае затруднительно рассчитывать тела с изломами и вогнутостями. Второй подход свободен от этих недостатков. В К. ч. м. используются оба подхода (в основном второй).

К. ч. м. распространён на многопараметрич. класс разностных схем расщепления, из к-рого можно выбрать оптимальные алгоритмы для вычислительных систем с различной архитектурой.

С помощью К. ч. м. решаются системы уравнений Эйлера, Навье — Стокса, радиационной газовой динамики, упругопластичности, динамики плазмы, теории фильтрации, механики многофазных сред и др.

● Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М., Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент, М., 1982; Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980.

Ю. М. Давыдов.

КРУЧЕ́НИЕ — мера отклонения пространственной кривой от *соприкасающейся плоскости*. Пусть M' — переменная точка кривой, достаточно близкая к неподвижной точке M, β — острый угол между соприкасающимися плоскостями в M и M'. Угол β считается положительным, если при стремлении точки M' к M наблюдатель, глядя из M в M', будет видеть вращение переменной соприкасающейся плоскости против часовой стрелки; в противном случае угол β считается отрицательным. Предел отношения $\beta/\Delta s$, где Δs — длина дуги MM', при неограниченном приближении точки M' к M называют к р у ч е н и е м кривой в точке M:

$$\sigma=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\beta}{\Delta s}.$$

КУБ (греч. κύβος) — 1) К.— один из пяти типов правильных многогранников; имеет 6 квадратных граней, 12 рёбер, 8 вершин, в каждой вершине сходятся 3 ребра (они взаимно перпендикулярны). К. иногда называют г е к с а э д р о м. 2) К. числа a — третья степень числа a, т. е. произведение $a\cdot a\cdot a=a^3$; название объясняется тем, что именно так выражается объём куба, ребро к-рого равно a.

КУБАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — формула для приближённого вычисления интегралов вида

$$I(f)\approx\int_\Omega p(x)\,f(x)\,dx.$$

Область интегрирования Ω — множество в $\mathbb{R}^n$, имеющее внутренние точки $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Подинтегральная функция записана в виде произведения двух функций: первая $p(x)$ считается фиксированной и наз. в е с о в о й ф у н к ц и е й, вторая $f(x)$ принадлежит достаточно широкому классу функций, напр. непрерывных, и такова, что интеграл $I(f)$ существует. К. ф. наз. приближённое равенство

$$I(f)\approx\sum_{j=1}^{N}C_jf(x^{(j)}).\qquad(*)$$

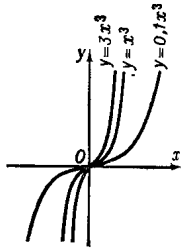
Сумма в правой части (*) наз. к у б а т у р н о й с у м м о й, точки $x^{(j)}$ наз. у з л а м и К. ф., а числа C_j — её к о э ф ф и ц и е н т а м и. Обычно $x^{(j)}\in\Omega$, хотя это требование не является обязательным. Нахождение приближённого значения интеграла $I(f)$ с помощью формулы (*) сводится к вычислению кубатурной суммы. При $n=1$ формула (*) и сумма в правой её части наз. квадратурными (см. *Квадратурная формула*).

КУБИ́КА — см. *Алгебраическая геометрия.*

КУБИ́РУЕМОЕ ТЕ́ЛО — см. *Объём.*

КУБИ́ЧЕСКАЯ ПАРА́БОЛА — плоская алгебраическая кривая 3-го порядка (рис.). Уравнение в прямоугольных координатах

$$y=ax^3.$$



Симметрична относительно начала координат, в к-ром имеет точку перегиба с касательной $y=0$.

КУБИ́ЧЕСКАЯ ФО́РМА — однородный многочлен (*форма*) 3-й степени.

КУБИ́ЧЕСКИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИО́ННЫЙ СПЛАЙН — см. *Интерполирование.*

КУБИ́ЧЕСКОЕ УРАВНЕ́НИЕ — алгебраическое уравнение 3-й степени. Общий вид К. у.:

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,\quad a\neq 0.$$

Заменяя в этом уравнении x новым неизвестным y, связанным с x равенством $x=y-\frac{b}{3a}$, К. у. можно привести к более простому (каноническому) виду:

$$y^3+py+q=0,$$

где

$$p=-\frac{b^2}{3a^2}+\frac{c}{a},\quad q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a},$$

решение же этого уравнения можно получить с помощью *Кардано формулы*:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Если коэффициенты К. у.— действительные числа, то вопрос о характере его корней зависит от знака выражения $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$, стоящего под квадратным корнем в формуле

Кардано. Если $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$, то К. у. имеет три различных корня: один из них действительный, два других — сопряжённые комплексные; если $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$, то все три корня действительные, два из них равны; если $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$, то все три корня действительные и различные. Выражение $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ только постоянным множителем отличается от дискриминанта К. у. $D=-4p^3-27q^2$.

Первые попытки найти решения задач, сводящихся к К. у., были сделаны математиками древности (к К. у. сводятся, напр., задачи об удвоении куба и трисекции угла). Математики средневекового Востока создали довольно развитую теорию (в геометрич. форме) К. у.; наиболее обстоятельно она изложена в трактате «О доказательствах задач алгебры и алмукабалы» Омара Хайяма (ок. 1070), где рассмотрен вопрос о нахождении положительных корней 14 видов К. у., содержащих в обеих частях только члены с положительными коэффициентами. В Европе впервые в тригонометрич. форме решение одного случая К. у. дал Ф. Виет (1593). Первое решение в радикалах одного из видов К. у. удалось найти С. Ферро (ок. 1515), однако оно не было опубликовано; его открытие независимо повторил Н. Тарталья (1535), указав правило решения ещё двух других видов К. у. Опубликованы эти открытия были в 1545 Дж. Кардано, к-рый упомянул об авторстве Н. Тартальи. Термин «К. у.» ввели Р. Декарт (1619) и У. Оутред (1631).

КУМУЛЯ́НТ (от лат. cumulans, род. падеж cumulantis — собирающий, накапливающий) — то же, что *семиинвариант*.

КУМУЛЯТИ́ВНАЯ КРИВА́Я — то же, что график *распределения функции*.

КУ́ПОЛЬНАЯ ПЕРСПЕКТИ́ВА — см. *Перспектива*.

КУ́ТТЫ—МЕ́РСОНА МЕ́ТОД — пятиэтапный *Рунге—Кутты метод* 4-го порядка точности для приближённого решения задачи Коши:

$$y'(x)=f(x,\ y(x)),\ x_0\leqslant x\leqslant X,\ y(x_0)=y_0.$$

Метод имеет вид

$$k_1=hf(x_0,\ y_0),\ y_0=y(x_0),$$
$$k_2=hf\left(x_0+\frac{1}{3}h,\ y_0+\frac{1}{3}k_1\right),$$
$$k_3=hf\left(x_0+\frac{1}{3}h,\ y_0+\frac{1}{6}k_1+\frac{1}{6}k_2\right),$$
$$k_4=hf\left(x_0+\frac{1}{2}h,\ y_0+\frac{1}{8}k_1+\frac{3}{8}k_2\right),$$
$$k_5=hf\left(x_0+h,\ y_0+\frac{1}{2}k_1-\frac{3}{2}k_3+2k_4\right),$$
$$y^1(x_0+h)=y_0+\frac{1}{2}k_1-\frac{3}{2}k_3+2k_4,$$
$$y^2(x_0+h)=y_0+\frac{1}{6}k_1+\frac{2}{3}k_4+\frac{1}{6}k_5.$$

В качестве приближённого решения берётся $y^2(x)$. Величина $R=0{,}2|y^1-y^2|$ служит для контроля точности и для автоматич. выбора шага интегрирования. При $R>\varepsilon$, где ε — заданная точность интегрирования, шаг h уменьшается в два раза, при $R\leqslant\varepsilon/64$ — увеличивается вдвое, а при $\varepsilon/64<R\leqslant\varepsilon$ остаётся неизменным.

«КУ́ЧА» — одна из *антиномий*.

КЭ́ЛИ А́ЛГЕБРА — см. *Кэли число*.

КЭ́ЛИ ТАБЛИ́ЦА — то же, что *латинский квадрат*. См. также *Квазигруппа*.

КЭ́ЛИ ЧИСЛО́, октава,— гиперкомплексное число, а именно: элемент 8-мерной алгебры над полем действительных чисел (алгебры Кэли), впервые рассмотренной А. Кэли в 1845. Эта алгебра является единственной 8-мерной действительной альтернативной алгеброй с единицей и без делителей нуля; она неассоциативна и некоммутативна.

Л

ЛАГЕ́РРА МНОГОЧЛЕ́НЫ — система ортогональных многочленов $\{L_n(x)\}$ на интервале $0\leqslant x<+\infty$ с весом e^{-x}. Для $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Л. м. определяются формулой

$$L_n(x)=(-1)^n e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}),$$

в частности:

$$L_0(x)=1,\ L_1(x)=x-1,\ L_2(x)=x^2-4x+2,$$
$$L_3(x)=x^3-9x^2+18x-6,$$
$$L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24.$$

Часто используются также обобщённые Л. м., определяемые более общей формулой:

$$L_n^{(\lambda)}(x)=(-1)^n x^{-\lambda}e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^{\lambda+n}e^{-x}),$$

где $\lambda>-1$. Обобщённые Л. м. ортогональны на интервале $0\leqslant x<+\infty$ с весом $x^\lambda e^{-x}$. Дифференциальное уравнение и рекуррентная формула для обобщённых Л. м. имеют соответственно вид

$$xy''+(\lambda+1-x)y'+ny=0,$$
$$L_{n+1}^{(\lambda)}(x)=(x-\lambda-2n-1)L_n^{(\lambda)}(x)-n(\lambda+n)L_{n-1}^{(\lambda)}(x).$$

Названы по имени Э. Лагерра, исследовавшего их (1878).

ЛАГЕ́РРА ФУ́НКЦИИ — ортогональная система функций на интервале $0\leqslant x<+\infty$ с весом 1, тесно связанная с *Лагерра многочленами*. Л. ф. $l_n^{(\lambda)}(x)$ выражаются через обобщённые многочлены Лагерра $L_n^{(\lambda)}(x)$ формулой

$$l_n^{(\lambda)}(x)=x^{\lambda/2}e^{-x/2}L_n^{(\lambda)}(x)=$$
$$=(-1)^n x^{-\lambda/2}e^{x/2}\frac{d^n}{dx^n}(x^{\lambda+n}e^{-x}),\ \lambda>-1,$$

они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$xu''+u'+\left(-\frac{x}{4}+\frac{\lambda+1}{2}+n-\frac{\lambda^2}{4x}\right)u=0.$$

Свойство ортогональности Л. ф. с весом $p(x)=1$ выражается формулами

$$\int_0^\infty l_m^{(\lambda)}(x)\,l_n^{(\lambda)}(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ n!\,\Gamma(\lambda+n+1), & m=n.\end{cases}$$

При определённых ограничениях на функцию $f(x)$ она разлагается в ряд по Л. ф.

$$f(x)=\sum_{n=0}^\infty c_n l_n^{(\lambda)}(x)$$

с коэффициентами

$$c_n=\frac{1}{n!\,\Gamma(\lambda+n+1)}\int_0^\infty l_n^{(\lambda)}(x)\,f(x)\,dx.$$

ЛАГРА́НЖА ЗАДА́ЧА — одна из основных задач *вариационного исчисления*, состоящая в минимизации функционала при наличии некоторых дифференциальных ограничений и граничных условий. Ж. Лагранж рассматривал эту задачу в связи с исследованиями по механике (2-я пол. 18 в.).

ЛАГРА́НЖА ИНТЕРПОЛЯЦИО́ННАЯ ФО́РМУЛА — форма записи многочлена степени n (интерполяционного многочлена Лагранжа), сов-

падающего в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$ с заданной функцией $f(x)$:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}. \quad (1)$$

В случае равноотстоящих узлов заменой $(x-x_0)/h=t$ формула (1) приводится к виду

$$L_n(x) = L_n(x_0+th) =$$
$$= (-1)^n \frac{t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n)}{n!} x \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \frac{f(x_i)}{t-i}. \quad (2)$$

В выражении (2), наз. Л. и. ф. для равноотстоящих узлов, коэффициенты, стоящие перед $f(x_i)$:

$$(-1)^{n-i} C_n^i \frac{t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n)}{(t-i)\,n!},$$

наз. коэффициентами Лагранжа. См. также *Интерполирование*.

ЛАГРА́НЖА МЕ́ТОД — метод приведения квадратичной формы к сумме квадратов, указанный Ж. Лагранжем (1759). Пусть дана квадратичная форма

$$f(x) = \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (1)$$

от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коэффициентами из поля K характеристики $p \neq 2$. При помощи Л. м. эта форма приводится к канонич. виду:

$$f(y) = \sum_{i=1}^{r} b_i y_i^2; \; b_i \in K, \; b_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$

невырожденным линейным преобразованием переменных следующим образом. Можно считать, что не все коэффициенты формы (1) равны 0. Поэтому возможны два случая.

1) При нек-ром g, $1 \leqslant g \leqslant n$, диагональный коэффициент $a_{gg} \neq 0$. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{a_{gg}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{gk} x_k \right)^2 + f_1(x), \quad (2)$$

где форма $f_1(x)$ не содержит переменное x_g.

2) Если же все $a_{gg} = a_{hh} = 0$, но $a_{gh} \neq 0$, то

$$f(x) = \frac{1}{2a_{gh}} \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{gk} + a_{hk}) x_k \right]^2 -$$
$$- \frac{1}{2a_{gh}} \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{gk} - a_{hk}) x_k \right]^2 + f_2(x), \quad (3)$$

где форма $f_2(x)$ не содержит двух переменных x_g и x_h. Формы, стоящие под знаками квадратов в (3), линейно независимы. Применением преобразований вида (2) и (3) форма (1) после конечного числа шагов приводится к сумме квадратов линейно независимых линейных форм. В этом и заключается Л. м.

С помощью частных производных функций f формулы (2) и (3) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{4a_{gg}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_g} \right)^2 + f_1(x),$$
$$f(x) = \frac{1}{8a_{gh}} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_g} + \frac{\partial f}{\partial x_h} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x_g} - \frac{\partial f}{\partial x_h} \right)^2 \right].$$

ЛАГРА́НЖА МНО́ЖИТЕЛЕЙ МЕ́ТОД — метод решения задач на условный экстремум, заключающийся в сведении этих задач к задачам на безусловный экстремум вспомогательной функции — так называемой функции Лагранжа. Для задачи об экстремуме функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условиях (уравнениях связи)

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

функция Лагранжа имеет вид

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) =$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} y_i \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Множители $y_1, y_2, \ldots, y_m$ наз. множителями Лагранжа. Условие безусловного экстремума функции Лагранжа вместе с уравнениями связи даёт уравнения для отыскания неизвестных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$. При достаточно общих предположениях решения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ доставляют экстремум функции f. Функция Лагранжа L применяется также при исследовании задач вариационного исчисления и математич. программирования (см. *Нелинейное программирование*). Впервые этот метод был предложен Ж. Лагранжем (1797) в связи с задачами дифференциального исчисления.

ЛАГРА́НЖА ТЕОРЕ́МА — 1) Л. т. в теории чисел: каждое натуральное число есть сумма четырёх квадратов целых чисел. Доказана Ж. Лагранжем (1772).

2) Л. т. о порядке и индексе конечной группы — см. *Подгруппа*.

ЛАГРА́НЖА УРАВНЕ́НИЕ, уравнение Д'Аламбера,— обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка, линейное относительно зависимой и независимой переменных, имеющее вид

$$y = x\varphi(y') + f(y'),$$

где y' — производная искомой функции $y = y(x)$, а φ и f — заданные дифференцируемые функции своего аргумента. Л. у. принадлежит к числу дифференциальных уравнений, общий интеграл к-рых может быть найден в параметрич. форме дифференцированием уравнения по x; он выражается через квадратуры. Частным случаем Л. у. [при $\varphi(y') = y'$] является *Клеро уравнение*.

Название Л. у. по имени Ж. Лагранжа (1759) не является исторически оправданным, т. к. это уравнение ранее Ж. Лагранжа исследовалось Ж. Д'Аламбером (1748).

ЛАГРА́НЖА ФО́РМУЛА — то же, что *конечных приращений формула*.

ЛАГРА́НЖА ФУ́НКЦИЯ — см. *Лагранжа множителей метод*, *Выпуклое программирование*, *Нелинейное программирование*.

ЛАМЕ́ КОЭ́ФФИЦИЕ́НТЫ ортогональной криволинейной системы координат u, v, w в пространстве — величины

$$L_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2},$$
$$L_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2},$$
$$L_w = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2},$$

где x, y, z — декартовы прямоугольные координаты; аналогично определяются Л. к. на плоскости. Через Л. к. в координатах u, v, w выражаются элемент длины:

$$dl = \sqrt{L_u^2\,du^2 + L_v^2\,dv^2 + L_w^2\,dw^2};$$

элемент площади поверхности:

$$ds = \sqrt{(L_u L_v\,du\,dv)^2 + (L_u L_w\,du\,dw)^2 + (L_v L_w\,dv\,dw)^2};$$

элемент объёма:

$$dV = L_u L_v L_w\,du\,dv\,dw.$$

Л. к. входят в выражения векторных дифференциальных операций в координатах u, v, w:

$$\mathrm{grad}_u \psi = \frac{1}{L_u}\frac{\partial \psi}{\partial u}, \; \mathrm{grad}_v \psi = \frac{1}{L_v}\frac{\partial \psi}{\partial v}, \; \mathrm{grad}_w \psi = \frac{1}{L_w}\frac{\partial \psi}{\partial w};$$
$$\mathrm{div}\, a = \frac{1}{L_u L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_u L_v L_w) + \frac{\partial}{\partial v}(a_v L_u L_w) + \frac{\partial}{\partial w}(a_w L_u L_v)\right];$$
$$\mathrm{rot}_u a = \frac{1}{L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(a_w L_w) - \frac{\partial}{\partial w}(a_v L_v)\right],$$
$$\mathrm{rot}_v a = \frac{1}{L_u L_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(a_u L_u) - \frac{\partial}{\partial u}(a_w L_w)\right],$$
$$\mathrm{rot}_w a = \frac{1}{L_u L_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_v L_v) - \frac{\partial}{\partial v}(a_u L_u)\right];$$
$$\Delta\psi = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\psi) = \frac{1}{L_u L_v L_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L_v L_w}{L_u}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_u L_w}{L_v}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{L_u L_v}{L_w}\frac{\partial \psi}{\partial w}\right)\right].$$

Л. к. введены Г. Ламе (1859).

ЛАМЕ́ КРИВА́Я — плоская алгебраическая кривая, уравнение которой в прямоугольных координатах:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^m=1,$$

где a и b — положительные числа, $m=p/q$ — рациональное число (p и q — взаимно простые числа). На рисунке приведены примеры Л. к.: $m>1$, p — чётное, q — нечётное (рис. 1); $0<m<1$, p — чётное, q — нечётное (рис. 2). При $m>0$ порядок кривой pq, при $m<0$ порядок — $2pq$.

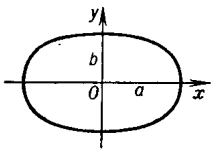


Рис. 1.

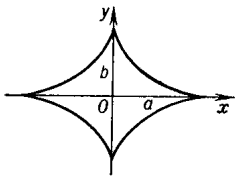


Рис. 2.

Кривые рассмотрены Г. Ламе (1818).

ЛАМЕ́ ФУ́НКЦИИ — функции, применяемые при изучении физических явлений (распространение тепла, движение жидкости и т. п.) в областях, ограниченных поверхностью эллипсоида. Л. ф. $L(\lambda)$ являются решениями дифференциального уравнения Ламе:

$$\frac{d^2L}{d\lambda^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}\right)\frac{dL}{d\lambda}=\frac{n(n+1)+c}{4\alpha^2\beta^2\gamma^2}L,$$

где $\alpha^2=a^2+\lambda$, $\beta^2=b^2+\lambda$, $\gamma^2=c^2+\lambda$, n — целое число, а a, b, c — полуоси эллипсоида, внутри (или вне) к-рого исследуется соответствующее физич. явление.

Функции $L(\lambda)$ введены Г. Ламе (1839).

ЛАПЛА́СА ИНТЕГРА́Л — интеграл в формуле *Лапласа преобразования*. Рассмотрен П. Лапласом (1812); ранее встречается у Л. Эйлера (1737).

ЛАПЛА́СА ОПЕРА́ТОР, лапласиан,— линейный дифференциальный оператор Δ, который функции $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ставит в соответствие функцию

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}.$$

В частности, для функций $\varphi(x)$ одного переменного Л. о. совпадает с оператором 2-й производной:

$$\Delta\varphi=\frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Уравнение $\Delta\varphi=0$ обычно называют *Лапласа уравнением*; отсюда и произошло назв. «Л. о.». Обозначение Δ ввёл Р. Мёрфи (1833).

ЛАПЛА́СА ПРЕДЕ́ЛЬНАЯ ФО́РМУЛА — см. *Гаусса—Лапласа распределение*.

ЛАПЛА́СА ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — преобразование, переводящее функцию $f(t)$ действительного переменного t ($0<t<\infty$), называемую оригиналом, в функцию

$$F(p)=L[f]=\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt \qquad (1)$$

комплексного переменного $p=\sigma+i\tau$. Под Л. п. понимают также не только само преобразование, но и его результат — функцию $F(p)$. Интеграл в правой части формулы (1) наз. интегралом Лапласа. Он был рассмотрен П. Лапласом в ряде работ, к-рые объединены в его книге «Аналитическая теория вероятностей», вышедшей в 1812. Значительно раньше (1737) такие интегралы применял к решению дифференциальных уравнений Л. Эйлер.

При нек-рых условиях, указанных ниже, Л. п. определяют функцию $f(t)$ однозначно, в простейших случаях — по формуле обращения:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}F(p)\,e^{pt}\,dt. \qquad (2)$$

Л. п. является линейным функциональным преобразованием. Из числа основных формул Л. п. можно отметить следующие:

$$L[f'(t)]=pF(p)-f(0),$$

$$L[t^nf(t)]=(-1)^nF^{(n)}(p),\ n=1,\ 2,\ \ldots,$$

$$L\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]=\frac{F(p)}{p},\ t>0.$$

Л. п. в сочетании с формулой (2) его обращения применяется к интегрированию дифференциальных уравнений. В частности, в силу свойства (1) и линейности Л. п. решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами удовлетворяет алгебраич. уравнению 1-й степени и может быть, следовательно, легко найдено. Так, если, напр., $y''+y=f(t)$, $y(0)=y'(0)=0$ и $Y(p)=L[y]$, $F(p)=L[f]$, то $L[y'']=p^2Y(p)$ и $p^2Y(p)+Y(p)=F(p)$, откуда $Y(p)=\frac{F(p)}{p^2+1}$.

Многочисленные задачи электротехники, гидродинамики, механики, теплопроводности эффективно решаются методами, использующими Л. п.

Л. п. нашло особенно широкое применение в обосновании *операционного исчисления*, в к-ром обычно вместо Л. п. $F(p)$ вводится изображение оригинала $f(t)$ — функция $pF(p)$.

Современная общая теория Л. п. строится на основе интегрирования в смысле Лебега. Для применимости Л. п. к функции $f(t)$ необходимо, чтобы $f(t)$ была интегрируема в смысле Лебега на любом конечном интервале $(0, t)$, $t>0$, и интеграл (1) для неё сходился хотя бы в одной точке $p_0=\sigma_0+i\tau_0$. Если интеграл (1) сходится в точке p_0, то он сходится во всех точках p, для к-рых $\mathrm{Re}(p-p_0)>0$. Таким образом, если интеграл (1) сходится хотя бы в одной точке плоскости p_0, то либо он сходится во всей плоскости, либо существует такое число σ_c, что при $\mathrm{Re}\,p>\sigma_c$ интеграл (1) сходится, а при $\mathrm{Re}\,p<\sigma_c$ расходится. Число σ_c наз. абсциссой сходимости интеграла Лапласа, $F(p)$ — аналитич. функция в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p>\sigma_c$.

● Деч Г., Руководство к практическому применению преобразований Лапласа, пер. с нем., М., 1965.

ЛАПЛА́СА РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ, двустороннее показательное распределение,— распределение вероятностей случайной величины x, заданное плотностью вероятности

$$p(x,\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha|x-\beta|},\quad -\infty<x<\infty,$$

где $-\infty<\beta<+\infty$ и $\alpha>0$ — параметры. Л. р. симметрично относительно точки $x=\beta$, имеет конечные моменты любого порядка, в частности его математич. ожидание и дисперсия соответственно равны $\mathsf{E}X=\beta$ и $\mathsf{D}X=1/\alpha$, характеристич. функция Л. р. имеет вид

$$e^{it\beta}\Big/\left(1+\frac{t^2}{\alpha^2}\right).$$

Л. р. совпадает с распределением случайной величины $\beta+X_1-X_2$, где X_1 и X_2 — независимые случайные величины, имеющие одинаковое показательное распределение с плотностью $\alpha e^{-\alpha x}$, $x>0$.

Л. р. было впервые введено П. Лапласом (1812) и часто наз. первым законом распределения Лапласа в отличие от второго закона, к-рым является нормальное распределение.

ЛАПЛА́СА ТЕОРЕ́МА — 1) Л. т.— одна из *предельных теорем* теории вероятностей, относящаяся к распределению отклонений частоты появления события при независимых испытаниях от его вероятности. В общем виде эта теорема доказана П. Лапласом в книге «Аналитическая теория вероятностей» (1812). Один частный случай Л. т. был известен А. Муавру (1730), в связи с чем Л. т. иногда наз. теоремой Муавра — Лапласа. Формулировка Л. т. такова. Пусть при каждом из n независимых испытаний вероятность появления нек-рого случайного события A равна p, $0<p<1$, и пусть μ_n обозначает число испытаний, в к-рых событие A фактически наступает; тог-

да вероятность неравенства

$$z_1 < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < z_2, \quad q = 1 - p,$$

при достаточно большом числе испытаний n сколь угодно мало отличается от

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2/2}\, dz$$

(интегральная теорема Лапласа). Утверждение, заключающееся в том, что вероятность точно μ_n появлений события A при n испытаниях приближённо равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-z^2/2},$$

где $z = \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}}$ иногда наз. локальной теоремой Лапласа.

Если обозначить через X_k случайную величину, принимающую значение, равное 1, при появлении события A в k-м испытании, и значение, равное 0, при его непоявлении, то μ_n представляется как сумма независимых случайных величин $\mu_n = X_1 + \ldots + X_m$. Это позволяет рассматривать Л. т. как частный случай более общих предельных теорем вероятностей, в частности *Ляпунова теоремы*.

Приближённые значения вероятностей, даваемые Л. т., на практике используются как точные при npq порядка нескольких десятков и большем.

2) Л. т.— теорема, сводящая вычисление определителя n-го порядка к вычислению определителей меньших порядков. Если в квадратной матрице порядка n выбраны k строк (или столбцов), $1 \leqslant k < n$, то сумма произведений всех миноров k-го порядка, расположенных в выбранных строках (столбцах), на их *алгебраические дополнения* равна определителю этой матрицы.

Л. т. встречалась в частных случаях у А. Вандермонда (1771), П. Лапласа (1773), Э. Безу (1779). Но лишь у О. Коши (1779) она полностью сформулирована и доказана.

ЛАПЛА́СА УРАВНЕ́НИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

где x, y, z — независимые переменные, а $u = u(x, y, z)$ — искомая функция. К Л. у. приводит ряд задач физики и техники. Л. у. удовлетворяют температура при стационарных процессах, потенциал электростатич. поля в точках пространства, свободных от зарядов, потенциал поля тяготения в области, не содержащей притягивающих масс, и т. п. Решения Л. у., имеющие непрерывные частные производные до 2-го порядка, наз. гармоническими функциями. Л. у. встречается у Л. Эйлера (1761) и Ж. Д'Аламбера (1761) в связи с задачами гидромеханики. Однако широкую известность это уравнение получило после появления работ П. Лапласа (1782, 1799) по теории гравитационного потенциала и небесной механике.

ЛАПЛА́СА ФУ́НКЦИЯ — см. *Гаусса — Лапласа распределение*.

ЛАПЛАСИА́Н — то же, что *Лапласа оператор*.

ЛАТИ́НСКИЙ КВАДРА́Т — квадратная матрица порядка n, каждая строка и каждый столбец которой являются перестановками элементов конечного множества S, состоящего из n элементов. Говорят, что Л. к. построен на множестве S; число n наз. порядком Л. к.

Л. к. существует для любого n; напр., $A = ||a_{ij}||$, где $a_{ij} = i + j - 1 (\mathrm{mod}\, n)$, $i, j = 1, \ldots, n$, есть Л. к. Каждый Л. к. можно рассматривать как таблицу умножения *квазигруппы*; верно и обратное: таблица умножения конечной квазигруппы есть Л. к. Для числа L_n Л. к. порядка n верна оценка снизу:

$$L_n \geqslant n!\,(n-1)! \ldots 2!1!.$$

Два Л. к., построенные на одном и том же множестве S, наз. эквивалентными, если один из другого получается перестановкой строк, столбцов и переименованием элементов.

Два Л. к. $A = ||a_{ij}||$ и $B = ||b_{ij}||$ порядка n наз. ортогональными (о. л. к.), если

$$(a_{ij}, b_{ij}) \neq (a_{kl}, b_{kl}) \text{ при } (i, j) \neq (k, l),$$
$$i, j, k, l \in S = \{1, \ldots, n\},$$

где (a_{ij}, b_{ij}) — элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы, полученной наложением двух Л. к. A и B.

Для всех $n > 2$, $n \neq 6$, имеются примеры пар о. л. к., а для $n = 6$ путём перебора всех возможностей доказано, что таких пар нет. Несколько Л. к. одного порядка наз. попарно ортогональными, если любые два из них ортогональны. Если $N(n)$ — максимальное возможное число попарно о. л. к., то $N(n) \leqslant n - 1$. Получены также следующие оценки снизу для $N(n)$:

$n \geqslant$	7	52	53	63	90
$N(n) \geqslant$	2	3	4	5	6.

Кроме того, $N(12) \geqslant 5$, $N(33) \geqslant 3$, $N(35) \geqslant 4$, $N(40) \geqslant 4$, $N(45) \geqslant 4$. Доказано, что $N(n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Множество из $n-1$ попарно о. л. к. порядка n наз. полным. Полные множества попарно о. л. к. находят применение в планировании экспериментов, при построении симметричных BIB-схем (см. *Блок-схема*); они могут интерпретироваться и как конечные проективные плоскости.

Предложено много методов построения о. л. к. Все они созданы с целью получения как можно большего множества попарно о. л. к. порядка n. Приложения о. л. к. в статистике, теории информации и планировании экспериментов требуют построения о. л. к. специального вида и перенесения понятия ортогональности на другие объекты.

● Сачков В. Н., Комбинаторные методы дискретной математики, М., 1977; Холл М., Комбинаторика, пер. с англ., М., 1970.

ЛЕБЕ́ГА ИНТЕГРА́Л — одно из наиболее важных обобщений понятия *интеграла*, предложенное в 1902 А. Лебегом и основанное на разработанной им теории меры. См. *Метрическая теория функций*.

ЛЕБЕ́ГА МЕ́РА — понятие, введённое А. Лебегом (1902) и являющееся обобщением понятия длины, площади, объёма на более широкий класс множеств. См. *Мера* множества.

ЛЕБЕ́ГА ТЕОРЕ́МА — 1) установленная А. Лебегом (1904) теорема о функциях с ограниченной *вариацией*.

2) Теорема *метрической теории функций* о последовательностях измеримых функций. Установлена А. Лебегом (1906).

3) Теорема теории *приближения функций*. Установлена А. Лебегом (1909).

ЛЕ́ВАЯ ТРО́ЙКА векторов — см. *Векторная алгебра*.

ЛЕВИ́—ХИ́НЧИНА КАНОНИ́ЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕ́НИЕ — формула для логарифма характеристической функции $\ln\varphi(\lambda)$ *безгранично делимого распределения*. Предложено А. Я. Хинчиным (1937) и эквивалентно формуле, указанной П. Леви (1934).

ЛЕЖА́НДРА МНОГОЧЛЕ́НЫ, сферические многочлены,— специальная система многочленов последовательно возрастающих степеней. Введены А. Лежандром (1785). Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ Л. м. $P_n(x)$ могут быть определены формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n;$$

в частности:

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^2 - 3x),\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{3}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

и т. д. Все нули многочлена $P_n(x)$ — действительные и лежат в основном отрезке $[-1, +1]$, перемежаясь с нулями многочлена $P_{n+1}(x)$. Л. м.— ортогональные многочлены с весом 1 на отрезке $[-1, +1]$; они образуют полную систему, чем обусловливается возможность разложения в ряд по Л. м. произвольной функции $f(x)$, интегрируемой

на отрезке $[-1, +1]$:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \text{ где } a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x)\, dx.$$

Характер сходимости рядов по Л. м. примерно тот же, что и рядов Фурье.

Явное выражение для Л. м.:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} C_n^k x^{n-2k}.$$

Производящая функция:

$$g(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.$$

(Л. м.— коэффициенты при n-й степени в разложении этой функции по степени t).

Рекуррентная формула:

$$nP_n(x) + (n-1) P_{n-2}(x) - (2n-1) x P_{n-1}(x) = 0.$$

Дифференциальное уравнение для Л. м.:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right] + n(n+1) P_n(x) = 0$$

возникает при разделении переменных в уравнении Лапласа в сферич. координатах. См. также *Лежандра функции*, *Сферические функции*.

ЛЕЖА́НДРА СИ́МВОЛ — функции чисел p и a, определённая для простых нечётных p и целых a, не делящихся на p. Л. с. обозначается $\left(\frac{a}{p}\right)$. Л. с. $\left(\frac{a}{p}\right)=1$, если сравнение $x^2 \equiv a \pmod p$ разрешимо; в противном же случае $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$.

Л. с. введён А. Лежандром (1785). См. *Квадратичный вычет*.

ЛЕЖА́НДРА УСЛО́ВИЕ — необходимое условие для решения простейшей задачи *вариационного исчисления*, предложенное А. Лежандром (1786).

ЛЕЖА́НДРА ФУ́НКЦИИ — функции $y(x)$, являющиеся решениями дифференциального уравнения Лежандра:

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right] y = 0, \qquad (*)$$

где ν и μ — произвольные числа. Если $\nu=0, 1, 2, \ldots$, а $\mu=0$, то ограниченные на $[-1, 1]$ решения уравнения (*) наз. *Лежандра многочленами*; при целых μ, $-\nu \leqslant \mu \leqslant \nu$, ограниченные на $[-1, 1]$ решения уравнения (*) наз. присоединёнными Л. ф.

ЛЕ́ЙБНИЦА ПРИ́ЗНАК — установленный Г. Лейбницем (1682) признак сходимости *знакочередующегося ряда*.

ЛЕ́ЙБНИЦА РЯД — знакочередующийся ряд

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

сходящийся к $\pi/4$. Рассмотрен Г. Лейбницем (1673—74).

ЛЕ́ЙБНИЦА ФО́РМУЛА — формула, выражающая производную n-го порядка от произведения двух функций через производные сомножителей:

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \frac{d^nu}{dx^n}v + \frac{n}{1!}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1!}\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + u\frac{d^nv}{dx^n}.$$

Эта формула была сообщена Г. Лейбницем в письме к И. Бернулли в 1695.

ЛЕКСИКОГРАФИ́ЧЕСКИЙ ПОРЯ́ДОК (от греч. λεξικός — относящийся к слову и γράφω — пишу) — отношение порядка на прямом произведении $\Pi_i A_i$ линейно упорядоченных множеств A_i, $i=1, 2, \ldots, n, \ldots$, индуцируемое порядком сомножителей. А именно, элемент $(a_1, \ldots, a_i, \ldots)$ больше элемента $(a_1', \ldots, a_i', \ldots)$, если $a_1=a_1', \ldots, a_{i-1}=a_{i-1}'$ и a_i больше a_i' (т. е. порядок определяется по первым различным элементам). Аналогично можно определить Л. п., если множество индексов прямого произведения — не натуральный ряд (или часть его), а любое вполне упорядоченное множество.

ЛЕ́ММА (греч. λῆμμα — допущение) — вспомогательное предложение, употребляемое при доказательстве других утверждений. Термин «Л.» введён древнегреческими геометрами; особенно часто встречается у Архимеда.

ЛЕМНИСКА́ТА (от лат. lemniscatus, букв.— украшенный лентами) — плоская алгебраическая кривая порядка $2n$. Множество точек, произведение расстояний к-рых до n заданных точек (ф о к у с о в) постоянно. Л. с одним фокусом есть окружность, Л. с двумя фокусами — *Кассини овал*, частный случай к-рого — *Бернулли лемниската*.

ЛЕМНИСКА́ТНЫЕ ФУ́НКЦИИ, л е м н и с к а т и ч е с к и е ф у н к ц и и,— частный случай эллиптических функций, возникающий при обращении эллиптических интегралов частного вида:

$$z = \int_0^u (1-t^4)^{-1/2} dt.$$

Эти интегралы появились впервые при вычислении длины дуги лемнискаты Бернулли в работах Дж. Фаньяно (1715). Сами Л. ф. ввёл К. Гаусс (1797).

Л. ф.— две:

$$u = \cos \operatorname{lemn} z = \operatorname{cl} z$$

и

$$\sin \operatorname{lemn} z = \operatorname{sl} z = \cos \operatorname{lemn}\left(\frac{\omega}{2} - z\right),$$

где

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^1 (1-t^4)^{-1/2} dt = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.$$

Л. ф. выражаются через эллиптич. функции Якоби с модулем $k=\sqrt{2}/2$:

$$\operatorname{sl} z = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\operatorname{sn}(z\sqrt{2})}{\operatorname{dn}(z\sqrt{2})}, \quad \operatorname{cl} z = \operatorname{cn}(z\sqrt{2}).$$

ЛЖЕЦА́ ПАРАДО́КС — одна из *антиномий*.

ЛИ А́ЛГЕБРА — алгебра над некоторым полем K с умножением, обозначаемым обычно $[\cdot, \cdot]$ и обладающим следующими свойствами: для любых элементов x, y, z алгебры

1) $[x, x]=0$;

2) $[x, [y, z]]+[y, [z, x]]+[z, [x, y]]=0$

(т о ж д е с т в о Я к о б и).

Из свойства 1) вытекает свойство

1′) $[x, y]=-[y, x]$ (а н т и к о м м у т а т и в н о с т ь), а в случае когда характеристика поля $\operatorname{char} K \neq 2$, тождества 1) и 1′) равносильны. Л. а. наз. к о м м у т а т и в н о й (или а б е л е в о й), если в ней выполняется тождество $[x, y]=0$.

П р и м е р ы и к о н с т р у к ц и и а л г е б р Л и. 1) Любая ассоциативная алгебра A (с умножением, обозначаемым обычным образом) превращается в Л. а., если ввести в ней новое умножение $[x, y]=xy-yx$ (к о м м у т и р о в а н и е). Таким образом строится Л. а. $gl_n(k)$ всех матриц порядка n над k, умножение в к-рой есть коммутирование матриц. 2) Множество $\operatorname{Der} A$ всех д и ф ф е р е н ц и р о в а н и й произвольной алгебры A [т. е. таких линейных отображений δ: $A \to A$, что $\delta(xy)=(\delta x)y+x(\delta y)$ для любых $x, y \in A$] является Л. а. относительно коммутирования. 3) С каждой группой Ли G связывается Л. а. $L(G)$ той же размерности. Эта связь впервые рассматривалась в работах С. Ли для групп непрерывных преобразований. В этом случае соответствующая Л. а. является подалгеброй Л. а. всех аналитических *векторных полей* в нек-рой области пространства $\mathbb{R}^r$ относительно операции коммутирования. Аналогично определяется Л. а. аналитических (соответственно, бесконечно дифференцируемых) векторных полей на любом аналитическом (дифференцируемом) многообразии. Л. а. (над соответствующим полем) может быть сопоставлена также любой алгебраич. группе.

У н и в е р с а л ь н а я о б ё р т ы в а ю щ а я а л г е б р а. Не всякая Л. а. получается из нек-рой ассоциативной алгебры с помощью конструкции из примера 1).

Однако для любой Л. а. L над полем K существует ассоциативная алгебра над тем же полем, содержащая L в качестве подалгебры. Более того, существует такая ассоциативная алгебра $U(L)$ и такой мономорфизм (вложение) $i\colon L\to U(L)_L$, что любой гомоморфизм $f\colon L\to A_L$, где A — ассоциативная алгебра, представим в виде $f=\varphi\circ i$, где $\varphi\colon U(L)\to A$ — однозначно определённый гомоморфизм алгебр. Алгебра $U(L)$ (вместе с мономорфизмом i) определена для L однозначно и наз. универсальной обёртывающей алгеброй Л. а. L. Если в L выбрать базис $e_1, \ldots, e_i, \ldots$, то одночлены $e_{k_1}, \ldots, e_{k_n}$, где $k_1\leqslant\ldots\leqslant k_n$, — целые неотрицательные числа, составляют базис в $U(L)$. В случае, когда L есть n-мерная коммутативная Л. а., $U(L)$ — алгебра многочленов от $e_1, \ldots, e_n$.

Линейные представления. Линейным представлением Л. а. L над полем K в векторном пространстве V над K наз. гомоморфизм $L\to gl(V)$ в Л. а. $gl(V)$. Любое аналитич. линейное представление группы Ли определяет линейное представление соответствующей Л. а. (в том же векторном пространстве). Любое линейное представление Л. а. L однозначно продолжается до линейного представления ассоциативной алгебры $U(L)$, что сводит теорию представлений Л. а. к теории модулей над нек-рым классом ассоциативных алгебр. Универсальная обёртывающая алгебра играет здесь роль, аналогичную роли групповой алгебры в теории представлений групп. Важным результатом является следующая теорема: любая конечномерная Л. а. над произвольным полем K допускает точное (т. е. инъективное) линейное представление в конечномерном векторном пространстве над K.

Строение и классификация алгебр Ли. Коммутантом Л. а. L наз. линейная оболочка $[L, L]$ её элементов вида $[x, y]$, где $x, y\in L$; коммутант является идеалом в L. Полагая по индукции $D^pL=[D^{p-1}L, D^{p-1}L]$, $D^0L=L$, получают убывающую цепочку идеалов $L=D^0L\supset D^1L\supset D^2L\supset\ldots$. Если $D^pL=0$ для нек-рого p, то L наз. разрешимой. Л. а. L наз. полупростой, если L не содержит ненулевых разрешимых идеалов, и простой, если L не содержит ненулевых идеалов, отличных от L. В любой конечномерной Л. а. L существует наибольший разрешимый идеал $\operatorname{rad} L$ — радикал Л. а. L, причём факторалгебра $L/\operatorname{rad} L$ полупроста. Наиболее хорошо изучено строение конечномерных Л. а. над полем K характеристики 0. В этом случае любая максимальная полупростая подалгебра $S\subset L$ является прямым дополнением к радикалу: $L=S\oplus\operatorname{rad} L$. При тех же условиях Л. а. L полупроста тогда и только тогда, когда L разлагается в прямую сумму некоммутативных простых идеалов (это разложение единственно). Над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел (а также над любым алгебраически замкнутым полем характеристики 0) известны все конечномерные простые Л. а. Это, прежде всего, следующие Л. а., являющиеся касательными алгебрами классич. комплексных групп Ли и поэтому также называемые классическими:

$$A_n=sl_{n+1}(\mathbb{C})=\{X\in gl_{n+1}(\mathbb{C})\mid \operatorname{tr}X=0\}\quad(n\geqslant 1),$$

$$B_n=so_{2n+1}(\mathbb{C})=\{X\in gl_{2n+1}(\mathbb{C})\mid X^\top=-X\}\quad(n\geqslant 2),$$

$$C_n=sp_{2n}(\mathbb{C})=\{X\in gl_{2n}(\mathbb{C})\mid X^\top B+BX=0\}\quad(n\geqslant 3),$$

где $B=\begin{pmatrix} OE\\ -EO\end{pmatrix}$,

$$D_n=so_{2n}(\mathbb{C})=\{X\in gl_{2n}(\mathbb{C})\mid X^\top=-X\}\quad(n\geqslant 4).$$

Кроме них (если исключить единственную коммутативную простую одномерную алгебру), существуют только 5 т. н. особых простых Л. а. E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, имеющих размерности 78, 133, 248, 52, 14 соответственно. Известна также классификация конечномерных простых Л. а. над полем $\mathbb{R}$.

Бесконечномерные Л. а. и Л. а. над полем простой характеристики исследованы значительно менее полно. В настоящее время (1987) интенсивно изучаются обобщения Л. а.— супералгебры Ли. Их возникновение связано с физич. теорией суперсимметрии, имеющей целью объединить различного рода взаимодействия (слабые, сильные, электромагнитные и др.). Супералгебры Ли возникают также в ряде вопросов алгебраич. топологии и геометрии. Известна классификация конечномерных простых супералгебр Ли над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.

● Гото М., Гроссханс Ф., Полупростые алгебры Ли, пер. с англ., М., 1981; Джекобсон Н., Алгебры Ли, пер. с англ., М., 1964.

А. Л. Онищик.

ЛИ ГРУППА — группа, являющаяся одновременно аналитическим многообразием (вещественным или комплексным), операции которой выражаются в локальных координатах аналитическими функциями. Обычно термин «Л. г.» относят к вещественному случаю, а в комплексном случае говорят о комплексной Л. г. Названа по имени С. Ли, к-рый в своих работах 1876—93 заложил основы теории таких групп.

В работах С. Ли рассматривались группы локальных аналитич. преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ (а также $\mathbb{C}^n$), зависящих от параметров $a_1, \ldots, a_r$:

$$\tilde{x}_i=f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r),\quad i=1, \ldots, n,$$

где f_i — аналитич. функции, в предположении, что параметры a_j, соответствующие произведению двух преобразований, являются аналитич. функциями от параметров сомножителей. Чтобы подчеркнуть контраст с конечными группами подстановок, такие группы преобразований стали называть непрерывными. Это название сохранялось за Л. г. до 30-х гг. 20 в., хотя термин «Л. г.» начал употребляться намного раньше. Напр., Д. Гильберт в своём знаменитом докладе «Математические проблемы» (1900) называл их «непрерывными группами Ли».

Примерами Л. г. являются различные группы преобразований, возникающие в геометрии (группы всех невырожденных линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, группы проективных, т. е. дробно линейных, преобразований, группа движений евклидова пространства и др.). С. Ли разработал метод изучения непрерывных групп преобразований, основанный на сопоставлении каждой такой группе нек-рого набора аналитических *векторных полей*, к-рые он называл «инфинитезимальными преобразованиями», а именно полей

$$\delta_j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial a_j}(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)\,\frac{\partial}{\partial x_i},\quad i=1, \ldots, r.$$

Они определены в окрестности точки 0 пространства параметров $\mathbb{R}^r$, к-рая соответствует тождественному преобразованию. Оказывается, что коммутаторы $[\delta_i, \delta_j]$, $i, j=1, 2, \ldots, r$, выражаются через δ_i в виде линейных комбинаций с постоянными коэффициентами, т. е. линейная оболочка L полей δ_i является подалгеброй в алгебре всех аналитич. векторных полей относительно операции коммутирования. Алгебра L, названная С. Ли инфинитезимальной группой, в дальнейшем стала называться *Ли алгеброй* или касательной алгеброй данной Л. г. Как было установлено С. Ли, алгебра L полностью определяет группу локальных преобразований; она может быть произвольной конечномерной подалгеброй алгебры всех векторных полей.

Примеры групп Ли. Любая алгебраич. группа над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ является Л. г. В частности, Л. г. является любая алгебраич. подгруппа группы автоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, напр. любая классич. группа. Вообще, подгруппа H Л. г. G, являющаяся подмногообразием в G, есть Л. г.; она наз. подгруппой Ли группы G. Группа всех изометрий риманова пространства есть Л. г., группа всех автоморфизмов компактного комплексного многообразия есть комплексная Л. г. Вообще, группа автоморфизмов геометрич. структуры на многообразии во многих случаях оказывается Л. г.

Соответствие между группами Ли и алгебрами Ли. Каждой Л. г. G (вещественной или комплексной) соответствует нек-рая алгебра Ли $L(G)$ той же размерности (соответственно, над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Эта алгебра строится как касательное пространство к многообразию G в единичном элементе e; умножение $[\cdot, \cdot]$ определяется следующим

образом: $[u, v]$ есть касательный вектор при $t=0$ к кривой

$$q(t)=\alpha(\sqrt{t})\beta(\sqrt{t})\alpha(\sqrt{t})^{-1}\beta(\sqrt{t})^{-1},$$

где α, β — дифференцируемые кривые на G такие, что $\alpha(0)=\beta(0)=e$, и имеющие в качестве касательных векторов при $t=0$ векторы u и v соответственно. Напр., группе $G=GL_n(\mathbb{R})$ всех невырожденных вещественных матриц порядка n отвечает алгебра Ли $L(G)=gl_n(\mathbb{R})$ всех матриц порядка n с операцией $[X, Y]=XY-YX$; группе $O(E^3)$ всех ортогональных преобразований евклидова пространства E^3 отвечает алгебра Ли $L(O(E^3))=E^3$, к-рая определяется в пространстве E^3 векторным умножением.

Любому аналитич. гомоморфизму $\varphi: H\to G$ групп Ли соответствует т. н. касательный гомоморфизм их алгебр Ли $d\varphi: L(H)\to L(G)$, подгруппе Ли H группы G отвечает подалгебра $L(H)$ алгебры $L(G)$, являющаяся идеалом, если подгруппа H нормальна. Если подгруппа H связна, то она однозначно определяется подалгеброй $L(H)$. Аналогично, гомоморфизм φ связной Л. г. H однозначно определяется гомоморфизмом $d\varphi$. Две односвязные Л. г. аналитически изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их алгебры Ли. Для всякой конечномерной алгебры Ли L (над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) существует Л. г. (соответственно, вещественная или комплексная), имеющая L в качестве касательной алгебры.

Классич. результаты С. Ли о группах преобразований формулируются в рамках этой теории следующим образом. Пусть задано дифференцируемое (или аналитическое) действие группы Ли G на дифференцируемом (или аналитическом) многообразии M, т. е. гомоморфизм t группы G в группу всех диффеоморфизмов многообразия M такой, что точка $t(g)(x)\in M$ дифференцируемо (аналитически) зависит от $g\in G$ и $x\in M$. Тогда определён гомоморфизм алгебры Ли $L(G)$ в алгебру Ли всех векторных полей на M, однозначно определяющий (в случае связной группы G) заданное действие t.

Строение и классификация связных групп Ли. Инфинитезимальный метод, разработанный С. Ли, позволил в дальнейшем получить глубокие результаты о строении и классификации связных групп Ли. Каждая связная Л. г. G содержит наибольшую связную разрешимую подгруппу Ли $\mathrm{Rad}\,G$. Группа G наз. п о л у п р о с т о й, если $\mathrm{Rad}\,G=\{e\}$. Если H — максимальная связная полупростая подгруппа Ли связной Л. г. G, то $G=(\mathrm{Rad}\,G)\cdot H$, причём пересечение $(\mathrm{Rad}G)\cap H$ имеет нулевую размерность [если G односвязна, то $(\mathrm{Rad}\,G)\cap H=\{e\}$]. Л. г. G наз. п р о с т о й, если G не содержит связных нормальных подгрупп Ли, отличных от G и $\{e\}$ [это равносильно простоте её алгебры Ли $L(G)$]. Каждая односвязная полупростая Л. г. разлагается в прямое произведение простых нормальных подгрупп Ли. На этом пути получена полная классификация связных полупростых Л. г. Топологич. строение Л. г. проясняет следующая теорема: связная Л. г. G диффеоморфна $K\times\mathbb{R}^p$, где K — максимальная компактная подгруппа группы G.

Приложения групп Ли. Зародившаяся на стыке алгебры, геометрии и анализа теория Л. г. продолжает сохранять плодотворные связи с этими дисциплинами. С алгеброй она связана через теорию алгебр Ли и теорию алгебраич. групп. К тому, что было сказано выше о связи Л. г. с геометрией, можно добавить, что в рамках теории Л. г. определяются многообразия, наиболее богатые различными геометрич. структурами,— т. н. однородные пространства, или пространства Клейна. Связь Л. г. с дифференциальными уравнениями явилась для С. Ли одним из стимулов для изучения непрерывных групп. Для любой системы дифференциальных уравнений (обыкновенных или с частными производными) можно рассматривать алгебры Ли инфинитезимальных преобразований и непрерывные группы в смысле Ли, сохраняющие эту систему. Ещё С. Ли обнаружил, что обыкновенное дифференциальное уравнение, инвариантное относительно достаточно большой разрешимой Л. г., интегрируемо в квадратурах. Современное развитие этих методов позволяет во многих случаях описывать семейство всех решений системы дифференциальных уравнений или строить нек-рые конкретные решения. В последние годы найдены связи между теорией Л. г. и теорией оптимального управления. Весьма богата приложениями в математике и физике теория линейных представлений Л. г. Одним из самых ярких примеров приложения Л. г. к физике является теория унитарной симметрии, классифицирующая элементарные частицы с точки зрения линейных представлений специальных унитарных групп SU_2 и SU_3. Эта теория привела, напр., к открытию новой элементарной частицы — Ω-гиперона.

● П о н т р я г и н Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973; П о с т н и к о в М. М., Группы и алгебры Ли, М., 1982; Ж е л о б е н к о Д. П., Компактные группы Ли и их представления, М., 1970; О в с я н н и к о в Л. В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978.

А. Л. Онищик.

ЛИНДЕМАНА ТЕОРЕМА: показательная функция e^z в любой алгебраической точке $z\neq 0$ принимает трансцендентное значение; доказана Ф. Линдеманом (1882). Л. т. называют также следующее более общее утверждение, сформулированное без доказательства Ф. Линдеманом и доказанное К. Вейерштрассом (1885): пусть $a_1, \ldots, a_m$ — алгебраич. числа, не все равные 0, и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — попарно различные алгебраич. числа, тогда

$$a_1e^{\alpha_1}+\ldots+a_me^{\alpha_m}\neq 0.$$

Из Л. т. могут быть выведены трансцендентность числа π, отрицательное решение проблемы квадратуры круга, а также трансцендентность значений функций $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{tg}\,z$ при алгебраическом $z\neq 0$ и значений $\ln z$ при алгебраическом $z\neq 0,1$.

ЛИНЕАРИЗАЦИИ МЕТОДЫ (от лат. linearis — линейный) — методы, позволяющие свести решения нелинейных задач к последовательному решению родственных линейных задач. Пусть рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$L(u)=f, \tag{1}$$

где оператор L отображает банахово пространство H в себя, $L(0)=0$ и дифференцируем по Фреше. Одним из классич. методов решения (1) является итерационный метод Ньютона—Канторовича, в к-ром при известном приближении u^n новое приближение u^{n+1} определяется как решение линейного уравнения:

$$L'_{u^n}(u^{n+1}-u^n)+L(u^n)=f; \tag{2}$$

основой метода служит аппроксимация $L(u^n+z)$ (при малых $\|z\|$) выражением $L'_{u^n}(z)$. Другим известным примером Л. м. для приближённого решения (1) может служить итерационный метод секущих (ложного положения). Само операторное уравнение (1) может соответствовать, напр., нелинейной краевой задаче для уравнения с частными производными, и тогда на каждом шаге в (2) должна решаться линейная краевая задача, что вызывает необходимость применения численных методов и той или иной дискретизации исходной задачи и родственных ей линейных задач. Поэтому с вычислительной точки зрения естественно рассматривать Л. м. после соответствующей дискретизации исходной задачи, считая (1) операторным уравнением в конечномерном пространстве.

Во многих случаях для задач (1), являющихся задачами математич. физики, линеаризацию $L(u^n+z)$ предпочитают проводить на основе физич. соображений, заменяя $L(u^n+z)$ на $M_{u^n}z$ с линейным оператором M_{u^n}. Тогда получаемые итерационные методы записываются в виде

$$M_{u^n}u^{n+1}=f-(L(u^n)-M_{u^n}u^n). \tag{3}$$

Напр., в теории упругости к таким методам относятся методы упругих решений, переменных параметров, последовательных нагружений. Обобщением методов (3) служат методы типа

$$M_{u^n}(u^{n+1}-u^n)=-\gamma_n(L(u^n)-f)$$

с итерационным параметром γ_n, подлежащим выбору.

Широко используется идея линеаризации и при исследовании нелинейных задач на собственные значения (задач нахождения точек бифуркации), напр. вида

$$L(u)=\lambda M(u),\quad L(0)=0,\quad M(0)=0,$$

позволяя свести их к исследованию задачи на собственные значения

$$L'(z)=\lambda M'(z)$$

с линейными операторами L' и M'.

Часто используется та или иная линеаризация в сеточных методах решения нестационарных нелинейных задач, проводимая за счёт известных решений в моменты времени до t_n и дающая линейные уравнения для решения в следующий дискретный момент $t_{n+1}=t_n+\tau$ (τ — шаг по времени).

ЛИНЕ́ЙНАЯ А́ЛГЕБРА, алгебра над полем,— векторное пространство над полем, для элементов которого определена дополнительная операция — умножение, удовлетворяющая всем аксиомам для умножения в кольце.

ЛИНЕ́ЙНАЯ А́ЛГЕБРА — часть алгебры, изучающая векторные (линейные) пространства и их подпространства, линейные отображения (операторы), линейные, билинейные и квадратичные функции (функционалы или формы) на векторных пространствах.

Исторически первым разделом Л. а. была теория *линейных уравнений*. В связи с решением систем линейных уравнений возникло понятие *определителя*. В 1750 были получены формулы Крамера (см. *Крамера правило*) для решения системы линейных уравнений, в к-рой число уравнений равно числу неизвестных и определитель из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля. В 1849 был предложен *Гаусса метод*, к-рый используется с различными изменениями для практич. вычисления решений систем линейных уравнений.

В связи с изучением систем линейных уравнений и определителей появилось понятие *матрицы*. Понятие ранга матрицы, предложенное Г. Фробениусом в 1877, позволило явно выразить условия совместности и определённости системы линейных уравнений в терминах коэффициентов этой системы (см. *Кронекера — Капелли теорема*). Тем самым в кон. 19 в. было завершено построение общей теории систем линейных уравнений.

Если в 18 и 19 вв. основное содержание Л. а. составляли системы линейных уравнений и теория определителей, то в 20 в центральное положение в Л. а. занимают понятие векторного пространства и связанные с ним понятия линейного отображения, линейной, билинейной и полилинейной функции на векторном пространстве.

Векторным, или линейным, пространством над полем K наз. множество V элементов (наз. векторами), в к-ром заданы операции сложения векторов и умножения вектора на элементы из поля K, удовлетворяющие ряду аксиом (см. *Векторное пространство*). Рассматриваются также векторные пространства над телами. Одним из важнейших понятий теории векторных пространств является понятие *линейного отображения* (линейного оператора), т. е. гомоморфизма векторных пространств над одним и тем же полем. Частным случаем линейного отображения является *линейное преобразование*, или линейное отображение, пространства в себя (т. е. эндоморфизм векторного пространства). Если рассматривать линейные отображения n-мерного векторного пространства в s-мерное, то, фиксируя в этих пространствах базисы, можно сопоставить каждому линейному отображению матрицу с s строками и n столбцами (матрицу линейного отображения). Для линейных преобразований эта матрица квадратна. Это позволяет формулировать теоремы о линейных отображениях параллельно на матричном языке и при их доказательстве использовать язык матриц.

Одной из важнейших задач в теории линейных преобразований является задача о выборе базиса, в к-ром матрица преобразования принимает в каком-то смысле простейший вид. В случае поля комплексных чисел таким видом будет, напр., жорданова нормальная форма матрицы (см. *Жорданова матрица*).

Частным случаем линейного отображения является линейная функция (линейный функционал) — линейное отображение V в K (поле K рассматривается как одномерное пространство). Все линейные функции на V образуют векторное пространство V^* относительно естественным образом определённых операций сложения и умножения на элементы из K, наз. пространством, сопряжённым с пространством V. Векторы пространства V можно в свою очередь рассматривать как линейные функции на сопряжённом пространстве V^*, полагая $x(f)=f(x)$ для всех $x\in V$, $f\in V^*$. Если V конечномерно, то этим путём устанавливается естественный изоморфизм между V и $(V^*)^*$. В конечномерном случае пространства V и V^* имеют одинаковые размерности и, следовательно, также изоморфны.

Обобщением понятия линейной функции является понятие полилинейной функции, т. е. функции со значениями в K, зависящей от нескольких аргументов (из к-рых одни принадлежат векторному пространству V, а другие — сопряжённому пространству V^*) и линейной по каждому аргументу. Эти функции наз. также *тензорами*. Частный случай полилинейных функций — билинейные функции. Кососимметрические полилинейные функции на пространстве наз. также внешними формами.

На основе понятия векторного пространства определяются различные классич. пространства, изучаемые в геометрии: евклидовы пространства, аффинные пространства, проективные пространства и др. Метод координат сводит к задачам Л. а. различные вопросы *аналитической геометрии*.

Теория векторных пространств имеет тесные связи с теорией групп (всякое векторное пространство — группа по сложению). Все автоморфизмы n-мерного векторного пространства V над полем K образуют относительно умножения группу преобразований, изоморфную группе невырожденных квадратных матриц порядка n с элементами из K. Гомоморфное отображение нек-рой группы G в эту группу автоморфизмов наз. линейным представлением группы G в пространстве V. Изучение свойств представлений составляет предмет теории линейных представлений групп.

Естественным обобщением понятия векторного пространства над полем K является понятие *модуля* над произвольным кольцом. И хотя многие основные теоремы Л. а. не справедливы для модулей, теорию модулей также иногда включают в Л. а.

● Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975; Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971; Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975; Ильин В. А., Позняк Э. Г., Линейная алгебра, 3 изд., М., 1984; Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980.

И. В. Проскуряков.

ЛИНЕ́ЙНАЯ А́ЛГЕБРА; численные методы — раздел вычислительной математики, посвящённый математическому описанию и исследованию процессов численного решения задач *линейной алгебры*.

Среди задач Л. а. наибольшее значение имеют две: решение системы линейных алгебраич. уравнений и определение собственных значений и собственных векторов матрицы. Другие часто встречающиеся задачи: обращение матрицы, вычисление определителя и нахождение корней алгебраич. многочлена, как правило, не имеют самостоятельного значения в Л. а. и носят вспомогательный характер при решении основных задач Л. а.

Любой численный метод в Л. а. можно рассматривать как нек-рую последовательность выполнения арифметич. операций над элементами входных данных. Если при любых входных данных численный метод позволяет найти решение задачи за конечное число арифметич. операций, то такой метод наз. прямым. В противоположном случае численный метод наз. итерационным.

Прямые методы решения системы линейных алгебраических уравнений. Пусть дана система

$$Ax = b \qquad (1)$$

с матрицей системы A и правой частью b. Если матрица A — невырожденная, то решение даётся формулой $x = A^{-1}b$. Основная идея прямых методов заключается в преобразовании системы (1) в такую эквивалентную систему, для к-рой матрица системы легко обращается и, следовательно, легко находится решение исходной системы. Пусть обе части равенства (1) умножены слева на невырожденные матрицы $L_1, L_2, \ldots, L_k$. Тогда новая система эквивалентна

$$L_k L_{k-1} \ldots L_1 Ax = L_k L_{k-1} \ldots L_1 b \qquad (2)$$

системе (1). При этом матрицы L_i всегда можно подобрать такими, что матрица системы (2) будет достаточно простой, напр. треугольной, диагональной или унитарной. В этом случае легко вычисляются A^{-1} и $|A|$.

Одним из первых прямых методов является *Гаусса метод*. Он использует левые треугольные матрицы L_i и позволяет привести исходную систему уравнений к системе с правой треугольной матрицей. Этот метод легко реализуется на ЭВМ, его схема с выбором главного элемента позволяет решать системы с произвольной матрицей, а компактная схема — получать результаты с повышенной точностью за счёт накопления скалярных произведений. Среди прямых методов, применяемых на практике, метод Гаусса требует минимального объёма вычислительной работы.

Непосредственно к методу Гаусса примыкают метод Жордана и его модификация — метод оптимального исключения. Эти методы используют треугольные матрицы L_i как левые, так и правые и позволяют привести исходную систему к системе с диагональной матрицей. По своим характеристикам оба метода мало чем отличаются от метода Гаусса, но второй позволяет решать системы вдвое большего порядка при одной и той же памяти ЭВМ.

Перечисленные методы входят в группу т. н. методов исключения. Это название объясняется тем, что при каждом умножении на матрицу L_i в матрице системы исключается один или несколько элементов. Исключение можно производить не только с помощью треугольных матриц, но и с помощью унитарных. Различные модификации методов исключения по существу связаны с разложением матрицы системы (1) в произведение двух треугольных или треугольной и унитарной матриц.

Нек-рые методы, такие, как *окаймления метод*, *пополнения метод*, не являются методами исключения, хотя и близки к методу Гаусса.

Большое распространение получили методы, основанные на построении вспомогательной системы векторов, так или иначе связанных с матрицей исходной системы и ортогональных в нек-рой метрике. Одним из первых методов этой группы был метод ортогонализации строк. Матрицы L_i в нём — левые треугольные, матрица системы (2) — унитарная. Методы, основанные на ортогонализации, обладают многими достоинствами, но чувствительны к влиянию ошибок округления. На основе развития методов типа ортогонализации был создан весьма эффективный (при решении нек-рых систем с разрежёнными матрицами) *сопряжённых градиентов метод*.

Прямые методы определения собственных значений и собственных векторов матрицы. Пусть для матрицы A требуется определить собственное значение λ и собственный вектор x, т. е. решить уравнение

$$Ax = \lambda x. \qquad (3)$$

При замене $x = Cy$, где C — невырожденная матрица, уравнение (3) перейдёт в уравнение $By = \lambda y$ при $B = C^{-1}AC$. Прямые методы решения данной задачи состоят в том, что с помощью конечного числа подобных преобразований исходная матрица A приводится к матрице B настолько простого вида, чтобы для неё легко находились коэффициенты характеристич. многочлена и собственные векторы. При этом собственные значения находятся как корни характеристич. многочлена каким-либо из известных методов. Численные методы перехода от матрицы A к матрице B по существу мало чем отличаются от численных методов преобразования системы (1) в систему (2). Известно много методов подобного типа, однако они не нашли широкого применения на практике в силу значительной численной неустойчивости.

Различают полную проблему собственных значений, когда ищутся все собственные значения, и частичную проблему, когда отыскивают нек-рые из них; последняя задача более типична в случае сеточных задач, возникающих при аппроксимации дифференциальных и интегральных уравнений.

Итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений. Эти методы дают решение системы (1) в виде предела последовательности нек-рых векторов; построение их осуществляется посредством единообразного процесса, наз. процессом и т е р а ц и й. Основные итерационные процессы для решения системы (1) могут быть описаны посредством единообразного процесса следующей общей схемой. Строится последовательность векторов $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$ по рекуррентным формулам

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + H^{(k)}\left(b - Ax^{(k-1)}\right),$$

где $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots$ — нек-рая последовательность матриц, $x^{(0)}$ — начальное приближение, вообще говоря произвольное. Различный выбор последовательности матриц $H^{(k)}$ приводит к различным итерационным процессам.

Простейшими итерационными процессами являются стационарные процессы, в к-рых матрицы $H^{(k)}$ не зависят от номера шага k; их также называют м е т о д а м и п р о с т о й и т е р а ц и и. Если последовательность $H^{(k)}$ периодична, то процесс наз. циклическим. Всякий циклич. процесс может быть преобразован в стационарный, но обычно такое преобразование усложняет метод. Нестационарные процессы, в частности циклические, используются для ускорения сходимости итерационных процессов. Среди методов ускорения сходимости особое место занимают методы, использующие многочлены Чебышева и сопряжённые направления.

Выбор матрицы H для стационарного процесса и матриц $H^{(k)}$ для нестационарного может осуществляться различными способами. Возможно построение матриц $H^{(k)}$ таким образом, чтобы итерационный процесс сходился к решению, и по возможности быстро, для широкого класса систем управлений. Возможен и противоположный подход, когда при построении матриц $H^{(k)}$ максимально используются частные особенности данной системы для получения итерационного процесса с наибольшей скоростью сходимости. Второй способ построения матриц $H^{(k)}$ является наиболее распространённым.

Одним из наиболее распространённых принципов построения итерационных процессов является принцип релаксации (см. *Релаксации метод*). В этом случае матрицы $H^{(k)}$ выбираются из заранее описанного класса матриц так, чтобы на каждом шаге процесса уменьшалась к.-л. величина, характеризующая точность решения системы. Среди релаксационных методов наиболее разработаны координатные и градиентные методы. В координатных методах матрицы $H^{(k)}$ подобраны так, что на каждом шаге меняются одна или несколько компонент последовательных приближений. О точности приближённого решения x чаще всего судят по величине вектора невязки $r = Ax - b$.

Среди других итерационных методов можно отметить метод простой итерации, *переменных направлений метод*, методы полной и неполной релаксации и т. д. Как правило, итерационные методы удобны для реализации на ЭВМ, однако в отличие от прямых методов они чаще всего обладают весьма ограниченной областью применения. В области же их применения итерационные методы нередко су-

щественно превосходят прямые методы по объёму вычислений. Поэтому вопрос сравнения прямых и итерационных методов может быть решён лишь при детальном изучении свойств конкретной системы. Наибольшее распространение нашли итерационные методы для решения систем, возникающих при разностной аппроксимации дифференциальных уравнений.

Итерационные методы решения полной проблемы собственных значений. В итерационных методах собственные значения вычисляются как пределы нек-рых числовых последовательностей без предварительного определения коэффициентов характеристич. многочлена. Как правило, при этом одновременно находятся и собственные векторы или нек-рые другие векторы, связанные с собственными простыми соотношениями. Большинство итерационных методов менее чувствительны к ошибкам округления, чем прямые, но значительно более трудоёмки. Развитие этих методов и их применение в практике вычислений стало возможным лишь после создания ЭВМ.

Среди итерационных методов особое место занимает *вращений метод* решения полной проблемы собственных значений действительной симметрич. матрицы. Основан он на построении последовательности матриц, ортогонально подобных исходной матрице A и имеющих монотонно убывающие к нулю суммы квадратов всех внедиагональных элементов.

Метод вращений очень прост, легко реализуется на ЭВМ и всегда сходится. Независимо от расположения собственных значений он обладает асимптотически квадратичной сходимостью. Наличие кратных и близких собственных значений не только не замедляет сходимость метода, но, напротив, приводит к её ускорению. Метод вращений устойчив к влиянию ошибок округления результатов промежуточных вычислений. Свойства этого метода послужили причиной его распространения на решение полной проблемы матриц более общего вида. Без существенных изменений метод вращений переносится на эрмитовы и косоэрмитовы матрицы. Незначительное его изменение позволяет с успехом решать полную проблему для матриц A^*A и AA^* одновременно, не вычисляя сами произведения матриц. Эффективное распространение этого метода на произвольные матрицы простой структуры реализуется обобщённым методом вращений.

Среди итерационных методов решения полной проблемы собственных значений значительную группу составляют степенные методы. Большинство их вычислительных алгоритмов укладывается в следующие схемы:

$$\begin{array}{ll} AG = G_1S_1 & A = L_1R_1 \\ \dots\dots\dots \quad \text{или} & \dots\dots\dots \\ AG_{k-1} = G_kS_k & R_{k-1}L_{k-1} = L_kR_k \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

Здесь на каждом шаге матрица, стоящая в левой части равенства, раскладывается в произведение двух матриц. Пусть одна из них треугольная, а вторая унитарная или треугольная другого наименования. Тогда при нек-рых дополнительных предположениях матрицы $G_k^{-1}AG_k$ и R_kL_k сходятся к квазитреугольной матрице, подобной матрице A. Как правило, порядки диагональных клеток квазитреугольной матрицы невелики, поэтому полная проблема собственных значений для предельной матрицы решается достаточно просто.

Известно несколько методов такого типа. Одним из лучших среди них является QR-а л г о р и т м. Вычислительные схемы степенных методов во многом совпадают с вычислительными схемами решения систем уравнений прямыми методами.

Исследование и классификация численных методов. Огромное количество численных методов Л. а. ставит актуальной задачей не столько создание новых, сколько исследование и классификацию существующих методов.

Первые фундаментальные работы по анализу устойчивости и ошибок округления в численных методах решения задач Л. а. появились лишь в 1947—48 и посвящены исследованию обращения матриц и решению систем уравнений методами типа Гаусса. Практич. ценность этих результатов была невелика. Существенный сдвиг в изучении данного вопроса произошёл в сер. 60-х гг., когда был сделан решающий шаг к анализу и оценке эквивалентных возмущений. Реально вычисленное решение нек-рой задачи стало рассматриваться как точное решение той же задачи, но с возмущёнными входными данными. Это возмущение, наз. эквивалентным, полностью характеризует влияние ошибок округления. Исследовано большое количество методов с точки зрения мажорантной оценки нормы эквивалентного возмущения.

При фиксированном вычислительном алгоритме и способе округления вся совокупность ошибок округления является однозначной векторной функцией $\varphi_t(A)$, зависящей от числа разрядов t, с к-рыми ведётся счёт, и от входных данных A. Главный член функции $\varphi_t(A)$ при $t\to\infty$ не имеет сколько-нибудь приемлемого явного выражения. Однако весьма эффективным оказалось исследование $\varphi_t(A)$ на классе случайно заданных входных данных. Оно показало, что наиболее вероятное значение отклонения вычислительного решения от точного за счёт ошибок округления существенно меньше, чем максимально возможное.

Анализ влияния ошибок округления показал, что между лучшими методами нет принципиальной разницы с точки зрения устойчивости к ошибкам округления. Этот вывод заставляет по-новому взглянуть на проблему выбора того или иного численного метода в практич. деятельности вычислителя. Создание мощных ЭВМ существенно ослабило значение различия между методами в таких характеристиках, как объём требуемой памяти ЭВМ и количество арифметич. операций, и привело к возросшим требованиям на гарантию точности решения. В этих условиях наиболее предпочтительными становятся те методы, к-рые, не очень отличаясь от лучших по скорости и удобству реализации на ЭВМ, позволяют решать широкий класс задач как хорошо, так и плохо обусловленных и давать при этом оценку точности вычислительного решения.

Классификация и сравнение численных методов, о к-рых говорилось выше, относится в основном к тому случаю, когда вся совокупность входных данных целиком помещается в оперативную память ЭВМ. Однако особый интерес представляют два крайних случая — решение задач Л. а. на малых и сверхмощных ЭВМ. Решение задач на таких ЭВМ имеет свою специфику. В первом случае — это малая память, ограниченная разрядная сетка и счёт в режиме фиксированной запятой, во втором — наличие мультипрограммного режима работы ЭВМ и режима разделения времени и т. д.

● Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977; Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А., Матрицы и вычисления, М., 1984.

В. В. Воеводин.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГРУППА — алгебраическая группа, изоморфная алгебраической подгруппе некоторой *полной линейной группы*. Алгебраич. группа G линейна тогда и только тогда, когда алгебраич. многообразие группы G аффинно. Всякая алгебраич. подгруппа и всякая факторгруппа по нормальной алгебраич. подгруппе Л. а. г. также является Л. а. г.

В любой связной Л. а. г. существует наибольшая связная нормальная алгебраич. подгруппа (радикал), факторгруппа по к-рой полупроста, т. е. имеет единичный радикал. Связная полупростая Л. а. г. единственным образом разлагается в произведение связных простых нормальных алгебраич. подгрупп. Имеется полная классификация связных простых Л. а. г. над произвольным алгебраически замкнутым полем. Напр., в случае поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел такие группы по существу исчерпываются *классическими группами* $SL_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{C})$, $n\geqslant 4$, $Sp_n(\mathbb{C})$ и ещё пятью т. н. особыми группами.

● Хамфри Д ж., Линейные алгебраические группы, пер. с англ., М., 1980.

ЛИНЕ́ЙНАЯ ГРУ́ППА — любая подгруппа группы обратимых линейных преобразований векторного пространства над некоторым полем, то есть подгруппа *полной линейной группы*. Важными примерами Л. г. являются *классические группы*. Всякая Л. г., действующая в конечномерном векторном пространстве, изоморфна нек-рой *матричной группе*.

ЛИНЕ́ЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ — соотношение вида

$$c_1u_1+\ldots+c_nu_n=0$$

между элементами $u_1, \ldots, u_n$ векторного пространства над полем K, где среди коэффициентов $c_1, \ldots, c_n$ хотя бы один отличен от нуля.

Напр., можно говорить о Л. з. между векторами, линейными формами, функциями от одного или нескольких переменных и т. д. Если между элементами $u_1, \ldots, u_n$ имеется Л. з., то говорят, что они линейно зависимы, в противном случае их называют линейно независимыми. Элементы $u_1, \ldots, u_n$, $n>1$, линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных, т. е.

$$u_i=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_{i-1}u_{i-1}+\alpha_{i+1}u_{i+1}+\ldots+\alpha_nu_n.$$

Если в n-мерном векторном пространстве выбран базис $e_1, \ldots, e_n$, то m элементов $u_1, \ldots, u_m$:

$$u_i=\sum_{j=1}^{n}u_{ij}e_j, \quad i=1, \ldots, m,$$

этого пространства линейно зависимы тогда и только тогда, когда матрица из их компонент в этом базисе имеет ранг, меньший m; в частности, при $n=m$ последнее означает равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & \ldots & u_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для линейной зависимости n векторов евклидова пространства любой размерности необходимо и достаточно, чтобы обращался в нуль их определитель Грама

$$\begin{vmatrix} (u_1, u_1) & \ldots & (u_1, u_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (u_n, u_1) & \ldots & (u_n, u_n) \end{vmatrix},$$

где $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение в этом пространстве. Напр., для непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $\varphi_i(x)$, $i=1, \ldots, n$, можно положить

$$(\varphi_i, \varphi_k)=\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\,dx.$$

Если $n-1$ раз дифференцируемые функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ на отрезке $[a, b]$ линейно зависимы, то их вронскиан тождественно равен 0. Обратно, если $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ являются решениями нек-рого линейного дифференциального уравнения порядка n и их вронскиан обращается в 0 в нек-рой точке отрезка, то они линейно зависимы.

ЛИНЕ́ЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯ́ЦИЯ — способ приближённого вычисления значения функции $f(x)$, основанный на замене функции $f(x)$ линейной функцией $L(x)=a(x-x_1)+b$, параметры a и b которой выбираются так, чтобы значения $L(x)$ и $f(x)$ совпадали в заданных точках x_1 и x_2. Этому условию удовлетворяет единственная функция

$$L(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1),$$

приближающая заданную функцию $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ с погрешностью

$$f(x)-L(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_1)(x-x_2), \quad \xi\in[x_1, x_2].$$

ЛИНЕ́ЙНАЯ КОМБИНА́ЦИЯ — см. *Векторное пространство, Линейная зависимость*.

ЛИНЕ́ЙНАЯ ОБОЛО́ЧКА — см. *Векторное пространство*.

ЛИНЕ́ЙНАЯ ПЕРСПЕКТИ́ВА — см. *Перспектива*.

ЛИНЕ́ЙНАЯ РЕГРЕ́ССИЯ — см. *Регрессия*.

ЛИНЕ́ЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ — свойство топологического пространства, заключающееся в том, что любые его две точки соединимы некоторым путём — непрерывным образом отрезка. Напр., выпуклые множества в евклидовых пространствах являются линейно связными.

ЛИНЕ́ЙНАЯ ФО́РМА — однородный многочлен 1-й степени, то есть многочлен вида

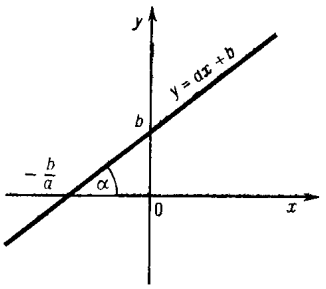
$$ax_1+\ldots+a_nx_n,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — числа (или элементы некоторого поля). Линейной формой (линейной функцией, линейным функционалом) на векторном пространстве L над полем K наз. любое линейное отображение f: $L\to K$. Эта терминология не приводит к противоречию с первым определением, поскольку в конечномерном векторном пространстве значение $f(x)$ при линейном отображении f для произвольного вектора x выражается в произвольном базисе однородным многочленом 1-й степени от координат этого вектора.

ЛИНЕ́ЙНАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция вида

$$y=ax+b, \qquad (*)$$

где a и b — постоянные. Если a и b — действительные числа, то графиком Л. ф. является прямая линия (рис.). Коэффициент a — угловой коэффициент прямой, равный тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси абсцисс: $a=\operatorname{tg}\alpha$. Л. ф. возрастает при $a>0$, убывает при $a<0$, при $a=0$ — тождественно равна постоянной: $y\equiv b$, её график — прямая, параллельная оси абсцисс. График Л. ф. $(*)$ пересекает ось ординат в точке $(0, b)$, а ось абсцисс — в точке $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. При $b=0$ Л. ф. $y=ax$ наз. однородной. График однородной Л. ф. проходит через начало координат. Однородная Л. ф. наз. также прямой пропорциональной зависимостью.



Л. ф. часто встречаются в приложениях. Напр., при прямолинейном равномерном движении путь является Л. ф. времени; давление на тело, погружённое в жидкость, прямо пропорционально глубине погружения. Во многих физич. процессах функциональная зависимость является гладкой (дифференцируемой) и поэтому на малых участках приближённо может быть заменена на Л. ф.

Л. ф. n переменных $x_1, \ldots, x_n$ — функция вида

$$f(x)=a_1x_1+\ldots+a_nx_n+a,$$

где $a_1, \ldots, a_n$, a — постоянные. Областью определения Л. ф. является всё n-мерное пространство переменных $x_1, \ldots, x_n$, действительных или комплексных. При $a=0$ Л. ф. наз. однородной или *линейной формой*. Если все переменные $x_1, \ldots, x_n$ и коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$, a — действительные числа, то графиком Л. ф. в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n, y$ является n-мерная гиперплоскость $y=a_1x_1+\ldots+a_nx_n+a$, в частности при $n=1$ — прямая линия на плоскости.

Термин «Л. ф.», или, точнее, линейная однородная функция, часто применяется для линейного отображения векторного пространства L над нек-рым полем k в это поле, причём в этом случае вместо термина «Л. ф.» используются также термины — линейный функционал и линейная форма, а неоднородную Л. ф. именуют аффинной функцией — она характеризуется тем, что

$$f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$$

для всех λ, μ таких, что $\lambda+\mu=1$. Отображение, осуществляемое Л. ф., наз. линейным отображением.

Линейная функция w комплексного переменного z — функция вида

$$w=az+b,$$

где a и b — комплексные постоянные. Отображение, осуществляемое Л. ф. w, сводится к суперпозиции следующих отображений: вращения (поворота) вокруг точки $z=0$ на угол $\arg a$, гомотетии с центром в точке $z=0$ и коэффициентом $|a|$, параллельного переноса на вектор b.

Л. ф. однолистна на всей расширенной комплексной плоскости и отображает конформно всю расширенную комплексную плоскость на всю расширенную комплексную плоскость так, что точка $z=\infty$ переходит в точку $w=\infty$. Верно и обратное утверждение: любое конформное отображение всей расширенной комплексной плоскости на всю расширенную комплексную плоскость, переводящее точку $z=\infty$ в точку $w=\infty$, является линейным отображением.

При линейном отображении окружности переходят в окружности, прямые — в прямые. Обратно: если при конформном отображении области все дуги окружностей, лежащие в области, переходят в дуги окружностей, то это отображение линейно; если при конформном отображении области все отрезки прямых, лежащие в области, переходят в отрезки прямых, то это отображение линейно.

ЛИНЕ́ЙНО УПОРЯ́ДОЧЕННОЕ МНО́ЖЕСТВО, цепь,— множество, на котором задано отношение линейного порядка, то есть для любых двух элементов x, y указано, какой из этих элементов следует за другим или, в другой терминологии, какой из этих элементов больше другого (см. *Порядка отношение*, *Частично упорядоченное множество*). Важнейший тип Л. у. м.— *вполне упорядоченное множество*.

ЛИНЕ́ЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)\,y=f(x), \qquad (1)$$

где $y=y(x)$ — искомая функция, $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, ..., y' — её производные, $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ (коэффициенты) и $f(x)$ (свободный член) — заданные функции. В уравнение (1) искомая функция y и её производные входят в 1-й степени, т. е. линейно, поэтому оно наз. линейным. Если $f(x)=0$, то уравнение (1) наз. однородным, в противном случае — неоднородным. Общее решение $y_0=y_0(x)$ однородного Л. д. у. при условии непрерывности его коэффициентов $p_k(x)$ выражается формулой

$$y_0=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\ldots+C_ny_n(x),$$

где C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные и $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ — линейно независимые частные решения, образующие т. н. фундаментальную систему решений. Критерием линейной независимости решений служит неравенство нулю (хотя бы в одной точке) определителя Вронского (*вронскиана*):

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Общее решение $y=y(x)$ неоднородного Л. д. у. (1) имеет вид

$$y=y_0+Y,$$

где $y_0=y_0(x)$ — общее решение соответствующего однородного Л. д. у. и $Y=Y(x)$ — частное решение данного неоднородного Л. д. у. Функция $Y(x)$ может быть найдена по формуле

$$Y(x)=\sum_{k=1}^{n} y_k(x)\int_{x_0}^{t} W_k(t)\,e^{\int_{x_0}^{t} p_1(u)\,du} f(t)\,dt,$$

где $y_k(x)$ — решения, составляющие фундаментальную систему решений однородного Л. д. у., и $W_k(x)$ — алгебраич. дополнение элемента $y_k^{(n-1)}(x)$ в определителе (2) Вронского $W(x)$.

Если коэффициенты уравнения (1) постоянны:

$$p_k(x)=a_k, \quad k=1, 2, \ldots, n,$$

то общее решение однородного уравнения выражается формулой

$$y_0=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{n_k-1} x^s e^{\alpha_k x}\,(C_{ks}\cos\beta_k x+D_{ks}\sin\beta_k x),$$

где $\alpha_k\pm i\beta_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, $i=\sqrt{-1}$,— корни характеристического уравнения

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

n_k — кратности этих корней и C_{ks}, D_{ks} — произвольные постоянные.

Пример. Для Л. д. у. $y'''+y=0$ характеристич. уравнение имеет вид $\lambda^3+1=0$. Его корнями являются числа

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \lambda_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, общее решение этого уравнения таково:

$$y_0=C_1e^{-x}+e^{x/2}\left(C_2\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C_3\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

Системы линейных дифференциальных уравнений имеют вид

$$\frac{dy_j}{dx}=\sum_{k=1}^{n} p_{jk}(x)\,y_k+f_j(x), \quad j=1, 2, \ldots, n. \qquad (3)$$

Общее решение однородной системы Л. д. у. [получаемой из системы (3), если все $f_j(x)\equiv 0$] даётся формулами

$$y_j=\sum_{k=1}^{n} C_k y_{jk}(x),$$

где $y_{j1}, y_{j2}, \ldots, y_{jn}$ — линейно независимые частные решения однородной системы [т. е. такие, что определитель $|y_{jk}(x)|\neq 0$, хотя бы в одной точке].

В случае постоянных коэффициентов $p_{jk}(x)=a_{jk}$ частные решения однородной системы следует искать в виде

$$y_j(x)=\left(A_{j0}+A_{j1}x+\ldots+A_{jn_{k-1}}x^{n_k-1}\right)e^{\lambda_j x},$$
$$j=1, 2, \ldots, n,$$

где A_{js} — неопределённые коэффициенты, λ_k — корни характеристич. уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

и n_k — кратность этих корней. Полный анализ всех возможных случаев производится методами линейной алгебры.

Для решения Л. д. у. и систем Л. д. у. с постоянными коэффициентами применяются также методы операционного исчисления.

● Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, 9 изд., М., 1966; Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, 4 изд., М., 1974. *Б. П. Демидович, В. В. Немыцкий.*

ЛИНЕ́ЙНОЕ ИНТЕГРА́ЛЬНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — см. *Интегральное уравнение*.

ЛИНЕ́ЙНОЕ МНОГООБРА́ЗИЕ — подмножество M векторного пространства L, получаемое из некоторого подпространства L при помощи сдвига на некоторый вектор x_0, то есть множество векторов вида x_0+L'. Размерность подпространства L' наз. также размерностью Л. м. M. Если размерность $\dim L'=\dim L-1$, то Л. м. M наз. гиперплоскостью. Если рассматривать L как аффинное пространство, то понятие Л. м. в L совпадает с понятием аффинного подпространства.

ЛИНЕ́ЙНОЕ НЕРАВЕНСТВО — неравенство вида

$$l(x)-a\equiv a_1x_1+\ldots+a_nx_n-a\leqslant 0 \qquad (1)$$

или вида

$$l(x)-a\equiv a_1x_1+\ldots+a_nx_n-a<0, \qquad (2)$$

где a_1, ..., a_n, a — любые действительные числа, $x=(x_1, \ldots, x_n)$. В более широком смысле — это неравенство вида

$$f(x)-a\leqslant 0 \qquad (3)$$

или вида

$$f(x)-a<0,$$

где $f(x)$ — линейная функция на действительном векторном пространстве $L(\mathbb{R})$ со значениями из поля $\mathbb{R}$ действительных чисел и $a\in\mathbb{R}$. Дальнейшее обобщение понятия Л. н. получается, если вместо поля $\mathbb{R}$ взять произвольное упорядоченное поле P. На основе именно такого обобщения построена современная теория Л. н.

К исследованию систем Л. н. сводится ряд важных вопросов аналитич. механики, геометрии чисел, приближения функций. Весьма важные приложения находят результаты, относящиеся к системам Л. н., в экономич. исследованиях. В таких приложениях возникло, в частности, *линейное программирование*. К решению конкретных систем Л. н. сводятся многие практич. задачи технико-экономич. и планово-экономич. характера, что в значительной мере определило современное направление исследований в области Л. н.

На этом пути возник, в частности, основной принцип теории Л. н.— принцип граничных решений, установленный сначала для конечных систем Л. н. в модульной форме, т. е. для систем вида

$$|l_j(x)-a_j|\equiv|a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n-a_j|\leqslant d_j, \qquad (4)$$

$j=1, 2, \ldots, m$, где все $a_{j1}, \ldots, a_{jn}, a_j$ — в самом общем случае элементы поля комплексных чисел, а все d_j — неотрицательные действительные числа, $j=1, 2, \ldots, m$.

Принцип граничных решений заключается в следующем. В любой совместной системе вида (4) ранга $r>0$ можно выделить такую подсистему ранга r из r неравенств, что хотя бы одно решение последней, обращающее в равенства все её неравенства, удовлетворяет всем неравенствам системы (4), иначе говоря является решением системы (4).

Принцип граничных решений был распространён на системы вида

$$l_j(x)-a_j\equiv a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n-a_j\leqslant 0, \qquad (5)$$

$j=1, 2, \ldots, m$, над полем $\mathbb{R}$ (т. е. на системы с действительными $a_{j1}, \ldots, a_{jn}, a_j$, $j=1, 2, \ldots, m$) в виде следующего более сильного утверждения. В совместной системе (5) ранга $r>0$ можно выделить такую подсистему ранга r из r неравенств, что любое решение этой подсистемы, обращающее в равенства все её неравенства, удовлетворяет всем неравенствам (5) [для систем вида (5) это утверждение оказывается эквивалентным предыдущему утверждению]. Рангом системы Л. н. наз. наибольшее число линейно независимых форм $l_j(x)$, входящих в её неравенства.

Принцип граничных решений был распространён также на системы вида (5) над произвольным упорядоченным полем P и даже на более общие системы, составленные из конечного числа Л. н. вида (3) над полем P. Из этого принципа вытекает следующее условие совместности систем вида (5) над произвольным упорядоченным полем. Система (5) ранга $r>0$ тогда и только тогда совместна, когда в матрице её коэффициентов существует такой отличный от нуля минор Δ порядка r, что для определителей Δ_j, $j=1, 2, \ldots, m$, получаемых при окаймлении его с помощью j-й строки этой матрицы и столбца элементов a_j, все отношения Δ_j/Δ неотрицательны. В случае совместной системы линейных уравнений $a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n-a_j=0$, $j=1, 2, \ldots, m$, такие отношения равны нулю для любого отличного от нуля миора Δ порядка r матрицы её коэффициентов.

Разработка теории Л. н. началась в кон. 19 в. Одно из первых предложений общего характера — теорема Минковского — Фаркаша является и теперь одной из ключевых теорем теории Л. н.: если все решения совместной системы (5) над полем $\mathbb{R}$ удовлетворяют некрому неравенству

$$l(x)-b\equiv b_1x_1+\ldots+b_nx_n-b\leqslant 0,$$

$b, b_j\in\mathbb{R}$, $i=1, 2, \ldots, n$, то существуют такие неотрицательные числа $p_0, p_1, \ldots, p_m$, что имеет место тождественное относительно $x=(x_1, \ldots, x_n)$ соотношение

$$l(x)-b\equiv\sum_{j=1}^{m}p_j(l_j(x)-a_j)-p_0.$$

В нач. 20 в. в исследованиях Г. Ф. Вороного, посвящённых квадратичным формам целочисленных переменных, возникла одна из основных задач теории Л. н.— задача изучения свойств выпуклого многогранника, определяемого в пространстве $\mathbb{R}^n$ решениями совместной конечной системы Л. н. отличного от нуля ранга. Основная теорема Вороного выражает условия невырожденности такого многогранника или, иначе говоря, условия совместности конечной системы, составленной из неравенств вида (2). Задачей изучения многогранника решений систем вида (5) и результатами Г. Минковского и Ю. Фаркаша на долгое время определилось основное направление исследований по линейным неравенствам.

В дальнейшем выяснилось, что все результаты теории Л. н., относящиеся к конечным системам неравенств вида (5), и, в частности, упоминавшиеся выше результаты Г. Минковского, Ж. Фаркаша и Г. Ф. Вороного могут быть выведены из принципа граничных решений дискретными методами.

Продолжительное время теория Л. н. не имела эффективных методов для нахождения решения конечных систем Л. н. Метод, состоящий в непосредственном использовании принципа граничных решений, мало эффективен. Эффективные методы для нахождения отдельных решений конечной системы Л. н. (в частности, симплекс-метод) появились с возникновением линейного программирования.

● Черников С. Н., Линейные неравенства, М., 1968; Линейные неравенства и смежные вопросы, пер. с англ., М., 1959.

С. Н. Черников.

ЛИНЕ́ЙНОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — отображение $\mathcal{A}$ векторного пространства L в векторное пространство M (над одним и тем же полем k), обладающее следующими свойствами:

$$\mathcal{A}(x+y)=\mathcal{A}x+\mathcal{A}y,$$
$$\mathcal{A}(\alpha x)=\alpha\mathcal{A}x,$$

где x, y — векторы из L и α — скаляр из поля k. Л. о. наз. также линейным оператором из L в M или гомоморфизмом пространства L в пространство M. Термин «линейный оператор» чаще употребляется в функциональном анализе в применении к бесконечномерным векторным пространствам (см. *Линейный оператор*). Л. о. пространства L в себя наз. также *линейным преобразованием*.

Примеры Л. о.: 1) нулевое Л. о., сопоставляющее каждому вектору из L нулевой вектор из M; 2) ортогональное проектирование 3-мерного евклидова пространства на плоскость, сопоставляющее каждому вектору его ортогональную проекцию; 3) вложение подпространства L нек-рого векторного пространства M в M.

Естественным образом определяются сумма $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ двух Л. о. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ пространства L в M:

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})x=\mathcal{A}x+\mathcal{B}x;$$

произведение Л. о. $\mathcal{A}$ на α из k:

$$(\alpha\mathcal{A})x=\alpha(\mathcal{A}x);$$

произведение $\mathcal{AB}$ Л. о. $\mathcal{A}$: $M\to N$ и Л. о. $\mathcal{B}$: $L\to M$

$$(\mathcal{AB})x=\mathcal{A}(\mathcal{B}x).$$

Множество всех Л. о. из L в M образует векторное пространство над полем k относительно операций сложения и умножения на элементы из k. Умножение Л. о. ассоциативно и обладает следующими свойствами:

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}+\mathcal{B})=\mathcal{CA}+\mathcal{CB};$$
$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{D}=\mathcal{AD}+\mathcal{BD};$$
$$(\alpha\mathcal{A})\mathcal{B}=\mathcal{A}(\alpha\mathcal{B})=\alpha(\mathcal{AB});$$

здесь α — элемент поля K, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ — Л. о.

Пусть $\mathcal{A}$: $L\to M$ — нек-рое Л. о. Множество векторов из M вида $\mathcal{A}x$ образует подпространство пространства M, наз. образом Л. о. $\mathcal{A}$ и обозначаемое $\mathcal{A}(L)$, или $\mathrm{Im}\mathcal{A}$ (от англ. image — образ). Множество векторов из L, переводящихся Л. о. $\mathcal{A}$ в нулевой вектор, образует подпрост-

ранство пространства L, наз. ядром Л. о. $\mathcal{A}$. и обозначается Ker $\mathcal{A}$ (от англ. kernel — ядро). Размерность образа Л. о. $\mathcal{A}$ наз. рангом Л. о. $\mathcal{A}$, а размерность ядра — дефектом Л. о. $\mathcal{A}$. Для любого Л. о. конечномерного векторного пространства L сумма его ранга и дефекта равна размерности пространства L. Взаимно однозначное Л. о. векторного пространства L на пространство M наз. изоморфизмом пространства L на M. Л. о. является изоморфизмом тогда и только тогда, когда его ранг равен размерности пространства M, а дефект равен нулю, т. е. ядро состоит только из нулевого вектора. Если Л. о.— изоморфизм, то существует обратное ему отображение, к-рое также является Л. о.

Если в пространствах L и M выбраны базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$, то матрицей Л. о. $\mathcal{A}$ в данных базисах наз. матрица

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

j-й столбец к-рой состоит из координат вектора $\mathcal{A}e_j$, т. е. координат образа j-го базисного вектора

$$\mathcal{A}e_j=a_{1j}f_1+\ldots+a_{mj}f_m$$

в базисе $f_1, \ldots, f_m$. Координаты $y_1, \ldots, y_m$ образа $\mathcal{A}x$ вектора x в базисе $f_1, \ldots, f_m$ при Л. о. $\mathcal{A}$ выражаются через координаты $x_1, \ldots, x_n$ вектора x в базисе $e_1, \ldots, e_n$ по формуле

$$\begin{Vmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{Vmatrix} = A \begin{Vmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Vmatrix};$$

здесь A — матрица Л. о. $\mathcal{A}$ в тех же базисах. При сложении, умножении Л. о., умножении Л. о. на элемент из поля k их матрицы (при естественном выборе базисов) также складываются, перемножаются, умножаются на элемент из k.

Матрицы одного Л. о. в различных базисах связаны между собой следующим образом. Если A и $\tilde{A}$ соответственно матрицы Л. о. $\mathcal{A}$ в базисах $e_1, \ldots, e_n$; $f_1, \ldots, f_m$ и $e_1', \ldots, e_n'$; $f_1', \ldots, f_m'$, то

$$\tilde{A}=T^{-1}AS,$$

где S и T — матрицы перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e_1', \ldots, e_n'$ и от базиса $f_1, \ldots, f_m$ к базису $f_1', \ldots, f_m'$ соответственно:

$$(e_1' \ldots e_n')=(e_1 \ldots e_n)\,S,$$
$$(f_1' \ldots f_m')=(f_1 \ldots f_m)\,T.$$

Если $\mathcal{A}$: $L \to M$ — Л. о. конечномерных векторных пространств, то базисы в L и M можно выбрать таким образом, чтобы матрица Л. о. $\mathcal{A}$ имела вид

$$A=\begin{Vmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где E_r — единичная матрица порядка r, а r — ранг Л. о. $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}$: $L \to M$ — Л. о. евклидовых или унитарных пространств. Л. о. $\mathcal{A}^*$: $M \to L$ наз. сопряжённым отображению $\mathcal{A}$, если равны скалярные произведения

$$(Ax,\ y)=(x,\ A^*y)$$

для любых x из L и y из M. Любое Л. о. конечномерных евклидовых (или унитарных) пространств обладает сопряжённым, к-рое определяется единственным образом. При переходе к сопряжённому матрица Л. о. в любых ортонормированных базисах заменяется транспонированной (соответственно, сопряжённой) матрицей. *А. Л. Онищик.*

ЛИНЕЙНОЕ ПОДПРОСТРАНСТВО, векторное подпространство,— непустое подмножество векторов векторного пространства, само являющееся векторным пространством, то есть замкнутое относительно операций сложения векторов и умножения вектора на скаляр.

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ — гомоморфизм π группы (соответственно, ассоциативной алгебры, алгебры Ли, полугруппы) X в группу (соответственно, алгебру или полугруппу) обратимых (соответственно, всех) линейных операторов в векторном пространстве V. Часто рассматриваемые объекты бывают снабжены топологией или другими дополнительными структурами. Тогда рассматриваются непрерывные, унитарные, банаховы и другие представления. Напр., если V — топологич. векторное пространство, то Л. п. X в V наз. такое представление, образ к-рого содержит только непрерывные линейные операторы в V. Пространство V наз. пространством представления π, а операторы $\pi(x)$, $x \in X$,— операторами представления π.

Если пространство представления обладает подпространством V_1, переходящим в себя при всех операторах представления, то ограничение π_1 операторов представления π на V_1 также является представлением рассматриваемого объекта; оно наз. подпредставлением Л. п. π. Кроме того, каждый оператор представления π порождает оператор в факторпространстве V/V_2, и таким образом задаётся факторпредставление.

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ векторного пространства — *линейное отображение* векторного пространства L в себя, то есть отображение $\mathcal{A}$: $L \to L$, при котором каждому вектору x из L сопоставляется некоторый вектор $\mathcal{A}x$ из L — его образ, и такое, что

$$\mathcal{A}(x+y)=\mathcal{A}x+\mathcal{A}y,$$
$$\mathcal{A}(\alpha x)=\alpha\mathcal{A}x$$

для любых векторов x и y из L и любого α из поля k, над которым рассматривается векторное пространство L. Л. п. векторного пространства L наз. также линейным оператором из L в L (чаще — в применении к бесконечномерным пространствам), а также эндоморфизмом пространства L.

Примеры Л. п.: 1) тождественное преобразование, оставляющее все векторы пространства L без изменения; 2) отображение, сопоставляющее каждому вектору из L нулевой вектор — нулевое Л. п.; 3) поворот 2-мерного евклидова пространства (плоскости) на нек-рый угол; 4) дифференцирование в пространстве многочленов степени не выше m.

Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — Л. п. пространства L, то $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\mathcal{B}$ и $\alpha\mathcal{A}$ для любого α из k также являются Л. п. пространства L. Относительно этих операций множество всех Л. п. пространства L образует ассоциативную алгебру с единицей, к-рой является тождественное преобразование.

Пусть в пространстве L задан базис, $e_1, \ldots, e_n$. Тогда матрицей Л. п. $\mathcal{A}$ в этом базисе наз. матрица A линейного отображения в базисах $e_1, \ldots, e_n$; $e_1, \ldots, e_n$, т. е. матрица, j-й столбец к-рой состоит из координат вектора Ae_j в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Тождественное Л. п. имеет в любом базисе единичную матрицу; нулевое Л. п.— нулевую матрицу; матрица дифференцирования в пространстве многочленов степени не выше m в базисе $1, x, \ldots, x^m$ имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & m \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

При переходе к другому базису $e_1', \ldots, e_n'$ матрица A Л. п. $\mathcal{A}$ заменяется подобной матрицей

$$B=S^{-1}AS,$$

где S — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e_1', \ldots, e_n'$. Таким образом, определитель $\det A$ матрицы Л. п. $\mathcal{A}$ не зависит от выбора базиса; он наз. определителем Л. п. $\mathcal{A}$.

Л. п. $\mathcal{A}$ наз. невырожденным (или автоморфизмом), если $\det A \neq 0$, и вырожденным —

в противном случае. Л. п. $\mathcal{A}$ не вырождено тогда и только тогда, когда его ранг равен размерности пространства L, т. е. когда его дефект равен 0.

Подпространство L' пространства L наз. инвариантным подпространством Л. п. $\mathcal{A}$, если для каждого вектора x из L' его образ $\mathcal{A}x$ также принадлежит L'. Ненулевой вектор x, порождающий одномерное инвариантное подпространство Л. п. $\mathcal{A}$, наз. собственным вектором Л. п. $\mathcal{A}$, т. е. ненулевой вектор x есть собственный вектор Л. п. $\mathcal{A}$, если существует такой элемент λ из k, что

$$\mathcal{A}x=\lambda x.$$

Элемент λ, для к-рого выполняется это равенство, наз. собственным значением Л. п., а собственный вектор x наз. принадлежащим собственному значению λ. Элемент λ из поля k тогда и только тогда является собственным значением Л. п. $\mathcal{A}$, когда λ является корнем характеристич. многочлена матрицы A:

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda E),$$

где A — матрица Л. п. $\mathcal{A}$ в нек-ром базисе. Многочлен $p(\lambda)$ не зависит от выбора базиса и наз. также характеристическим многочленом Л. п. $\mathcal{A}$. В частности, след матрицы A не зависит от выбора базиса, он наз. следом Л. п. $\mathcal{A}$.

Матрица Л. п. $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид в данном базисе тогда и только тогда, когда базис состоит из собственных векторов; при этом по диагонали матрицы стоят собственные значения, каждое из к-рых встречается столько раз, какова его кратность как корня характеристич. многочлена. Базис из собственных векторов существует, в частности, в том случае, когда характеристич. многочлен имеет n различных корней в поле k, где n — размерность пространства L. Если характеристич. многочлен обладает кратным корнем, то матрицу Л. п., вообще говоря, нельзя привести к диагональному виду. В этом случае рассматривается более общая жорданова нормальная форма матрицы (см. *Жорданова матрица*).

При изучении Л. п. евклидовых (или унитарных) векторных пространств выделяются естественные классы симметрических (или эрмитовых) Л. п. (см. *Самосопряжённое линейное преобразование*) и *ортогональных преобразований* (соответственно, *унитарных преобразований*). Любое Л. п. представляется в виде произведения ортогонального (или унитарного) Л. п. на симметрическое (или эрмитово) (см. *Полярное разложение*). *Т. С. Пиголкина.*

ЛИНЕ́ЙНОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — раздел математического программирования, посвящённый теории и методам решения задач об экстремумах линейных функций на множествах, задаваемых системами линейных неравенств и равенств (см. также *Исследование операций*).

Типичной задачей Л. п. является следующая: найти максимум линейной функции

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i=1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j=1, \ldots, n, \tag{3}$$

где c_j, a_{ij} и b_i — заданные числа.

Задачи Л. п. являются математич. моделями многочисленных задач технико-экономич. содержания. Такова, напр., следующая задача планирования работы предприятия. Предприятие может выпускать n видов продукции; прибыльность единицы продукции вида j, $j=1, \ldots, n$, составляет c_j. В производстве используются ресурсы m видов (сырьё, рабочая сила, энергия и т. п.). Наличие ресурса i, $i=1, \ldots, m$, ограничено величиной b_i. Расход ресурса i на производство единицы продукции вида j составляет a_{ij}. Требуется определить производственную программу (т. е. найти объёмы выпуска x_j по каждому из видов продукции) таким образом, чтобы лимиты по ресурсам не были превышены, а суммарная прибыль была бы максимальной. Формальная запись этих требований приводит к задаче (1)—(3). Другим характерным примером прикладных задач Л. п. является *транспортная задача*.

Функцию (1) в Л. п. принято называть целевой функцией (или критерием оптимальности, критерием эффективности), вектор $x=(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям (2)—(3), наз. допустимым решением (или планом), а множество векторов x, определяемое условиями (2)—(3),— допустимым множеством (или множеством планов). Допустимое решение, доставляющее максимум целевой функции (1), наз. оптимальным. Задача: найти минимум

$$\sum_{i=1}^{m} b_i u_i$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \geqslant c_j, \quad j=1, \ldots, n,$$

$$u_i \geqslant 0, \quad i=1, \ldots, m,$$

где b_i, a_{ij} и c_j — те же, что в (1)—(3), наз. двойственной к задаче (1)—(3) (к-рую называют также прямой). Фактом, центральным в теории Л. п., является теорема двойственности (сравни условия оптимальности в ст. *Нелинейное программирование*), устанавливающая равенство оптимальных значений целевых функций прямой и двойственной задач.

Одним из основных методов решения задач Л. п. является симплекс-метод. Геометрически его идея состоит в следующем. Допустимое множество (2)—(3) представляет собой выпуклое многогранное множество (если оно ограничено, то многомерный выпуклый многогранник). Если задача Л. п. имеет решение, то существует вершина x^* многогранного множества, являющаяся оптимальным планом. Симплекс-метод состоит в таком направленном переборе вершин, при к-ром значение целевой функции возрастает от вершины к вершине. Каждой вершине соответствует система уравнений, выбираемая специальным образом из системы неравенств (2)—(3), поэтому вычислительная процедура симплекс-метода состоит в последовательном решении систем линейных алгебраич. уравнений. Простота алгоритма делает этот метод удобным для его реализации на ЭВМ.

● Карманов В. Г., Математическое программирование, 2 изд., М., 1980. *В. Г. Карманов, А. А. Корбут.*

ЛИНЕ́ЙНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — то же, что *векторное пространство*.

ЛИНЕ́ЙНОЕ ТОПОЛОГИ́ЧЕСКОЕ ПРОСТРА́НСТВО — то же, что *топологическое векторное пространство*.

ЛИНЕ́ЙНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение вида

$$\mathcal{A}x=b, \tag{1}$$

где $\mathcal{A}$ — линейный оператор, действующий из векторного пространства X в векторное пространство B, x — неизвестный элемент из X, b — заданный элемент из B (свободный член). Если $b=0$, то Л. у. наз. однородным. Решением Л. у. наз. элемент x_0, обращающий уравнение (1) в тождество:

$$\mathcal{A}x_0 \equiv b.$$

Простейший пример доставляет линейный оператор $\mathcal{A}$: $x \mapsto ax$ — линейная (однородная) функция и определяемое им линейное алгебраич. уравнение

$$ax=b, \tag{2}$$

$a, b \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (или произвольному полю k); его решение существует тогда и только тогда, когда либо $a \neq 0$ (и тогда $x_0=\frac{b}{a}$), либо $a=b=0$ (и тогда x_0 — любое).

Обобщением уравнения (2) является Л. у. вида

$$\mathcal{A}x \equiv f(x)=b, \tag{3}$$

где $f(x)$ — линейный функционал, определённый на векторном пространстве X над полем k, $b \in k$. В частности, если размерность X конечна и равна n, то f имеет вид линей-

ной формы нескольких переменных $x_1, \ldots, x_n$ и уравнение (3) может быть записано в виде

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n=b. \qquad (4)$$

Если a_i одновременно не обращаются в нуль, то множество решений уравнения (4) заполняет $(n-1)$-мерное линейное многообразие (в однородном случае — линейное подпространство) в X.

Система двух Л. у. с двумя неизвестными имеет вид

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2,$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, b_1, b_2$ — к.-л. числа. Решение системы можно получить с помощью определителей:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}};$$

здесь предполагается, что стоящий в знаменателе определитель $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Если $D=0$, то система либо не имеет ни одного решения, либо имеет бесконечное множество решений (если исключить случай конечного поля).

Аналогичное правило применимо и при решении любой системы n Л. у. с n неизвестными. Оно носит название *Крамера правила* и было установлено Г. Крамером в 1750. Построение полной теории произвольных систем Л. у. было закончено только спустя 100 лет Л. Кронекером.

Применение правила Крамера при практич. решении большого числа Л. у. может встретить значительные трудности, так как нахождение определителей высокого порядка связано с весьма большими вычислениями. Поэтому были разработаны различные методы численного (приближённого) решения систем Л. у. (см. *Линейная алгебра*; численные методы), наиболее известным из к-рых является *Гаусса метод*.

Несколько уравнений вида (4) образуют систему Л. у.

$$a_{j1}x_1+\ldots+a_{jn}x_n=b_j, \quad j=1, \ldots, m. \qquad (5)$$

При этом систему (5) можно интерпретировать как одно Л. у. вида (1), если принять в качестве X пространство k^n, а в качестве B — пространство k^m, а оператор $\mathcal{A}$ задать матрицей

$$\|a_{ij}\|, \quad i=1, \ldots, n; \quad j=1, \ldots, m.$$

Система Л. у. может иметь как одно единственное решение (определённая система), так и несколько (и даже бесконечное множество) решений (неопределённая система); может также оказаться, что система Л. у. не имеет ни одного решения (несовместная система). Вопрос о совместности системы Л. у. (5), т. е. вопрос о существовании решения системы Л. у., решается сравнением ранга матриц $\|a_{ij}\|$ и $\|a_{ij}, b_j\|$. Если ранги совпадают, то система совместна; если ранг матрицы B строго больше ранга матрицы A, то система несовместна (*Кронекера—Капелли теорема*). В случае совместности системы её решения можно найти следующим образом. Найдя в матрице A отличный от нуля минор наибольшего порядка r (базисный минор), отбрасывают $m-r$ уравнений, коэффициенты к-рых не вошли в этот минор (отбрасываемые уравнения будут следствиями оставшихся, и поэтому их можно не рассматривать); в оставшихся уравнениях переносят направо те неизвестные, коэффициенты к-рых не вошли в выбранный минор (свободные неизвестные). Придав свободным неизвестным любые числовые значения, получают систему из r уравнений с r неизвестными, к-рую можно решить по правилу Крамера. Найденные значения r неизвестных вместе со значениями свободных неизвестных дадут нек-рое частное (т. е. одно из многих возможных) решение системы (5). Можно, не давая свободным неизвестным конкретных значений, непосредственно выразить через них остальные неизвестные. Так получается общее решение, т. е. решение, в к-ром неизвестные выражены через параметры; давая этим параметрам произвольные значения, можно получить все частные решения системы.

Система Л. у. (5) наз. однородной, если все $b_i=0$. Решения однородных систем обладают тем свойством, что сумма, разность и вообще любая линейная комбинация решений (рассматриваемых как n-мерные векторы) также будет решением системы. Другими словами, совокупность всех решений однородной системы Л. у. образует линейное подпространство n-мерного векторного пространства. Систему решений, к-рые сами линейно независимы и позволяют выразить любое другое решение в виде их линейной комбинации (т. е. базис этого линейного подпространства), называют фундаментальной системой решений однородной системы Л. у.

Между решениями системы Л. у. (5) и соответствующей однородной системы Л. у. существует простая связь: общее решение неоднородной системы получается из общего решения однородной системы прибавлением к нему к.-л. частного решения неоднородной системы Л. у.

Большой наглядности изложения в теории Л. у. можно добиться, используя геометрич. язык. Напр., систему уравнений (5) можно записать в виде $\mathcal{A}x=b$, где $\mathcal{A}$ — линейное отображение координатного пространства X^n в X^m, определяемое матрицей A системы, $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — неизвестный вектор из X^n, $b=(b_1, \ldots, b_m)$ — заданный вектор из X^m. Или же в виде

$$x_1a_1+\ldots+x_na_n=b,$$

где $a_1, \ldots, a_n, b$ суть m-мерные векторы, являющиеся столбцами расширенной матрицы B системы (5). Отсюда видно, что различные Л. у. в функциональных пространствах, линейные дифференциальные уравнения, линейные интегральные уравнения являются бесконечномерными аналогами обычных систем Л. у.

● Кострикин А. И., Введение в алгебру, М., 1977; Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 11 изд., М., 1975.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ над векторами — операция сложения векторов и операция умножения вектора на число.

ЛИНЕЙНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР — см. *Дифференциальный оператор*.

ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР, линейное отображение,— отображение между двумя векторными пространствами, согласованное с их линейными структурами. Точнее, отображение $\mathcal{A}: L\to M$, где L и M — векторные пространства над (одним и тем же) полем k, наз. линейным оператором из L в M, если

$$\mathcal{A}(x+y)=\mathcal{A}x+\mathcal{A}y, \quad \mathcal{A}(\lambda x)=\lambda\mathcal{A}x$$

при всех $x, y\in L$, $\lambda\in k$.

Понятие Л. о., будучи наряду с понятием векторного пространства основным в линейной алгебре, играет важную роль в самых разнообразных областях математики и физики, прежде всего — в анализе и его приложениях.

Современное определение Л. о. впервые дал Дж. Пеано в 1888 (для $k=\mathbb{R}$). Оно было, однако, подготовлено предшествующим развитием математики, накопившей (начиная с линейной функции) огромное число примеров. Их неполный перечень включает линейные подстановки в системах линейных уравнений, преобразования координат, дифференциальные и интегральные преобразования. Вплоть до начала 20 в. систематически изучались лишь Л. о. между конечномерными пространствами над полями $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Первые «бесконечномерные» наблюдения, к тому же касающиеся обоих полей, были сделаны О. Тёплицем (1909). Л. о. между бесконечномерными пространствами изучаются, как правило, в предположении их непрерывности относительно нек-рых топологий. Непрерывные Л. о., действующие в различных классах топологич. векторных

пространств, в первую очередь, банаховых и гильбертовых,— это основной объект изучения линейного функционального анализа.

В теории Л. о. два специальных случая $M=k$ и $M=L$ наиболее важны. В первом случае Л. о. наз. *линейным функционалом*, во втором — линейным оператором, действующим в L, или *эндоморфизмом*.

Все Л. о. из L в M образуют векторное пространство $\mathscr{L}(L, M)$ [вместо $\mathscr{L}(L, L)$ пишут $\mathscr{L}(L)$] над k относительно сложения и умножения на скаляр, задаваемых формулами

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})x=\mathcal{A}x+\mathcal{B}x, \quad (\lambda\mathcal{A})x=\mathcal{A}(\lambda x),$$

$x\in L$, $\lambda\in k$; нулём является нулевой Л. о. Умножение (композиция) $\mathcal{AB}$ Л. о. $\mathcal{A}: L_1\to M_1$ и $\mathcal{B}: L_2\to M_2$ определена лишь при $M_2=L_1$ как последовательное применение $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$. Относительно трёх указанных операций $\mathscr{L}(L)$ образует ассоциативную алгебру над k с единицей 1. Это «больше чем пример»: всякая ассоциативная алгебра над k вкладывается в $\mathscr{L}(L)$ для нек-рого L.

Для Л. о. $\mathcal{A}: L\to M$ его я д р о м наз. подпространство $\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\{x\in L,\ \mathcal{A}x=0\}$, о б р а з о м — подпространство $\operatorname{Im}\mathcal{A}=\{y\in M,\ y=\mathcal{A}x$ для нек-рого $x\in L\}$. Л. о. наз. м о н о м о р ф и з м о м, если $\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\{0\}$, и э п и м о р ф и з м о м, если $\operatorname{Im}\mathcal{A}=M$. Л. о. $\mathcal{B}: M\to L$ наз. п р а в ы м (соответственно, л е в ы м) о б р а т н ы м к $\mathcal{A}$, если $\mathcal{BA}$ тождествен в L (соответственно, $\mathcal{AB}$ — в M). Л. о. $\mathcal{A}^{-1}$ одновременно правый и левый обратный к $\mathcal{A}$, наз. о б р а т н ы м к $\mathcal{A}$. Л. о. (соответственно, эндоморфизм), обладающий обратным, наз. и з о м о р ф и з м о м (соответственно, а в т о м о р ф и з м о м).

ЛИНЕ́ЙНЫЙ ПОРЯ́ДОК — см. *Частично упорядоченное множество*, *Линейно упорядоченное множество*.

ЛИНЕ́ЙНЫЙ У́ГОЛ д в у г р а н н о г о у г л а — угол между перпендикулярами к ребру двугранного угла, восстановленными в обеих гранях из одной точки.

ЛИНЕ́ЙНЫЙ ФУНКЦИОНА́Л, л и н е й н а я ф о р м а, на векторном пространстве L над полем k — отображение $f: L\to k$ такое, что

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad f(\lambda x)=\lambda f(x)$$

для всех x, $y\in L$, $\lambda\in k$. Понятие Л. ф., будучи важным специальным случаем понятия *линейного оператора*, является одним из основных в линейной алгебре и играет важную роль в математич. анализе.

ЛИНЕ́ЙНЫЙ ЭЛЕМЕ́НТ — дифференциал длины дуги кривой; см. *Римана геометрия*.

ЛИНЕ́ЙЧАТАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ — раздел геометрии, в котором рассматриваются в качестве элементов пространства прямые линии. Прямая в пространстве определяется четырьмя постоянными — коэффициентами a, b, p, q в уравнениях $x=az+p$, $y=bz+q$. Следовательно, величины a, b, p, q можно рассматривать как координаты прямой. Если эти координаты являются функциями одного, двух или трёх параметров, то соответствующие совокупности прямых образуют *линейчатые поверхности* и т. н. к о н г р у э н ц и и и к о м п л е к с ы п р я м ы х. Эти геометрич. образы и являются объектом изучения Л. г. Примером линейчатой поверхности может служить однополостный гиперболоид, примером конгруэнции — совокупность общих касательных к двум к.-н. поверхностям, примером комплекса прямых — совокупность касательных к одной к.-н. поверхности.

ЛИНЕ́ЙЧАТАЯ ПОВЕ́РХНОСТЬ — поверхность, образуемая совокупностью прямых, зависящих от одного параметра. Л. п. можно описать движением прямой (о б р а з у ю щ е й) по некоторой линии (н а п р а в л я ю щ е й). Л. п. разделяются на р а з в ё р т ы в а ю щ и е с я и к о с ы е.

Развёртывающиеся Л. п. могут быть посредством изгибания наложены на плоскость. Любая развёртывающаяся поверхность является либо цилиндром, либо конусом, либо поверхностью, состоящей из касательных к нек-рой пространственной кривой L (рис. 1). Эту кривую называют р е б р о м в о з в р а т а развёртывающейся поверхности. Плоскость P, пересекающая ребро возврата L, образует в сечении с поверхностью кривую ABC с точкой возврата B. Ребро возврата является особой линией развёртывающейся поверхности, вдоль к-рой две её полости S_1 и S_2 касаются друг друга. Развёртывающиеся поверхности характеризуются также тем, что касательная плоскость к ним в различных точках одной и той же образующей неизменна. Совокупность всех касательных плоскостей развёртывающейся Л. п. представляет собой однопараметрич. семейство. Иначе говоря, развёртывающаяся Л. п. является огибающей однопараметрич. семейства плоскостей.

У косой Л. п. касательные плоскости в различных точках одной и той же образующей различны. При перемещении точки касания вдоль образующей касательная плоскость вращается вокруг образующей. Полный поворот касательной плоскости, когда точка касания проходит всю образующую, равен 180°. На каждой образующей имеется точка такая, что для каждой из двух частей, на к-рые она делит образующую, полный поворот касательной плоскости равен 90°. Эту точку (на рис. 2 точка O) называют ц е н т р о м образующей. Тангенс угла между касательными плоскостями к поверхности в центре O и к.-л. другой точке O' той же образующей пропорционален расстоянию OO'. Абсолютная величина гауссовой кривизны Л. п. достигает на данной образующей наибольшего значения в центре образующей и убывает при удалении от центра по образующей. Множество центров образующих носит название л и н и и с ж а т и я, или с т р и к ц и о н н о й л и н и и. Напр., у геликоида — Л. п., описываемой равномерным винтовым движением прямой вокруг нек-рой оси (кругую движущаяся прямая пересекает под прямым углом),— линией сжатия является ось (AB на рис. 2). Л. п. 2-го порядка — гиперболич. параболоид, однополостный гиперболоид — имеют две различные системы прямолинейных образующих (из однополостных гиперболоидов сконструирована радиомачта системы В. Г. Шухова, находящаяся в Москве на Шаболовке). Две системы прямолинейных образующих имеют только Л. п. 2-го порядка.

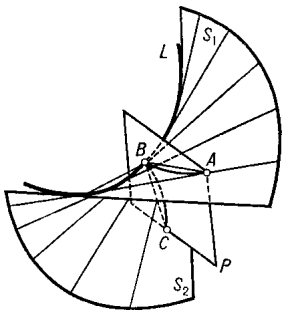


Рис. 1.

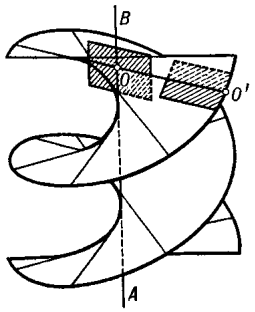


Рис. 2.

Изгибаемые друг на друга Л. п. можно катить одну по другой так, что в процессе качения они будут иметь общую образующую. На этом основано применение Л. п. в теории механизмов.

ЛИ́НИЯ (от лат. linea, букв.— льняная нить; линия, черта) — геометрическое понятие, точное и в то же время достаточно общее определение которого представляет значительные трудности и осуществляется в различных разделах геометрии различно.

1) В элементарной геометрии рассматриваются п р я м ы е Л., отрезки прямых, л о м а н ы е Л., составленные из отрезков, и нек-рые к р и в ы е Л. Каждый вид кривых Л. определяется тем или иным специальным способом (напр., окружность определяется как множество точек, имеющих заданное расстояние R от заданной точки O — центра окружности). Иногда в учебниках дают определение Л. как границы куска поверхности (поверхность определяется при этом как граница тела) или траектории дви-

жущейся точки. Но в рамках элементарной геометрии эти определения не получают отчётливой формулировки.

2) Представление о Л. как траектории движущейся точки может быть сделано вполне строгим при помощи идеи параметрического представления Л. Напр., вводя на плоскости прямоугольные координаты (x, y), можно параметрически задать окружность радиуса R с центром в начале координат уравнениями

$$x=R\cos t, \quad y=R\sin t.$$

Когда параметр t пробегает отрезок $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, точка (x, y) описывает окружность. Вообще, Л. на плоскости задают параметрич. уравнениями вида

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \qquad (*)$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — произвольные функции, непрерывные на к.-н. конечном или бесконечном интервале Δ числовой оси t. С каждым значением параметра (из интервала Δ) уравнения $(*)$ сопоставляют нек-рую точку M, координаты к-рой определяются этими уравнениями. Л., заданная параметрически уравнениями $(*)$, есть множество точек, соответствующих всевозможным значениям t из Δ, при условии, что эти точки рассматриваются в определённом порядке, именно: если точка M_1 соответствует значению параметра t_1, а точка M_2 — значению t_2, то M_1 считается предшествующей M_2, если $t_1<t_2$. При этом точки, отвечающие различным значениям параметра, всегда считаются различными.

Аналогично, в трёхмерном пространстве Л. задаётся параметрически тремя уравнениями вида

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ — произвольные функции, непрерывные на к.-н. интервале. В произвольном топологич. пространстве T (к-рое, в частности, может быть плоскостью, поверхностью, обычным трёхмерным пространством, функциональным пространством и т. п.) Л. параметрически задают уравнением вида

$$P=\varphi(t),$$

где φ — функция действительного переменного t, непрерывная на к.-л. интервале, значения к-рой суть точки пространства T. Считают, что два параметрич. представления задают одну и ту же Л., если они определяют один и тот же порядок следования её точек (в смысле, указанном выше).

В анализе и топологии рассматривают обычно случай, когда область изменения параметра t есть отрезок $a\leqslant t\leqslant b$. В этом случае условие того, чтобы два параметрич. представления

$$P=\varphi(t), \qquad a\leqslant t\leqslant b,$$
$$P=\varphi_1(t_1), \quad a_1\leqslant t_1\leqslant b_1,$$

изображали одну и ту же Л., заключается в существовании непрерывной и строго возрастающей функции

$$t_1=f(t),$$

для к-рой

$$f(a)=a_1, \quad f(b)=b_1, \quad \varphi(t)=\varphi_1[f(t)].$$

Такое понимание термина «Л.» наиболее естественно в большинстве вопросов анализа (напр., в теории криволинейных интегралов) и механики. Так как Л. здесь рассматривается вместе с порядком, в к-ром пробегает её точки переменная точка M при возрастании t, то при этом естественно возникает вопрос о числе прохождений переменной точки Л. через к.-л. точку пространства. Кроме простых точек, проходимых один раз, Л. может иметь кратные точки, к-рые проходятся несколько раз (отвечающие различным значениям параметра).

3) Из аналитич. геометрии известен и другой способ задания Л. на плоскости уравнением

$$F(x, y)=0;$$

в пространстве — двумя уравнениями

$$F(x, y, z)=0, \quad G(x, y, z)=0.$$

Ограничиваясь случаем плоскости, укажем лишь, как строится понятие алгебраической Л. (кривой) — Л., определяемой уравнением

$$F(x, y)=0,$$

где $F(x, y)$ — целая алгебраич. функция, т. е. многочлен к.-л. степени $n\geqslant 1$. В этом случае считают, что два многочлена $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ определяют одну и ту же алгебраич. Л. в том и только в том случае, когда существует такая постоянная $c\neq 0$, что выполняется тождественно соотношение

$$F_1(x, y)\equiv cF_2(x, y).$$

См. также *Алгебраическая кривая*.

Таким образом, все многочлены, определяющие одну и ту же Л., имеют одну и ту же степень n, наз. порядком соответствующей Л. Напр., в аналитич. геометрии принято считать, что уравнение

$$(x-y)^2=0$$

определяет Л. второго порядка, а именно, дважды взятую прямую $x-y=0$.

В связи с последним примером необходимо заметить, однако, что часто целесообразно ограничиваться рассмотрением неприводимых алгебраич. Л., т. е. таких Л., для к-рых многочлен не допускает представления $F=GH$, где G и H — отличные от постоянных многочлены. Далее, в п. 4) имеется в виду только этот случай.

Говорят, что точка (x_0, y_0) кривой $F(x, y)=0$ имеет кратность m, если разложение $F(x, y)$ по степеням $\xi=x-x_0$, $\eta=y-y_0$ начинается с членов степени m (по совокупности переменных ξ и η). В случае $m=2$, т. е. в случае двойной точки,

$$F(x, y)=a_{11}(x-x_0)^2+2a_{12}(x-x_0)(y-y_0)+a_{22}(y-y_0)^2+\ldots,$$

где многоточие означает, что далее следуют члены высших порядков. При помощи дискриминанта

$$\delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$$

можно определить тип двойной точки (см. *Особая точка кривой*).

4) Часто, особенно при изучении алгебраич. Л., целесообразно стать на точку зрения комплексной проективной геометрии, т. е. рассматривать, наряду с точками евклидовой действительной плоскости (или пространства), точки бесконечно удалённые и мнимые. Только при таком подходе (и надлежащем учёте кратности пересечения) становится верным, напр., утверждение, что две Л. порядков n и m пересекаются в mn точках. В случае $m=1$ это приводит к возможности определить порядок Л. как число n точек её пересечения с прямой.

С проективной точки зрения естественно задавать Л. на плоскости однородным уравнением

$$F(x_1, x_2, x_3)=0$$

между однородными координатами x_1, x_2, x_3 её точек. В силу принципа двойственности с этим заданием равноправно задание Л. уравнением

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)=0,$$

связывающим однородные координаты прямых, касающихся Л. (степенью уравнения $F=0$), естественно возникает понятие класса Л.— степени уравнения $\Phi=0$. Класс алгебраич. Л. можно также определить как число касательных, к-рые можно провести к Л. из произвольной точки. О параметрич. представлении Л. см. также в ст. *Уникурсальная кривая*.

5) Рассмотренные выше [в пп. 2) — 4)] уточнения и обобщения понятия Л. существенно связаны с соответствующим алгебраич. и аналитич. аппаратом. В отличие от этого современная топология выдвинула задачу уточнения представления о Л. как о множестве точек, независимо от алгебраич. или аналитич. способов задания этого множества.

Если исходить из параметрич. задания Л. в виде непрерывной функции $P=\varphi(t)$, где t пробегает отрезок $a\leqslant t\leqslant b$, но интересоваться только полученным множеством точек без учёта порядка их следования, то приходят к понятию Л., сформулированному в 80-х гг. 19 в. К. Жор-

даном (см. *Жордана кривая*). Оказывается, что таким непрерывным образом отрезка может быть любой локально связный *континуум*, в частности квадрат, треугольник, куб и т. п. (см. *Пеано кривая*). Поэтому теперь обычно предпочитают говорить не о Л. в смысле Жордана, а о локально связных, или жордановых, континуумах. Взаимно однозначный непрерывный образ отрезка называют простой дугой, или жордановой дугой. Взаимно однозначный непрерывный образ окружности называют простой замкнутой Л. Простые дуги и простые замкнутые Л. не исчерпывают, однако, точечных множеств, заслуживающих наименования Л.

Избегая и чрезмерной общности, и чрезмерного сужения понятия Л., в современной топологии пользуются понятием Л., введённым в 1921 П. С. Урысоном, к-рый определяет Л. (кривую) как произвольный континуум размерности единица. Континуум имеет размерность единица, если при любом $\varepsilon>0$ он может быть представлен в виде суммы конечного числа замкнутых множеств диаметра, меньшего ε, обладающих тем свойством, что никакие три из этих замкнутых множеств не имеют общей точки. Континуум, лежащий на плоскости, будет Л. в смысле Урысона тогда и только тогда, когда он не содержит внутренних точек. Этим свойством характеризовал ранее (70-е гг. 19 в.) Л., лежащие на плоскости, Г. Кантор. Хотя определение Г. Кантора применимо только к Л., лежащим на плоскости, иногда и общие Л. в смысле Урысона называют канторовыми кривыми.

б) Ещё математики древности изучали *линии второго порядка* (*эллипс*, *гиперболу*, *параболу*). Ими же был рассмотрен ряд замечательных алгебраич. Л. более высокого порядка, а также нек-рые трансцендентные (неалгебраические) Л. Систематич. изучение Л. и их классификация стали возможными с созданием аналитич. геометрии.

Из Л. третьего порядка наиболее известны *Аньези локон*, *декартов лист*, *Диоклеса циссоида*, *кубическая парабола*, *Маклорена трисектриса*, *офиурида*, *полукубическая парабола*, *строфоида*, *трезубец*.

Из Л. четвёртого порядка — *Бернулли лемниската*, *декартов овал*, *каппа*, *кардиоида*, *Кассини овал*, *Никомеда конхоида*, *Паскаля улитка*, *Персея кривая*, *Штейнера кривая*.

Из Л. высших порядков — *Ламе кривая*, *синусоидальная спираль*.

Большой интересный класс составляют трансцендентные Л. К ним относятся графики *тригонометрических функций*, *показательной функции*, *логарифмической функции*, *гиперболических функций*, а также следующие Л.: *Диностратa квадратриса*, *жезл*, *квадратриса*, *кохлеоида*, *трактриса*, *узорная кривая*, *цепная линия*.

Среди трансцендентных Л. выделяют *спирали*, среди к-рых наиболее известны *архимедова спираль*, *Галилея спираль*, *гиперболическая спираль*, *Корню спираль*, *логарифмическая спираль*, *параболическая спираль*, *Ферма спираль*. К *циклоиде* по способу построения примыкает класс *циклоидальных кривых*, среди них: *астроида*, *гипотрохоида*, *эпитрохоида*, *гипоциклоида*, *эпициклоида*, *трохоида*, *розы*, *рулетта*.

Особый класс составляют производные от других кривых, т. е. полученные из исходных при помощи нек-рых операций: *конхоиды*, *погони линия*, *эволюта*, *эвольвента*.

ЛИНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА — множество точек плоскости, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют алгебраическому уравнению 2-й степени

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \qquad (*)$$

Множество точек плоскости, определяемое уравнением (*), может быть пустым или состоять из одной точки; для сохранения общности в этих случаях говорят, что оно определяет мнимую линию второго порядка. Существует прямоугольная система координат, в к-рой уравнение (*) в зависимости от коэффициентов приводится к одному из следующих девяти канонических видов, каждому из к-рых соответствует определённый класс Л. в. п.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОСНОВАННАЯ НА ИХ ИНВАРИАНТАХ S, δ, Δ, Δ'

		Нераспадающиеся линии $\Delta\neq 0$		Распадающиеся линии $\Delta=0$	
Центральные линии $\delta\neq 0$	$\delta>0$	$\frac{\Delta}{S}<0$	Эллипс (при $S^2=4\delta$ или $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=0$ — окружность)	$\frac{\Delta}{S}=0$	Пара мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке (эллипс, выродившийся в точку)
		$\frac{\Delta}{S}>0$	Мнимый эллипс (ни одной действительной точки)		
	$\delta<0$	Гипербола		Пара пересекающихся прямых (выродившаяся гипербола)	
Нецентральные линии $\delta=0$	$\delta=0$	Парабола		$\Delta'>0$	Пара мнимых параллельных прямых
				$\Delta'<0$	Пара параллельных прямых
				$\Delta'=0$	Пара совпадающих параллельных прямых (одна прямая)

I. Нераспадающиеся линии:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ — эллипс},$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ — гипербола},$$

$$y=2px \text{ — парабола},$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \text{ — мнимый эллипс}.$$

II. Распадающиеся линии:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ — пара пересекающихся прямых,

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ — пара мнимых пересекающихся прямых,

$x^2-a^2=0$ — пара параллельных прямых,

$x^2+a^2=0$ — пара мнимых параллельных прямых,

$x^2=0$ — пара совпадающих прямых.

Л. в. п., имеющая единственный центр симметрии (центр линии второго порядка), наз. центральной линией второго порядка; Л. в. п. без центра симметрии или с неопределённым центром — нецентральной линией второго порядка.

Исследование вида Л. в. п. может быть проведено (табл.) без приведения уравнения (*) к канонич. виду с помощью т. н. инвариантов линий второго порядка, составленных из коэффициентов уравнения (*). Основные инварианты:

$$S=a_{11}+a_{22},$$

$$\delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

значения к-рых не меняются при параллельном переносе и повороте осей координат, и семиинварианта (полуинварианта):

$$\Delta'=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

значение к-рого не меняется при повороте осей координат.

Если Л. в. п. задана уравнением (*) в прямоугольной

системе координат, значение её инвариантов не меняется при ортогональных преобразованиях плоскости (при движениях). Любые две Л. в. п., не распадающиеся на пару параллельных прямых, инварианты S, Δ, δ к-рых соответственно равны, эквивалентны по отношению к группе движений, т. е. могут быть совмещены движением. По отношению к более широкой, чем группа движений, группе аффинных преобразований эквивалентными являются Л. в. п., канонич. уравнения к-рых совпадают; имеется девять аффинно эквивалентных классов Л. в. п., названия к-рых даны выше рядом с соответствующими канонич. уравнениями, причём в них надо положить $a=b=1$.

В проективной геометрии (группа проективных преобразований по сравнению с аффинной ещё более обширна) действительные нераспадающиеся Л. в. п. (эллипс, гипербола, парабола) образуют один проективно эквивалентный класс, наз. классом действительных овальных линий. Действительная овальная линия является эллипсом, гиперболой или параболой в зависимости от того, как она расположена относительно несобственной прямой: эллипсы пересекают несобственную прямую в двух различных мнимых точках, гиперболы — в двух различных действительных точках, параболы касаются несобственной прямой. Л. в. п. образуют пять проективно эквивалентных классов; их уравнения в однородных координатах x_1, x_2, x_3 таковы:

невырождающиеся линии:

$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ — овал,

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ — мнимый овал,

вырождающиеся линии:

$x_1^2-x_2^2=0$ — пара прямых,

$x_1^2+x_2^2=0$ — пара мнимых прямых,

$x_1^2=0$ — пара совпадающих прямых.

Нераспадающие Л. в. п.— эллипс, гипербола, парабола как *конические сечения* были известны древнегреческим учёным начиная с 4 в. до н. э. *А. Б. Иванов.*

ЛИ́НИЯ ПЕ́РВОГО ПОРЯ́ДКА — то же, что *прямая линия*.

ЛИ́НИЯ ТО́КА — то же, что *векторная линия*.

ЛИ́ПШИЦА УСЛО́ВИЕ — ограничение на поведение приращения функции. Если для любых точек x и x', принадлежащих отрезку $[a, b]$, приращение функции удовлетворяет неравенству

$$|f(x)-f(x')|\leqslant M|x-x'|^{\alpha},$$

где $0<\alpha\leqslant 1$ и M — нек-рая постоянная, то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α на отрезке $[a, b]$, и пишут: $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$. Каждая функция, удовлетворяющая при каком-либо $\alpha>0$ Л. у. на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на $[a, b]$. Функция, имеющая на $[a, b]$ ограниченную производную, удовлетворяет на $[a, b]$ Л. у. с любым $\alpha\leqslant 1$. Л. у. впервые рассмотрел в 1864 Р. Липшиц в качестве достаточного условия для сходимости ряда Фурье функции $f(x)$. Иногда, исторически неправильно, связывают с именем Р. Липшица только наиболее важный случай Л. у. с $\alpha=1$, а в случае $\alpha<1$ говорят о *Гёльдера условии*.

ЛИСП (LISP — сокращение от слов LISt Processing language, англ. list — список, process — обрабатывать, language — язык) — *программирования язык*, ориентированный на обработку структурных данных. Разработан в нач. 60-х гг. (в США). Характеризуется однородным синтаксисом, в к-ром и программа, и её данные выглядят одинаково в виде иерархических списков — конечных последовательностей, элементами к-рых являются либо слова-атомы, либо др. списки. Атом в Л. является именем переменной, константы или функции, либо обозначает самого себя. Правила Л. задают способ конструирования выражений в виде композиции атомов, функций и предикатов. Основу композиции составляют подстановка, применение изображения функции к списку её аргументов и правило вычисления путём разбора случаев. Способность Л. достаточно просто образовывать произвольные списочные структуры, в частности с помощью рекурсивных определений, а также формировать выражения в ходе вычислений обусловила широкое его распространение как средства программирования сложных логич. задач, в частности задач искусственного интеллекта.

● Лавров С. С., Силагадзе Г. С., Автоматическая обработка данных. Язык ЛИСП и его реализация, М., 1978.

ЛИСТ ДЕКА́РТА — см. *Декартов лист*.

«ЛИТО́ВСКИЙ МАТЕМАТИ́ЧЕСКИЙ СБО́РНИК» — научный журнал АН Литовской ССР. Издаётся в Вильнюсе с 1961. Выходит 4 номера в год. Публикует статьи по различным вопросам математики. Тираж (1987) ок. 1000 экз.

ЛИУВИ́ЛЛЯ ТЕОРЕ́МА — 1) Л. т. в теории аналитических функций: всякая целая функция, ограниченная во всей плоскости, тождественно равна постоянной. Эта теорема была положена Ж. Лиувиллем (1847) в основу лекций по теории эллиптич. функций; впервые же она была сформулирована и доказана О. Коши (1844).

2) Л. т. в теории конформных отображений — см. *Конформное отображение*, *Конформная геометрия*. Доказана Ж. Лиувиллем (1850).

3) Л. т. в теории чисел — теорема о приближении алгебраич. чисел. Доказана Ж. Лиувиллем (1844). См. *Алгебраическое число*, *Непрерывная дробь*, *Чисел теория*.

ЛОБА́ТТО КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — наивысшей алгебраической степени точности квадратурная формула для отрезка $[-1, 1]$ и веса $p(x)=1$ с двумя фиксированными узлами — концами промежутка интегрирования:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\cong A\,[f(-1)+f(1)]+\sum_{j=1}^{n} C_j f(x_j).$$

Узлы x_j — корни ортогонального на $[-1, 1]$ с весом $1-x^2$ многочлена Якоби $P_n^{(1,\,1)}(x)$, $A=2/(n+1)(n+2)$, $C_j>0$. Алгебраич. степень точности равна $2n+1$. Формула найдена Р. Лобатто (1851).

ЛОБАЧЕ́ВСКОГО ГЕОМЕ́ТРИЯ — одна из *неевклидовых геометрий*; основана на тех же основных посылках, что и обычная — *евклидова геометрия*, за исключением аксиомы о параллельных, которая заменяется на противоположную. Именно, евклидова аксиома о параллельных гласит: «через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более чем одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не пересекающая её» (в евклидовой геометрии такие прямые называют параллельными). В Л. г. вместо неё принимается следующая аксиома: «через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие её» (достаточно, чтобы так было для одной данной точки и одной данной прямой). Казалось бы, эта аксиома противоречит привычным представлениям. Тем не менее при надлежащем понимании как эта аксиома, так и вся Л. г. имеет вполне реальный смысл (о чём см. ниже). Л. г. была создана и развита Н. И. Лобачевским, к-рый впервые сообщил о ней в 1826. Несколько позже с той же теорией выступил Я. Больяй; поэтому Л. г. называют иногда геометрией Лобачевского — Больяй. Её называют также неевклидовой геометрией, хотя обычно термину «неевклидова геометрия» придают более широкий смысл, включая сюда и другие теории, возникшие вслед за Л. г. и также основанные на изменении посылок евклидовой геометрии. Л. г. называют специально гиперболической неевклидовой геометрией (в противоположность эллиптической геометрии Римана) (см. *Неевклидовы геометрии*, *Римана геометрия*).

Л. г. представляет теорию, богатую содержанием и имеющую применения как в математике, так и в физике. Историч. значение Л. г. состоит в том, что её построением Н. И. Лобачевский показал возможность геометрии, отличной от евклидовой, что знаменовало эпоху в развитии

геометрии и математики вообще (см. *Геометрия*). С современной точки зрения можно дать, напр., следующее определение Л. г. на плоскости: она есть не что иное как геометрия внутри круга на обычной (евклидовой) плоскости, лишь выраженная особым образом. Именно, круг на обычной плоскости (рис. 1) и внутренность его, т. е. круг за исключением ограничивающей его окружности, называют «плоскостью». Точкой «плоскости» будет точка внутри круга. «Прямой» называют любую хорду (напр., a, b, b', MN) с исключёнными концами (т. к. окружность круга исключена из «плоскости»); «движением» — любое преобразование круга самого в себя, к-рое переводит хорды в хорды. Соответственно равными наз. фигуры внутри круга, переводящиеся одна в другую такими преобразованиями. Тогда оказывается, что любой геометрич. факт, описанный на таком языке, представляет теорему или аксиому Л. г. Иными словами, всякое утверждение Л. г. на плоскости есть не что иное, как утверждение евклидовой геометрии, относящееся к фигурам внутри круга, лишь пересказанное в указанных терминах. Евклидова аксиома о параллельных здесь явно не выполняется, т. к. через точку O, не лежащую на данной хорде a (т. е. «прямой»), проходит сколь угодно не пересекающих её хорд («прямых») (напр., b, b'). Аналогично, Л. г. в пространстве может быть определена как геометрия внутри шара, выраженная в соответственных терминах («прямые» — хорды, «плоскости» — плоские сечения внутренности шара, «равные» фигуры — те, к-рые переводятся одна в другую преобразованиями, переводящими шар сам в себя и хорды в хорды). Таким образом, Л. г. имеет совершенно реальный смысл и столь же непротиворечива, как геометрия Евклида.

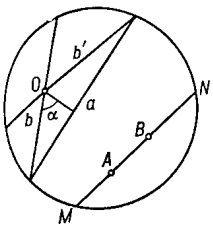


Рис. 1.

Возникновение геометрии Лобачевского. Источником Л. г. послужил вопрос об аксиоме о параллельных, к-рая известна также как V постулат Евклида (под этим номером утверждение, эквивалентное приведённой выше аксиоме о параллельных, фигурирует в списке постулатов в «*Началах*» *Евклида*). Этот постулат, ввиду его сложности в сравнении с другими, вызвал попытки дать его доказательство на основании остальных постулатов.

Вот неполный перечень учёных, занимавшихся доказательством V постулата до 19 в.: Птолемей (2 в.), Прокл (5 в.) (доказательство Прокла основано на предположении о конечности расстояния между параллельными), Ибн аль-Хайсам (кон. 10 — нач. 11 вв.) (Ибн аль-Хайсам пытался доказать V постулат исходя из предположения, что конец движущегося перпендикуляра к прямой описывает прямую линию), Омар Хайям (2-я пол. 11 — нач. 12 вв.) (Хайям и Насирэддин при доказательстве V постулата исходили из предположения, что две сходящиеся прямые не могут при продолжении стать расходящимися без пересечения), К. Клавий (Шлюссель, 1574), П. Катальди (впервые в 1603 напечатавший работу, целиком посвящённую вопросу о параллельных), Дж. Борелли (1658), Дж. Витале (1680), Дж. Валлис (1663, опубликовано в 1693) (Дж. Валлис основывает доказательство V постулата на предположении, что для всякой фигуры существует ей подобная, но не равная фигура). Доказательства перечисленных выше геометров сводились к замене V постулата другим предположением, казавшимся более очевидным. Дж. Саккери (1733) сделал попытку доказать V постулат от противного. Приняв предложение, противоречащее постулату Евклида, Дж. Саккери развил из него довольно обширные следствия. Ошибочно признав нек-рые из этих следствий приводящими к противоречиям, Дж. Саккери заключил, что постулат Евклида доказан. И. Ламберт (ок. 1766, опубликовано в 1786) предпринял аналогичные исследования, однако он не повторил ошибки Дж. Саккери, а признал своё бессилие обнаружить в построенной им системе логич. противоречие. Попытки доказательства постулата предпринимались и в 19 в. Здесь следует отметить работы А. Лежандра; одно из его доказательств (1800) основано на допущении, что через каждую точку внутри острого угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла, т. е., как и все его предшественники, он заменил постулат другим допущением. Довольно близко к построению Л. г. подошли Ф. Швейкарт (1818) и Ф. Тауринус (1825), однако ясно выраженной мысли о том, что намечаемая ими теория будет логически столь же совершенна, как и геометрия Евклида, они не имели.

Вопрос о V постулате Евклида, занимавший геометров более двух тысячелетий, был решён Н. И. Лобачевским. Это решение сводится к тому, что постулат не может быть доказан на основе других посылок евклидовой геометрии и что допущение постулата, противоположного постулату Евклида, позволяет построить геометрию, столь же содержательную, как и евклидова, и свободную от противоречий. Н. И. Лобачевский сделал об этом сообщение в 1826, а в 1829—30 напечатал работу «О началах геометрии» с изложением своей теории. В 1832 была опубликована работа Я. Больяй аналогичного содержания. Как выяснилось впоследствии, К. Гаусс также владел началами Л. г., но скрывал их, опасаясь быть непонятым. Хотя Л. г. развивалась как умозрительная теория и сам Н. И. Лобачевский называл её «воображаемой геометрией», тем не менее именно Н. И. Лобачевский рассматривал её не как игру ума, а как возможную теорию пространственных отношений. Однако доказательство её непротиворечивости было дано позже, когда были указаны её истолкования и тем полностью решён вопрос о её реальном смысле, логич. непротиворечивости.

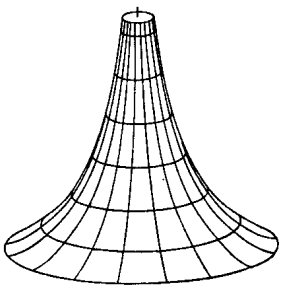


Рис. 2.

Интерпретации (модели) геометрии Лобачевского. Л. г. изучает свойства «плоскости Лобачевского» (в планиметрии) и «пространства Лобачевского» (в стереометрии). Плоскость Лобачевского — это плоскость (множество точек), в к-рой определены прямые линии, а также движения фигур (вместе с тем — расстояния, углы и пр.), подчиняющиеся всем аксиомам евклидовой геометрии, за исключением аксиомы о параллельных, к-рая заменяется указанной выше аксиомой Лобачевского. Сходным образом определяется пространство Лобачевского. Задача выяснения реального смысла Л. г. состояла в нахождении моделей плоскости и пространства Лобачевского, т. е. в нахождении таких объектов, в к-рых реализовались бы соответствующим образом истолкованные положения планиметрии и стереометрии Л. г. В 1868 Э. Бельтрами заметил, что геометрия на куске плоскости Лобачевского совпадает с геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, простейший пример к-рых представляет *псевдосфера* (рис. 2). Если точкам и прямым на конечном куске плоскости Лобачевского сопоставить точки и кратчайшие линии (геодезические) на псевдосфере и движению в плоскости Лобачевского сопоставлять перемещение фигуры по псевдосфере с изгибанием, т. е. деформацией, сохраняющей длины, то всякой теореме Л. г. будет отвечать факт, имеющий место на псевдосфере. Таким образом, Л. г. получает простой реальный смысл (интерпретация Бельтрами). При этом длины, углы, площади понимаются в смысле естественного измерения их на псевдосфере. Однако здесь даётся интерпретация только геометрии на куске плоскости Лобачевского, а не на всей плоскости и тем более не в пространстве (в 1901 Д. Гильберт доказал даже, что вообще в евклидовом пространстве не может существовать регулярной поверхности, геометрия на к-рой совпадает с геометрией всей плоскости Лобачевского).

В 1871 Ф. Клейн указал модель (интерпретация Клейна) как всей плоскости, так и пространства Лоба-

чевского (к-рая была описана выше), в к-рой плоскостью служит внутренность круга, а пространством — внутренность шара. Между прочим, в этой модели расстояние между точками A и B (рис. 1) определяется как $\ln\left(\frac{AN}{AM}\cdot\frac{BM}{BN}\right)$; угол — ещё сложнее.

Позже А. Пуанкаре в связи с задачами теории функций комплексного переменного дал другую модель (интерпретация Пуанкаре). За плоскость Лобачевского принимается внутренность круга (рис. 3), прямыми считаются дуги окружностей (напр., a, b, b'), перпендикулярных окружности данного круга, и его диаметры, движениями — преобразования, получаемые комбинациями инверсий относительно окружностей, дуги к-рых служат прямыми. Модель Пуанкаре замечательна тем, что в ней углы изображаются обычными углами. Модель Л. г. в пространстве строится аналогично.

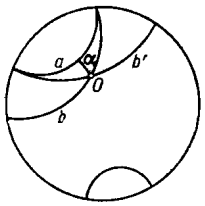


Рис. 3.

Коротко модели Клейна и Пуанкаре можно определить так. В обоих случаях плоскостью Лобачевского может служить внутренность круга (пространством— внутренность шара), и Л. г. есть учение о тех свойствах фигур внутри круга (шара), к-рые в случае модели Клейна не изменяются при проективных, а в случае модели Пуанкаре — при конформных преобразованиях круга (шара) самого в себя (проективные преобразования есть те, к-рые переводят прямые в прямые, конформные — те, к-рые сохраняют углы).

Возможно чисто аналитич. определение модели Л. г. Напр., точки плоскости можно определять как пары чисел x, y, прямые можно задавать уравнениями, движения — формулами, сопоставляющими точкам (x, y) новые точки (x', y'). Это будет абстрактно определённая аналитич. геометрия на плоскости Лобачевского, аналогично аналитич. геометрии на плоскости Евклида. Так как Н. И. Лобачевский дал основы своей аналитич. геометрии, то тем самым он уже фактически наметил модель, хотя полное её построение выяснилось уже после того, как на основе работ Ф. Клейна и других выяснилось само понятие о модели. Другое аналитич. определение Л. г. состоит в том, что Л. г. определяется как геометрия риманова пространства постоянной отрицательной кривизны. Это определение было фактически дано ещё в 1854 Б. Риманом и включало модель Л. г. как геометрии на поверхностях постоянной кривизны. Однако Б. Риман не связал прямо своих построений с Л. г., а его доклад, в к-ром он о них сообщил, не был понят и был опубликован лишь после его смерти (в 1869).

Содержание геометрии Лобачевского. Н. И. Лобачевский строил свою геометрию, отправляясь от основных геометрич. понятий и своей аксиомы, и доказывал теоремы геометрич. методом, подобно тому как это делается в геометрии Евклида. Основой служила теория параллельных линий, т. к. именно здесь начинается отличие Л. г. от геометрии Евклида. Все теоремы, не зависящие от аксиомы о параллельных, общи обеим геометриям и образуют т. н. абсолютную геометрию, к к-рой относятся, напр., теоремы о равенстве треугольников. Вслед за теорией параллельных строились другие отделы, включая тригонометрию и начало аналитической и дифференциальной геометрии. Приведём несколько фактов Л. г., отличающих её от геометрии Евклида, установленных самим Н. И. Лобачевским.

1) В Л. г. не существует подобных, но неравных треугольников; треугольники равны, если их углы равны. Поэтому существует абсолютная единица длины, т. е. отрезок, выделенный по своим свойствам, подобно тому как прямой угол выделен своими свойствами. Таким отрезком может служить, напр., сторона правильного треугольника с данной суммой углов.

2) Сумма углов всякого треугольника меньше π и может быть сколь угодно близкой к нулю. Это ясно видно на модели Пуанкаре. Разность $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$, где α, β, γ — углы треугольника, пропорциональна его площади.

3) Через точку O, не лежащую на данной прямой a, проходит бесконечно много прямых, не пересекающих a и находящихся с ней в одной плоскости; среди них есть две крайние b, b', к-рые и наз. параллельными прямой a в смысле Лобачевского. В моделях Клейна (Пуанкаре) они изображаются хордами (дугами окружностей), имеющими с хордой (дугой) a общий конец (к-рый по определению модели исключается, так что эти прямые не имеют общих точек) (рис. 1, 3). Угол α между прямой b (или b') и перпендикуляром из O на a, т. н. угол параллельности, по мере удаления точки O от прямой a убывает от 90° до 0° (в модели Пуанкаре углы в обычном смысле совпадают с углами в смысле Лобачевского, и потому на ней этот факт можно видеть непосредственно). Параллель b с одной стороны (а b' с противоположной) асимптотически приближается к a, а с другой — бесконечно от неё удаляется (в моделях расстояние между точками, приближающимися к разным точкам граничной окружности, бесконечно растёт).

4) Если прямые имеют общий перпендикуляр, то они бесконечно расходятся в обе стороны от него. К любой из них можно восстановить перпендикуляры, к-рые не достигают другой прямой.

5) Линия равных расстояний от прямой не есть прямая, а особая кривая, наз. эквидистантой или гипероциклом.

6) Предел бесконечно растущих окружностей не есть прямая, а особая кривая, наз. предельной окружностью или орициклом.

7) Предел сфер бесконечно увеличивающегося радиуса не есть плоскость, а особая поверхность — предельная сфера или орисфера; замечательно, что на ней имеет место евклидова геометрия. Это служило Лобачевскому основой для вывода формул тригонометрии.

8) Длина окружности не пропорциональна радиусу, а растёт быстрее.

9) Чем меньше область в пространстве или на плоскости Лобачевского, тем меньше метрич. соотношения в этой области отличаются от соотношений евклидовой геометрии. Можно сказать, что в бесконечно малой области имеет место евклидова геометрия. Напр., чем меньше треугольник, тем меньше сумма его углов отличается от π, чем меньше окружность, тем меньше отношение её длины к радиусу отличается от 2π, и т. п. Уменьшение области формально равносильно увеличению единицы длины, поэтому при безграничном увеличении единицы длины формулы Л. г. переходят в формулы евклидовой геометрии. Евклидова геометрия есть в этом смысле «предельный» случай Л. г.

Л. г. продолжает разрабатываться многими геометрами; в ней изучаются решение задач на построение, многогранники, правильные системы фигур, общая теория кривых и поверхностей и т. п.

Приложения геометрии Лобачевского. Сам Н. И. Лобачевский применил свою геометрию к вычислению определённых интегралов. В теории функций комплексного переменного Л. г. помогла построить теорию автоморфных функций. Связь с Л. г. была здесь отправным пунктом исследований А. Пуанкаре, к-рый писал, что «неевклидова геометрия есть ключ к решению всей задачи». Л. г. находит применение также в теории чисел, в её геометрич. методах, объединённых под названием «геометрия чисел». Была установлена тесная связь Л. г. с кинематикой частной теории относительности. Эта связь основана на том, что равенство, выражающее закон распространения света

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$

при делении на t^2, т. е. для скоростей, даёт

$$v_x^2+v_y^2+v_z^2=c^2$$

— уравнение сферы в пространстве с координатами v_x, v_y, v_z (в «пространстве скоростей»). Преобразования Ло-

ренца сохраняют эту сферу и, т. к. они линейны, переводят прямые пространства скоростей в прямые. Следовательно, согласно модели Клейна, в пространстве скоростей внутри сферы радиуса c, т. е. для скоростей, меньших скорости света (к-рые, согласно теории относительности, только и возможны), имеет место Л. г. Так, напр., сложение скоростей в теории относительности получает истолкование как сложение отрезков в Л. г.

Замечательное приложение Л. г. нашла в общей теории относительности. Если считать распределение масс материи во Вселенной равномерным, что в космич. масштабах представляет допустимое приближение, то оказывается, что пространство имеет геометрию Лобачевского. Таким образом, предположение Н. И. Лобачевского о его геометрии как возможной теории реального пространства оправдалось.

● Лобачевский Н. И., Полн. собр. соч., т. 1—5, М.— Л., 1946—51; Каган В. Ф., Лобачевский и его геометрия, М., 1955; его же, Основания геометрии, ч. 1—2, М.— Л., 1949—56; Об основаниях геометрии. Сб. классич. работ по геометрии Лобачевского и развитию его идей, М., 1956; Широков П. А., Краткий очерк основ геометрии Лобачевского, 2 изд., М., 1983.

А. Д. Александров.

ЛОБАЧЁВСКОГО МЕТОД, метод Греффе,— метод для одновременного вычисления всех корней многочлена. Пусть корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ многочлена

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),\quad a_0\neq 0,$$

удовлетворяют неравенствам

$$|x_1|\geqslant|x_2|\geqslant\ldots\geqslant|x_n|. \qquad (*)$$

Тогда в качестве приближений к корням могут быть взяты отношения a_i/a_{i-1}, $i=1, \ldots, n$.

Пусть теперь корни $P(x)$, хотя и не выполнено (*), всё же различны по абсолютной величине. Л. м. заключается в применении к уравнению $P(x)=0$ процесса квадрирования, к-рый при достаточном числе повторений приводит к уравнению с корнями, удовлетворяющими условиям (*). Квадрирование состоит в переходе от очередного многочлена $P_k(x)$ к многочлену $P_{k+1}(x)$ той же степени, корни к-рого равны квадратам корней $P_k(x)$. Переход выполняется по рекуррентным формулам.

Применение Л. м. возможно и при наличии групп равных по абсолютной величине корней, хотя это приводит к осложнениям в логике и формулах метода. Достоинством метода является то, что не требуется знания начальных приближений к корням многочлена. В случае различных по абсолютной величине корней скорость сходимости процесса асимптотически квадратичная. Л. м. является, однако, численно неустойчивым, т. к. процесс квадрирования приводит к очень быстрому накоплению вычислительной погрешности.

Л. м. предложен Н. И. Лобачевским (1834) и независимо от него К. Греффе (1837).

ЛОГАРИ́ФМ числа N по основанию $a\neq 1$ — показатель степени m, в которую следует возвести число a (основание Л.), чтобы получить N; обозначается $\log_a N$. Итак, $m=\log_a N$, если $a^m=N$. Напр., $\log_{10}100=2$; $\log_2\frac{1}{32}=-5$, $\log_a 1=0$, т. к. $100=10^2$, $\frac{1}{32}=2^{-5}$, $1=a^0$. При отрицательных a бесконечно много положительных чисел не имело бы действительных логарифмов, поэтому берётся $a>0$. Из свойств *логарифмической функции* вытекает, что каждому положительному числу соответствует при данном основании единственный действительный Л. (логарифмы отрицательных чисел являются комплексными числами). Основные свойства Л.:

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N;$$
$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N;$$
$$\log_a N^k=k\log_a N;$$
$$\log_a\sqrt[k]{N}=\frac{1}{k}\log_a N$$

позволяют сводить умножение и деление чисел к сложению и вычитанию их Л., а возведение в степень и извлечение корня — к умножению и делению Л. на показатель степени или корня, т. е. к более простым действиям.

Когда основание a фиксировано, говорят об определённой системе Л. Наиболее употребительны десятичные Л. ($a=10$), обозначаемые $\lg N$. Для рациональных чисел отличных от 10^k с целым k, десятичные Л. суть трансцендентные числа, к-рые приближённо выражают в десятичных дробях. Целую часть десятичного Л. наз. характеристикой, дробную — мантиссой. Так как $\lg(10^kN)=k+\lg N$, то десятичные Л. чисел, отличающихся множителем 10^k, имеют одинаковые мантиссы и различаются лишь характеристиками. Это свойство лежит в основе построения таблиц Л., к-рые содержат лишь мантиссы Л. целых чисел (см. *Логарифмические таблицы*).

Большое значение имеют также натуральные Л., основанием к-рых служит трансцендентное число $e=2{,}71828\ldots$; их обозначают $\ln N$. Переход от одного основания Л. к другому совершается по формуле $\log_b N=\log_a N/\log_a b$, множитель $1/\log_a b$ наз. модулем перехода (перевода) от основания a к основанию b. Переход от натуральных Л. к десятичным или обратно осуществляется по формулам

$$\ln N=\lg N/\lg e,\quad \lg N=\ln N/\ln 10;$$
$$1/\lg e=2{,}30258;\quad 1/\ln 10=0{,}43429\ldots$$

Открытие Л. было связано в первую очередь с быстрым развитием астрономии в 16 в., уточнением астрономич. наблюдений и усложнением астрономич. выкладок. Авторы первых таблиц Л. исходили из зависимости между свойствами геометрич. прогрессии и составленной из показателей степени её членов арифметич. прогрессии. Эти зависимости, частично подмеченные ещё Архимедом (3 в. до н. э.), были хорошо известны Н. Шюке (1484) и М. Штифелю (1544). Первые логарифмич. таблицы были составлены одновременно и независимо друг от друга Дж. Непером (1614, 1619) и Й. Бюрги (1620). Важный шаг в теоретич. изучении Л. сделал Григорий из Сен-Винцента (1647), обнаруживший связь Л. и площадей, ограниченных дугой гиперболы, осью абсцисс и соответствующими ординатами. Представление Л. бесконечным степенным рядом дано Н. Меркатором (1668), нашедшим, что

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

Вскоре затем Дж. Грегори (1668) открыл разложение

$$\ln\frac{M}{N}=2\left\{\frac{M-N}{M+N}+\frac{1}{3}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^5+\ldots\right\}.$$

Этот ряд очень быстро сходится, если $M=N+1$ и N достаточно велико; поэтому он может быть использован для вычисления Л. В развитии теории Л. большое значение имели работы Л. Эйлера. Им установлено понятие о логарифмировании как действии, обратном возведению в степень.

Термин «Л.» предложил Дж. Непер; он возник из сочетания греч. слов λόγος (здесь — отношение) и ἀριθμός (число); в античной математике квадрат, куб и т. д. отношения a/b наз. «двойным», «тройным» и т. д. отношением. Таким образом, для Дж. Непера слова λόγος ἀριθμός означали «число (кратность) отношения», т. е. Л. у Дж. Непера — вспомогательное число для измерения отношения двух чисел. Термин «натуральный логарифм» принадлежит П. Менголи (1659) и Н. Меркатору (1668), «характеристика» — Г. Бригсу (1624), «мантисса» в нашем смысле — Л. Эйлеру (1748), «основание» Л.— ему же, понятие о модуле перехода ввёл Н. Меркатор. Современное определение Л. впервые дано У. Гардинером (1742). Знак Л.— результат сокращения слова «Л.» — встречается в различных видах почти одновременно с появлением первых таблиц, напр. Log — у И. Кеплера (1624) и Г. Бригса (1631), log и l.— у Б. Кавальери (1632, 1643).

А. П. Юшкевич.

ЛОГАРИ́ФМИКА — график *логарифмической функции*.

ЛОГАРИФМИ́РОВАНИЕ — действие, заключающееся в нахождении логарифма числового, алгебраического или иного выражения. Л.— одно из двух действий, обратных возведению в степень: если $a^b=c$, то $a=\sqrt[b]{c}$, $b=\log_a c$.

ЛОГАРИФМИ́ЧЕСКАЯ БУМА́ГА — специальным образом разграфлённая бумага; обычно изготовляется типографским способом. Она строится следующим образом (рис. 1): на каждой из осей прямоугольной системы координат откладываются десятичные логарифмы чисел u (на оси абсцисс) и v (на оси ординат); затем через найденные точки (u, v) проводятся прямые, параллельные осям. Наряду с Л. б. применяются полулогарифмическая бумага (рис. 2): на одной из осей прямоугольной системы координат откладываются числа u, а на другой — десятичные логарифмы чисел v. Л. б. и полулогарифмич. бумага служат для вычерчивания на них графиков функций, к-рые здесь могут принимать более простую и наглядную форму и в ряде случаев выпрямляются. На Л. б. прямыми линиями изображаются функции, заданные уравнениями вида $v=au^b$, где a и b — постоянные коэффициенты, т. к. такие уравнения после логарифмирования и перехода к системе координат $x=\lg u$, $y=\lg v$ приводятся к виду:

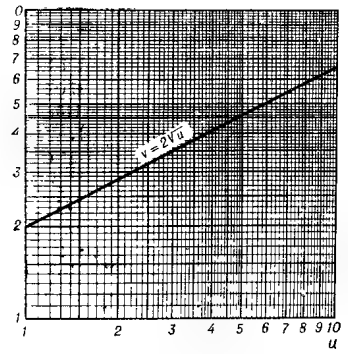


Рис. 1.

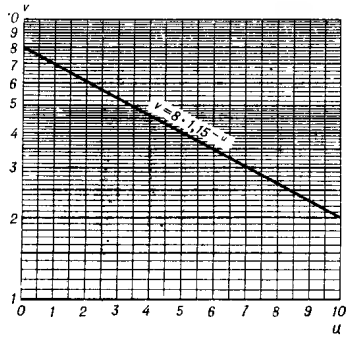


Рис. 2.

$$y=bx+\lg a.$$

Аналогично на полулогарифмич. бумаге прямыми линиями изображаются функции, заданные уравнениями вида $v=ab^u$. Это свойство Л. б. и полулогарифмич. бумаги находит применение при отыскании аналитич. формы эмпирич. зависимостей. Если, напр., ряд точек с координатами u_i, v_i, где u_i — значения аргумента u, при к-рых из опыта получены значения v_i функции v, нанесённых на Л. б., с достаточной точностью располагается на прямой, то прямую принимают за график функции $v=f(a)$, к-рую, следовательно, можно записать в виде $v=au^b$. Для случая полулогарифмич. бумаги зависимость будет иметь вид $v=ab^u$. Коэффициенты a и b находятся по чертежу.

М. В. Пентковский.

ЛОГАРИФМИ́ЧЕСКАЯ СПИРА́ЛЬ — плоская трансцендентная кривая, пересекающая все радиусы-векторы под одним и тем же углом μ (поэтому Л. с. наз. также р а в н о у г о л ь н о й) (рис. 1). Уравнение в полярных координатах:

$$\rho=ae^{k\varphi},$$

где $k=\ln a=\operatorname{ctg}\mu$ (при $\mu=\pi/2$, $k=0$ и кривая — окружность). Полюс O — асимптотич. точка. Длина дуги между точками (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2):

$$L=\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}(\rho_2-\rho_1),$$

предел длины дуги до точки O:

$$L_0=\frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\rho.$$

Радиус кривизны:

$$R=\rho\sqrt{1+k^2}.$$

Натуральное уравнение:

$$R=kL_0,$$

таким образом Л. с. относится к псевдоспиралям (см. *Спираль*). Л. с. переходит в себя при линейных преобразованиях плоскости; её эволюта, подера — также Л. с. При стереографич. проекции плоскости на сферу Л. с. переходит в локсодромию. Л. с. широко используется в технике: по Л. с. выполняются профили вращающихся пожей и фриз, зубчатых передач и др. По Л. с. очерчены пек-рые раковины (рис. 2), по дугам, близким к Л. с., расположены семечки в подсолнухе, чешуйки в шишках (рис. 3, 4) и т. д. Впервые Л. с. упоминает Р. Декарт (1638, опубликовано в 1657), независимо кривая была открыта Э. Торричелли (1644). Свойства Л. с. исследовал Я. Бернулли (1692). Название предложено П. Вариньоном (1704).

Рис. 1.

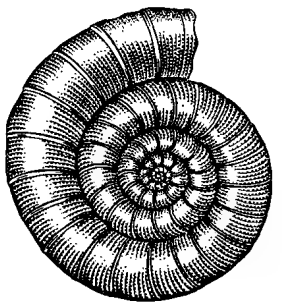


Рис. 2.

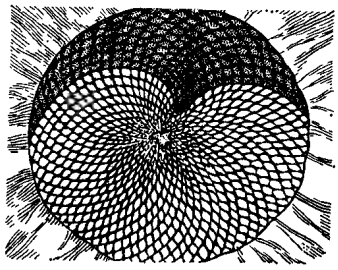


Рис. 3.

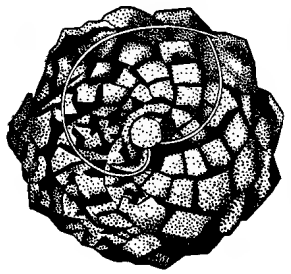


Рис. 4.

ЛОГАРИФМИ́ЧЕСКАЯ ТО́ЧКА ВЕТВЛЕ́НИЯ — тип *особой точки* аналитической функции. См. также *Ветвления точка*.

ЛОГАРИФМИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция

$$y=\ln x,$$

обратная *показательной функции*

$$x=e^y;$$

значение Л. ф. y, соответствующее значению аргумента x, наз. натуральным логарифмом x. Основные свойства Л. ф. вытекают из соответствующих свойств показательной функции и логарифмов.

Логарифмическая функция действительного переменного. В курсе математич. анализа рассматривается Л. ф. $y=\log_a x$ при действительных $x>0$ и $a>0$, $a\neq1$; она связана с Л. ф. $y=\ln x$ (основной) соотношением

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}.$$

Л. ф. $\log_a x$ определена при $x>0$, монотонна (возрастает, если $a>1$, и убывает, если $0<a<1$), непрерывна, бесконечно дифференцируема; при этом

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},\quad \int\log_a x\,dx=x\left(\log_a x-\frac{1}{\ln a}\right)+C,$$

в частности,

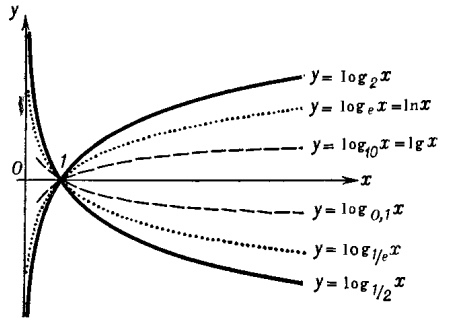
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad \int \ln x\, dx \quad x(\ln x - 1) + C;$$

в окрестности каждой точки своей области определения Л. ф. может быть разложена в степенной ряд; напр.,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1.$$

График Л. ф. $y = \log_a x$ симметричен графику показательной функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$, проходит через точку (1, 0) и асимптотически приближается к оси



Графики логарифмической функции $y = \log_a x$ при различных значениях основания a.

Oy (см. рис., где даны графики функций $y = \ln x$ — логарифмика, $y = \log_2 x$, $y = \lg x$, $y = \log_{1/2} x$). График Л. ф. $y = \log_a x$ симметричен графику Л. ф. $y = \log_{1/a} x$ относительно оси абсцисс.

Для Л. ф. выполняется соотношение

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

при любых $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Верно и обратное утверждение: непрерывная, отличная от нуля функция $f(x)$, удовлетворяющая соотношению

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

при любых $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, является Л. ф. $f(x) = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ такое, что $f(a) = 1$.

Л. ф. $\ln x$ при $x \to \infty$ стремится к бесконечности медленнее любой степени x, а при $x \to +0$ стремится к бесконечности медленнее любой степени $\frac{1}{x}$, т. е. при любом $b > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0, \quad \lim_{x \to +0} x^b \ln x = 0.$$

Л. ф. $\ln x$ можно представить с помощью предела степенных функций:

$$\ln x = \lim_{n \to \infty} n\left(x^{1/n} - 1\right), \quad x > 0.$$

Логарифмическая функция w комплексного переменного $z = x + iy$. Л. ф.

$$w = \operatorname{Ln} z$$

определяется по формуле

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z,$$

где $\operatorname{Arg} z$ — многозначная функция. Л. ф. $\operatorname{Ln} z$ определена для любого комплексного $z \neq 0$ и является многозначной функцией: в каждой точке $z \neq 0$ она принимает бесконечное число различных значений, отличающихся друг от друга на $2k\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Однозначная ветвь этой функции, определяемая как

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z,$$

наз. главным значением логарифмической функции.

Л. ф. $\ln z$ — аналитич. функция в области $0 < |z| < \infty$ и является аналитич. продолжением Л. ф. $\ln x$ с действительной положительной полуоси в комплексную плоскость.

Л. ф. $\operatorname{Ln} z$ как аналитич. функция является совокупностью элементов, заданных в каждой точке $z_0 \neq 0$. Эти элементы могут быть представлены в виде рядов Тейлора:

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln} z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n z_0^n}(z - z_0)^n,$$

$$|z - z_0| < |z_0|,$$

где $\operatorname{Ln} z_0$ — все значения Л. ф. $\operatorname{Ln} z$ в точке z_0. Любые два из этих элементов получаются друг из друга в результате аналитич. продолжения вдоль нек-рой кривой. В качестве исходного элемента Л. ф. обычно выбирают элемент, заданный в точке $z_0 = 1$ и принимающий в этой точке значение, равное 0.

Если область — комплексная плоскость с разрезом по кривой, соединяющей точки $z = 0$ и $z = \infty$, то в этой области и в любой её подобласти Л. ф. $\operatorname{Ln} z$ распадается на однозначные регулярные ветви. В любой другой области не существуют регулярные ветви Л. ф. $\operatorname{Ln} z$. Точки $z = 0$ и $z = \infty$ являются логарифмич. точками ветвления Л. ф. $\operatorname{Ln} z$.

Если в области можно выделить регулярную ветвь Л. ф. $\ln z$, то эта ветвь является однолистной функцией в данной области и отображение $w = \ln z$ этой области является конформным. Примеры конформных отображений Л. ф. $w = \ln z$ см. в ст. *Показательная функция*.

Л. ф. является одной из основных элементарных функций; через неё выражаются, напр., *степенная функция*, *обратные тригонометрические функции*, *обратные гиперболические функции*.

Ю. В. Сидоров.

ЛОГАРИФМИ́ЧЕСКИ НОРМА́ЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — распределение вероятностей случайной величины X, заданное плотностью вероятности

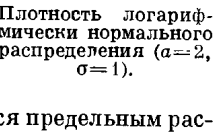
$$p(x) = \begin{cases} \frac{\ln e}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \qquad (*)$$

где $-\infty < a < \infty$, $\sigma^2 > 0$ — параметры. По определению, положительная случайная величина X подчиняется Л. н. р. с плотностью $(*)$, если её логарифм $\ln X$ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ^2 (отсюда название «Л. н. р.»). Таким образом, $a = \mathsf{E}\ln X$, $\sigma^2 = \mathsf{D}\ln X$. Моменты случайной величины X, имеющей Л. н. р. с параметрами a и σ^2, выражаются формулой

$$\mathsf{E}X^k = e^{ka + k^2\sigma^2/2},$$

в частности математич. ожидание и дисперсия X равны

$$\mathsf{E}X = e^{a + \sigma^2/2} \quad \text{и} \quad \mathsf{D}X = e^{2a+b}\left(e^{\sigma} - 1\right).$$



Плотность логарифмически нормального распределения ($a = 2$, $\sigma = 1$).

Л. н. р. является унимодальным распределением и имеет положительную асимметрию. Из центральной предельной теоремы следует, что Л. н. р. является предельным распределением для произведения независимых положительных случайных величин. Л. н. р. применяется в самых различных областях — экономике, биологии, геологии, физике. Например, Л. н. р. с хорошим приближением описывает распределение размера частиц при дроблении породы, содержание компонент (химич. соединений и минералов) в породах.

ЛОГАРИФМИ́ЧЕСКИЕ ТАБЛИ́ЦЫ — таблицы логарифмов чисел; применяются для упрощения вычислений. Наиболее распространены таблицы десятичных логарифмов. Т. к. десятичные логарифмы чисел N и $10^k N$ (при k целом) различаются только характеристиками и имеют одинаковые мантиссы ($\lg 10^k N = k + \lg N$), то в таблицах десятичных логарифмов приводятся только мантиссы логарифмов целых чисел. Для отыскания характеристики служат правила: 1) характеристика числа, большего 1, на единицу меньше числа цифр в целой части этого числа (так,

lg 20 000=4,30103) и 2) характеристика десятичной дроби, меньшей 1, равна взятому со знаком минус числу нулей, предшествующих первой в дроби цифре, отличной от нуля (так, lg 0,0002=$\bar{4}$,30103, таким образом, десятичные логарифмы дробей записываются в виде суммы положительной мантиссы и отрицательной характеристики).

Существуют таблицы десятичных логарифмов с различным числом знаков мантисс. Наиболее распространены 4-значные и 5-значные таблицы. Иногда употребляют 7-значные таблицы, а в редких случаях — таблицы, позволяющие без большого труда вычислять логарифмы с большим числом знаков. В Л. т. часто приводятся таблицы антилогарифмов — чисел, логарифмы к-рых суть данные числа, и таблицы т. н. гауссовых логарифмов, служащих для определения логарифмов суммы или разности двух чисел по известным логарифмам этих чисел (без промежуточного нахождения самих чисел). Кроме логарифмов чисел, Л. т. содержат обычно логарифмы тригонометрич. величин.

Первые Л. т. были составлены независимо друг от друга Дж. Непером и Й. Бюрги. Таблицы Дж. Непера «Описание удивительной таблицы логарифмов» (1614) и «Построение удивительной таблицы логарифмов» (1619) содержали 8-значные логарифмы синусов, косинусов и тангенсов для углов от 0° до 90°, следующих через одну минуту. Так как синус 90° тогда принимали равным 10^7, а на него часто приходилось умножать, то Дж. Непер определил свои Л. т. так, что логарифм 10^7 был равен нулю. Логарифмы остальных синусов, меньших 10^7, у него положительны. Дж. Непер не ввёл понятия об основании системы логарифмов. Его логарифм числа N в современных обозначениях приблизительно равен $10^7 \ln \frac{10^7}{N}$. Свойства логарифмов Дж. Непера несколько сложнее обычных, так как у него логарифм единицы отличен от нуля.

Таблицы «арифметической и геометрической прогрессий» (1620) Й. Бюрги представляют собой первую таблицу антилогарифмов («чёрные числа») и дают значения чисел, соответствующих равноотстоящим логарифмам («красным числам»). «Красные числа» Й. Бюрги суть логарифмы поделённых на 10^8 «чёрных чисел» при основании, равном $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)\cdot 10^4$. Таблицы Й. Бюрги и особенно Дж. Непера немедленно привлекли внимание математиков к теории и вычислению логарифмов. По совету Дж. Непера Г. Бригс вычислил 8-значные десятичные логарифмы (1617) от 1 до 1000 и затем 14-значные (1624) от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000 (по его имени десятичные логарифмы иногда наз. бриговыми). 10-значные таблицы от 1 до 100 000 издал А. Влакк (1628). Таблицы А. Влакка легли в основу большинства последующих таблиц, причём их авторы внесли много изменений в структуру Л. т. и поправок в выкладки (у самого А. Влакка было 173 ошибки, у Г. Вега в 1783 — пять; первые безошибочные таблицы выпустил в 1857 К. Бремикер). В России таблицы логарифмов впервые были изданы в 1703 при участии Л. Ф. Магницкого. Таблицы т. н. гауссовых логарифмов были опубликованы в 1802 З. Леонелли; К. Гаусс ввёл (1812) эти логарифмы в общее употребление.

● Брадис В. М., Четырехзначные математические таблицы, 55 изд., М., 1986; Милн-Томсон Л.-М., Комри Л.-Дж., Четырехзначные математические таблицы, пер. с англ., М., 1961; Пятизначные таблицы натуральных значений тригонометрических величин, их логарифмов и логарифмов чисел, 6 изд., М., 1972; Вега Г., Таблицы семизначных логарифмов, 4 изд., М., 1971; Субботин М. Ф., Многозначные таблицы логарифмов, М.— Л., 1940; Десятичные таблицы логарифмов комплексных чисел..., М., 1952; Таблицы натуральных логарифмов, 2 изд., т. 1—2, М., 1971.

А. П. Юшкевич.

ЛОГАРИФМИ́ЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИА́Л — см. *Потенциал.*

ЛОГАРИФМИ́ЧЕСКОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение, в котором неизвестное содержится под знаком логарифма или в основании логарифма. Для решения Л. у. используются способы, основанные на свойствах логарифмич. функции, уравнивание логарифмов с равными основаниями, замена переменных, графич. построения.

ЛО́ГИКА ВЫСКА́ЗЫВАНИЙ (греч. λογική; от λογικός — построенный на рассуждении) — раздел математической логики, изучающий логические законы, в которых учитывается лишь логическая структура высказываний, а именно, как одни высказывания получены из других с помощью таких логических операций, как конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность, отрицание (см. *Высказываний исчисление*).

ЛО́ГИКА ПРЕДИКА́ТОВ — раздел математической логики, изучающий логические законы, общие для любой области объектов исследования (содержащей хоть один объект) с заданными на этих объектах предикатами (т. е свойствами и отношениями).

В Л. п. логич. законы выражаются посредством предикатных формул. Предикатные формулы строятся из предметных переменных x, y, z, ..., предикатных переменных P^m, Q^n, R^l, ..., логич. связок $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, кванторов $\forall$ и $\exists$, запятых и скобок по следующим правилам: 1) если P^m — предикатная переменная, а x_1, ..., x_m — предметные переменные, то $P^m(x_1, \ldots, x_m)$ — формула; 2) если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$ и $\neg\mathfrak{A}$ — формулы; 3) если $\mathfrak{A}$ — формула, x — предметная переменная, то $\forall x\mathfrak{A}$ и $\exists x\mathfrak{A}$ — формулы.

Пусть $\mathfrak{A}(P_1^{m_1}, \ldots, P_n^{m_n})$ — предикатная формула, где $P_1^{m_1}, \ldots, P_n^{m_n}$ — все встречающиеся в ней предикатные переменные. Будем говорить, что задана интерпретация I этой формулы на непустом множестве M, если все предметные переменные в формуле $\mathfrak{A}$ считаются пробегающими множество M, а для каждой предикатной переменной $P_i^{m_i}$ в качестве её значения выбран нек-рый m_i-местный предикат $I(P_i^{m_i})$ на множестве M. Если над предикатами $I(P_1^{m_1})$, ..., $I(P_n^{m_n})$ выполнить логич. операции, задаваемые формулой $\mathfrak{A}$, то получится нек-рый предикат $I(\mathfrak{A})$ на M.

Формула $\mathfrak{A}$ наз. выполнимой, если для нек-рой её интерпретации I предикат $I(\mathfrak{A})$ выполним. Если для любой интерпретации I предикат $I(\mathfrak{A})$ является тождественно истинным, то формула $\mathfrak{A}$ наз. тождественно истинной или общезначимой. Каждая общезначимая предикатная формула выражает логич. закон. Согласно *Гёделя теореме о полноте*, все общезначимые предикатные формулы и только они выводимы в классич. *предикатов исчислении*.

ЛО́ГИКО-МАТЕМАТИ́ЧЕСКИЙ ЯЗЫ́К — см. *Формализованный язык.*

ЛОГИ́СТИКА — термин, употребляемый для обозначения систем логики, характеризующихся попыткой сведения логических рассуждений к формальным вычислениям. В античности и средние века термин «Л.» означал практич. операции арифметич. вычислений. Г. Лейбниц употреблял термин «Л.» для обозначения исчисления умозаключений. В нач. 20 в. под Л. понимали математич. логику.

ЛОГИ́ЧЕСКАЯ АКСИО́МА — формула формализованного логико-математического языка, истинная в любой *интерпретации* уже в силу смысла логических символов и принимаемая в качестве аксиомы при построении *формальной системы*. В математич. логике выработаны стандартные наборы Л. а. и правил вывода, достаточные для того, чтобы с их помощью получить все логич. следствия из данной системы математич. аксиом (см. *Предикатов исчисление*).

ЛОГИ́ЧЕСКАЯ МА́ТРИЦА — система

$$\mathfrak{M}=\langle M;\ D,\ \&,\ \vee,\ \supset,\ \neg\ \rangle,$$

где M — непустое множество, $D\subseteq M$; $\&$, $\vee$, $\supset$ — двуместные, а $\neg$ — одноместная операции на M. Любую формулу логики высказываний, построенную из пропозициональных переменных p_1, ..., p_n с помощью логич. связок $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, можно рассматривать как n-местную функцию на M, если p_1, ..., p_n считать переменными с областью

значений M, а логич. связки интерпретировать как соответствующие операции Л. м. $\mathfrak{M}$. Формула $\mathfrak{A}$ наз. о б щ е з н а ч и м о й в $\mathfrak{M}$, если при любых значениях переменных в множестве M значение $\mathfrak{A}$ принадлежит D.

ЛОГИ́ЧЕСКАЯ ОПЕРА́ЦИЯ — способ построения сложного высказывания из данных высказываний, при котором *истинностное значение* сложного высказывания полностью определяется истинностными значениями исходных высказываний. Примерами Л. о. являются *конъюнкция*, *дизъюнкция*, *импликация*, *отрицание*. К Л. о. относятся также *кванторы*: они позволяют образовывать высказывания и высказывательные формы из данных высказывательных форм.

ЛОГИ́ЧЕСКАЯ СВЯ́ЗКА — символ формализованного языка, употребляемый для обозначения *логической операции*. Наиболее употребительные Л. с.— п р о п о з и ц и о н а л ь н ы е с в я з к и: $\vee$ — знак дизъюнкции, & — знак конъюнкции, $\supset$ — знак импликации, $\neg$ — знак отрицания; кванторы: $\forall$ — квантор всеобщности, $\exists$ — квантор существования.

ЛОГИ́ЧЕСКАЯ ФО́РМУЛА — формула, содержащая лишь символы логических операций и переменные для высказываний и предикатов, то есть выражение в языке формальной логики, являющееся аналогом предложения. Точное определение Л. ф. даётся для каждого конкретного логич. языка. Как правило, определение Л. ф. имеет индуктивный характер: выделяется класс выражений, наз. э л е м е н т а р н ы м и или атомарными Л. ф., и указываются правила, позволяющие из уже построенных Л. ф. строить новые Л. ф., используя символы логич. операций.

В логике высказываний Л. ф. определяются следующим образом: всякая пропозициональная переменная есть элементарная Л. ф.; если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — Л. ф., то выражения $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$, $\neg\mathfrak{A}$ суть Л. ф. В логике предикатов Л. ф. строятся из пропозициональных, предикатных и предметных переменных с использованием логич. связок, кванторов и вспомогательных символов (скобок и запятых); элементарные Л. ф. — это пропозициональные переменные и выражения вида $P(y_1, \ldots, y_n)$, где P есть n-местная предикатная переменная, $y_1, \ldots, y_n$ —предметные переменные; предикатные Л. ф. определяются следующим образом: всякая элементарная Л. ф. есть Л. ф.; если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — Л. ф., x — предметная переменная, то выражения $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$, $\neg\mathfrak{A}$, $\forall x\mathfrak{A}$, $\exists x\mathfrak{A}$ суть Л. ф.

ЛОГИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ — n-местная функция, определённая на множестве *истинностных значений* {И, Л} и принимающая значения в этом множестве. С каждой *логической операцией* $\mathfrak{A}$ связана Л. ф. $f_{\mathfrak{A}}$: если $v_1, \ldots, v_n$ — нек-рые истинностные значения, то $f_{\mathfrak{A}}(v_1, \ldots, v_n)$ есть истинностное значение высказывания $\mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_n)$, где $P_1, \ldots, P_n$ — такие высказывания, что истинностное значение P_i равно v_i $(i=1, \ldots, n)$. Иногда Л. ф. наз. всякую n-местную функцию, определённую на нек-ром множестве M и принимающую значения в множестве {И, Л}. Такие Л. ф. используются в математич. логике как аналог понятия предиката.

ЛОГИ́ЧЕСКИЙ СИ́НТЕЗ п р о г р а м м — см. *Программ синтез*.

ЛОГИ́ЧЕСКОЕ СЛЕ́ДСТВИЕ и з д а н н о г о м н о ж е с т в а п о с ы л о к — высказывание, являющееся истинным при любой интерпретации нелогических символов (то есть имён объектов, функций, предикатов), при которой истинны посылки. Если высказывание A является Л. с. из множества высказываний Г, то говорят, что Г логически влечёт A или что A логически следует из Г.

Если Г — множество предложений нек-рого формализованного логико-математич. языка 1-го порядка, A — предложение того же языка, то отношение «A — логич. следствие из Г» означает, что всякая модель для Г является моделью для A. Это отношение обозначается $\Gamma\models A$. Из *Гёделя теоремы о полноте* классич. исчисления предикатов следует, что отношение $\Gamma\models A$ совпадает с отношением $\Gamma\vdash A$, т. е. $\Gamma\models A$ тогда и только тогда, когда предложение A выводимо из множества предложений Г средствами классич. исчисления предикатов.

ЛО́ЖНОГО ПОЛОЖЕ́НИЯ МЕ́ТОД — то же, что *секущих метод*.

ЛОКА́ЛЬНАЯ ТЕОРЕ́МА ЛАПЛА́СА — см. *Лапласа теорема*.

ЛОКА́ЛЬНО ВЫПУКЛОЕ ПРОСТРА́НСТВО — векторное пространство X, наделённое семейством *полунорм* $\mathcal{P}=\{p_\alpha(x)\}$, разделяющим точки, то есть таким, что для всякого $x_0\neq 0$ существует $p_{\alpha_0}(x_0)\neq 0$. Если семейство $\mathcal{P}$ сводится к одной полунорме, то X — нормированное пространство. Одним из центральных результатов теории Л. в. п. является *Хана — Банаха теорема* о существовании в Л. в. п. нетривиальных линейных непрерывных функционалов.

ЛОКА́ЛЬНО КОМПА́КТНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — отделимое топологическое пространство, всякая точка которого имеет компактную окрестность. Всякое Л. к. п.— регулярное пространство.

ЛОКА́ЛЬНЫЙ МА́КСИМУМ ф у н к ц и и — см. *Экстремум*.

ЛОКА́ЛЬНЫЙ МИ́НИМУМ ф у н к ц и и — см. *Экстремум*.

ЛОКА́ЛЬНЫХ ВАРИА́ЦИЙ МЕ́ТОД — один из прямых методов численного решения задач оптимального управления с ограничениями на фазовые координаты и управляющие функции, основанный на варьировании в пространстве состояний. В Л. в. м. исходная задача оптимального управления, заданная в форме *Лагранжа задачи*, приводится в результате дискретизации по аргументу t и фазовому вектору x к задаче нелинейного программирования с аддитивной минимизируемой функцией. Существенным для Л. в. м. является условие равенства размерностей $n=m$ вектора фазовых координат x и управлений u, при к-ром построение элементарной операции становится достаточно простым. Под элементарной операцией понимается определение управления u_k, переводящего систему из точки (t_k, x_k) в близкую точку (t_{k+1}, x_{k+1}).

Алгоритм Л. в. м. состоит в последовательном улучшении положения узлов, через к-рые проходит ломаная, удовлетворяющая дискретизированным условиям связи. Улучшение узлов осуществляется в результате поочерёдного локального варьирования каждой j-й компоненты вектора x_k. Такое локальное варьирование осуществляется последовательно для всех узлов ломаной. В результате к моменту окончания итерации получается новая ломаная, на к-рой функционал принимает значение не большее, чем на начальном приближении. Последующие итерации выполняются аналогично. При необходимости производится уменьшение шагов по t и x.

При $m<n$ вместо Л. в. м. может применяться близкий к нему метод бегущей волны.

● М о и с е е в Н. Н., Численные методы в теории оптимальных систем, М., 1971.

ЛО́КОН АНЬЁЗИ — см. *Аньези локон*.

ЛОКСОДРО́МА, л о к с о д р о м и я (от греч. λοξός — косой и δρόμος — бег, путь), — линия на поверхности вращения, пересекающая все меридианы под постоянным углом α (рис.). Если α — острый или тупой угол, то Л. образует бесконечное число витков вокруг полюса, всё приближаясь к нему. Для поверхности вращения, первая квадратичная форма к-рой записана в виде

$$ds^2=du^2+G(u)dv^2,$$

уравнение Л.:

$$v\operatorname{ctg}\alpha=\pm\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{G(u)}}.$$

Для сферы

$$ds^2 = R^2 (du^2 + \cos^2 u\, dv^2)$$

уравнение Л.:

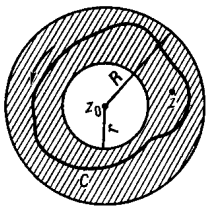
$$v \operatorname{ctg} \alpha = R \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2R} \right).$$

ЛОПИТА́ЛЯ ПРА́ВИЛО — правило раскрытия неопределённостей вида 0/0, ∞/∞, сведением предела отношения функций к пределу отношения производных рассматриваемых функций. Найдено И. Бернулли и сообщено им Г. Лопиталю, опубликовавшему это правило в 1696. См. *Неопределённые выражения.*

ЛОРА́НА РЯД — функциональный ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad (*)$$

где z_0 — фиксированная точка комплексной плоскости, коэффициенты a_n — комплексные числа; суммирование ведётся как по положительным, так и по отрицательным значениям индекса n. Совокупность членов с неотрицательными степенями — правильная часть Л. р.— образует обыкновенный степенной ряд, сходящийся, вообще говоря, внутри круга с центром z_0 и радиусом R, $0 \leqslant R \leqslant \infty$. Совокупность членов с отрицательными степенями — главная часть Л. р.— образует ряд, сходящийся, вообще говоря, вне круга с тем же центром z_0, но с радиусом r, $0 \leqslant r \leqslant \infty$.



Если $r < R$, то ряд (*) сходится в круговом кольце $r < |z - z_0| < R$ (рис.) к нек-рой функции $f(z)$, аналитической в этом кольце; коэффициенты разложения определяются формулой

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где c — произвольный замкнутый контур внутри кольца, ориентированный против часовой стрелки. По виду разложения аналитич. функции в Л. р. определяется характер её особых точек. Если $r > R$, то части Л. р. общей области сходимости не имеют и ряд (*) нигде не сходится к к.-л. функции.

Несмотря на то, что ряды вида (*) встречаются уже у Л. Эйлера (1748), они получили своё название по имени П. Лорана, к-рый в 1843 показал, что всякая функция комплексного переменного, однозначная и аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$, может быть разложена в этом кольце в такой ряд (это т. н. теорема Лорана). Впрочем, ту же теорему получил несколько раньше К. Вейерштрасс, но его работа была опубликована лишь в 1894.

ЛО́РЕНЦА ГРУ́ППА — группа *Лоренца преобразований*, то есть группа автоморфизмов пространства Минковского (см. *Классическая группа*).

ЛО́РЕНЦА ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — линейное преобразование четырёхмерного пространства $\mathbb{R}^4$ с координатами x_0, x_1, x_2, x_3, при котором сохраняется дифференциальная форма

$$dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2.$$

Л. п. образуют группу и являются аналогом *ортогональных преобразований*. Простейшее Л. п. имеет вид (здесь $V = \text{const}$):

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1 - V x_0}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad \tilde{x}_0 = \frac{x_0 - V x_1}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad \tilde{x}_2 = x_2, \quad \tilde{x}_3 = x_3.$$

Группа Л. п., составляющая основу специальной теории относительности, и её представления имеют широкие физич. приложения.

Рассматриваемые преобразования названы А. Пуанкаре Л. п. в честь Х. Лоренца, открывшего их в 1904.

ЛУДО́ЛЬФОВО ЧИСЛО́ — приближённое значение числа π с 32 верными десятичными знаками, найденное Лудольфом ван Цейленом (опубликовано посмертно в 1615). См. также *Пи*.

ЛУ́ЗИНА ТЕОРЕ́МА, критерий Лузина,— теорема об измеримых функциях действительного переменного. Доказана Н. Н. Лузиным (1912). См. *Измеримая функция, Метрическая теория функций.*

ЛУКАСЕ́ВИЧА ЛО́ГИКА — один из первых примеров *многозначной логики*, данный Я. Лукасевичем (1920).

ЛУ́ПА — квазигруппа, обладающая единицей, то есть таким элементом e, что $xe = ex = x$ для любого элемента x из квазигруппы.

ЛУЧ — то же, что замкнутая *полупрямая*.

ЛЯПУНО́ВА ТЕОРЕ́МА — одна из предельных теорем теории вероятностей, устанавливающая некоторые весьма общие достаточные условия для сходимости распределения сумм независимых случайных величин к нормальному распределению. Сформулирована и доказана А. М. Ляпуновым (1901). Л. т. завершает исследования П. Л. Чебышева, А. А. Маркова и самого А. М. Ляпунова в этом основном для всей теории вероятностей направлении. Формулировка Л. т. такова. Пусть независимые случайные величины

$$X_1, \ldots, X_n, \ldots \qquad (*)$$

имеют конечные математич. ожидания $\mathsf{E}X_k$, дисперсии $\mathsf{D}X_k$ и при $\delta > 0$ абсолютные моменты $\mathsf{E}|X_k - \mathsf{E}X_k|^{2+\delta}$ и пусть

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}X_k$$

— дисперсия суммы $X_1 + \ldots + X_k$. Утверждается, что если при некотором $\delta > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}\,|X_k - \mathsf{E}X_k|^{2+\delta}}{B_n^{1+\delta/2}} = 0$$

(условие Ляпунова), то вероятность неравенства

$$x_1 < \frac{\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mathsf{E}X_k)}{\sqrt{B_n}} < x_2$$

стремится при $n \to \infty$ к пределу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx$$

равномерно относительно всех значений x_1 и x_2, т. е. к последовательности (*) применима центральная предельная теорема теории вероятностей. А. М. Ляпунов дал также оценку скорости сходимости в Л. т. Частным случаем Л. т. является интегральная *Лапласа теорема*.

Известны условия, расширяющие условие Ляпунова и являющиеся не только достаточными, но в нек-ром смысле необходимыми. См. *Предельные теоремы* теории вероятностей.

ЛЯПУНО́ВА УСЛО́ВИЯ применимости центральной предельной теоремы теории вероятностей — установлены А. М. Ляпуновым (1901); см. *Ляпунова теорема*, *Предельные теоремы* теории вероятностей.

М

МАГИСТРА́ЛЬ (от лат. magistralis — руководящий, главный) — одно из основных понятий теории моделей экономической динамики. Различают М. в следующих двух смыслах. 1) М.— множество точек, лежащих на оптимальной или эффективной стационарной траектории (часто — сама эта траектория) модели экономич. динамики. При этом траектория $x_0, x_1, \ldots, x_t, \ldots$ наз. стационарной, если $x_t = x_0$ при всех t. Иногда стационарность понимают более широко: $x_t = \alpha^t x_0$ при нек-ром $\alpha > 0$. 2) М.— множество, к к-рому в том или ином смысле стремятся все траектории или нек-рая их часть (напр., оптимальные траектории). В наиболее простых случаях М. в смысле 1) и 2) совпадают.

Утверждения о сходимости траектории к М. наз. обычно теоремами о М. Для случая конечных траекторий рассматривают теоремы о М. в слабой, сильной и сильнейшей формах. Теоремы о М. в слабой форме утверждают, что лишь конечное число точек на рассматриваемых траекториях не попадает в заданную окрестность М., причём это число не зависит от длины траектории (если М.— луч, то рассматривают её конич. окрестность, т. е. конус, содержащий М. в своей внутренности). В случае когда указанные выше точки расположены лишь в начале и конце траектории, говорят про теорему о М. в сильной форме; если же «почти вся» траектория лежит на М., говорят о сильнейшей форме. Теоремы о М. в сильной и сильнейшей форме имеют следующую интерпретацию, оправдывающую сам термин «М.»: для того чтобы на автомобиле попасть из пункта A в пункт B, достаточно удалённый от A, следует сначала как-то выехать из A на М., затем двигаться по ней и в нужный момент свернуть к B. Таким образом, теорема о М. в сильной и сильнейшей форме сводит нахождение всей траектории движения к выбору М. (к-рых обычно немного) и нахождению участков траектории от A до М. и от М. до B.

МАГИ́ЧЕСКИЙ КВАДРА́Т — квадратная $(n \times n)$-таблица $\|a_{ij}\|$ целых чисел от 1 до n^2, удовлетворяющая условиям:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,\,n+1-i} = s,$$

т. е. суммы чисел вдоль любого столбца, любой строки и двух больших диагоналей таблицы равны одному и тому же числу $s = n(n^2+1)/2$. Число n наз. порядком М. к.

Доказано, что М. к. можно построить для любого $n \geqslant 3$ (на рис. слева показаны М. к. для $n=3$ и $n=4$). Уже в средние века был известен ряд алгоритмов построения М. к. нечётного порядка. Существуют М. к., удовлетворяющие ряду дополнительных условий, напр. М. к. с $n=8$ (на рис. справа), к-рый можно разбить на 4 меньших, содержащих по 16 клеток квадрата, причём в каждом из них сумма чисел любой строки, столбца или большой диагонали одна и та же (=130). В Индии и нек-рых др. странах М. к. употреблялись в качестве талисманов. Однако общей теории М. к. не существует (1987); неизвестно даже общее число М. к. порядка n.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

1	6	60	63	9	55	54	12
59	64	2	5	52	14	15	49
62	57	7	4	16	50	51	13
8	3	61	58	53	11	10	56
41	19	22	48	28	29	33	40
46	24	17	43	39	34	30	27
20	42	47	21	38	35	31	26
23	45	44	18	25	32	36	37

● Постников М. М., Магические квадраты, М., 1964; Гуревич Е. Я., Тайна древнего талисмана, М., 1969.

МАЖОРА́НТА функции (франц. majorante, от majorer — объявлять бо́льшим) — функция, значения которой не меньше соответствующих значений данной функции для рассма́триваемых значений независимого переменного. Напр., функция $f(x)=x$ при $x>-1$ является М. функции $g(x)=\ln(1+x)$, так как $x \geqslant \ln(1+x)$ для всех значений $x>-1$.

Для функций, представимых степенным рядом, термин «М.» употребляют в более специальном смысле — это сумма степенного ряда с положительными коэффициентами, к-рые не меньше абсолютных величин соответствующих коэффициентов данного ряда. Если $f_1(x)$ — М. (в указанном смысле) функции $g(x)$, то пишут: $f_1(x) \gg g(x)$. Напр., $x/(1-x) \gg \ln(1+x)$. В этом (специальном) смысле $f(x)=x$ уже не является М. функции $\ln(1+x)$. М. степенных рядов применяются в теории дифференциальных уравнений; так, на использовании М. основан метод приближённого решения дифференциальных уравнений, предложенный С. А. Чаплыгиным (1919). См. также *Миоранта*.

МАКДО́НАЛЬДА ФУ́НКЦИЯ — модифицированная *цилиндрическая функция*. Рассмотрена Х. Макдональдом (1899).

МАКЛО́РЕНА РЯД для функции $f(z)$ — степенной ряд вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

Изучался К. Маклореном (1742). Если аналитическая в нуле функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд, то этот ряд совпадает с М. р. В случае когда функция зависит от m переменных, М. р. есть кратный степенной ряд

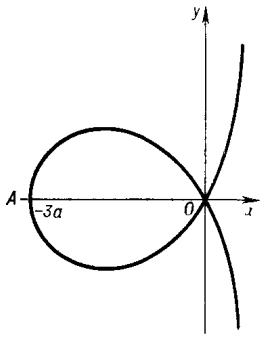
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_{z_1}^{(k_1)}(0) \ldots f_{z_m}^{(k_m)}(0)}{k_1! \ldots k_m!} z_1^{k_1} \ldots z_m^{k_m},$$

суммирование в к-ром проводится по мультииндексам $k=(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, k_i — неотрицательные целые. М. р.— частный случай *Тейлора ряда*.

МАКЛО́РЕНА ТРИСЕКТРИ́СА — плоская кривая 3-го порядка. Уравнение в прямоугольных координатах:

$$x(x^2+y^2) = a(y^2-3x^2).$$

Кривая (рис.) симметрична относительно оси Ox. В начале координат — узловая точка с касательными $y = \pm x\sqrt{3}$. Вершина $A(-3a, 0)$. Асимптота $x=a$. Кривая впервые изучена К. Маклореном (1742) в связи с задачей о трисекции угла.



МА́КСВЕЛЛА РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — распределение случайной величины X, заданное плотностью вероятности

$$p(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\sigma^3} e^{-x^2/2\sigma^2}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

зависящей от параметра $\sigma>0$. М. р. имеет положительную асимметрию, единственная мода находится в точке $x=\sqrt{2}\sigma$. Все моменты М. р. конечны, математич. ожидание и дисперсия равны соответственно $\mathsf{E}x=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma$ и $\mathsf{D}X=\frac{3\pi-8}{\pi}\,\sigma^2$. Если X_1, X_2, X_3 — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами 0 и σ^2, то случайная величина $\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}$ имеет М. р. с параметром σ. Иными словами, М. р. есть распределение длины случайного вектора, координаты к-рого в декартовой системе координат в трёхмерном пространстве независимы и нормальны с параметрами 0 и σ^2.

При $\sigma=1$ М. р. совпадает с распределением квадратного корня из величины, имеющей распределение хи-квадрат с тремя степенями свободы (см. *Рэлея распределение*). М. р. широко известно как распределение скоростей частиц в статистической механике и физике. Впервые установлено Дж. Максвеллом (1859) при решении задачи о распределении скоростей молекул идеального газа.

МАКСИМА́ЛЬНОГО ПРАВДОПОДО́БИЯ МЕ́ТОД — метод нахождения статистических оценок неизвестных параметров распределения, согласно которому в качестве оценок выбираются те значения параметров, при к-рых данные результаты наблюдения «наиболее вероятны». Обычно предполагается, что результаты наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ являются взаимно независимыми случайными величинами с одним и тем же распределением вероятностей, зависящим от одного неизвестного параметра $\theta\in\Theta$, где Θ — множество допустимых значений θ. Для придания точного смысла принципу «наибольшей вероятности» поступают следующим образом. Вводят функцию от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и θ:

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta)=p(x_1; \theta)\ldots p(x_n; \theta),$$

где $p(x_k; \theta)$ в случае исходного непрерывного распределения интерпретируется как плотность вероятности случайной величины X_k, а в дискретном случае — как вероятность того, что случайная величина X_k примет значение x_k. Функцию $L(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ от случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, рассматриваемую как функцию θ, называют функцией правдоподобия, а оценкой максимального правдоподобия параметра θ наз. такое значение

$$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$$

(само являющееся случайной величиной), при к-ром функция правдоподобия достигает наибольшего возможного значения. Т. к. точка максимума для $\ln L$ та же, что и для L, то для нахождения оценок максимального правдоподобия следует решить т. н. уравнение правдоподобия

$$\frac{d\ln L(X_1, \ldots, X_n; \theta)}{d\theta}=0.$$

М. п. м. в достаточно широком круге практически важных случаев является в известном смысле наилучшим. Так, напр., можно утверждать, что если для параметра θ существует несмещённая оценка θ^* с наилучшей дисперсией при фиксированном n, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение $\hat{\theta}=\theta^*$. Что касается асимптотич. поведения оценок максимального правдоподобия при больших n, то известно, что при нек-рых общих условиях М. п. м. приводит к несмещённым оценкам, к-рые, следовательно, асимптотически нормальны и асимптотически эффективны.

Данные выше определения непосредственно обобщаются и на случай нескольких неизвестных параметров и на случай выборок из многомерных распределений. М. п. м. в его современном виде был предложен Р. Фишером (1912), однако в частных формах метод использовался в 19 в. К. Гауссом, а ещё раньше, в 18 в., к его идее были близки И. Ламберт и Д. Бернулли.

● Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975.

МАКСИМА́ЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕ́НТ частично упорядоченного множества — элемент, для которого в этом частично упорядоченном множестве нет элемента строго большего его.

МАКСИМИ́Н — смешанный экстремум вида

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}F(x, y),\quad \max_{x\in X}\min_{y\in Y}F(x, y)\quad \text{и т. п.}\qquad (*)$$

М. можно интерпретировать (напр., в теории принятия решений, в *исследовании операций*, *игр теории*) как наибольший выигрыш из тех, к-рые могут быть достигнуты принимающим решения субъектом в наихудших для него условиях, и тем самым как гарантированный выигрыш. Поэтому принятие решений, ориентирующее на М., может считаться разумным, оптимальным. Значение М. не превосходит значения соответствующего *минимакса*.

Аналитич. нахождение М. (*) (а также минимаксов) часто бывает затруднительным, в таких случаях М. определяют численными методами (см. *Максимин*; численные методы).

МАКСИМИ́Н; численные методы — раздел вычислительной математики, посвящённый решению максиминных (минимаксных) задач. Задачи вычисления М. часто возникают в исследовании операций и теории игр, напр. при использовании принципа минимакса или принципа наибольшего гарантированного результата.

Исходной является задача вычисления М.:

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}F(x, y),\qquad (1)$$

возникающая, напр., при решении антагонистич. игр. Её обобщением является задача нахождения М. со «связанными» переменными:

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in B(x)}F(x, y),\qquad (2)$$

где

$$B(x)=\{y\in Y\mid \varphi(x, y)\geqslant 0\}\neq\phi.$$

Эта задача оказывается основной в теории игр с обменом информацией. Обобщение исходной задачи (1) приводит к задаче кратного М.:

$$\sup_{x_1\in X_1}\inf_{y_1\in Y_1}\ldots\sup_{x_n\in X_n}\inf_{y_n\in Y_n}F(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n),\qquad (3)$$

к-рая связана с решением нек-рых динамич. игр.

В основе большинства способов решения минимаксных задач лежит метод (обобщённого) градиентного спуска. При этом задачу (1) рассматривают как задачу математич. программирования:

$$\sup_{x\in Y}f(x),\qquad (4)$$

где

$$f(x)=\inf_{y\in Y}F(x, y).\qquad (5)$$

Построение численных методов для задачи (4) — (5) опирается на дифференцируемость по направлению функции минимума (5), что позволяет построить последовательность $x_1, x_2, \ldots$, в к-рой

$$x_{k+1}=x_k+\alpha_k g_k;\quad k=0, 1, \ldots;$$

g_k — направление возрастания функции (5). При нек-рых предположениях такая последовательность сходится к точке, удовлетворяющей необходимому условию М.

Введением вспомогательной переменной задачу (1) можно свести к эквивалентной задаче математич. программирования, вообще говоря, с бесконечным числом ограничений:

$$\sup_{x\in X,\ Z}Z,\quad F(x, y)-Z\geqslant 0\ \text{для всех}\ y\in Y.$$

Эта задача методом штрафных функций в принципе с любой степенью точности сводится к задаче безусловной оптимизации. Методы преобразования задач, основанные на методе штрафных функций, позволяют приближённо сводить к задачам на максимум и минимаксные задачи (2), (3). Однако экстремальные задачи, к-рые получаются при сведении минимаксных задач к задачам на максимум, весьма сложны, и их решение сопряжено с большими,

подчас непреодолимыми для современных ЭВМ трудностями. В особенности это относится к проблеме отыскания последовательных М. из (3) при значительной их кратности. Наряду с общими подходами к решению минимаксных задач имеется ряд приёмов, ориентированных на те или иные специальные классы задач, напр. отыскание седловых точек, линейные минимаксные задачи и т. п.

● Фёдоров В. В., Численные методы максимина, М., 1979; Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н., Введение в минимакс, М., 1972.

МАКСИМИ́ННАЯ СТРАТЕ́ГИЯ — см. *Игр теория.*

МАКСИМУ́М (от лат. maximum — наибольшее) функции, максимальное значение функции,— наибольшее значение функции $f(x)$ на данном множестве E; обозначается $\max\limits_{x\in E} f(x)$. См. *Экстремум.*

МАКСИ́МУМА ПРИ́НЦИП Понтрягина — см. *Оптимальное управление.*

МА́ЛАЯ КАТЕГО́РИЯ — категория, класс морфизмов которой является множеством.

МА́ЛОГО ПАРА́МЕТРА МЕ́ТОД — приёмы построения приближённых решений дифференциальных уравнений и систем, зависящих от параметра. Ниже предполагается, что правые части и коэффициенты уравнений принадлежат классу C^∞ по совокупности переменных, $\varepsilon>0$ — малый параметр.

Метод малого параметра для обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Регулярная зависимость от параметра. Пусть

$$\dot{x}=f(t,\ x,\ \varepsilon),\quad x(0)=x_0 \tag{1}$$

— задача Коши для системы n-го порядка. Если решение предельной задачи ($\varepsilon=0$) существует, единственно и бесконечно дифференцируемо при $t\in I=[0,\ T]$, то решение задачи (1) $x(t,\ \varepsilon)\in C^\infty$ при $t\in I$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, разлагается в асимптотич. ряд по степеням ε при $\varepsilon\to 0$. Такая зависимость от ε наз. регулярной. Если при $\varepsilon=0$ правая часть f имеет особенность, то зависимость от параметра наз. сингулярной.

2. Линейная теория. Пусть

$$\varepsilon\dot{x}=A(t,\ \varepsilon)\,x \tag{2}$$

— линейная однородная система n-го порядка и: 1) все собственные значения $\lambda_j(t)$ матрицы $A(t,\ 0)$ различны при $t\in I$; 2) разности $\operatorname{Re}(\lambda_j(t)-\lambda_k(t))$, $1\leqslant j,\ k\leqslant n$, не меняют знака при $t\in I$. Тогда справедлива теорема Биркгофа: существует фундаментальная система решений (ф. с. р.) $x_1(t,\ \varepsilon),\ \ldots,\ x_n(t,\ \varepsilon)$ системы (2), для к-рой справедливы асимптотич. разложения при $\varepsilon\to 0$

$$x_j(t,\ \varepsilon)=\exp\left\{\varepsilon^{-1}\int_0^t\lambda_j(\tau)\,d\tau\right\}\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\varphi_{jk}(t), \tag{3}$$

равномерные по $t\in I$. Эти разложения можно дифференцировать по t, ε любое число раз.

Точка t_0 наз. точкой поворота системы (2), если матрица $A(t_0,\ 0)$ имеет кратное собственное значение. Построение асимптотики ф. с. р. в окрестности точки поворота — трудная проблема, полностью решённая лишь для отдельных типов точек поворота.

3. Нелинейные системы вида

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon\dot{x}&=f(x,\ y),\ x(0)=x_0,\ x\in\mathbb{R}^m,\\ \dot{y}&=g(x,\ y),\ y(0)=y_0,\ y\in\mathbb{R}^n,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

представляют особый интерес. Первое уравнение описывает быстрые движения, второе — медленные. К такой системе приводится уравнение Ван дер Поля:

$$\varepsilon\dot{x}=y-x^3/3+x,$$
$$\dot{y}=-x.$$

При $\varepsilon=0$ первое из уравнений (4) вырождается в уравнение $f(x,\ y)=0$. Пусть это уравнение имеет изолированный непрерывный устойчивый корень $x=\varphi(y)$ в нек-рой ограниченной замкнутой области D. Пусть при $t\in I$ существуют и единственны решения задачи (4) и вырожденной задачи

$$\bar{x}=\varphi(\bar{y}),\quad \dot{\bar{y}}=g(\bar{x},\ \bar{y}),\ \bar{y}(0)=y_0, \tag{5}$$

причём решение $\bar{y}(t)$ лежит в D. Если точка $(x_0,\ y_0)$ принадлежит области влияния корня $x=\varphi(y)$, то при $\varepsilon\to+0$

$$x(t,\ \varepsilon)\longrightarrow\bar{x}(t),\quad 0<t\leqslant T;$$
$$y(t,\ \varepsilon)\longrightarrow\bar{y}(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

(теорема Тихонова). Вблизи точки $t=0$ возникает пограничный слой:

$$x(t,\ \varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k x_k(t)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\Pi_k\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{6}$$

где $x_k(t)$ — гладкие функции, $\Pi_k(\tau)$ экспоненциально убывают при $\tau\to+\infty$. При приближении решения задачи (4) к точке срыва, где теряется устойчивость (напр., одно из собственных значений матрицы Якоби $\|\partial f/\partial x\|$ обращается в нуль при $x=\varphi(y)$), асимптотика имеет иной характер, чем (6). Исследование окрестности точки срыва существенно для асимптотич. теории релаксационных колебаний.

4. Задачи небесной механики и теории колебаний приводят к необходимости исследовать поведение решений задачи (1) на большом, порядка ε^{-1}, интервале по ε. В таких задачах широко применяется метод усреднения.

5. Исследована асимптотика быстро осциллирующих решений скалярного уравнения

$$\varepsilon^2\ddot{x}+f(t,\ x)=0.$$

Метод малого параметра для линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Грубо говоря, зависимость от параметра является регулярной, если при $\varepsilon=0$ старшая часть уравнения не вырождается, и сингулярной — в противном случае. Сингулярность может возникнуть также вследствие неограниченности области вырождения границы при $\varepsilon\to 0$ и т. п.

1. Уравнения с быстро осциллирующими решениями. Пусть

$$(\Delta+k^2)\,n^2(x)\,u=0,\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{7}$$

— уравнение, где $k=\varepsilon^{-1}$, $n^2(x)>0$, $n(\infty)=n_0>0$. В простейшем случае решение ищется в виде асимптотич. ряда

$$u=e^{ikS(x)}\sum_{j=0}^{\infty}(ik)^{-j}\varphi_j(x). \tag{8}$$

Функция S действительнозначна и удовлетворяет уравнению эйконала $(\nabla S(x))^2=n^2(x)$, функции $\varphi_j(x)$ удовлетворяют обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям 1-го порядка вдоль бихарактеристик (уравнения переноса). Однако на нек-рых многообразиях в $\mathbb{R}^n$ (каустиках) функция S будет негладкой, и асимптотика носит иной характер, чем (8). Асимптотика (в большом) решений уравнения (8), а также широких классов уравнений, решения к-рых быстро осциллируют, строится с помощью канонического оператора Маслова. Вблизи каустик асимптотика решения равна сумме интегралов от быстро осциллирующих функций вида

$$\int_{\mathbb{R}^m}\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}S(p,\ \alpha)\right\}\varphi(p)\,dp,$$

где φ — финитная функция, фаза S — действительнозначна, $\alpha=(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_s)$ — параметры.

2. Пограничный слой. Пусть

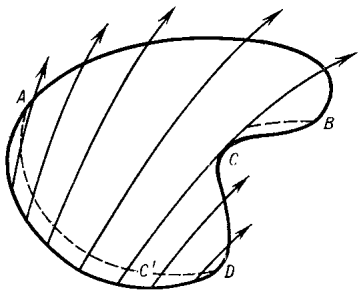
$$\left.\begin{aligned}\varepsilon^2\Delta u+\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+b(x)\,u&=f(x),\\ u\big|_{\partial G}&=\varphi(x)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

— краевая задача в ограниченной области $G\subset\mathbb{R}^n$. При $\varepsilon=0$ уравнение вырождается и предельная задача, вообще говоря, неразрешима. Пусть $n=2$, $b=0$, векторное поле $\{a_j(x)\}$ имеет вид, указанный на рис. Тогда $u_\varepsilon\to\varphi(x)$

на дугах AB, CD, на остальной части границы происходит потеря граничных условий, и в окрестностях дуг AD, BC ширины порядка ε^2 возникает пограничный слой:

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u_k(x)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}V_{2k}(\rho\varepsilon^{-2},\ x').$$

Здесь u_k — гладкие функции, x' — координата вдоль границы, ρ — расстояние до ∂G по нормали, функции $V_{2k}(\xi, x')$ экспоненциально убывают при $\xi\to+\infty$. В окрестностях точек A, B, C, D асимптотика носит более сложный характер. Асимптотика сильно усложняется, если векторное поле $\{a(x)\}$ имеет стационарные точки.



3. Вырождение границы. Пусть

$$\Delta u=f(x),\quad u|_{\partial G}=\varphi(x)$$

— краевая задача в области $G\setminus G_\varepsilon$, где $\overline{G}_\varepsilon\subset G$ и при $\varepsilon\to 0$ область G_ε вырождается в многообразие меньшей размерности. На ∂G_ε также заданы нек-рые граничные условия. Аналогичная задача исследована для эллиптич. уравнений высокого порядка. Для уравнения Лапласа при $n=2$, 3 наиболее трудными оказываются задачи с данными Дирихле на ∂G_ε (G_ε вырождается в точку при $n=2$ и в отрезок при $n=3$).

● Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 4 изд., М., 1974; Маслов В. П., Федорюк М. В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976.
А. М. Ильин, М. В. Федорюк.

МАНТИ́ССА (лат. mantissa — прибавка) — дробная часть десятичного *логарифма*.

МА́РКОВА НЕРА́ВЕНСТВО — неравенство, позволяющее оценивать производную от многочлена по оценке самого многочлена на некотором отрезке. Если многочлен $P_n(x)$ степени n при $-1\leqslant x\leqslant 1$ удовлетворяет условию $|P_n(x)|\leqslant M$, то согласно М. н. при $-1\leqslant x\leqslant 1$

$$|P_n'(x)|\leqslant Mn^2.$$

М. н. было установлено А. А. Марковым (1889).

МА́РКОВА ТЕОРЕ́МА о применимости закона больших чисел — установлена А. А. Марковым (1907, 1913); см. *Предельные теоремы* теории вероятностей.

МА́РКОВА ЦЕПЬ — важный пример последовательности зависимых случайных испытаний с конечным или счётным числом исходов. Более точно цепь Маркова может быть определена как последовательность случайных величин $X_0, X_1, \ldots, X_n$ со значениями из множества натуральных чисел, обладающая тем свойством, что условное распределение случайной величины X_n при любом n зависит только от значения X_{n-1} и не зависит от всех предыдущих значений, т. е.

$$\mathsf{P}\{X_n=i_n\,|\,X_0=i_0,\ \ldots,\ X_{n-1}=i_{n-1}\}-$$
$$-\mathsf{P}\{X_n=i_n\,|\,X_{n-1}=i_{n-1}\}.$$

Это свойство, определяющее М. ц., наз. марковским свойством и выступает как непосредственное обобщение понятия независимости. М. ц. появились в исследованиях А. А. Маркова (1907) и послужили началом создания теории марковских процессов. С единой точки зрения М. ц. представляют собой *марковский процесс* с дискретным временем и конечным или счётным множеством состояний; состояния М. ц. определяются возможными значениями случайных величин $X_0, X_1, \ldots$.

Если условные вероятности $\mathsf{P}\{X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1}\}$ одинаковы для всех n, соответствующая М. ц. наз. однородной (по времени). Вероятности $p_{ij}=\mathsf{P}\{X_n=j|X_{n-1}=i\}$ наз. переходными вероятностями однородной М. ц.; в совокупности они составляют квадратную матрицу $\Pi=\|p_{ij}\|$, $i, j=1, 2, \ldots$; такие матрицы, элементы к-рых обладают свойствами $p_{ij}\geqslant 0$ для всех i и j и $\sum_j p_{ij}=1$, наз. стохастическими. Распределение X_0 наз. начальным распределением М. ц.: $p_k(0)=\mathsf{P}\{X_0=k\}$, $k=1, 2, \ldots$. Совместное распределение $X_0, X_1, \ldots, X_n$ выражается через элементы матрицы Π и распределение $p_k(0)$, $k=1, 2, \ldots$

$$\mathsf{P}=\{X_0=i_0,\ X_1=i_1,\ \ldots,\ X_n=i_n\}=$$
$$=p_{i_0}(0)\,p_{i_0,\ i_1}\cdots p_{i_{n-1},\ i_n}.$$

Переходные вероятности из состояния i в состояние j за n шагов

$$p_{ij}(n)=\mathsf{P}\{X_{m+n}=j/X_m=i\}$$

удовлетворяют уравнению Колмогорова–Чепмена

$$p_{ij}(n_1+n_2)=\sum_k p_{ik}(n_1)\,p_{kj}(n_2),$$

а соответствующие матрицы $\Pi_n=\|p_{ij}(n)\|$ — соотношению $\Pi_{n_1+n_2}=\Pi_{n_1}\cdot\Pi_{n_2}$. Переходные вероятности $p_{ij}(n)$ однозначно определяются матрицей Π, т. к. $\Pi_n=\Pi^n$. Таким образом, все распределения М. ц. полностью задаются матрицей Π и начальным распределением $\{p_k(0), k=1, 2, \ldots\}$.

По переходным вероятностям производится классификация состояний М. ц. В случае когда множество состояний конечно, то классификацией в значительной мере определяются асимптотич. свойства М. ц. Во многих практич. задачах требуется исследование поведения $p_{ij}(n)$ при $n\to\infty$. Классификация состояний, как правило, приводит к выделению т. н. эргодических М. ц., переходные вероятности к-рых $p_{ij}(n)$ обладают тем свойством, что

$$\lim p_{ij}(n)=p_j\geqslant 0,\quad i, j=1, 2, \ldots,$$

где числа p_j, $j=1, 2, \ldots$, $\sum_j p_j=1$, составляют единственное решение системы уравнений

$$p_j=\sum_i p_i p_j,\quad j=1, 2, \ldots.$$

Числа p_j интерпретируются в этом случае как вероятности (через очень большое время n) оказаться в состоянии j независимо от начального распределения. Распределение p_j, $j=1, 2, \ldots$, наз. стационарным распределением М. ц. с матрицей Π; оно обладает следующим свойством, если

$$\mathsf{P}\{X_0=j\}=p_j,\quad j=1, 2, \ldots,$$

то при любом n

$$\mathsf{P}\{X_n=j\}=p_j$$

(соответствующая М. ц. наз. стационарной, см. *Стационарный случайный процесс*).

● Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.
А. В. Прохоров.

МА́РКОВА ЭРГОДИ́ЧЕСКАЯ ТЕОРЕ́МА о применимости закона больших чисел к суммам зависимых случайных величин — установлена А. А. Марковым (1907); см. *Больших чисел закон*.

МА́РКОВСКИЙ ПРОЦЕ́СС, случайный процесс без последействия,— специальный класс случайных процессов, имеющий большое значение в различных разделах естествознания и техники. М. п. служит моделью для многих процессов в физике (распад радиоактивного вещества, каскадные процессы), в биологии (рост популяции, процессы мутации, распределение эпидемий), в астрономии (флуктуации яркости галактик), в химии, в теории массового обслуживания.

Случайный процесс $X(t)$ наз. марковским процессом, если для любых двух моментов времени t_0 и t_1, $t_0<t_1$, условное распределение $X(t_1)$ при условии, что заданы все значения $X(t)$ при $t\leqslant t_0$, зависит только от $X(t_0)$. Это определяющее М. п. свойство наз. марковским свойством или свойством отсутствия последействия: состояние нек-рой системы в на-

стоящий момент времени t_0 однозначно определяет распределение вероятностей будущего развития процесса при $t>t_0$, и информация о прошлом поведении процесса до момента t_0 не влияет на это распределение. В этом смысле М. п. непосредственно обобщают детерминированные процессы в классич. физике. Теория М. п. ведёт своё начало с 1907 от работ А. А. Маркова, посвящённых изучению последовательности зависимых испытаний (см. *Маркова цепь*). Общая теория М. п. и их классификация были даны А. Н. Колмогоровым (1931).

Первым был исследован подкласс М. п. с дискретным множеством состояний. Пусть в каждый момент времени t система может находиться в одном из состояний $E_1(t)$, $E_2(t)$, . . ., $E_n(t)$ и с течением времени переходит из одного состояния в другое. Для М. п. переход из состояния $E_i(t)$ в пек-рый момент времени в состояние $E_j(t+\Delta t)$ за промежуток времени Δt определяется вероятностью $p_{ij}(t,\ \Delta t)$ или $p_{ij}(\Delta t)$ в однородном случае, причём эта вероятность не зависит от прошлого развития процесса. Вероятности p_{ij} наз. переходными вероятностями. При очень широких условиях переходные вероятности М. п. удовлетворяют системе линейных однородных дифференциальных уравнений. Типичным примером таких М. п. является *ветвящийся процесс*.

Большой вес в приложениях имеют М. п., в к-рых случайное изменение состояний нек-рой системы зависит от непрерывно меняющихся параметров. Наиболее важным представителем таких М. п. служит физич. процесс типа диффузии, в к-ром состояние системы характеризуется непрерывно изменяющейся координатой нек-рой частицы. В этом случае вместо переходных вероятностей рассматривают соответствующие плотности вероятности $p(t,\ x,\ y)$, по к-рым вычисляются вероятности $p(t,\ x,\ y)dy$ того, что частица, находившаяся в точке с координатой x, через промежуток времени t будет иметь координату, заключённую между y и $y+dy$. При нек-рых общих условиях плотности $p(t,\ x,\ y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению с частными производными

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,\ x,\ y)=-\frac{\partial}{\partial y}[A(y)\,p(t,\ x,\ y)]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}[B(y)\,p(t,\ x,\ y)],$$

к-рое ранее было введено в физике для специального случая диффузионного процесса Фоккера—Планка. В этом уравнении коэффициент $A(y)$ представляет собой среднюю скорость изменения координаты y, а коэффициент $B(y)$ — интенсивность случайных колебаний около этой средней. Важным представителем этого класса М. п. является броуновское движение, впервые рассмотренное как математич. модель процессов диффузии (см. *Винеровский процесс*).

• Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1—2, М., 1984.

А. В. Прохоров.

МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО — см. *Маркова цепь*, *Марковский процесс*.

МАРТИНГА́Л (франц. martingale, от испан. almártaga — недоуздок; слово араб. происхождения) — случайный процесс $X(t)$, $t\in\mathbb{R}$, обладающий нек-рым «безразличием к прошлому», состоящим в том, что условные математич. ожидания приращений $X(t_2)-X(t_1)$, $t_1<t_2$, при заданных значениях $X(s)$, $s\leqslant t$, независимо от этих значений равны нулю. Если предположить, что эти условные математич. ожидания неотрицательны (неположительны), то $X(t)$ наз. субмартингалом (супермартингалом).

МАРШРУ́Т (нем. Marschrute, от франц. marche — ход, движение вперёд и route — дорога, путь) — последовательность рёбер, соединяющая заданные вершины *графа*.

МА́ССОВАЯ ПРОБЛЕ́МА — проблема построения *алгоритма* для решения бесконечной серии однотипных задач. См. также *Алгоритмическая проблема*.

МА́ССОВОГО ОБСЛУ́ЖИВАНИЯ СИСТЕ́МА — понятие, к-рое включает в себя случайный «входящий» поток требований (вызовов, клиентов), нуждающихся в «обслуживании», и механизм (алгоритм), осуществляющий это «обслуживание». Многообразие алгоритмов обслуживания порождает чрезвычайно много различных систем обслуживания. См. *Массового обслуживания теория*.

МА́ССОВОГО ОБСЛУ́ЖИВАНИЯ ТЕО́РИЯ — раздел теории вероятностей, изучающий потоки требований на обслуживание, поступающие в системы обслуживания и выходящие из них, длительности ожидания и длины очередей и т. п. и их зависимость от правил (дисциплины) обслуживания. Целью исследований является рациональный выбор структуры системы обслуживания и процесса обслуживания. В окружающей нас действительности многие реально протекающие процессы обслуживания на транспорте, в торговле, медицине и т. д. можно изучать, исходя из соответствующих им математич. моделей систем обслуживания. Создание систем телефонной связи и необходимость расчёта их пропускной способности послужили в 20-х гг. 20 в. стимулом развития М. о. т. С 1970-х гг. в М. о. т. интенсивно разрабатываются методы анализа и оптимизации процессов обслуживания требований на вычисления с использованием одной или нескольких ЭВМ.

В большинстве задач М. о. т. предполагается, что входящий поток требований является случайным, т. е. последовательность моментов поступления требований на обслуживание $\{t_j\}$ рассматривается как последовательность случайных величин. Требования характеризуются объёмом (длительностью) работы по обслуживанию и могут относиться к одному или нескольким классам. Принадлежность требований к определённым классам может служить основанием для приоритетного обслуживания. Требования, имеющие абсолютный приоритет, обслуживаются в первую очередь, при их поступлении в систему обслуживания прерывается обслуживание требований с низшим приоритетом. Нек-рые виды отказов в вычислительных устройствах имеют абсолютный приоритет, «обслуживание» таких отказов состоит в выявлении их и устранении.

Часто в качестве приближения принимается, что входящий в систему обслуживания поток требований является пуассоновским точечным процессом с постоянной интенсивностью λ, равной среднему числу требований, поступающих в систему обслуживания в единицу времени. Продолжительности обслуживания предполагаются взаимнонезависимыми случайными величинами с функцией распределения $G(t)$, имеющей конечное среднее значение m. Система обслуживания часто может быть представлена в виде набора устройств (каналов) обслуживания. Если все каналы заняты обслуживанием, то вновь поступающие требования накапливаются и могут образовывать очереди (в западной литературе М. о. т. называют теорией очередей). Движение очереди может быть организовано по-разному, напр. в порядке поступления, что типично для многих процессов обслуживания в торговле, или в обратном порядке: «пришёл последним — обслуживаешься первым», что типично для нек-рых вычислительных систем.

В качестве примера ниже рассмотрена простейшая система обслуживания, состоящая из одного обслуживающего канала, приведены её стационарные характеристики. В эту систему поступает пуассоновский поток требований интенсивности λ; функция распределения длительности обслуживания имеет вид $G(t)=1-e^{-\mu t}$, требования образуют очередь в порядке поступления. Если коэффициент загрузки $\rho=\lambda/\mu<1$, то такая система может работать в стационарном режиме. Очередь накапливаться не будет. Средняя длина очереди $\overline{N}=\rho/(1-\rho)$. Вероятность застать в момент поступления очередь длины k равна

$$p_k=(1-\rho)\rho^k,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

случайное время ожидания имеет функцию распределения

$$w(t)=1-\rho\exp\{-\mu(1-\rho)t\}.$$

Расчёт характеристик такой системы обслуживания существенно усложняется, если функция распределения $G(t)$ является общей. Стационарный режим возможен при ограничении $\rho=\lambda m<1$. Средняя длина очереди в момент окончания обслуживания очередного требования равна

$$\rho+\frac{\lambda^2 m_2}{2(1-\rho)},$$

где $m_2=\int_0^\infty t^2 dG(t)$ — второй момент функции распределения $G(t)$. Для общей одноканальной системы обслуживания справедлива формула, по к-рой средняя длина очереди в стационарном режиме равна произведению интенсивности входящего потока на среднее время пребывания требования в системе.

До настоящего времени (1987) в М. о. т. не удаётся получить (или доказать невозможность получения) явных аналитич. выражений для характеристик многих систем обслуживания, в том числе для двухканальной системы с очередью, пуассоновским входящим потоком требований и общей функцией распределения длительностей обслуживания. Поэтому в М. о. т. большое внимание уделяется асимптотич. методам анализа систем обслуживания, анализу устойчивости стационарных характеристик при малых изменениях $G(t)$ и т. п. При асимптотич. анализе выделяются два предельных случая малой нагрузки (быстрого обслуживания), когда $\rho\to 0$, и большой нагрузки, когда $\rho\to 1$. При большой нагрузке для описания систем обслуживания используются диффузионные марковские процессы.

Актуальным в М. о. т. являются задачи расчёта сетей, состоящих из систем обслуживания. Такого рода задачи возникают при расчёте систем связи с большой пропускной способностью, управляемых ЭВМ, а также при расчёте вычислительных систем коллективного пользования. В таких системах обслуживания возможна реализация разнообразных дисциплин обслуживания, среди к-рых следует отметить дисциплину разделения времени. При такой дисциплине возможно одновременное обслуживание многих требований одним обслуживающим устройством (напр., процессором ЭВМ). Однако скорость обслуживаиия при дисциплине разделения времени уменьшается обратно пропорционально числу одновременно обслуживаемых требований.

В М. о. т. разрабатываются общие методы расчёта систем обслуживания. В основу части таких методов положена идея представления процесса изменений состояиий системы обслуживания как марковского процесса с дискретным или непрерывным множеством состояний. При этом используется метод введения дополнительных переменных. В простейших задачах вероятности состояний систем обслуживания находятся как решения коиечных или бесконечных систем линейных уравнений. Более широкий класс систем обслуживания описывается системами смешанного типа — интегро-дифференциальными уравнениями с частными производными. Показатели качества работы многих систем обслуживания находятся на основе статистич. моделирования (метода Монте-Карло). Наряду с общими методами в М. о. т. зачастую предлагаются оригинальные методы, использующие специфику конкретных систем обслуживания, применимые лишь к частным задачам.

● Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963; Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания, М., 1966; Боровков А. А., Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980; Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н., Теория массового обслуживания, М., 1982; Gnedenko B. W., König D., Handbuch der Bedienungstheorie, Bd 1—2, B., 1983—84. *Ю. К. Беляев.*

МАСШТА́Б (нем. Maßstab, от Maß — мера и Stab — палка) — см. *Картографическая проекция.*

МАСШТА́БНЫЙ ОТРЕ́ЗОК — см. *Числовая прямая.*

МАТЕМА́ТИКИ И МЕХА́НИКИ ИНСТИТУ́Т Уральского отделения Академии наук СССР — научно-исследовательское учреждение; находится в Свердловске. Образован в 1961 как Свердловское отделение Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, с 1971 — в составе Уральского научного центра и с 1986 Уральского отделения АН СССР. Основные направления исследований: развитие математич. теории процессов управления, теоретич. исследования в области алгебры, дифференциальных уравнений и теории функций, разработка и решение задач на ЭВМ, развитие методов нелинейной механики, разработка математич. методов механики сплошной среды.

МАТЕМА́ТИКИ ИНСТИТУ́Т Сибирского отделения Академии наук СССР — научно-исследовательское учреждение; находится в Новосибирске. Образован в 1957. Основные направления исследований: алгебра и математич. логика, геометрия и топология, теория вероятностей, теория дифференциальных уравнений, теория функций и функциональный анализ, теоретич. физика, математич. экономика и теоретич. кибернетика.

МАТЕМАТИ́ЧЕСКАЯ ИНДУ́КЦИЯ — метод доказательства математических утверждений, основанный на принципе математической индукции: утверждение $A(x)$, зависящее от натурального параметра x, считается доказанным, если доказано $A(1)$ и для любого натурального числа n из предположения, что верно $A(n)$, выведено, что верно также $A(n+1)$.

Пример. Пусть для любого натурального числа n требуется доказать формулу

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2. \qquad (1)$$

При $n=1$ эта формула даёт $1=1^2$. Чтобы доказать правильность формулы (1) при любом n, допускают, что её уже удалось доказать для нек-рого определённого числа N, т. е. предполагают, что

$$1+3+5+\ldots+(2N-1)=N^2. \qquad (2)$$

Теперь, опираясь на сделанное допущение, пытаются доказать правильность формулы (1) для числа $n=N+1$. В данном случае достаточно присоединить к сумме в левой части равенства (2) ещё одно слагаемое: $2N+1$; тогда и правая часть равенства должна увеличиться на $2N+1$ и, следовательно,

$$1+3+5+\ldots+(2N-1)+(2N+1)=$$
$$=N^2+(2N+1)=(N+1)^2.$$

Итак, из справедливости формулы (1) при $n=N$ вытекает (каково бы ни было N) её правильность и при $n=N+1$.

Доказательство утверждения $A(1)$ составляет первый шаг (или базис) индукции, а доказательство $A(n+1)$ в предположении, что верно $A(n)$, наз. индукционным переходом. При этом x наз. параметром индукции, а предположение $A(n)$ при доказательстве $A(n+1)$ наз. индуктивным предположением. Принцип М. и. является также основанием для индуктивных определений. Простейшим примером такого определения является определение свойства: «быть словом длины n в данном алфавите $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$». Базис индукции: каждая буква этого алфавита есть слово длины 1. Индукционный переход: если E — слово длины n, то каждое слово Ea_i, где $1\leqslant i\leqslant k$, есть слово длины $n+1$. Индукция может начинаться с нулевого шага.

Часто бывает так, что $A(1)$ и $A(n+1)$ доказываются аналогичными рассуждениями. В таких случаях удобно пользоваться следующей эквивалентной формой принципа М. и. Если для всякого n из предположения, что $A(x)$ верно при любом натуральном $x<n$, следует, что $A(x)$ верно также при $x=n$, то утверждение $A(x)$ верно при любом натуральном x. В такой форме принцип М. и. может быть применён для доказательства утверждений $A(x)$, в к-рых параметр x пробегает то или иное множество, вполне упорядоченное по нек-рому трансфинитному типу,— т. н. трансфинитная индукция. В качестве простых примеров трансфинитной индукции

можно указать индукцию по параметру, пробегающему множество всех слов в данном алфавите, упорядоченное лексикографически, и индукцию по построению формул в данном логико-математическом исчислении.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИНГВИСТИКА — математическая дисциплина, предметом которой является разработка формального аппарата для описания строения естественных и некоторых искусственных языков. Возникла в 50-х гг. 20 в. в связи с назревшей в языковедении потребностью уточнения его основных понятий. В М. л. с самого начала широко используются методы теории алгоритмов, теории автоматов и алгебры. Дальнейшее развитие М. л. привело к превращению её в теоретич. математич. дисциплину, являющуюся ответвлением математич. логики. В то же время М. л. продолжает развиваться в тесной связи с языковедением (лингвистикой) и благодаря этому обогащается новыми методами и понятиями. Методы М. л. применяются также в теории программирования.

В основе формальных методов описания строения языка лежат концепции т. н. структурной лингвистики. Главная из них — представление о языке как «системе чистых отношений», сближающее язык с абстрактными системами, изучаемыми в математике. Это представление может быть конкретизировано в концепции функционирования языка как преобразования нек-рых абстрактных объектов — «смыслов» — в объекты другой природы — «тексты», и обратно. Такая концепция приводит к мысли об изучении указанного преобразования математич. средствами. Ввиду чрезвычайной сложности такого преобразования удобнее расчленить его на этапы, что подсказывается и содержательными соображениями. Напр., один из этапов может состоять в переходе от «смыслов» предложений к «синтаксич. структурам без линейного порядка» — наборам элементов предложений, соединённых «синтаксич. связями», но ещё не расположенных в линейные последовательности; на следующем этапе получаются линейные последовательности слов, затем слова превращаются в цепочки звуков. При более тонких членениях вводятся синтаксические структуры нескольких уровней.

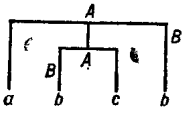
Для формального описания такого процесса нужны математич. понятия, служащие моделями «смыслов», «текстов» и промежуточных результатов. Этапы преобразования естественно моделировать эффективными отображениями соответствующих множеств объектов друг в друга. Однако рассматриваемое преобразование неоднозначно (это связано с одной из важнейших особенностей языка — явлением синонимии, т. е. возможностью по-разному выражать одно и то же содержание); поэтому вместо детерминированных систем, осуществляющих эффективные отображения (т. е. алгоритмов), приходится строить недетерминированные (т. е. исчисления), позволяющие либо для каждого объекта перечислять соответствующие ему объекты следующего уровня или синонимичные ему объекты того же уровня, либо на заданном уровне перечислять множества «правильных» объектов, т. е. таких, к-рым можно регулярным способом сопоставить объекты предыдущего уровня. Такие исчисления известны как формальные грамматики (см. ниже).

Одновременно с формальными грамматиками, моделирующими преобразования языковых объектов, появляются конструкции для формального описания самих этих объектов. Кроме того, на множествах объектов одного уровня возникают классификации и отношения, во многом сходные с категориями традиционной грамматики.

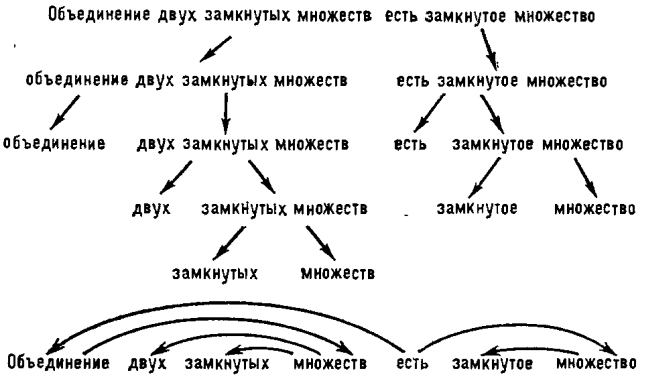
Таким образом, можно выделить три аспекта формального описания языка: описание строения языковых объектов различных уровней; описание нек-рых специальных отношений и классификаций на множествах этих объектов; описание преобразований одних объектов в другие, а также строения множеств «правильных» объектов. Этим аспектам отвечают три основных раздела М. л.: 1) разработка и изучение способов описания строения отрезков речи; 2) изучение лингвистически значимых отношений и классификаций на множествах языковых объектов (построенные для этой цели формальные системы наз. аналитическими моделями языка); 3) теория формальных грамматик.

Способы описания строения отрезков речи. Для описания строения (синтаксической структуры) предложения можно либо выделить в нём «составляющие» — группы слов, функционирующие как цельные синтаксич. единицы, либо указать для каждого слова те слова́, к-рые ему непосредственно подчинены (если такие есть). Возникающие при этом математич. объекты представляют собой графы или сходные с ними системы.

В предложении «Объединение двух замкнутых множеств есть замкнутое множество» при описании по 1-му способу составляющими будут: всё предложение, словосочетания «объединение двух замкнутых множеств», «есть замкнутое множество», «двух замкнутых множеств», «замкнутых множеств», «замкнутое множество», а также каждое отдельное слово. Систему составляющих можно представить в виде корневого дерева (дерева составляющих):



Описание по 2-му способу даёт т. н. дерево (синтаксического) подчинения:



Понятие дерева подчинения формализует обычные «школьные» представления о синтаксич. связях. Деревья подчинения предложений, встречающихся в деловых и научных текстах, удовлетворяют, как правило, т. н. условию проективности: во всякую точку, лежащую под нек-рой стрелкой, идёт путь из начала этой стрелки. В художественной литературе это условие часто нарушается, но такие нарушения обычно значимы, т. е. служат для создания определённого художественного эффекта.

Аналитические модели языка служат для формального моделирования основных категорий лингвистики, а также самого процесса лингвистич. исследований, а именно для получения по нек-рым наборам «неупорядоченных» данных о языке (точнее, о речи) тех или иных сведений о строении механизма языка. Одной из главных задач теории аналитич. моделей языка является формализация традиционных лингвистич. категорий таких, как часть речи, падеж, род, фонема и т. п.

Существующие способы формализации («модели») этих категорий можно разделить на два типа. В моделях 1-го типа исходные наборы представляют собой множества цепочек, т. е. линейно упорядоченных последовательностей элементов. Чаще всего эти цепочки интерпретируются как «грамматически правильные предложения».

Модели 2-го типа имеют в качестве исходных данных наборы сведений о способности одних элементов подчинять себе другие. Напр., каждый падеж русского существительного можно описать как совокупность форм существительных, в нек-ром точном смысле одинаково управляемых другими словами. Более адекватную формализацию грамматич. категорий дают модели 2-го типа, позволяющие рассматривать синтаксич. отношения отдельно от линейных, что лучше отвечает природе языка.

Теория формальных грамматик изучает способы описания закономерностей, характеризующих уже не отдельный текст, а всю совокупность правильных текстов того или иного языка. Формальные грамматики — это абстрактные системы, позволяющие с помощью единообразных процедур получать правильные тексты данного языка вместе с описанием их структуры. Теория формальных грамматик занимает центральное место в М. л., так как именно она позволяет моделировать наиболее существенный аспект функционирования языка — переработку смыслов в тексты и обратно. Вместе с тем она выделяется среди других разделов М. л. большей сложностью математич. аппарата (сходного с аппаратом теории алгоритмов и общей теорией автоматов) и возникающих в ней математич. задач. Формальные грамматики наиболее разработанных типов представляют собой системы («устройства»), к-рые позволяют порождать или распознавать множества конечных последовательностей (цепочек), интерпретируемые обычно как множества правильных предложений, а также сопоставлять входящим в эти множества цепочкам описания их синтаксич. структуры в терминах систем составляющих или деревьев подчинения.

Порождающая грамматика состоит из четырёх компонент: $\Gamma=(V, W, J, R)$, где V и W — непересекающиеся конечные множества, наз. соответственно основным и вспомогательным алфавитами (или словарями); элементы этих множеств наз. соответственно основными (или терминальными) и вспомогательными (или нетерминальными) символами; J — выделенный вспомогательный символ, наз. начальным символом; R — конечный набор правил вывода, имеющих вид $\varphi \rightarrow \psi$, где φ и ψ — цепочки, состоящие из основных и вспомогательных символов.

Основные символы интерпретируются как слова языка, вспомогательные — как имена классов слов и словосочетаний, начальный символ — как символ предложения (т. е. имя класса словосочетаний, являющихся предложениями). Правила вывода описывают связи между частями предложения. Применение правила $\varphi \rightarrow \psi$ к цепочке, имеющей вид $\alpha\varphi\beta$, означает преобразование её в цепочку $\alpha\psi\beta$ (здесь α и β — цепочки, одна из к-рых или обе могут быть пустыми). Вывод в порождающей грамматике есть конечная последовательность цепочек, в к-рой каждая следующая цепочка получается из предыдущей использованием к.-л. правила вывода. Последняя цепочка вывода наз. выводимой из начального символа, наз. предложением, а множество всех предложений — языком, порождаемым данной грамматикой. Так, в грамматике с основным алфавитом $\{a, b, c\}$, вспомогательным алфавитом $\{A, B\}$, начальным символом A и набором правил $\{A \rightarrow aAB,\ A \rightarrow Bc,\ B \rightarrow b\}$ одним из выводов будет последовательность A, aAB, $aBcB$, $abcB$, $abcb$; цепочка $abcb$ — предложение.

В зависимости от вида правил выделяется ряд основных классов порождающих грамматик. Наиболее важны для лингвистич. приложений грамматики составляющих (грамматики непосредственно составляющих, НС-грамматики, контекстные грамматики), правила к-рых имеют вид $\chi A \omega \rightarrow \chi\psi\omega$, где A — вспомогательный символ, ψ — непустая цепочка, χ и ω — произвольные цепочки. Важнейший подкласс грамматик составляющих — бесконтекстные грамматики (контекстно-свободные грамматики, КС-грамматики), у к-рых правила имеют вид $A \rightarrow \psi$. Частный случай бесконтекстной грамматики — автоматная грамматика (конечно-автоматная грамматика, грамматика с конечным числом состояний) с правилами вида $A \rightarrow aB$ и $A \rightarrow a$, где a — основной символ, A и B — вспомогательные символы. Языки, порождаемые грамматиками перечисленных классов, наз. соответственно НС-языками (контекстными языками), бесконтекстными и автоматными языками.

В грамматиках составляющих на каждом шаге вывода заменяется только один символ, поэтому в них с каждым выводом ассоциируется т. н. дерево вывода. Корень дерева отвечает начальному символу. Каждому символу цепочки, на к-рую заменяется начальный символ на первом шаге вывода, ставится в соответствие узел дерева, и к нему проводится дуга из корня. Для тех из полученных узлов, к-рые помечены вспомогательными символами, делается аналогичное построение и т. д. Дерево вывода, рассматриваемое как дерево составляющих предложения, задаёт на нём систему составляющих. Это делает грамматики составляющих хорошим инструментом для описания естественных и искусственных языков. Именно грамматики составляющих и их частные случаи, прежде всего бесконтекстные и автоматные грамматики, являются главным объектом изучения теории формальных грамматик. Эти же классы грамматик наиболее интересны и с чисто математич. точки зрения.

Другой важный класс формальных грамматик — доминационные грамматики, позволяющие порождать цепочки, одновременно строя для них деревья подчинения.

Для описания естественных языков наиболее адекватны трансформационные грамматики, в к-рых преобразуются не цепочки, а непосредственно синтаксич. структуры — деревья составляющих или деревья подчинения. В лингвистич. описаниях они обычно используются в сочетании с грамматиками составляющих или доминационными грамматиками.

Перечисленные направления не исчерпывают всей проблематики М. л. Можно отметить, напр., работы, в к-рых смысл предложения описывается с использованием средств т. н. интенсиональной математич. логики.

● Гладкий А. В., Мельчук И. А., Элементы математической лингвистики, М., 1969; Гладкий А. В., Синтаксические структуры естественного языка в автоматизированных системах общения, М., 1985; Гросс М., Лантен А., Теория формальных грамматик, пер. с франц., М., 1971; Маркус С., Теоретико-множественные модели языков, пер. с англ., М., 1970.

А. В. Гладкий.

МАТЕМАТИ́ЧЕСКАЯ ЛО́ГИКА, теоретическая логика, символическая логика,— раздел математики, посвящённый изучению математических доказательств и вопросов оснований математики.

Исторический очерк. Идея построения универсального языка для всей математики и формализации на базе такого языка математич. доказательств выдвигалась в 17 в. Г. Лейбницем. Но только в сер. 19 в. появились первые научные работы по алгебраизации аристотелевой логики (Дж. Буль, 1847, и О. де Морган, 1858). После того как Г. Фреге (1879) и Ч. Пирс (1885) ввели в язык алгебры логики предикаты, предметные переменные и кванторы, возникла реальная возможность применить этот язык к вопросам оснований математики.

С другой стороны, создание в 19 в. неевклидовой геометрии сильно поколебало уверенность математиков в абсолютной надёжности геометрич. интуиции, на к-рой была основана евклидова геометрия. Сомнениям в надёжности геометрич. интуиции способствовало также то, что в результате развития исчисления бесконечно малых математики наткнулись на неожиданные примеры всюду непрерывных, но не дифференцируемых функций. Появилась потребность отделить понятие действительного числа от неясного понятия «величины», к-рое было ос-

новано на геометрич. интуиции. Эта задача была решена разными путями в работах К. Вейерштрасса, Р. Дедекинда и Г. Кантора. Они показали возможность «арифметизации» анализа и теории функций, в результате чего в качестве фундамента всей классич. математики стала рассматриваться арифметика целых чисел. Затем была предпринята аксиоматизация арифметики (Р. Дедекинд, 1888, и Дж. Пеано, 1891). При этом Дж. Пеано создал более удобную символику для логич. языка. Позже этот язык был усовершенствован в совместном труде Б. Рассела и А. Уайтхеда «Принципы математики» (1910), где была предпринята попытка сведения всей математики к логике. Но эта попытка не увенчалась успехом, т. к. оказалось невозможным вывести из чисто логич. аксиом существование бесконечных множеств. Хотя логистич. программа Фреге — Рассела в основаниях математики так и не достигла своей главной цели — сведения математики к логике, в их работах был создан богатый логич. аппарат, без к-рого оформление М. л. как полноценной математич. дисциплины было бы невозможно.

На рубеже 19—20 вв. были обнаружены *антиномии* (парадоксы), связанные с основными понятиями теории множеств. Наиболее сильное впечатление на современников произвела опубликованная в 1903 антиномия Рассела. Пусть M есть множество всех таких множеств, каждое из к-рых не является своим собственным элементом. Легко убедиться, что множество M является своим элементом тогда и только тогда, когда M не является своим элементом. Конечно, можно пытаться выйти из создавшегося противоречия, сделав заключение, что такого множества M не бывает. Однако если не может существовать множество, состоящее в точности из всех элементов, удовлетворяющих такому чётко определённому условию, к-рое мы имеем в приведённом выше определении множества M, то где гарантия того, что в нашей повседневной работе мы не столкнёмся с множествами, к-рые также не могут существовать? И каким, вообще, условиям должно удовлетворять определение множества для того, чтобы оно существовало? Ясно было одно: нужно как-то ограничить канторовскую теорию множеств.

Л. Брауэр (1908) выступил против применения правил классич. логики к бесконечным множествам. В выдвинутой им интуиционистской программе предлагалось отказаться от рассмотрения *абстракции актуальной бесконечности*, т. е. бесконечных множеств как завершённых совокупностей. Допуская существование сколь угодно больших натуральных чисел, интуиционисты выступают против рассмотрения натурального ряда как завершённого множества. Они считают, что в математике всякое доказательство существования того или иного объекта должно быть конструктивным, т. е. должно сопровождаться построением этого объекта. Если предположение о том, что искомый объект не существует, приведено к противоречию, то это, по мнению интуиционистов, не может рассматриваться как доказательство существования. Особой критике со стороны интуиционистов подвергается *исключённого третьего закон*. Ввиду того что этот закон первоначально рассматривался применительно к конечным множествам и, учитывая, что многие свойства конечных множеств не выполняются для бесконечных множеств (напр., что всякая собственная часть меньше целого), интуиционисты считают неправомерным применение этого закона к бесконечным множествам. Так, напр., чтобы утверждать, что проблема Ферма имеет положительное решение или имеет отрицательное решение, интуиционист должен указать соответствующее решение этой проблемы. А пока проблема Ферма не решена, эта дизъюнкция считается неправомерной. Такое же требование предъявляется к пониманию всякой дизъюнкции. Это требование интуиционистов может создать затруднения и в случае рассмотрения задач, связанных с конечными множествами. Представим себе, что кто-то, закрыв глаза, достаёт шар из урны, в к-рой имеются три чёрных и три белых шара, и тут же бросает этот шар обратно. Если никто не видел этот шар, то мы не имеем возможности узнать, какого он был цвета. Однако вряд ли можно всерьёз оспаривать достоверность утверждения, что этот шар был либо чёрного, либо белого цвета.

Интуиционисты построили свою математику, имеющую интересные своеобразные особенности. Но она оказалась более сложной и громоздкой, чем классич. математика. Положительный вклад интуиционистов в исследование вопросов оснований математики выразился в том, что они ещё раз решительным образом подчеркнули различие между конструктивным и неконструктивным в математике, провели тщательный анализ многих трудностей, с к-рыми столкнулась математика в своём развитии, и тем самым способствовали их преодолению.

Д. Гильберт наметил другой путь преодоления трудностей, возникших в основаниях математики на рубеже 19—20 вв. Этот путь, основанный на применении аксиоматич. метода рассмотрения формальных моделей содержательной математики и на исследовании вопросов непротиворечивости таких моделей надёжными финитными средствами, получил в математике название ф и н и т и з м а Г и л ь б е р т а. Признавая ненадёжность геометрич. интуиции, Д. Гильберт прежде всего предпринимает тщательный пересмотр евклидовой геометрии, освобождая её от обращения к интуиции. Результатом такой переработки явились его «Основания геометрии» (1899).

Вопросы непротиворечивости различных теорий по существу рассматривались и до Д. Гильберта. Так, построенная Ф. Клейном (1871) проективная модель неевклидовой геометрии Лобачевского сводит вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского к непротиворечивости евклидовой геометрии. Непротиворечивость евклидовой геометрии аналогично можно свести к непротиворечивости анализа, т. е. теории действительных чисел. Однако не видно было, какими средствами можно строить модели анализа и арифметики для доказательства их непротиворечивости. Заслуга Д. Гильберта состоит в том, что он указал прямой путь для исследования этого вопроса. Непротиворечивость данной теории означает, что в ней не может быть получено п р о т и в о р е ч и е, т. е. не может быть доказано нек-рое утверждение A и его отрицание $\neg A$. Д. Гильберт предложил представить рассматриваемую теорию в виде формальной аксиоматич. системы, в к-рой будут выводимы все те и только те утверждения, к-рые являются теоремами нашей теории. Тогда для доказательства непротиворечивости достаточно установить невыводимость в рассматриваемой теории нек-рых утверждений. Таким образом, математич. теория, непротиворечивость к-рой мы хотим доказать, становится предметом изучения нек-рой математич. науки, к-рую Д. Гильберт назвал м е т а м а т е м а т и к о й, или т е о р и е й д о к а з а т е л ь с т в.

Д. Гильберт писал, что парадоксы теории множеств вызваны не законом исключённого третьего, а «скорее тем, что математики пользуются недопустимыми и бессмысленными образованиями понятий, к-рые в моей теории доказательств исключаются сами собой... Отнять у математиков закон исключённого третьего — это то же, что забрать у астрономов телескоп или запретить боксёрам использовать кулаки». Д. Гильберт предлагает различать «действительные» и «идеальные» предложения классич. математики. Первые имеют содержательный смысл, а вторые не обязаны иметь содержательный смысл. Предложения, соответствующие употреблению актуальной бесконечности, идеальны. Идеальные предложения присоединяются к действительным для того, чтобы простые правила логики были применимы и к рассуждениям о бесконечных множествах. Это существенно упрощает структуру всей теории, подобно тому как при рассмотрении проективной геометрии на плоскости добавляется бесконечно удалённая прямая, пересекающая любые две параллельные прямые в некоторой точке.

Выдвинутая Д. Гильбертом программа обоснования математики и его энтузиазм вдохновили современников на интенсивную разработку *аксиоматического метода*. Именно с предпринятой в нач. 20 в. Д. Гильбертом и его последователями разработкой теории доказательств на базе развитого в работах Г. Фреге, Дж. Пеано и Б. Рассела логич. языка следует связывать становление М. л. как самостоятельной математич. дисциплины.

Предмет и основные разделы математической логики, связь с другими областями математики. Предмет современной М. л. разнообразен. Прежде всего следует отметить исследование логич. и логико-математич. исчислений, из к-рых основным является классич. *предикатов исчисление*. Ещё в 1930 К. Гёдель доказал теорему о полноте исчисления предикатов, согласно к-рой множество всех чисто логич. утверждений математики совпадает с множеством всех выводимых в исчислении предикатов формул (см. *Гёделя теорема о полноте*). Эта теорема показала, что исчисление предикатов является той логич. системой, на базе к-рой можно формализовать математику. На базе исчисления предикатов строятся различные логико-математич. теории, представляющие собой формализацию содержательных математич. теорий — арифметики, анализа, теории множеств, теории групп и др. Наряду с *элементарными теориями* рассматриваются также теории высших порядков, в к-рых допускаются также кванторы по предикатам, предикаты от предикатов и т. д. Традиционными вопросами, к-рые исследуются для тех или иных формальных логич. систем, являются исследования структуры выводов в этих системах, выводимость тех или иных формул, вопросы непротиворечивости и полноты рассматриваемых систем.

Доказанная в 1931 *Гёделя теорема о неполноте* арифметики поколебала оптимистич. надежды Д. Гильберта на полное решение вопросов оснований математики на указанном пути. Согласно этой теореме, если формальная система, содержащая арифметику, непротиворечива, то утверждение о её непротиворечивости, выразимое в этой системе, не может быть доказано средствами, формализуемыми в ней. Это означает, что с вопросами оснований математики дело обстоит не так просто, как хотелось или казалось Д. Гильберту вначале. Но уже К. Гёдель заметил, что непротиворечивость арифметики можно доказывать, пользуясь достаточно надёжными конструктивными средствами, хотя и выходящими за рамки средств, формализуемых в арифметике. Аналогичные доказательства непротиворечивости арифметики были получены Г. Генценом (1936) и П. С. Новиковым (1943).

В результате анализа канторовской теории множеств и связанных с ней парадоксов были построены различные системы *аксиоматической теории множеств*, в к-рых принимается то или иное ограничение на образование множеств, чтобы исключить возникновение известных антиномий. В этих аксиоматич. системах могут быть развиты довольно обширные разделы математики. Вопрос о непротиворечивости достаточно богатых аксиоматич. систем теории множеств остаётся открытым. Из наиболее значительных результатов, полученных в аксиоматич. теории множеств, следует отметить результат К. Гёделя о непротиворечивости *континуум-гипотезы* и *выбора аксиомы* в системе Бернайса — Гёделя Σ (1939) и результат П. Коэна (1963) о независимости этих аксиом от аксиом системы Цермело — Френкеля *ZF*. Отметим, что эти две системы аксиом Σ и *ZF* равнонепротиворечивы. Для доказательства своих результатов К. Гёдель ввёл важное понятие конструктивного множества и показал существование модели системы Σ, состоящей из таких множеств. Метод К. Гёделя был использован П. С. Новиковым для доказательства непротиворечивости нек-рых других утверждений дескриптивной теории множеств (1951). Для построения моделей теории множеств *ZF*, в к-рых выполняются отрицания континуум-гипотезы или аксиомы выбора, П. Коэн ввёл т. н. метод вынуждения, к-рый впоследствии был усовершенствован и стал основным методом построения моделей теории множеств, удовлетворяющих тем или иным свойствам.

Одним из наиболее замечательных достижений М. л. явилась разработка понятия *общерекурсивной функции* и формулировка *Чёрча тезиса*, утверждающего, что понятие общерекурсивной функции является уточнением интуитивного понятия *алгоритма*. Из других эквивалентных уточнений понятия алгоритма наибольшее распространение получили понятия *Тьюринга машины* и *нормального алгорифма* Маркова. По существу вся математика связана с теми или иными алгоритмами. Но только после уточнения понятия алгоритма появилась возможность обнаружить существование неразрешимых *алгоритмических проблем* в математике. Неразрешимые алгоритмич. проблемы были обнаружены во многих разделах математики (алгебра, теория чисел, топология, теория вероятностей и др.), причём оказалось, что они могут встречаться среди очень распространённых и фундаментальных задач математики. Исследование алгоритмич. проблем в той или иной области математики, как правило, сопровождается проникновением идей и методов М. л. в эту область, что приводит к решению также и других проблем, уже не имеющих алгоритмич. характера.

Разработка точного понятия алгоритма дала возможность уточнить понятие эффективности и развивать на базе такого уточнения конструктивное направление в математике (см. *Конструктивная математика*), воплотившее в себе нек-рые черты интуиционистского направления, но существенно отличающееся от последнего. Были созданы основы конструктивного анализа, конструктивной топологии, конструктивной теории вероятностей и др.

В самой теории алгоритмов можно выделить исследования в области рекурсивной арифметики, куда входят различные классификации рекурсивных и рекурсивно перечислимых множеств, степени неразрешимости рекурсивно перечислимых множеств, исследования сложности записи алгоритмов и сложности алгоритмич. вычислений (по времени и по памяти, см. *Сложность алгоритма*). Обширным развивающимся разделом теории алгоритмов является теория нумераций.

Как отмечалось выше, аксиоматич. метод оказал большое влияние на развитие многих разделов математики. Особенно значительным было проникновение этого метода в алгебру. Так, на стыке М. л. и алгебры возникла общая теория *алгебраических систем*, или *моделей теория*. Это направление было заложено в работах А. И. Мальцева, А. Тарского и их учеников. Здесь можно отметить исследования по элементарным теориям классов моделей, в частности вопросы разрешимости этих теорий, аксиоматизируемость классов моделей, изоморфизм моделей, вопросы категоричности и полноты классов моделей.

Важное место в теории моделей занимает исследование *нестандартных моделей* арифметики и анализа. Ещё на заре развития дифференциального исчисления в работах Г. Лейбница и И. Ньютона бесконечно малые и бесконечно большие величины рассматривались как числа. Позже появилось понятие переменной величины, и математики отказались от употребления бесконечно малых чисел, модуль к-рых отличен от нуля и меньше любого положительного действительного числа, т. к. их употребление потребовало бы отказа от аксиомы Архимеда. И только через три столетия в результате развития методов М. л. удалось установить, что (нестандартный) анализ с бесконечно малыми и бесконечно большими числами непротиворечив относительно обычного (стандартного) анализа действительных чисел.

Не обошлась без влияния аксиоматич. метода и интуиционистская математика. Так, ещё в 1930 А. Гейтинг ввёл в рассмотрение формальные системы *интуиционистской логики* высказываний и предикатов (конструктивные исчисления высказываний и предикатов). Позже были введены формальные системы интуиционистского анализа. Многие исследования по интуиционистской логике и

математике имеют дело с формальными системами. Подвергались специальному изучению также т. н. промежуточные логики (или суперинтуиционистские), т. е. логики, лежащие между классической и интуиционистской логиками. Понятие реализуемости формул по Клини представляет одну из попыток интерпретировать понятие интуиционистской истинности с точки зрения классич. математики. Однако оказалось, что не всякая реализуемая формула исчисления высказываний выводима в интуиционистском (конструктивном) исчислении высказываний.

Подверглась формализации также и *модальная логика*. Однако, несмотря на наличие большого числа работ по формальным системам модальной логики и по их семантике (модели Крипке), можно сказать, что здесь происходит процесс накопления пока ещё разрозненных фактов.

М. л. имеет большое прикладное значение; с каждым годом растёт глубокое проникновение идей и методов М. л. в информатику, вычислительную математику, в структурную лингвистику.

● Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления..., пер. с нем., 2 изд., М., 1979; их же, Основания математики. Теория доказательств, пер. с нем., М., 1982; Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; Ершов Ю. Л., Палютин Е. А., Математическая логика, М., 1979; Шенфилд Д. Р., Математическая логика, пер. с англ., М., 1975; Новиков П. С., Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977; Клини С. К., Весли Р., Основания интуиционистской математики с точки зрения теории рекурсивных функций, пер. с англ., М., 1978; Гильберт Д., Основания геометрии, пер. с нем., М., 1948; Френкель А.-А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966; Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978; Mostowski A., Thirty years of foundational studies, Hels., 1965.

С. И. Адян.

МАТЕМАТИ́ЧЕСКАЯ МОДЕ́ЛЬ — приближённое описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Анализ М. м. позволяет проникнуть в сущность изучаемых явлений М. м.— мощный метод познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления. Процесс математич. моделирования, т. е. изучения явления с помощью М. м., можно подразделить на четыре этапа.

Первый этап — формулирование законов, связывающих основные объекты модели. Этот этап требует широкого знания фактов, относящихся к изучаемым явлениям, и глубокого проникновения в их взаимосвязи. Эта стадия завершается записью в математич. терминах сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели.

Второй этап — исследование математич. задач, к к-рым приводят М. м. Основным вопросом здесь является решение прямой задачи, т. е. получение в результате анализа модели выходных данных (теоретич. следствий) для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений. На этом этапе важную роль приобретает математич. аппарат, необходимый для анализа М. м., и вычислительная техника — мощное средство для получения количественной выходной информации как результата решения сложных математич. задач. Часто математич. задачи, возникающие на основе М. м. различных явлений, бывают одинаковыми (напр., основная задача линейного программирования отражает ситуации различной природы). Это даёт основание рассматривать такие типичные математич. задачи как самостоятельный объект, абстрагируясь от изучаемых явлений.

Третий этап — выяснение того, удовлетворяет ли принятая гипотетич. модель критерию практики, т. е. выяснение вопроса о том, согласуются ли результаты наблюдений с теоретич. следствиями модели в пределах точности наблюдений. Если модель была вполне определена (все параметры её были заданы), то определение уклонений теоретич. следствий от наблюдений даёт решения прямой задачи с последующей оценкой уклонений. Если уклонения выходят за пределы точности наблюдений, то модель не может быть принята. Часто при построении модели нек-рые её характеристики остаются не определёнными. Задачи, в к-рых определяются характеристики модели (параметрические, функциональные) таким образом, чтобы выходная информация была сопоставима в пределах точности наблюдений с результатами наблюдений изучаемых явлений, наз. обратными задачами. Если М. м. такова, что ни при каком выборе характеристик этим условиям нельзя удовлетворить, то модель непригодна для исследования рассматриваемых явлений. Применение критерия практики к оценке М. м. позволяет делать вывод о правильности положений, лежащих в основе подлежащей изучению (гипотетической) модели. Этот метод является единственным методом изучения недоступных нам непосредственно явлений макро- и микромира.

Четвёртый этап — последующий анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели. В процессе развития науки и техники данные об изучаемых явлениях всё более и более уточняются и наступает момент, когда выводы, получаемые на основании существующей М. м., не соответствуют нашим знаниям о явлении. Таким образом, возникает необходимость построения новой, более совершенной М. м.

Типичным примером, иллюстрирующим характерные этапы в построении М. м., является модель Солнечной системы. Наблюдения звёздного неба начались в глубокой древности. Первичный анализ этих наблюдений позволил выделить планеты из всего многообразия небесных светил. Таким образом, первым шагом было выделение объектов изучения. Вторым шагом явилось определение закономерностей их движений. (Вообще определения объектов и их взаимосвязей являются исходными положениями — «аксиомами» — гипотетич. модели.) Модели Солнечной системы в процессе своего развития прошли через ряд последовательных усовершенствований. Первой была модель Птолемея (2 в. н. э.), исходившая из положения, что планеты и Солнце совершают движения вокруг Земли (геоцентрич. модель), и описывавшая эти движения с помощью правил (формул), многократно усложнявшихся при накоплении наблюдений.

Развитие мореплавания поставило перед астрономией новые требования к точности наблюдений. Н. Коперником в 1543 была предложена принципиально новая основа законов движения планет, полагающая, что планеты вращаются вокруг Солнца по окружности (гелиоцентрич. система). Это была качественно новая (но не математическая) модель Солнечной системы. Однако не существовало параметров системы (радиусов окружностей и угловых скоростей движения), приводящих количественные выводы теории в должное соответствие с наблюдениями, так что Н. Коперник был вынужден вводить поправки в движения планет по окружности (эпициклы).

Следующим шагом в развитии М. м. Солнечной системы были исследования И. Кеплера (нач. 17 в.), к-рый сформулировал законы движения планет. Положения Н. Коперника и И. Кеплера давали кинематич. описание движения каждой планеты обособленно, не затрагивая ещё причин, обусловливающих эти движения.

Принципиально новым шагом были работы И. Ньютона, предложившего во 2-й пол. 17 в. динамич. модель Солнечной системы, основанную на законе всемирного тяготения. Динамич. модель согласуется с кинематич. моделью, предложенной И. Кеплером, т. к. из динамич. системы двух тел «Солнце — планета» следуют законы Кеплера.

К 40-м гг. 19 в. выводы динамич. модели, объектами к-рой были видимые планеты, вошли в противоречие с накопленными к тому времени наблюдениями. Именно, наблюдаемое движение Урана уклонялось от теоретич. вычисляемого движения. У. Леверье в 1846 расширил систему наблюдаемых планет новой гипотетич. планетой, названной им Нептуном, и, пользуясь новой М. м. Сол-

нечной системы, определил массу и закон движения новой планеты так, что в новой системе противоречие в движении Урана было снято. Планета Нептун была открыта в месте, указанном У. Леверье. Аналогичным методом, используя расхождения в теоретич. и наблюдаемой траектории Нептуна, в 1930 была открыта планета Плутон.

Метод математич. моделирования, сводящий исследование явлений внешнего мира к математич. задачам, занимает ведущее место среди других методов исследования, особенно в связи с появлением ЭВМ. Он позволяет проектировать новые технич. средства, работающие в оптимальных режимах, для решения сложных задач науки и техники; проектировать новые явления. М. м. проявили себя как важное средство управления. Они применяются в самых различных областях знания, стали необходимым аппаратом в области экономич. планирования и являются важным элементом автоматизированных систем управления.

А. Н. Тихонов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА — раздел математики, посвящённый математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов. При этом статистич. данными наз. сведения о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками (таковы, напр., данные табл. 1 и 2).

Табл. 1.— РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИАМЕТРА ДЕТАЛИ, ОБНАРУЖЕННОЕ ПРИ СТАТИСТИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ МАССОВОЙ ПРОДУКЦИИ (объяснение обозначений $\bar{x}$, S, s см. на стр. 345—46), мм

Диаметр	Основная выборка	1-я выборка	2-я выборка	3-я выборка
13,05—13,09	—	—	1	1
13,10—13,14	2	—	—	—
13,15—13,19	1	—	1	1
13,20—13,24	8	—	—	—
13,25—13,29	17	1	2	1
13,30—13,34	27	1	1	2
13,35—13,39	30	2	3	1
13,40—13,44	37	2	1	1
13,45—13,49	27	1	—	—
13,50—13,54	25	2	1	—
13,55—13,59	17	—	—	—
13,60—13,64	7	1	—	2
13,65—13,69	2	—	—	1
Всего	200	10	10	10
$\bar{x}$	13,416	13,430	13,315	13,385
S^2	2,3910	0,0990	0,1472	0,3602
s	0,110	0,105	0,128	0,200

Табл. 2. — РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАБОЛЕВШИХ И НЕ ЗАБОЛЕВШИХ ГРИППОМ СРЕДИ РАБОТНИКОВ УНИВЕРМАГА, ВДЫХАВШИХ И НЕ ВДЫХАВШИХ ПРОТИВОГРИППОЗНУЮ СЫВОРОТКУ

	Не заболевшие	Заболевшие	Всего
Не вдыхавшие	1675	150	1825
Вдыхавшие	497	4	501
Всего	2172	154	2326

Предмет и метод математической статистики. Статистич. описание совокупности объектов занимает промежуточное положение между индивидуальным описанием каждого из объектов совокупности, с одной стороны, и описанием совокупности по её общим свойствам, совсем не требующим её расчленения на отдельные объекты,— с другой.

Метод исследования, опирающийся на рассмотрение статистич. данных о тех или иных совокупностях объектов, наз. статистическим. Статистич. метод используется в самых различных областях знания.

Общие черты статистич. метода в различных областях знания сводятся к подсчёту числа объектов, входящих в те или иные группы, рассмотрению распределения количественных признаков, применению выборочного метода (в случаях, когда детальное исследование всех объектов обширной совокупности затруднительно), использованию теории вероятностей при оценке достаточности числа наблюдений для тех или иных выводов и т. п. Эта формальная математическая сторона статистических методов исследования, безразличная к специфической природе изучаемых объектов, и составляет предмет М. с.

Связь математической статистики с теорией вероятностей имеет в разных случаях различный характер. Теория вероятностей изучает не любые явления, а явления случайные и именно «вероятностно случайные», т. е. такие, для к-рых имеет смысл говорить о соответствующих им распределениях вероятностей. Тем не менее теория вероятностей играет определённую роль и при статистич. изучении массовых явлений любой природы, к-рые могут не относиться к категории вероятностно случайных. Это осуществляется через основанные на теории вероятностей теорию *выборочного метода* и *ошибок теорию*. В этих случаях вероятностным закономерностям подчинены не сами изучаемые явления, а приёмы их исследования.

Более важную роль играет теория вероятностей при статистич. исследовании вероятностных явлений. Здесь в полной мере находят применение такие основанные на теории вероятностей разделы М. с., как *статистических гипотез проверка*, *статистическое оценивание* распределений вероятностей и входящих в них параметров и т. д. Область же использования этих более глубоких статистич. методов значительно уже, т. к. здесь требуется, чтобы сами изучаемые явления были подчинены достаточно определённым вероятностным закономерностям.

Вероятностные закономерности получают статистич. выражение (вероятности осуществляются приближённо в виде частот, а математич. ожидания — в виде средних) в силу закона больших чисел.

Простейшие приёмы статистического описания. Изучаемая совокупность из n объектов может по к.-л. качественному признаку A разбиваться на классы A_1, A_2, . . ., A_r. Соответствующее этому разбиению распределение задаётся при помощи указания численностей n_1, n_2, . . ., n_r (где $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$) отдельных классов. Вместо численностей n_i часто указывают соответствующие относительные частоты $h_i = n_i/n$ (удовлетворяющие, очевидно, соотношению $\sum_{i=1}^{r} h_i = 1$). Если изучению подлежит нек-рый количественный признак, то его распределение в совокупности из n объектов можно задать, перечислив непосредственно наблюдённые значения признака: x_1, x_2, . . ., x_n, напр., в порядке их возрастания. Однако при больших n такой способ громоздок и в то же время не выявляет отчётливо существенных свойств распределения. При сколько-либо больших n на практике обычно совсем не составляют полных таблиц наблюдённых значений x_i, а исходят во всей дальнейшей работе из таблиц, содержащих лишь численности классов, получающихся при группировке наблюдённых значений по надлежаще выбранным интервалам.

Напр., в первом столбце табл. 1 даны результаты измерения 200 диаметров деталей, группированные по интервалам длины 0,05 мм. Основная выборка соответствует нормальному ходу технологич. процесса, 1-я,

2-я и 3-я выборки сделаны через нек-рые промежутки времени для проверки устойчивости этого нормального хода производства.

Обычно группировка по 10—20 интервалам, в каждый из к-рых попадает не более 15—20% значений x_i, оказывается достаточной для довольно полного выявления всех существенных свойств распределения и надёжного вычисления по групповым численностям основных характеристик распределения (см. о них ниже). Составленная по таким группированным данным *гистограмма* наглядно изображает распределение. Гистограмма, составленная на основе группировки с маленькими интервалами, обычно многовершинная и не отражает наглядно существенных свойств распределения.

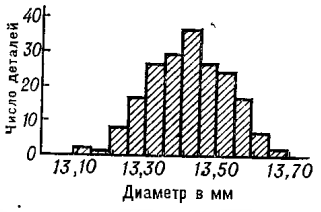


Рис. 1. Гистограмма распределения диаметров 200 деталей. Длина интервала группировки 0,05 мм.

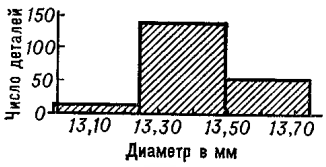


Рис. 3. Гистограмма распределения диаметров 200 деталей. Длина интервала группировки 0,25 мм.

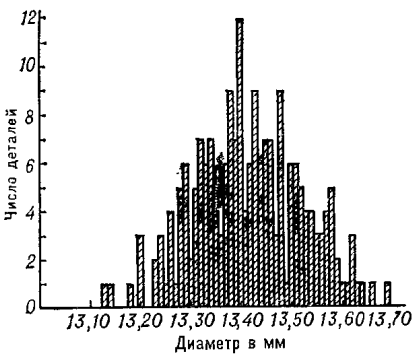


Рис. 2. Гистограмма распределения диаметров 200 деталей. Длина интервала группировки 0,01 мм.

В качестве примера на рис. 1 дана при длине интервала группировки 0,05 мм гистограмма распределения 200 диаметров, соответствующая данным первого столбца табл. 1, а на рис. 2 — гистограмма того же распределения (соответствующая таблица не приводится ввиду её громоздкости) при длине интервала 0,01 мм. С другой стороны, группировка по слишком крупным интервалам (на рис. 3 длина интервала 0,25 мм) может привести к потере ясного представления о характере распределения и к грубым ошибкам при вычислении среднего и других характеристик распределения.

В пределах М. с. вопрос об интервалах группировки может быть рассмотрен только с формальной стороны: полноты математич. описания распределения, точности вычисления средних по сгруппированным данным и т. д.

При изучении совместного распределения двух признаков пользуются таблицами с двумя входами. Примером совместного распределения двух качественных признаков может служить табл. 2. В общем случае, когда по признаку A материал разбит на классы $A_1, A_2, \ldots, A_r$, а по признаку B — на классы $B_1, B_2, \ldots, B_s$, таблица состоит из численностей n_{ij} объектов, принадлежащих одновременно классам A_i и B_j. Суммируя их по формулам

$$n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{s} n_{ij} \quad n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij},$$

получают численности самих классов A_i и B_j; при этом

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{ij} = \sum_{i=1}^{r} n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{s} n_{\cdot j} = n,$$

где n — численность всей изучаемой совокупности. В зависимости от целей дальнейшего исследования вычисляют те или иные из относительных частот

$$h_{ij} = n_{ij}/n, \quad h_{i\cdot} = n_{i\cdot}/n, \quad h_{\cdot j} = n_{\cdot j}/n,$$
$$h_{i(j)} = n_{ij}/n_{\cdot j}, \quad h_{(i)j} = n_{ij}/n_{i\cdot}.$$

Пример таблицы для совместного распределения двух количественных признаков см. в ст. *Корреляция*.

Простейшими сводными характеристиками распределения одного количественного признака являются выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

и выборочное среднее квадратичное отклонение

$$D = S/\sqrt{n}$$

или выборочная дисперсия

$$D^2 = S^2/n,$$

где

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

При вычислении $\bar{x}$, S^2 и D по группированным данным пользуются формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{r} n_k a_k = \sum_{k=1}^{r} h_k a_k,$$

$$S^2 = \sum_{k=1}^{r} n_k (a_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{r} n_k a_k^2 - n\bar{x}^2$$

или

$$D^2 = \sum_{k=1}^{r} h_k a_k^2 - \bar{x}^2,$$

где r — число интервалов группировки, a_k — их середины. Если материал сгруппирован по слишком крупным интервалам, то такой подсчёт даёт очень грубые результаты. Иногда в таких случаях полезно прибегать к специальным поправкам на группировку. Однако эти поправки имеет смысл вводить лишь при условии выполнения определённых вероятностных предположений.

О совместных распределениях двух и большего числа признаков см. *Корреляция*, *Корреляционный анализ*, *Регрессия*, *Регрессионный анализ*.

Связь эмпирических распределений с вероятностными. Проверка статистических гипотез. Статистические оценки. Выше были изложены лишь нек-рые избранные простейшие приёмы статистич. описания, представляющего собой довольно обширную дисциплину с хорошо разработанной системой понятий и техникой вычислений. Приёмы статистич. описания интересны, однако, не сами по себе, а в качестве средства для получения из статистич. материала выводов о закономерностях, к-рым подчиняются изучаемые явления, и о причинах, приводящих в каждом отдельном случае к тем или иным наблюдённым эмпирич. распределениям.

Напр., данные, приведённые в табл. 2, естественно связать с такой теоретич. схемой. Заболевание гриппом каждого отдельного работника универмага следует считать случайным событием, т. к. общие условия работы и жизни обследованных работников универмага могут определять не сам факт заболевания такого-то и такого-то работника, а лишь нек-рую вероятность заболевания. Вероятности заболевания для вдыхавших сыворотку (p_1) и для не вдыхавших (p_0), судя по статистич. данным, различны: эти данные дают основания предполагать, что p_1 существенно меньше p_0. Перед М. с. возникает задача: по наблюдённым частотам $h_1 = 4/501 \approx 0{,}008$ и $h_0 = 150/1825 \approx \approx 0{,}082$ оценить вероятности p_1 и p_0 и проверить, достаточен ли статистич. материал для того, чтобы считать установленным, что $p_1 < p_0$ (т. е. что вдыхание сыворотки действительно уменьшает вероятность заболевания). Утвердительный ответ на поставленный вопрос в случае данных табл. 2 достаточно убедителен и без тонких средств М. с. Но в более сомнительных случаях необходимо прибегать к разработанным М. с. специальным критериям.

Данные первого столбца табл. 1 собраны с целью установления точности изготовления деталей, расчётный диаметр к-рых равен 13,40 мм, при нормальном ходе производства. Простейшим допущением, к-рое может быть в этом случае обосновано нек-рыми теоретич. соображениями, является предположение, что диаметры отдельных деталей можно рассматривать как случайные величины X, подчинённые нормальному распределению вероятностей

$$\mathrm{P}\{X < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-(t-a)^2/2\sigma^2}\,dt. \qquad (1)$$

Если это допущение верно, то параметры a и σ^2 — среднее и дисперсию вероятностного распределения — можно с достаточной точностью оценить по соответствующим характеристикам статистич. распределения (т. к. число наблюдений $n=200$ достаточно велико). В качестве оценки для теоретич. дисперсии σ^2 предпочитают не выборочную дисперсию $D^2=S^2/n$, а несмещённую оценку

$$s^2 = S^2/(n-1).$$

Для теоретич. среднего квадратичного отклонения не существует общего (пригодного при любом распределении вероятностей) выражения несмещённой оценки. В качестве оценки (вообще говоря, смещённой) для σ чаще всего употребляют s. Точность оценок $\bar{x}$ и s для a и σ указывается соответствующими дисперсиями, к-рые в случае нормального распределения (1) имеют вид

$$\sigma^2_{\bar{x}} = \sigma^2/n \sim s^2/n,$$
$$\sigma^2_{s^2} = 2\sigma^4/(n-1) \sim 2s^4/n,$$
$$\sigma^2_s \sim \sigma^2/2n \sim s^2/2n,$$

где знак $\sim$ обозначает приближённое равенство при больших n. Таким образом, уславливаясь прибавлять к оценкам со знаком $\pm$ их среднее квадратичное отклонение, имеем при больших n в предположении нормального распределения (1):

$$a = \bar{x} \pm s/\sqrt{n}, \quad \sigma = s \pm s/\sqrt{2n}. \qquad (2)$$

Для данных первого столбца табл. 1 формулы (2) дают

$$a = 13{,}416 \pm 0{,}008,$$
$$\sigma = 0{,}110 \pm 0{,}006.$$

Объём выборки $n=200$ достаточен для законности пользования этими формулами теории больших выборок.

При рассмотрении данных следующих столбцов табл. 1, каждый из к-рых составлен на основе 10 измерений, употребление формул теории больших выборок, установленных лишь в качестве предельных формул при $n \to \infty$, может служить только для первой ориентировки. В качестве приближённых оценок параметров a и σ по-прежнему употребляются величины $\bar{x}$ и s, но для оценки точности и надёжности таких оценок необходимо применять специальные методы, годные для малых выборок. При сравнении по правилам М. с. выписанных в последних строках табл. 1 значений $\bar{x}$ и s для трёх выборок с нормальными значениями a и σ, оценёнными по первому столбцу таблицы, можно сделать следующие выводы: первая выборка не даёт оснований предполагать существенного изменения хода производственного процесса, вторая выборка даёт основание к заключению об уменьшении среднего диаметра a, третья выборка — к заключению об увеличении дисперсии.

Все основанные на теории вероятностей правила статистич. оценки параметров и проверки гипотез действуют лишь с определённым уровнем значимости ($\omega<1$), т. е. могут приводить к ошибочным результатам с вероятностью $\alpha=1-\omega$. Напр., если в предположении нормального распределения и известной теоретич. дисперсии σ^2 производить оценку a по $\bar{x}$ по правилу

$$\bar{x} - k\sigma/\sqrt{n} < a < \bar{x} + k\sigma/\sqrt{n},$$

то вероятность ошибки будет равна α, связанному с k соотношением (табл. 3):

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_k^\infty e^{-x^2/2}\,dx.$$

Вопрос о рациональном выборе уровня значимости в данных конкретных условиях является весьма существенным. При этом желанию применять правила лишь с высоким (близким к единице) уровнем значимости противостоит то обстоятельство, что при ограниченном числе наблюдений такие правила позволяют сделать лишь очень бедные выводы (не дают возможности установить неравенство вероятностей даже при заметном неравенстве частот и т. д.). См. *Статистическая гипотеза*, *Статистическая оценка*, *Интервальная статистическая оценка*, *Статистических гипотез проверка*, *Статистическое оценивание*.

Табл. 3.— ЗАВИСИМОСТЬ α И $\omega=1-\alpha$ ОТ k

k	1,96	2,58	3,00	3,29
α	0,050	0,010	0,003	0,001
ω	0,950	0,990	0,997	0,999

Выборочный метод. В предыдущем разделе результаты наблюдений, используемых для оценки распределения вероятностей или его параметров, подразумевались независимыми. Хорошо изученным примером использования зависимых наблюдений может служить оценка эмпирич. распределения или его параметров в «генеральной совокупности» из N объектов по произведённой из неё «выборке», содержащей $n<N$ объектов.

Примером применения выборочного метода может служить следующий. Пусть в партии из N изделий имеется L дефектных. Из партии отбирается случайным образом $n<N$ изделий. Вероятность того, что число l дефектных изделий в выборке будет равно m, равна

$$\mathrm{P}\{l=m\} = \frac{n!\,(N-n)!\,L!\,(N-L)!}{m!\,(n-m)!\,(L-m)!\,(N-L-n+m)!\,N!}.$$

Таким образом, l и соответствующая относительная частота $h=l/n$ оказываются случайными величинами, распределение к-рых зависит от параметра L или, что то же самое, от параметра $H=L/N$. Задача оценки относительной частоты H по выборочной относительной частоте h очень похожа на задачу оценки вероятности p по относительной частоте h при n независимых испытаниях. При больших n с вероятностью, близкой к единице, в задаче об оценке вероятности имеет место приближённое равенство $p \sim h$, а в задаче об оценке относительной частоты — приближённое равенство $H \sim h$. Однако в задаче об оценке H формулы сложнее, а отклонения h от H в среднем несколько меньше, чем отклонения h от p в задаче об оценке вероятности (при том же n). Таким образом, оценка доли H дефектных изделий в партии по доле h дефектных изделий в выборке при данном объёме выборки n производится всегда (при любом N) несколько точнее, чем оценка вероятности p по относительной частоте h при независимых испытаниях. Когда $N/n \to \infty$, формулы задачи о выборке переходят асимптотически в формулы задачи об оценке вероятности p. См. *Выборочный метод*.

Дальнейшие задачи математической статистики. Упоминавшиеся выше способы оценки параметров и проверки гипотез основаны на предположении, что число наблюдений, необходимых для достижения заданной точности выводов, определяют заранее (до проведения испытаний). Однако часто априорное определение числа наблюдений нецелесообразно, т. к., не фиксируя число опытов заранее, а определяя его в ходе эксперимента, можно уменьшить его математич. ожидание. Сначала это обстоятельство было подмечено на примере выбора одной из двух гипотез по последовательности независимых испытаний. Соответствующая процедура (впервые предложенная в связи с задачами *приёмочного статистического контроля*) состоит в следующем. На каждом шаге по результатам уже проведённых наблюдений решают: а) провести ли следующее испытание или б) прекратить

испытания и принять первую гипотезу, или в) прекратить испытания и принять вторую гипотезу. При надлежащем подборе количественных характеристик подобной процедуры можно добиться (при той же точности выводов) сокращения числа наблюдений в среднем почти вдвое по сравнению с процедурой выборки фиксированного объёма (см. *Последовательный статистический анализ*). Развитие методов последовательного анализа привело, с одной стороны, к изучению управляемых случайных процессов, с другой — к появлению *статистических решений теории*. Эта теория исходит из того, что результаты последовательно проводимых наблюдений служат основой принятия нек-рых р е ш е н и й (промежуточных — продолжать испытания или нет, и окончательных — в случае прекращения испытаний). В задачах оценки параметров окончательные решения суть числа (значение оценок), в задачах проверки гипотез — принимаемые гипотезы. Цель теории — указать правила принятия решений, минимизирующих средний риск или убыток (риск зависит и от вероятностных распределений результатов наблюдений, и от принимаемого окончательного решения, и от расходов на проведение испытаний и т. д.). Вопросы целесообразного распределения усилий при проведении статистич. анализа явлений рассматриваются в теории *планирования эксперимента*, ставшей важной частью современной М. с.

Наряду с развитием и уточнением общих понятий М. с. развиваются и её отдельные разделы, такие, как *дисперсионный анализ*, *статистический анализ* случайных процессов, *многомерный статистический анализ*. Появились новые оценки в *регрессионном анализе* (см. также *Стохастическая аппроксимация*). Большую роль в задачах М. с. играет т. н. *бейесовский подход* к решению статистич. задач.

Историческая справка. Истоки М. с. можно найти уже в сочинениях создателей теории вероятностей: Я. Бернулли (кон. 17 — нач. 18 вв.), П. Лапласа (2-я пол. 18— нач. 19 вв.) и С. Пуассона (1-я пол. 19 в.). В России методы М. с. в применении к демографии и страховому делу развивал на основе теории вероятностей В. Я. Буняковский (1846). Решающее значение для всего дальнейшего развития М. с. имели работы русской классич. школы теории вероятностей 2-й пол. 19 — нач. 20 вв. (П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, С. Н. Бернштейн). Многие вопросы теории статистич. оценок были по существу разработаны на основе теории ошибок и метода наименьших квадратов [К. Гаусс (1-я пол. 19 в.) и А. А. Марков (кон. 19 — нач. 20 вв.)]. Работы А. Кетле (19 в.), Ф. Гальтона (19 в.) и К. Пирсона (кон. 19 — нач. 20 вв.) имели большое значение, но по уровню использования достижений теории вероятностей отставали от работ русской школы. К. Пирсоном была широко развёрнута работа по составлению таблиц функций, необходимых для применения методов М. с. В создании теории малых выборок, общей теории статистич. оценок и проверки гипотез (освобождённой от предположений о наличии априорных распределений), последовательного анализа весьма значительна роль представителей англо-американской школы [Стьюдент (псевдоним У. Госсета), Р. Фишер, Э. Пирсон, Е. Нейман, А. Вальд], деятельность к-рых началась в 20-х гг. 20 в. В СССР значительные результаты в области М. с. получены В. И. Романовским, А. Н. Колмогоровым, Е. Е. Слуцким (ему принадлежат важные работы по статистике связанных стационарных рядов), Н. В. Смирновым (заложившим основы теории непараметрич. методов М. с.), Ю. В. Линником (обогатившим аналитич. аппарат М. с. новыми методами). На основе М. с. особенно интенсивно разрабатываются статистич. методы исследования и контроля массового производства, статистич. методы в области физики, гидрологии, климатологии, звёздной астрономии, биологии, медицины и др.

● К р а м е р Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; В а н - д е р - В а р д е н Б. Л., Математическая статистика, пер. с нем., М., 1960; С м и р н о в Н. В., Д у н и н - Б а р к о в с к и й И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969; Б о р о в к о в А. А., Математическая статистика, М., 1984; Б о л ь ш е в Л. Н., С м и р н о в Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

А. Н. Колмогоров, Ю. В. Прохоров.

МАТЕМАТИ́ЧЕСКАЯ ФИ́ЗИКА — теория *математических моделей* физических явлений; занимает особое положение и в математике и в физике, находясь на стыке этих наук. М. ф. тесно связана с физикой в той части, к-рая касается построения математич. модели, и в то же время М. ф.— раздел математики, поскольку методы исследования моделей являются математическими. В понятие методов М. ф. включаются те математич. методы, к-рые применяются для построения и изучения математич. моделей, описывающих большие классы физич. явлений.

Методы М. ф. как теории математич. моделей физики начали в кон. 17 в. интенсивно разрабатываться в трудах И. Ньютона по созданию основ классич. механики, всемирного тяготения, теории света. Дальнейшее развитие (18—1-я пол. 19 вв.) методов М. ф. и их успешное применение к изучению математич. моделей огромного круга различных физич. явлений связаны с именами Ж. Лагранжа, Л. Эйлера, П. Лапласа, Ж. Фурье, К. Гаусса, Б. Римана, М. В. Остроградского и др. учёных. Большой вклад в развитие методов М. ф. внесли А. М. Ляпунов и В. А. Стеклов. Со 2-й пол. 19 в. методы М. ф. успешно использовались для изучения математич. моделей физич. явлений, связанных с различными физич. полями и волновыми функциями в электродинамике, акустике, теории упругости, гидро- и аэродинамике и ряде других направлений исследования физич. явлений в сплошных средах. Математич. модели этого класса явлений наиболее часто описываются при помощи дифференциальных уравнений с частными производными, получивших название *математической физики уравнений*. Помимо дифференциальных уравнений М. ф., при описании математич. моделей физики применяются интегральные уравнения и интегро-дифференциальные уравнения, вариационные и теоретико-вероятностные методы, теория потенциала, методы теории функций комплексного переменного и ряд других разделов математики. В связи с бурным развитием вычислительной математики особое значение для исследования математич. моделей физики приобретают прямые численные методы, использующие ЭВМ, и в первую очередь конечноразностные методы решения краевых задач, что позволило методами М. ф. эффективно решать новые задачи газовой динамики, теории переноса, физики плазмы, в том числе и обратные задачи этих направлений физич. исследований.

Теоретич. исследования в области квантовой физики и теории относительности, широкое применение ЭВМ в различных областях М. ф., включая и обратные (некорректно поставленные) задачи, потребовали значительного расширения используемого М. ф. арсенала математич. методов. Наряду с традиционными разделами математики стали широко применяться теория операторов, теория обобщённых функций, теория функций многих комплексных переменных, топологич. и алгебраич. методы. Это интенсивное взаимодействие теоретич. физики, математики и использование ЭВМ в научных исследованиях привело к значительному расширению тематики, созданию новых классов моделей и подняло на новый уровень современную М. ф.

Постановка задач М. ф. заключается в построении математич. моделей, описывающих основные закономерности изучаемого класса физич. явлений. Такая постановка состоит в выводе уравнений (дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных или алгебраических), к-рым удовлетворяют величины, характеризующие физич. процесс. При этом исходят из основных физич. законов, учитывающих только наиболее существенные черты явления, отвлекаясь от ряда его второстепенных характеристик. Такими законами являются обычно законы сохранения, напр. количества движения, энергии, числа частиц. Это приводит к тому, что для описания процессов

различной физич. природы, но имеющих общие характерные черты, оказываются применимыми одни и те же математич. модели. Напр., математич. задачи для простейшего уравнения гиперболич. типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

полученного первоначально Ж. Д' Аламбером (1747) для описания свободных колебаний однородной струны, оказываются применимыми и для описания широкого круга волновых процессов акустики, гидродинамики, электродинамики и др. областей физики. Аналогично, уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

краевые задачи для к-рого первоначально изучались П. Лапласом (кон. 18 в.) в связи с построением теории тяготения, в дальнейшем нашло применение при решении многих проблем электростатики, теории упругости, задач установившегося движения идеальной жидкости и т. д. Каждой математич. модели физики соответствует целый класс физич. процессов.

Для М. ф. характерно также то, что многие общие методы, используемые для решения задач М. ф., развились из частных способов решения конкретных физич. задач и в своём первоначальном виде не имели строгого математич. обоснования и достаточной завершённости. Это относится к таким известным методам решения задач М. ф., как методы Ритца и Галёркина, к методам теории возмущений, преобразований Фурье и многим другим, включая метод разделения переменных. Эффективное применение всех этих методов для решения конкретных задач явилось одним из стимулов для их строгого математич. обоснования и обобщения, приводящего в ряде случаев к возникновению новых математич. направлений.

Воздействие М. ф. на различные разделы математики проявляется и в том, что развитие М. ф., отражающее требования естественных наук и запросы практики, влечёт за собой переориентацию направленности исследований в нек-рых уже сложившихся разделах математики. Постановка задач М. ф., связанная с разработкой математич. моделей реальных физич. явлений, привела к изменению основной проблематики теории дифференциальных уравнений с частными производными. Возникла теория краевых задач, позволившая впоследствии связать дифференциальные уравнения с частными производными, с интегральными уравнениями и вариационными методами.

Изучение математич. моделей физики математич. методами не только позволяет изучить количественные характеристики физич. явлений и рассчитать с заданной степенью точности ход реальных процессов, но и даёт возможность глубокого проникновения в самую суть физич. явлений, выявления скрытых закономерностей, предсказания новых эффектов. Стремление к более детальному изучению физич. явлений приводит к всё большему усложнению описывающих эти явления математич. моделей, что, в свою очередь, делает невозможным применение аналитич. методов исследования этих моделей. Это объясняется, в частности, тем, что математич. модели реальных физич. процессов являются, как правило, нелинейными, т.е. описываются нелинейными уравнения М. ф. Для детального исследования таких моделей успешно применяются прямые численные методы с использованием ЭВМ. Для типичных задач М. ф. использование численных методов сводится к замене уравнений М. ф. для функций непрерывного аргумента алгебраич. уравнениями для сеточных функций, заданных на дискретном множестве точек (на сетке). Иными словами, вместо непрерывной модели среды вводится её дискретный аналог. Применение численных методов в ряде случаев позволяет заменить сложный, трудоёмкий и дорогостоящий физич. эксперимент значительно более экономичным математическим (численным) экспериментом. Достаточно полно проведённый математич. эксперимент является основой для выбора оптимальных условий реального физич. эксперимента, выбора параметров сложных физич. установок, определения условий проявления новых физич. эффектов и т. д. Таким образом численные методы необычайно расширяют область эффективного использования математич. моделей физич. явлений. Математич. модель физич. явления, как всякая модель, не может передать всех черт явления. Установить адекватность принятой модели исследуемому явлению можно только при помощи критерия практики, сопоставляя результаты теоретич. исследований принятой модели с данными экспериментов.

Во многих случаях об адекватности принятой модели можно судить на основании решения обратных задач М. ф., когда о свойствах изучаемых явлений природы, недоступных для непосредственного наблюдения, делаются заключения по результатам их косвенных физич. проявлений.

Для М. ф. характерно стремление строить такие математич. модели, к-рые не только дают описание и объяснение уже установленных физич. закономерностей изучаемого круга явлений, но и позволяют предсказать ещё не открытые закономерности. Классич. примером такой модели является теория всемирного тяготения Ньютона, позволившая не только объяснить движение известных к моменту её создания тел Солнечной системы, но и предсказать существование новых планет. С другой стороны, появляющиеся новые экспериментальные данные не всегда могут быть объяснены в рамках принятой модели. Для их объяснения требуется усложнение модели.

● Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1988; Соболев С. Л., Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; Курант Р., Уравнения с частными производными, пер. с англ., М., 1964; Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1—2, М., 1958.

А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, А. Г. Свешников.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА — раздел математики, объединяющий задачи, которые возникают при исследовании математических моделей производства, распределения, обмена и других протекающих в экономике процессов. Типичный пример таких моделей представляет собой *межотраслевой баланс*. Анализ современных моделей М. э. требует привлечения результатов из математич. программирования, теории игр и других областей математики. В свою очередь М. э. стимулировала развитие многих разделов из этих областей, а также и нек-рых более традиционных разделов математики.

Фундаментальную роль в М. э. играет понятие выпуклости, сравнимое по значимости с понятием дифференцируемости в математич. теориях физич. направленности. Это вызвано тем, что формализация экономич. понятий приводит, как правило, к выпуклым объектам. Так, комбинация двух технологически допустимых процессов с нек-рыми положительными весами, в сумме дающими единицу, также является технологически допустимым процессом, т. е. множество таких процессов выпукло. Формализация высказывания «каждое следующее пирожное менее предпочтительно, чем предыдущее» приводит к вогнутости (выпуклости вверх) функций полезности, описывающих предпочтение потребителя. Исход экономич. явления часто зависит от управляемых параметров. Напр., используя различные технологич. процессы, можно одни и те же ресурсы преобразовать в различные варианты выпуска. В связи с этим в М. э. часто приходится оперировать с многозначными функциями (отображениями), теория к-рых составляет важную часть математич. аппарата М. э.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЖУРНАЛЫ. Специальные М. ж., являющиеся органами различных научных учреждений, обществ и объединений, возникли в нач. 19 в. В 80-е гг. 20 в. во всём мире насчитывается более 250 М. ж. Значительно возросший выпуск математич. публикаций сделал необходимым издание реферативных журналов по математике. Расширение математич. образования привело к созданию М. ж., посвящённых педагогич. вопросам и методике преподавания математики (гл. обр. в средних учебных заведениях).

Общие журналы. Отдельные математич. статьи впервые стали печататься в общих журналах. Исторический интерес представляют: «Journal des savants» (P.— Amst.— Lpz., с 1665), в к-ром публиковались работы братьев Бернулли по исчислению бесконечно малых; «Acta eruditorum» (Lpz., 1682—1731), здесь напечатаны многочисленные работы Г. Лейбница по дифференциальному и интегральному исчислению, изложение содержания «Математических начал натуральной философии» И. Ньютона, а также статьи Г. Лопиталя, Бернулли и др. виднейших математиков; «Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae» (П., 1728—51, название неоднократно менялось). В изданиях Петербургской АН были помещены 43 работы Д. Бернулли, 473 работы Л. Эйлера (печатались до 1830), а также работы М. В. Остроградского — 60, В. Я. Буняковского — 103, П. Л. Чебышева — 50, Е. И. Золотарёва — 6, А. А. Маркова — 51, А. М. Ляпунова — 20, В. А. Стеклова — 47.

Многочисленные научные общества и университеты в различных городах России и СССР выпускали и выпускают свои издания: «Известия», «Труды», «Сообщения», «Сборники работ» и т. п., в к-рых имеются также математич. статьи. Среди этих изданий: «Казанский вестник» (1821—33) и его продолжение «Ученые записки Казанского университета» (с 1834), в к-рых впервые опубликованы важнейшие сочинения Н. И. Лобачевского; «Известия Физико-математического общества при Казанском университете» (с 1891), «Ученые записки имп. Московского университета» (1833—36), «Ученые записки Московского университета. Отдел физико-математический» (1880—1916), «Ученые записки Московского университета» (с 1933).

Различные общие издания иностранных академий, университетов и научных обществ также отводят значительное место математич. публикациям.

Ряд общих журналов имеет целью быстрое опубликование коротких предварительных сообщений о достигнутых результатах по математике. Основные журналы этого типа: «Доклады Академии наук СССР» (с 1922), «Comptes rendus de l'Académie des sciences» (P., с 1835), «Proceedings of the National Academy of sciences of the United States of America» (Wash., с 1915).

Специализированные математические журналы. Старейшие М. ж., издающиеся и в настоящее время (1987): «*Математический сборник*» (с 1866), «Journal für die reine und angewandte Mathematik» (B., с 1826), «Journal de mathématiques pures et appliquées» (P., с 1836), «Annales scientifiques de l'École normale supérieure» (P., с 1864), «Proceedings of the London Mathematical Society» (L., с 1865), «Mathematische Annalen» (B.— Lpz., с 1869), «Bulletin de la Société mathématique de France» (P., с 1872), «American Journal of Mathematics» (Balt., с 1878), «Acta mathematica» (Uppsala—Stockh., с 1882), «Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society» (Edin., с 1883), «Annals of mathematics» (Princeton, с 1884), «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo» (Palermo, с 1884), «Bulletin of the American Mathematical Society» (Lancaster, с 1891).

Специализированные М. ж. более позднего периода: «*Известия Академии наук СССР. Серия математическая*» (М., с 1937), «*Успехи математических наук*» (М., с 1946), «*Украинский математический журнал*» (К., с 1949), «*Сибирский математический журнал*» (Новосиб., с 1960), «*Математические заметки*» (М., с 1967), «*Литовский математический сборник*» (Вильнюс, с 1961), «Transactions of the American Mathematical Society» (Lancaster, с 1900), «Biometrika» (L., с 1901), «Mathematische Zeitschrift» (West-B., с 1918), «Fundamenta mathematicae» (Warsz., с 1920), «Journal of the London Mathematical Society» (L., с 1926), «Quarterly Journal of Mathematics» (Oxf., с 1930), «Scripta mathematica» (N. Y., с 1931), «Duke Mathematical Journal» (Durhem, с 1935), «Quarterly of Applied Mathematics» (Providence, с 1943), «Journal of the Mathematical Society of Japan» (Tokyo, с 1948), «Annales de l'Institut Fourier» (Grenoble, с 1949), «Canadian Journal of Mathematics» (Toronto, с 1949), «Mathematikai lapok» (Bdpst, с 1949), «Mathematische Nachrichten» (B., с 1948), «Studii si cercetări matematice» (Buc., с 1950), «Proceedings of the American Mathematical Society» (Providence, с 1950), «Nagoya Mathematical Journal» (Nagoya, с 1950), «Acta mathematica Academiae scientiarum hungaricae» (Bdpst, с 1950), «Časopis pro pěstování matematiky» (Praha, с 1951), «Publications de l'Institut mathématique de Belgrade» (Belgrade, с 1947), «Michigan Mathematical Journal» (Ann Arbor, с 1952), «Ricerche di matematica» (Napoli, с 1952), «SIAM Journal on Applied Mathematics» (Phil., с 1953), «Publications of the Mathematical Society of Japan» (Tokyo, с 1955), «Revue roumaine de mathématiques pures et appliquées» (Buc., с 1956), «Известия на Математическия институт (Българска Академия на науките)» (София, с 1953), «Illinois Journal of Mathematics» (Urbana, с 1957), «Monatshefte für Mathematik» (W., с 1948), «The Journal of the Australian Mathematical Society» (Groningen—Melbourne, с 1959), «Advances in Mathematics» (N. Y., с 1961), «Osaka Journal of Mathematics» (Osaka, с 1964), «Bulletin of the London mathematical society» (L., с 1969), «Mathematica balkanica» (Belgrad, с 1971).

Журналы по отдельным разделам математики. Бурное развитие математики во 2-й пол. 20 в. вызвало необходимость создания М. ж., посвящённых отд. её разделам. В их числе: «*Прикладная математика и механика*» (М., с 1936), «*Теория вероятностей и её применения*» (М., с 1956), «*Журнал вычислительной математики и математической физики*» (М., с 1961), «*Дифференциальные уравнения*» (Минск, с 1965), «*Кибернетика*» (К., с 1965); «*Функциональный анализ и его приложения*» (М., с 1967); «*Теоретическая и математическая физика*» (М., с 1969), «*Программирование*» (М., с 1975), «Bulletin of Mathematical Statistics» (Fukuoka, с 1947), «Calcutta Statistical Association Bulletin» (Calcutta, с 1947), «Journal of Applied Probability» (Michigan, с 1964), «Journal of the Royal Statistical Society. Series C» (L., с 1952), «Metrika» (W.— Würzburg, с 1958), «Operational Research Quarterly» (L., с 1950), «Sankhya. The Indian Journal of Statistics» (Calcutta, с 1933), «Zeitschrift für Wahrscheilichkeitstheorie und verwandte Gebiete» (West-B., с 1962), новое название «Probability theory and related fields» (с 1986), «Journal of Algebra» (N.Y., с 1964), «Algebras, groups and geometries» (США, с 1984), «Journal of Combinatorial Theory» (N.Y., с 1966), «Journal of Symbolic Logic» (Menasha, с 1936), «Journal of symbolic computation» (США, с 1985), «Journal of Differential Geometry» (Providence, с 1967), «Journal of Differential Equations» (N.Y., с 1965), «Journal of Functional Analysis» (N.Y—L., с 1967), «Journal of Number Theory» (L.—N.Y., с 1969), «Funkcialaj Ekvacioj» (Tokyo, с 1958), «Topology» (Oxf.— N.Y., с 1962), «Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik» (B., с 1955), «Tensor» (Sapporo, с 1938), «Annals of Probability» (Balt., с 1973), «Annals of Statistics» (Balt., с 1973), «Communications in statistics. Sequential analysis» (N.Y., с 1982), «Statistics and decisions» (ФРГ, с 1982), «Stochastic analysis and applications» (США, с 1983).

Реферативные журналы. В. В. Бобынин, «Русская физико-математическая библиография» (т. 1—3, 1885—1900), «Русская библиография по естествознанию и математике, составленная состоящим при имп. Академии наук С.-Петербургским бюро международной библиографии» (т. 1—9, 1904—17), «Физико-математический реферативный журнал» (1939—41), «Реферативный журнал. Математика» (с 1953); «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik» (B.— Lpz., с 1868), «Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete» (B., с 1931), «Mathematical Reviews» (Lancaster — Providence, с 1940).

Журналы по общим вопросам и по элементарной математике. «Математика в школе» (с 1934), «Archimedes» (Regensburg, с 1948), «Bulletin de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement publics» (P., с 1920), «American Mathematical Monthly» (Springfield, с 1894), «Euclides» (Groningen, с 1925), «Mathematika ve škole» (Praha, с 1951), «A matematika tanítása» (Bdpst, с 1953),

«Mathematics Magazine» (Pacoima — Buffalo — N.Y., с 1947), «Mathematics Teacher» (Syracuse—Lancaster—Wash., с 1908), «Mathematik in der Schule» (B., 1963), «Nordisk matematisk tidskrift» (Oslo, с 1953), «Education mathématique» (P., с 1898), «Enseignement mathématique» (P.— Gen., с 1899), «Praxis der Mathematik» (Köln, с 1959), «Revue de mathématiques spéciales» (P., с 1890).

«МАТЕМАТИ́ЧЕСКИЕ ЗАМЕ́ТКИ» — научный журнал Отделения математики АН СССР. Издаётся в Москве с 1967. Ежегодно выходят 2 тома, состоящие из 6 номеров каждый. Публикует краткие (до ½ авт. листа) оригинальные работы по всем разделам современной математики, а также информационные материалы. Тираж (1987) ок. 1200 экз.

МАТЕМАТИ́ЧЕСКИЕ ЗНА́КИ — условные обозначения, предназначенные для записи математических понятий, предложений и выкладок. Напр., $\sqrt{2}$ (квадратный корень из двух), $3>2$ (три больше двух) и т. п. Развитие математич. символики было тесно связано с общим развитием понятий и методов математики.

Первыми М. з. были знаки для изображения чисел — *цифры*, возникновение к-рых, по-видимому, предшествовало введению письменности. Наиболее древние системы нумерации (системы *счисления*) — вавилонская и египетская — возникли за $3^1/_2$ тысячелетия до н. э.

Первые М. з. для произвольных величин появились много позднее (начиная с 5—4 вв. до н. э.) в Др. Греции. Величины (площади, объёмы, углы) изображались в виде отрезков, а произведение двух произвольных однородных величин — в виде прямоугольника, построенного на соответствующих отрезках. В «Началах» Евклида (3 в. до н. э.) величины обозначаются двумя буквами — начальной и конечной буквами соответствующего отрезка, а иногда и одной. У Архимеда (3 в. до н. э.) последний способ обозначения становится обычным. Подобное обозначение содержало в себе возможности развития буквенного исчисления. Однако в классич. античной математике над буквами никаких операций не производилось, а буквенного исчисления создано не было.

Начатки буквенного обозначения и исчисления возникают в позднеэллинистич. эпоху в результате освобождения алгебры от геометрич. формы. Диофант (вероятно, 3 в.) записывал неизвестную (x) и её степени следующими знаками:

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
s'	$\delta^{\bar{\upsilon}}$	$\kappa^{\bar{\upsilon}}$	$\delta\delta^{\bar{\upsilon}}$	$\delta\kappa^{\bar{\upsilon}}$	$\kappa\kappa^{\bar{\upsilon}}$

($\delta^{\bar{\upsilon}}$ — от греч. термина δύναμις — сила, обозначающего квадрат неизвестной, $\kappa^{\bar{\upsilon}}$ — от греч. κόβος — куб). Справа от неизвестной или её степеней Диофант писал коэффициенты, напр. $3x^5$ изображалось $\delta\kappa^{\bar{\upsilon}}\bar{\gamma}$ (где $\bar{\gamma}=3$). При сложении Диофант приписывал слагаемые друг к другу, для вычитания употреблял специальный знак $\pitchfork$; равенство Диофант обозначал буквой ι (от греч. ἴσος — равный). Напр., уравнение

$$(x^3+8x)-(5x^2+1)=x$$

у Диофанта записалось бы так:

$$\kappa^{\bar{\upsilon}}\bar{\alpha}\, s'\bar{\eta} \pitchfork \delta^{\bar{\upsilon}}\bar{\varepsilon}\, \mu^{o}\bar{\alpha}\, \iota\, s'\bar{\alpha}$$

(здесь $\bar{\alpha}=1$, $\bar{\eta}=8$, $\bar{\varepsilon}=5$, а $\mu^{o}\bar{\alpha}$ означает, что единица $\bar{\alpha}$ не имеет множителя в виде степени неизвестного).

Несколько веков спустя индийцы ввели различные М. з. для нескольких неизвестных (сокращения наименований цветов, обозначавших неизвестные), квадрата, квадратного корня, вычитаемого числа.

Так, уравнение

$$3x^2+10x-8=x^2+1$$

в записи Брахмагупты (7 в.) имело бы вид:

йа ва 3 йа 10 ру 8
йа ва 1 йа 0 ру 1

(йа от йават — тават — неизвестное, ва от варга — квадратное число, ру от рупа — монета рупия — свободный член, точка над числом означает вычитаемое число).

Создание современной алгебраич. символики относится к 14—17 вв.; оно определялось успехами практич. арифметики и учения об уравнениях. В различных странах стихийно появляются М. з. для нек-рых действий и для степеней неизвестной величины. Проходят многие десятилетия и даже века, прежде чем вырабатывается тот или иной удобный символ. Так, в кон. 15 века Н. Шюке и Л. Пачоли употребляли знаки сложения и вычитания $\tilde{p}$ и $\dot{m}$ (от лат. plus — больше и minus — меньше), Я. Видман в кон. 15 в. ввёл современные + (вероятно, сокращение лат. et) и — . Ещё в 17 в. можно насчитать около десятка М. з. для действия умножения (среди них и ·, ×). Из современных знаков деления старейший — горизонтальная черта, она встречается у Леонардо Пизанского (12—13 вв.).

Весьма различны были и М. з. неизвестной величины и её степеней. В 16 — нач. 17 вв. конкурировало более десяти обозначений для одного только квадрата неизвестной, напр. *ce* (от лат. census — термин, служивший переводом греч. δύναμις — сила), $\frac{ii}{1}$, A (2), $1^{\underset{\smile}{2}}$, A^{ii}, aa, a^2 и др. Использование буквы x для неизвестной величины, вероятно, произошло от арабского термина shei — вещь, к-рый в средние века писался по латыни в форме xei, а затем сократился до x.

Уравнение

$$x^3+5x=12$$

имело бы у Дж. Кардано (1545) вид:

1. cubus p̃. 5. positionibus æquantur 12

(cubus — куб, positio — неизвестная, aequantur — равно);
у М. Штифеля (1544):

1ce + 5 ꝛe. æqu. 12

(ce — куб неизвестной, ꝛe — неизвестная);
у Р. Бомбелли (1572):

1 $\overset{3}{\smile}$ p. 5 $\overset{1}{\smile}$ eguale à 12

($\overset{3}{\smile}$ — куб неизвестной, $\overset{1}{\smile}$ — неизвестная, eguale à — равно);
у Ф. Виета (1591):

1C + 5 N, æquatur 12

(C — cubus — куб, N — numerus — число);
у Т. Гарриота (1631):

aaa + 5 . a ═══ 12

В 16 и нач. 17 вв. входят в употребление знаки равенства у Р. Рекорда (1557), квадратные скобки у Р. Бомбелли (1550), круглые — у Н. Тартальи (1556), фигурные — у Ф. Виета (1593).

Значительным шагом вперёд в развитии математич. символики явилось введение Ф. Виетом (1591) знаков для произвольных постоянных величин в виде прописных согласных букв латинского алфавита B, D, что дало возможность впервые записывать алгебраич. уравнения с произвольными коэффициентами и оперировать с ними. Неизвестные Ф. Виет обозначал гласными прописными

буквами A, E, ... Напр., запись Ф. Виета

A cubus + B plano in A 3, æquatur Dsolido

[cubus — куб, planus — плоский, т. е. В — двумерная величина; solidus — телесный (трёхмерный), размерность отмечалась для того, чтобы все члены были однородны] в наших символах выглядит так:

$$x^3 + 3bx = d.$$

Ф. Виет явился творцом алгебраич. формул. Р. Декарт (1637) придал знакам алгебры современный вид, обозначая неизвестные последними буквами латинского алфавита x, y, z, а произвольные данные величины — начальными буквами a, b, c. Ему же принадлежит нынешнее обозначение степени. Обозначения Р. Декарта обладали большим преимуществом по сравнению со всеми предыдущими. Поэтому они скоро получили всеобщее признание.

Дальнейшее развитие М. з. было тесно связано с созданием анализа бесконечно малых, для разработки к-рого основа была уже в большей мере подготовлена в алгебре. И. Ньютон в своём методе флюксий и флюент (1666 и следующие годы) ввёл знаки для последовательных флюксий

$$\dot{x},\ \ddot{x},\ \dddot{x}$$

(производных) величины x в виде $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ и для бесконечно малого приращения o. Несколько ранее Дж. Валлис (1655) предложил знак бесконечности ∞; предполагают, что Дж. Валлис использовал римский символ, означавший 1000.

Создателем современной символики дифференциального и интегрального исчислений является Г. Лейбниц. Он первый ясно понял огромное значение М. з. и старался найти наиболее удобные символы для понятий математики, т. е. вместо более или менее стихийного введения М. з. переходит к их сознательному и планомерному созданию. «Общее искусство знаков, или искусство обозначения,— писал Г. Лейбниц,— представляет чудесное пособие, так как оно разгружает воображение... Следует заботиться о том, чтобы обозначения были удобны для открытий. Это большей частью бывает, когда обозначения коротко выражают и как бы отображают интимнейшую сущность вещей. Тогда поразительным образом сокращается работа мысли...» (цитата по журналу «Успехи математических наук», 1948, т. 3, вып. 1, с. 155—56). Г. Лейбницу, в частности, принадлежат употребляемые ныне М. з. дифференциалов

$$dx,\ d^2x,\ d^3x$$

и интеграла

$$\int y\,dx.$$

Огромная заслуга в создании символики современной математики принадлежит Л. Эйлеру. Он ввёл (1734) в общее употребление первый знак переменной операции, именно знак функции $f(x)$ (от лат. functio — совершение, исполнение). Несколько ранее знак φx был применён И. Бернулли (1718). После работ Л. Эйлера знаки для многих индивидуальных функций, напр. тригонометрических, приобрели стандартный характер. Л. Эйлеру же принадлежат обозначения постоянных e (основание натуральных логарифмов, 1736), π (вероятно, от греческого περιφέρεια — окружность, периферия, 1736), мнимой единицы $i = \sqrt{-1}$ (от франц. imaginaire — мнимый, 1777, опубл. в 1794), к-рые стали общеупотребительными.

В 19 в. роль символики возрастает, и наряду с созданием новых М. з. математики стремятся к стандартизации основных символов. Нек-рые широко употребительные ныне М. з. появляются лишь в это время: абсолютной величины $|x|$ (К. Вейерштрасс, 1841), дифференциальных операций rot (от лат. rotatio — вращение) и div (от лат. divergentia — расходимость) (У. Клиффорд, 1878), вектора $\bar{r}$ (О. Коши, 1853), определителя $|\,:::\,|$ и матрицы $||\,:::\,||$ (А. Кэли, 1841) и др. Многие теории, возникшие в 19 в., напр. тензорное исчисление, не могли быть развиты без подходящей символики. Характерно при этом увеличение удельного веса М. з. для отношений, напр., сравнимости $\equiv$ (К. Гаусс, 1801), тождества $\equiv$ (Б. Риман, 1857), включения $\subset$, $\supset$ (Э. Шрёдер, 1890), изоморфизма $\cong$, эквивалентности $\backsim$, принадлежности $\in$ (Дж. Пеано, 1895; от греч. ἐστί — существует). Знаки переменных отношений появляются с развитием математич. логики, особенно широко применяющей М. з.

С точки зрения математич. логики, среди М. з. можно наметить следующие основные группы: А) знаки объектов, Б) знаки операций, В) знаки отношений. Напр., знаки 1,2,3,4 изображают числа, т. е. объекты, изучаемые арифметикой. Знак операции сложения + сам по себе не изображает никакого объекта; он получает предметное содержание лишь тогда, когда указано, какие числа складываются: запись 1+3 изображает число 4. Знак $>$ (больше) есть знак отношения между числами. Знак отношения получает вполне определённое содержание, когда указано, между какими объектами отношение рассматривается. К указанным трём основным группам М. з. примыкает ещё четвёртая: Г) вспомогательные знаки, устанавливающие порядок сочетания основных знаков. Достаточное представление о таких знаках дают скобки, указывающие порядок производства арифметич. действий.

Знаки каждой из трёх групп А), Б) и В) бывают двух родов: 1) индивидуальные знаки вполне определённых объектов, операций и отношений, 2) общие знаки «переменных», или «неизвестных», объектов, операций и отношений. Примерами знаков первого рода могут служить:

$А_1$) обозначения натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; трансцендентных чисел e и π; мнимой единицы $i = \sqrt{-1}$ и т. д.

$Б_1$) Знаки арифметич. действий +, —, ·, ×, : ; извлечения корня $\sqrt[n]{\ }$; дифференцирования $\frac{d}{dx}$; оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Сюда же относятся знаки индивидуальных функций sin, tg, log и т. д.

$В_1$) Знаки равенства $=$ и неравенства $>$, $<$, $\neq$; параллельности $\parallel$ и перпендикулярности $\perp$ и т. п.

Знаки второго рода изображают произвольные объекты, операции и отношения, подчинённые каким-либо заранее оговорённым условиям. Напр., при записи тождества

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

буквы a и b обозначают произвольные числа; при изучении функциональной зависимости

$$y = x^2$$

буквы x и y изображают произвольные числа, связанные заданным отношением; при решении уравнения

$$x^2 - 1 = 0$$

x обозначает любое число, удовлетворяющее данному уравнению (в результате решения этого уравнения устанавливается, что этому условию соответствуют лишь два возможных значения +1 и —1).

С логич. точки зрения вполне законно все такого рода общие знаки наз. знаками переменных, как это принято в математич. логике («область изменения» переменного может оказаться состоящей из одного единственного объекта или даже «пустой», напр. в случае уравнений, не имеющих решения). Дальнейшими примерами такого рода знаков могут служить:

$А_2$) обозначения точек, прямых, плоскостей и более сложных геометрич. фигур буквами в геометрии.

$Б_2$) Обозначения f, F, φ для функций и обозначения операторного исчисления, когда одной букве L соответствует, напр., произвольный оператор вида

$$\frac{dy}{dx} + a_2\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + a_n\frac{d^ny}{dx^n}.$$

ДАТЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАКОВ

Знак	Значение	Кто ввёл	Когда введён
Знаки индивидуальных объектов			
∞	бесконечность	Дж. Валлис	1655
e	основание натуральных логарифмов	Л. Эйлер	1736
π	отношение длины окружности к диаметру	У. Джонс Л. Эйлер	1706 1736
i	корень квадратный из -1	Л. Эйлер	1777 (в печати 1794)
i, j, k	единичные векторы	У. Гамильтон	1853
$[\,]$	целая часть числа, антье	К. Гаусс	1808
$\Pi(\alpha)$	угол параллельности	Н. И. Лобачевский	1835
Знаки переменных объектов			
x, y, z	неизвестные или переменные величины	Р. Декарт	1637
$\overline{r}$	вектор	О. Коши	1853
Знаки индивидуальных операций			
$+$	сложение	Я. Видман	1489
$-$	вычитание	Я. Видман	1489
$\times$	умножение	У. Оутред	1631
$\cdot$	умножение	Г. Лейбниц	1698
$:$	деление	Г. Лейбниц	1684
$a^2, a^3, \ldots, a^n$	степени	Р. Декарт И. Ньютон	1637 1676
$\sqrt{\ }, \sqrt[3]{\ }, \ldots$	корни	К. Рудольф	1525
Log	логарифм	И. Кеплер	1624
log	логарифм	Б. Кавальери	1632
ln	натуральный логарифм	А. Принсхейм	1893
sin	синус	Л. Эйлер	1748
cos	косинус	Л. Эйлер	1748
tg	тангенс	Л. Эйлер	1753
arc. sin	арксинус	Ж. Лагранж	1772
Sh	гиперболический синус	В. Риккати	1757
Ch	гиперболический косинус	В. Риккати	1757
$dx, ddx, \ldots,$ $d^2x, d^3x, \ldots$	дифференциал	Г. Лейбниц	1675 (в печати 1684)
$\int y\,dx$	интеграл	Г. Лейбниц	1675 (в печати 1686)
$\frac{d}{dx}$	производная	Г. Лейбниц	1675
$f'(x), y', f'x$	производная	Ж. Лагранж	1770, 1779
Δx	разность, приращение	Л. Эйлер	1755
$\frac{\partial}{\partial x}$	частная производная	А. Лежандр	1786
$\int_a^b f(x)\,dx$	определённый интеграл	Ж. Фурье	1819—1822
Σ	сумма	Л. Эйлер	1755
Π	произведение	К. Гаусс	1812
$!$	факториал	К. Крамп	1808
$\lvert x \rvert$	модуль	К. Вейерштрасс	1841
$\lVert x \rVert$	норма	Э. Шмидт	1908
$\lim$	предел	С. Люилье	1786
$\lim_{n=\infty}$	предел	У. Гамильтон	1853
$\lim_{n\to\infty}$	предел	многие математики	нач. 20 в.
ζ	дзета-функция	Б. Риман	1857
Γ	гамма-функция	А. Лежандр	1808
B	бета-функция	Ж. Бине	1839
Δ	дельта (оператор Лапласа)	Р. Мёрфи	1833
∇	набла (оператор Гамильтона)	У. Гамильтон	1853
Знаки переменных операций			
φx	функция	И. Бернулли	1718
$f(x)$	функция	Л. Эйлер	1734
Знаки индивидуальных отношений			
$=$	равенство	Р. Рекорд	1557
$\approx$	примерно равно	А. Гюнтер	1882
$>$	больше	Т. Гарриот	1631
$<$	меньше	Т. Гарриот	1631
$\equiv$	сравнимость	К. Гаусс	1801
$\equiv$	тождество	Б. Риман	1857
$\parallel$	параллельность	У. Оутред	1677 (в посмертном издании)
$\perp$	перпендикулярность	П. Эригон	1634
$\cap$	пересечение	Дж. Пеано	1888
$\cup$	объединение	Дж. Пеано	1888
$\subset$	содержится	Э. Шрёдер	1890
$\supset$	включается	Э. Шрёдер	1890
$\in$	принадлежность	Дж. Пеано	1895

Обозначения для переменных отношений менее распространены; они находят применение лишь в математич. логике и в сравнительно абстрактных, по преимуществу аксиоматических, математич. исследованиях.

● Александрова Н. В., Математические термины, М., 1978; Cajori F., A history of mathematical notations, v. 1—2, Chi., 1928—29.

И. Г. Башмакова, А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИНСТИТУ́ТЫ — научные учреждения, ведущие исследовательскую работу в области математики и её приложений. В СССР почти все М. и. входят в состав АН СССР или АН союзных республик. В АН СССР имеются *Математический институт* имени В. А. Стеклова, *Прикладной математики институт* имени М. В. Келдыша, *Вычислительный центр*, *Математики институт* Сибирского отделения, *Математики и механики институт* Уральского отделения.

Центры н.-и. работ по математике в АН союзных республик либо входят составной частью в ин-ты более широкого профиля, либо являются самостоятельными М. и. Число последних увеличивается; они, как правило, выделяются из указанных более общих ин-тов (ниже даны даты основания последних). К нач. 1987 действовали следующие ин-ты АН союзных республик: Ин-т математики АН УССР (осн. в 1934), Тбилисский математич. ин-т им. А. М. Размадзе АН Груз. ССР (осн. в 1935), Ин-т математики им. В. И. Романовского АН Узб. ССР (осн. в 1943), Ин-т математики АН Арм. ССР (осн. в 1955), Ин-т математики АН БССР (осн. в 1955), Ин-т математики и кибернетики АН Литов. ССР (осн. в 1956), Ин-т математики и механики АН Азерб. ССР (осн. в 1959), Ин-т физики и математики АН Кирг. ССР (осн. в 1960), Ин-т математики с вычислительным центром АН Молд. ССР (осн. в 1964), Ин-т математики и механики АН Казах. ССР (осн. в 1965), Ин-т прикладной математики и механики АН УССР (осн. в 1970), Математич. ин-т с вычислительным центром АН Тадж. ССР (осн. в 1973).

В социалистич. странах М. и. в основном также входят в состав академий наук. В капиталистич. странах М. и. входят обычно в состав университетов.

МАТЕМАТИ́ЧЕСКИЕ КОНГРЕ́ССЫ международные созываются 1 раз в 4 года. Первый М. к. состоялся в Цюрихе в 1898. После 2-й мировой войны 1939—45 М. к. состоялись в Кембридже (США, 1950), Амстердаме (1954),

Эдинбурге (1958), Стокгольме (1962), Москве (1966), Ницце (1970), Ванкувере (Канада, 1974), Хельсинки (1978), Варшаве (1983), Беркли (1986). Число делегатов достигает 3—5 тыс. человек.

На М. к. заслушиваются и обсуждаются обзорные доклады о достижениях математич. науки и её приложений за время, истекшее после предшествующего конгресса, а также доклады о наиболее ярких результатах, полученных за этот период.

Программа конгрессов включает пленарные заседания для всех участников и секционные заседания. Список секций устанавливается перед очередным конгрессом и меняется со временем. Так, напр., во время М. к. в Москве работало 15, в Ницце — 33, а в Беркли — 19 секций.

Помимо чисто математич. секций (оснований математики и математич. логики, теории чисел, алгебры, геометрии, топологии, анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с частными производными, теории вероятностей и математич. статистики), на М. к. организуются обычно секции математич. проблем физики и механики, педагогики и истории математики. На последних М. к. организовывались секции по прикладным разделам математики: численному анализу, теории оптимизации и другим.

Научная программа конгрессов состоит из часовых обзорных докладов, зачитываемых на пленарных заседаниях (пленарных докладов), обзорных секционных докладов (45 мин) и коротких сообщений на секциях (10—15 мин). По традиции на М. к. зачитывается 16 пленарных докладов и 60—90 обзорных секционных; исключение составлял М. к. в Ницце, в программу к-рого было включено в связи с увеличением числа секций 230 обзорных секционных докладов.

Пленарные и обзорные секционные доклады являются заказными, т. е. докладчики персонально приглашаются Организационным комитетом конгресса для прочтения доклада по определённому направлению. Короткие сообщения включались в программу всех М. к., кроме М. к. в Ницце. Включение коротких сообщений в программу происходит по заявкам участников, однако Организационный комитет конгресса обычно производит нек-рый отбор.

Практическая организация М. к. принадлежит стране, в к-рой решено провести очередной конгресс. С этой целью создаётся национальный Организационный комитет, к-рый решает вопросы подготовки М. к. Со времени создания Международного математического союза (1952) в подготовке научных программ М. к. главная роль принадлежит органам Международного математич. союза — Исполкому и назначаемому им Международному консультативному комитету. Консультативный комитет устанавливает список секций и создаёт комиссии экспертов по секциям — т. н. панели. Панели подготавливают предложения по персональному составу приглашённых докладчиков по секциям, а также вносят предложения о пленарных докладчиках. Окончательное решение по этим вопросам выносится Консультативным комитетом и Исполкомом Международного математич. союза.

С 1950 на первом пленарном заседании М. к. происходит вручение золотых медалей и премий Дж. Филдса в размере 1500 американских долларов, к-рыми Международный математич. союз поощряет молодых математиков за крупные научные достижения. На заключительном пленарном заседании М. к. утверждаются место и сроки проведения следующего конгресса.

Советские математики участвуют в М. к. с 1928 (М. к. в Болонье). Показателем крупной роли советской математики в мировой математич. науке может служить число обзорных докладов, поручаемых сов. учёным: на М. к. 1966 и 1986 доля докладов советских учёных составляла около 25%.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЩЕСТВА — добровольные общественные организации, объединяющие лиц (в масштабе города или всей страны), работающих в области математики. Первые М. о. возникли на рубеже 17—18 вв. в Германии и Великобритании. Многие М. о. были созданы в 19 в.: напр., *Московское математическое общество* (1867), *Харьковское математическое общество* (1879), *Казанское физико-математическое общество* (1890), Лондонское М. о. (1865), М. о. Франции (1872), Физико-математич. об-во Японии (1884), Немецкий союз математиков (1890), Американское М. о. (1894) и др. Обычно М. о. издают один или несколько журналов, в названиях к-рых, как правило, указывается название соответствующего М. о. В СССР (сер. 80-х гг.) действуют Московское, Ленинградское, Новосибирское, Уральское, Грузинское, Литовское и др. М. о.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ — таблицы, содержащие числовые значения к.-л. функции, вычисленные для нек-рых значений её аргумента (или аргументов).

Для составления таблицы значений функции $y=f(x)$ (т а б у л и р о в а н и я) обычно выбирают дискретные значения переменного x, расположенные друг от друга на нек-ром расстоянии (ш а г т а б л и ц ы), вычисляют соответствующие им значения y с той или иной точностью (т. е. числом десятичных знаков или значащих цифр). Для вычисления значений y, расположенных между табличными значениями, применяется интерполяция. Для таблиц массового употребления, как правило, предусматривается линейная интерполяция, причём необходимые для проведения вычислений вспомогательные величины (напр., разности между соседними табличными значениями) часто приводятся в таблицах. Для вычисления М. т. заранее определяют её точность и область изменения аргумента, шаг выбирают так, чтобы интерполяция была простейшей и позволяла вычислять промежуточные значения с принятой в М. т. точностью.

Процесс вычисления М. т. раньше осуществлялся вручную или при помощи простейших механич. средств (арифмометров, настольных электромеханич. машин и др.) и отнимал у вычислителей многие месяцы и годы. Напр., создание двадцатизначных таблиц десятичных логарифмов чисел от 1 до 100 000, изданных в двух томах в Великобритании в 1954, потребовало ок. 20 лет. С появлением ЭВМ работа по вычислению М. т. значительно упростилась. Для проверки М. т. разработаны различные приёмы (одним из них является проверка по разностям).

М. т. условно можно разделить на следующие группы.

1. Арифметич. таблицы для проведения простейших расчётов: таблицы умножения, квадратов, кубов, корней и др. К ним можно отнести также нек-рые таблицы теории чисел (напр., таблицы простых чисел).

2. Таблицы элементарных функций: алгебраич. выражений, логарифмов, тригонометрических, гиперболических и др. элементарных функций.

3. Таблицы специальных (высших трансцендентных) функций: гамма-функции, интеграла вероятности, ортогональных многочленов, цилиндрич. функций различных типов, гипергеометрич. функций, сферич. функций, эллиптич. функций Якоби, эллиптич. интегралов и др. специальных функций.

4. Таблицы математич. констант: чисел π, e и др.

Кроме того, имеются таблицы коэффициентов интерполяционных формул, корней различных трансцендентных уравнений и др. Многочисленные таблицы специального назначения составлены и составляются в математич. статистике, астрономии, гидравлике, геодезии, баллистике и др. Многие из этих таблиц — чисто математические (т. е. составлены для функций, не содержащих физич. или технич. констант).

М. т. имеют богатую историю. Нек-рые таблицы из группы I использовались в Вавилоне за 2000 лет до н. э. Первые таблицы тригонометрич. функций составлены в Др. Греции Птолемеем (2 в.). В таблицах Птолемея приведены значения длин хорд, соответствующих дугам от 0° до 180° с шагом в 30′ (длина хорды выражена в долях радиуса по шестидесятеричной системе). В этих таблицах приведены также разности. До нас дошли также таблицы тригоном-

рич. функций, составленные в 5—11 вв. арабскими, среднеазиатскими, индийскими учёными. В Европе М. т. начали появляться в эпоху Возрождения начиная с 15 в. Таблицы Регномонтана (15 в.), в к-рых впервые использована десятичная система счисления, содержат значения синусов с 7 знаками и с шагом в 1′. Таблицы были вычислены и изданы также Н. Коперником (1543), И. Кеплером (1604), И. Ньютоном (1658) и др. Наиболее точные в то время таблицы (с 15 знаками с шагом в 10″) были вычислены и изданы учениками Н. Коперника — Г. Ретиком (1596) и Б. Питиском (1613). Эти фундаментальные таблицы послужили основой для многих последующих таблиц тригонометрич. функций. Таблицы натуральных логарифмов были впервые вычислены и изданы в 1614 Дж. Непером и в 1620 близкие им таблицы Й. Бюрги. Первые таблицы десятичных логарифмов, изданные Г. Бригсом (1617), содержали значения логарифмов с 8 знаками для чисел от 1 до 1000, в 1624 он опубликовал таблицы с 14 знаками для чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000. Появились таблицы логарифмов тригонометрич. функций, причём сначала были опубликованы таблицы натуральных логарифмов тригонометрич. функций Дж. Непера (1614), Дж. Спейделла (1619), И. Кеплера (1627) и др., а затем — таблицы десятичных логарифмов тригонометрич. функций А. Влакка (1629) с шагом в 1′, а в 1633 — с шагом в 10″. Г. Бригс в 1633 издал таблицы натуральных значений синуса с 15 знаками, тангенса и секанса с 10 знаками, а также значений $\lg \sin x$ и $\lg \operatorname{tg} x$ с шагом 0°,01. В 18 и 19 вв. значительно возросли количество таблиц, их точность и число классов табулированных функций. В 20 в. были вычислены и изданы высокоточные таблицы элементарных функций, послужившие основой для многочисленных, менее точных таблиц для широкого пользования. Начиная с 18 в. стали появляться также таблицы специальных функций. В 1813 изданы таблицы К. Гаусса для десятичных логарифмов гамма-функции $\Gamma(x+1)$ с 20 знаками для x от 0 до 1 с шагом в 0,01, в 1814 — аналогичные таблицы А. Лежандра с 14 знаками для x от -1 до $+1$ с шагом в $^1/_{12}$, а также с 12 знаками для x от 0 до 1 с шагом в 0,001. В 1816 появились вычисленные А. Лежандром таблицы десятичных логарифмов полных эллиптич. интегралов с 12 знаками для аргумента от 0° до 90° с шагом в 0°,1. Много фундаментальных таблиц цилиндрич. функций опубликовали Ф. Бессель (1826), Э. Ломмель (1868) и др. Важную роль сыграло Британское общество по созданию М. т., возникшее в сер. 19 в., к-рое подготовило много М. т. специальных функций. В США созданием нескольких десятков М. т. специальных функций занимались Национальное бюро стандартов, Вычислительный центр Гарвардского ун-та. В СССР большое количество М. т. подготовили ВЦ АН СССР и нек-рые др. ин-ты. В связи с широким распространением ЭВМ число издаваемых М. т. резко уменьшилось.

Для эффективного использования М. т. создаются специальные указатели. Один из наиболее полных указателей издан в Великобритании и США в 1962. ВЦ АН СССР подготовил более полный указатель, в к-ром приведены подробные характеристики М. т. и многих алгоритмов и программ для ЭВМ. *М. К. Керимов.*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ — часть математики, в которой *функции* и их обобщения изучаются методом *пределов*. Понятие предела тесно связано с понятием бесконечно малой величины, поэтому можно также сказать, что М. а. изучает функции и их обобщения методом бесконечно малых.

Название «М. а.» — сокращённое видоизменение старого названия этой части математики — «Анализ бесконечно малых»; последнее полнее раскрывает содержание, но оно тоже сокращённое (название «Анализ посредством бесконечно малых» охарактеризовало бы предмет более точно). В классич. М. а. объектами изучения (анализа) являются прежде всего функции. «Прежде всего» потому, что развитие М. а. привело к возможности изучения его методами более сложных образований, чем функция, — функционалов, операторов и т. д.

В природе и технике всюду встречаются движения, процессы, к-рые описываются функциями; законы явлений природы также обычно описываются функциями. Отсюда объективная важность М. а. как средства изучения функций.

М. а. в широком понимании этого термина охватывает весьма большую часть математики. В него входят *дифференциальное исчисление*, *интегральное исчисление*, теория функций действительного переменного, теория функций комплексного переменного, *приближение функций*, теория *дифференциальных уравнений*, теория *интегральных уравнений*, *дифференциальная геометрия*, *вариационное исчисление*, *функциональный анализ* и нек-рые другие математич. дисциплины. Современные *чисел теория* и *вероятностей теория* применяют и развивают методы М. а.

Всё же термин «М. а.» часто употребляется для наименования только основ математического анализа, объединяющих в себе теорию *действительного числа*, теорию пределов, теорию *рядов*, дифференциальное и интегральное исчисление и их непосредственные приложения, такие, как теория максимумов и минимумов, теория *неявных функций*, *Фурье ряды*, *Фурье интегралы*.

Функция. В М. а. исходят из определения функции по Лобачевскому и Дирихле. Если каждому числу x из нек-рого множества F чисел в силу к.-л. закона приведено в соответствие число y, то этим определена функция

$$y = f(x)$$

от одного переменного x. Аналогично определяется функция

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

от n переменных, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мерного пространства; рассматривают также функции

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots)$$

от точек $x = (x_1, x_2, \ldots)$ нек-рого бесконечномерного пространства, к-рые, впрочем, чаще называют функционалами.

Элементарные функции. Фундаментальное значение в М. а. играют *элементарные функции*. На практике в основном оперируют с элементарными функциями, ими приближают функции более сложной природы. Элементарные функции можно рассматривать не только для действительных, но и комплексных x; тогда представления об этих функциях становятся в определённом смысле законченными. В связи с этим возникла важная ветвь М. а., наз. теорией функций комплексного переменного или теорией *аналитических функций*.

Действительное число. Понятие функции существенно базируется на понятии действительного (рационального и иррационального) числа. Оно окончательно сформировалось только в кон. 19 в. В частности, установлена логически безупречная связь между числами и точками геометрич. прямой, приведшая к формальному обоснованию идей Р. Декарта (сер. 17 в.), к-рый ввёл в математику прямоугольную систему координат и представление в ней функций графиками.

Предел. В М. а. методом изучения функций является предел. Различают предел последовательности и предел функции. Эти понятия окончательно сформировались только в 19 в., хотя представление о них имели ещё древнегреческие учёные. Достаточно сказать, что Архимед (3 в. до н. э.) умел вычислять площадь сегмента параболы при помощи процесса, к-рый мы назвали бы предельным переходом (см. *Исчерпывания метод*).

Непрерывные функции. Важный класс функций, изучаемых в М. а., образуют *непрерывные функции*. Одно из возможных определений этого понятия: функция $y=f(x)$ от одного переменного x, заданная на интервале (a, b), наз. непрерывной в точке x, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x+\Delta x) - f(x)] = 0.$$

Функция непрерывна на интервале (a, b), если она непрерывна во всех его точках; тогда её график представляет собой кривую, непрерывную в житейском понимании этого слова.

Производная и дифференциал. Среди непрерывных функций следует выделить функции, имеющие *производную*. Производная от функции

$$y=f(x),\ a<x<b,$$

в точке x есть скорость изменения её в этой точке, т. е. предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x). \qquad (1)$$

Если y есть координата точки, движущейся по оси ординат в момент времени x, то $f'(x)$ есть мгновенная скорость точки в момент времени x.

По знаку производной $f'(x)$ судят о характере изменения $f(x)$: если $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) на интервале (c, d), то функция f возрастает (убывает) на этом интервале. Если же функция f в точке x_0 достигает локального экстремума (максимума или минимума) и имеет в этой точке производную, то последняя равна нулю в этой точке $f'(x_0)=0$.

Равенство (1) можно заменить эквивалентным равенством

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon(\Delta x),\quad \varepsilon(\Delta x)\longrightarrow 0,\ \Delta x\longrightarrow 0,$$

или

$$\Delta y=f'(x)\,\Delta x+\Delta x\varepsilon(\Delta x),$$

где $\varepsilon(\Delta x)$ есть бесконечно малая, когда $\Delta x\to 0$; т. е. если функция f имеет производную в точке x, то приращение её в этой точке разлагается на два слагаемых. Из них первое

$$dy=f'(x)\,\Delta x \qquad (2)$$

есть линейная функция от Δx (пропорциональная Δx), второе — стремится к нулю быстрее, чем Δx.

Величина (2) наз. *дифференциалом* функции, соответствующим приращению Δx. При малых Δx можно считать Δy приближённо равным dy:

$$\Delta y\approx dy.$$

Приведённые рассуждения о дифференциале характерны для М. а. Они распространяются на функции многих переменных и на функционалы.

Напр., если функция

$$z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f(x)$$

от n переменных имеет непрерывные *частные производные* в точке $x=(x_1, \ldots, x_n)$, то её приращение Δz, соответствующее приращениям Δx_1, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ независимых переменных, можно записать в виде

$$\Delta z=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_k+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k^2}\,\varepsilon(\Delta x), \qquad (3)$$

где $\varepsilon(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, т. е. если все $\Delta x_k\to 0$. Здесь первый член в правой части (3) есть дифференциал dz функции f. Он линейно зависит от $\Delta x=(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, а второй член стремится к нулю при $\Delta x\to 0$ быстрее, чем Δx.

Пусть задан функционал (см. *Вариационное исчисление*)

$$J(x)=\int_{t_0}^{t_1}L(t, x, x')\,dt,$$

распространённый на класс $\mathfrak{M}$ функций $x(t)$, имеющих на отрезке $[t_0, t_1]$ непрерывную производную и удовлетворяющих граничным условиям $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$, где x_0, x_1 — данные числа; пусть, далее, $\mathfrak{M}_0$ — класс функций $h(t)$, имеющих непрерывную производную на $[t_0, t_1]$ и таких, что $h(t_0)=h(t_1)=0$. Очевидно, если $x(t)\in\mathfrak{M}$ и $h(t)\in\mathfrak{M}_0$, то $x(t)+h(t)\in\mathfrak{M}$.

В вариационном исчислении доказывается, что при известных условиях на L приращение функционала $J(x)$ может быть записано в виде

$$J(x+h)-J(x)=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right)\right)h(t)\,dt+o(\|h\|) \qquad (4)$$

при $\|h\|\to 0$, где

$$\|h\|=\max_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}|h(t)|+\max_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}|h'(t)|,$$

а $o(\|h\|)$ при $\|h\|\to 0$ есть величина, стремящаяся к нулю быстрее, чем $\|h\|$, а первый член линейно зависит от $h\in\mathfrak{M}_0$. Первый член в (4) наз. вариацией функционала и обозначается $\delta J(x, h)$.

Интеграл. Наряду с производной интеграл имеет фундаментальное значение в М. а. Различают неопределённый и определённый интеграл.

Неопределённый интеграл тесно связан с первообразной функцией. Функцию $F(x)$ наз. первообразной от функции f на интервале (a, b), если на этом интервале $F'(x)=f(x)$.

Определённый интеграл (Римана) от функции f на отрезке $[a, b]$ есть предел

$$\lim\sum_{j=0}^{N-1}f(\xi_j)(x_{j+1}-x_j)=\int_a^b f(x)\,dx$$

при $\max(x_{j+1}-x_j)\to 0$; здесь $a=x_0<x_1<\ldots<x_{N-1}<x_N=b$, $x_j\leqslant\xi_j\leqslant x_{j+1}$.

Если функция f положительна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интеграл от неё на этом отрезке равен площади фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$.

Класс интегрируемых по Риману функций содержит все непрерывные на $[a, b]$ функции и нек-рые разрывные функции. Но все они необходимо ограничены. Для неограниченных функций, растущих не очень быстро, а также для нек-рых функций, заданных на бесконечных интервалах, вводят т. н. *несобственные интегралы*, требующие для своего определения двойного перехода к пределу. Понятие интеграла Римана для функции одного переменного распространяется на функции многих переменных (см. *Кратный интеграл*).

С другой стороны, потребности М. а. привели к обобщению интеграла совсем в другом направлении, имеется в виду интеграл Лебега или более общий интеграл Лебега — Стилтьеса. Существенным в определении этих интегралов является введение для нек-рых множеств, наз. измеримыми, понятия их меры и на этом основании — понятия измеримой функции. Для измеримых функций и вводится интеграл Лебега — Стилтьеса. При этом рассматривается широкий диапазон разных мер и соответствующих им классов измеримых множеств и функций. Это даёт возможность приспособить тот или иной интеграл к определённой конкретной задаче.

Формула Ньютона — Лейбница. Между производной и интегралом имеется связь, выражаемая формулой (теоремой) Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Здесь $f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция, а $F(x)$ — её первообразная.

Формула и ряд Тейлора. Наряду с производной и интегралом важнейшим понятием (орудием исследования) в М. а. являются *Тейлора формула* и *Тейлора ряд*. Если функция $f(x)$, $a<x<b$, имеет в окрестности точки x_0 непрерывные производные до порядка n включительно, то её можно приблизить в этой окрестности многочленом

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

наз. её многочленом Тейлора (степени n), по степеням $x-x_0$:

$$f(x)\approx P_n(x)$$

(формула Тейлора); при этом ошибка приближения

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

стремится к нулю при $x\to x_0$ быстрее, чем $(x-x_0)^n$:

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n)\ \text{при}\ x\longrightarrow x_0.$$

Таким образом, функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 может быть приближена с любой степенью точности весьма

простой функцией (многочленом), требующей для своего вычисления только арифметич. операций — сложения, вычитания и умножения.

Особенно важными являются т. н. аналитические в определённой окрестности x_0 функции, имеющие бесконечное число производных, такие, что для них в этой окрестности $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$; они могут быть представлены в виде бесконечного степенного ряда Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Разложения Тейлора при определённых условиях возможны и для функций многих переменных, а также функционалов и операторов.

Историческая справка. До 17 в. М. а. представлял собой совокупность решений разрозненных частных задач; напр., в интегральном исчислении — это задачи на вычисление площадей фигур, объёмов тел с кривыми границами, работы переменной силы и т. д. Каждая задача или частная группа задач решалась своим методом, подчас сложным и громоздким (о предыстории М. а. см. ст. *Бесконечно малых исчисление*). М. а. как единое и систематич. целое сложился в трудах И. Ньютона, Г. Лейбница, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа и др. учёных 17—18 вв., а его база — теория пределов — была разработана О. Коши в нач. 19 в. Глубокий анализ исходных понятий М. а. был связан с развитием в 19—20 вв. теории множеств, теории меры, теории функций действительного переменного и привёл к разнообразным обобщениям.

● Ла Валле-Пуссен Ш.-Ж. де, Курс анализа бесконечно малых, пер. с франц., т. 1—2, М., 1933; Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 4 изд., ч. 1, М., 1982; 2 изд., ч. 2, М., 1980; Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; Никольский С. М., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1—2, М., 1983; Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 7 изд., т. 1—2, М., 1970; 5 изд., т. 3, М., 1970.

С. М. Никольский.

МАТЕМАТИ́ЧЕСКИЙ ИНСТИТУ́Т имени В. А. Стеклова Академии наук СССР (МИАН) — центральное советское научно-исследовательское учреждение, разрабатывающее вопросы математики; находится в Москве; имеется отделение в Ленинграде. Существует как самостоятельное учреждение с 1934, когда он выделился из состава Физико-математич. ин-та АН, организованного В. А. Стекловым в 1921. С момента основания был возглавлен И.М. Виноградовым. На базе отделов ин-та организован ряд учреждений АН: Институт механики АН СССР (ныне Институт проблем механики АН СССР), Институт точной механики и вычислительной техники АН СССР, Институт прикладной математики АН СССР, Вычислительный центр АН СССР, Институт математики Сибирского отделения АН СССР, Институт математики и механики Уральского отделения АН СССР.

В ин-те разрабатываются наиболее важные проблемы теории чисел, алгебры, математич. логики, геометрии, топологии, теории функций, дифференциальных уравнений, математич. теории оптимального управления, теории вероятностей, математич. статистики и др. разделов математики, а также важные проблемы механики и теоретич. физики. Ин-т издаёт «Труды» (с 1931). Награждён орденом Ленина (1967) и орденом Октябрьской Революции (1984).

«МАТЕМАТИ́ЧЕСКИЙ СБО́РНИК» — научный журнал, публикующий оригинальные научные исследования, относящиеся к различным разделам математики. Издаётся в Москве. Основан в 1866 Московским математич. обществом («М. с.» — старейший из издающихся в СССР математич. журналов). В 1932—35 выходил как объединённый орган Московского, Ленинградского и Казанского математич. обществ; с 1936 — орган АН СССР, а с 1948 — АН СССР и Московского математич. общества. «М. с.» первоначально издавался на средства, собранные среди членов общества; из-за финансовых трудностей в нек-рые годы выходил нерегулярно. С 1926 выходит регулярно, по одному тому в год (до 1934 по 4 номера, а в 1935—1937 по 6 номеров); с 1938 ежегодно выходит 2 т. по 3 номера, а с 1956—3 т. в год по 4 номера каждый, с 1936 ведётся «Новая серия» и идёт двойная нумерация томов [с 1(43)]. Тираж (1987) ок. 2 тыс. экз.

МАТЕМАТИ́ЧЕСКИЙ СОЮЗ Международный (International Mathematical Union, IMU) — научное объединение математиков, созданное в 1952. Членами М. с. (1987) являются 53 страны, в т. ч. СССР (с 1957), Польша, Венгрия, Чехословакия, ГДР, КНДР, Румыния, Югославия, Болгария, Куба, Вьетнам. Страны — члены М. с. разбиты на 5 групп: члены 5-й, старшей группы — СССР, США, Великобритания, Франция, Япония, ФРГ; члены 4-й — Италия, Канада.

Высший орган М. с.— Генеральная ассамблея М. с., созываемая 1 раз в 4 года, обычно непосредственно перед очередным Международным конгрессом математиков. Практич. руководство М. с. осуществляется Исполкомом, избираемым Генеральной ассамблеей на 4 года. В состав Исполкома входят президент, 2 вице-президента, генеральный секретарь, 5 членов и бывший президент М. с. (с правом совещательного голоса).

С 1 янв. 1987 по 1 янв. 1991 президент М. с.— Л. Д. Фаддеев (СССР), вице-президенты — В. Фейт (США), Л. Хермандер (Швеция), генеральный секретарь — О. Лехто (Финляндия). Исполком М. с. собирается для рассмотрения текущих дел не реже 1 раза в год.

Страны — члены М. с. осуществляют своё участие в союзе через Национальные комитеты математиков: Национальный комитет советских математиков, созданный в 1957, функционирует при АН СССР (председатель — С. Л. Соболев).

Задачи М. с.: организация и поощрение международного сотрудничества в области математики; подготовка научной программы и помощь в организации Международных конгрессов математиков; поддержка исследований в области математики в развивающихся странах, содействие подъёму уровня математич. образования в этих странах; содействие повышению уровня математич. образования во всех странах; содействие развитию прикладных разделов математики и внедрению математич. методов в другие науки.

При М. с. функционируют комиссии по математич. образованию и по развитию и научному обмену. В обеих комиссиях участвуют советские математики. Комиссия по математич. образованию созывает раз в 4—5 лет международные конгрессы по математич. образованию.

М. с. оказывает научную организационную и финансовую помощь важнейшим международным мероприятиям в области математики — конференциям, симпозиумам, летним школам. М. с. организует (а также издаёт и распространяет) циклы лекций в крупных научных центрах по актуальным направлениям современной математики. М. с. оказывает помощь в посылке высококвалифицированных лекторов в развивающиеся страны для подъёма уровня научных исследований в этих странах, а также организует посылку стажёров из развивающихся стран в ведущие математич. центры. М. с. оказывает помощь в организации региональных математич. мероприятий в первую очередь в развивающихся странах.

МАТЕМАТИ́ЧЕСКОЕ О́ЖИДАНИЕ, среднее значение,— одна из числовых характеристик распределения вероятностей случайной величины. Для случайной величины X, принимающей последовательность значений $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ с вероятностями, равными соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$, математическое ожидание определяется формулой

$$\mathsf{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

при условии, что ряд сходится абсолютно; для случайной величины X с непрерывным распределением, имеющим плотность вероятности $p(x)$,

$$\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx,$$

если интеграл сходится абсолютно. М. о. характеризует расположение значений случайной величины. Полностью эта роль М. о. разъясняется законом больших чисел. При сложении случайных величин их М. о. складываются, при умножении независимых случайных величин их М. о. перемножаются.

Назв. «М. о.» происходит от понятия «ожидаемого значения выигрыша» (М. о. выигрыша), впервые появившегося в теории азартных игр в трудах Б. Паскаля и Х. Гюйгенса в 17 в. Но впервые в полной мере это понятие было оценено и использовано П. Л. Чебышевым (сер. 19 в.); термин «М. о.» ввёл П. Лаплас (1795).

Многие важные характеристики распределений определяются как М. о. нек-рых функций от случайных величин, см., напр., *Момент*, *Характеристическая функция*.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — математическая дисциплина, посвящённая теории и методам нахождения экстремумов (максимумов или минимумов) функций многих переменных при наличии дополнительных ограничений на эти переменные, имеющих форму равенств или неравенств. М. п. сформировалось в 50-х гг. 20 в. в связи с практич. задачами выбора оптимального варианта среди многих возможных вариантов. Задачи такого рода возникают во многих областях целенаправленной человеческой деятельности: в экономике (планирование и управление экономич. объектами), в технике (выбор наилучшего проекта или оптимальной конструкции), в военном деле (при планировании боевых операций и управлении войсками). Источником задач М. п. являются также другие разделы математики, напр. теория приближений, математич. статистика.

В общем виде задачу М. п. можно записать следующим образом: максимизировать целевую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ на допустимом множестве G, где G задаётся системой

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0,\ i=1, \ldots, m,\ (x_1, \ldots, x_n) \in X;$$

здесь X есть нек-рое подмножество $\mathbb{R}^n$. В большинстве практич. задач X представляет собой неотрицательный ортант $\mathbb{R}^n_+$, так что последнее условие представляет собой попросту ограничение неотрицательности всех переменных: $x_j \geqslant 0$, $j=1, \ldots, n$. Точка $x=(x_1, \ldots, x_n)$, к-рая удовлетворяет всем ограничениям задачи, наз. д о п у с т и м о й или д о п у с т и м ы м р е ш е н и е м; допустимая точка, в к-рой f принимает наибольшее значение по сравнению с другими допустимыми точками (близкими к данной), наз. (л о к а л ь н о) о п т и м а л ь н о й или (л о к а л ь н о) о п т и м а л ь н ы м р е ш е н и е м.

Различные классы задач М. п. получаются при конкретизации условий на целевую функцию f и ограничения g_i (либо на допустимую область G). Так, если $X=\mathbb{R}^n_+$, f — линейная форма, а g_i — аффинны, то получают задачу *линейного программирования*; задачами, в к-рых все или нек-рые из этих функций нелинейны, занимается *нелинейное программирование* (см. также *Выпуклое программирование*). Если область G состоит из конечного числа точек, то получают задачу *дискретного программирования*. Задачами, в к-рых f и (или) g_i зависят от параметров, занимается *параметрическое программирование*. В задачах *стохастического программирования* учитывается зависимость f и (или) g_i от случайных факторов. Несколько особо стоит *динамическое программирование*, в к-ром принятие оптимального решения (вне зависимости от конкретного вида f и g_i) представляется в виде многошагового процесса. Тесно примыкают к М. п. задачи, в к-рых целевая функция является векторной. В этом случае речь уже не может идти о нахождении её экстремума, а само понятие оптимальности следует пересмотреть. Такие задачи составляют предмет *многокритериальной оптимизации* (см. также *Игр теория*, *Исследование операций*).

Е. Г. Гольштейн, А. А. Корбут.

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ УРАВНЕНИЯ — уравнения, описывающие математические модели физических явлений. М. ф. у.— часть предмета *математической физики*. Многие явления физики и механики (гидро- и газодинамики, упругости, электродинамики, оптики, теории переноса, физики плазмы, квантовой физики, теории гравитации и т. д.) описываются краевыми задачами для дифференциальных уравнений. Эти задачи составляют весьма широкий класс М. ф. у.

Для полного описания эволюции физич. процесса, помимо уравнений, необходимо, во-первых, задать картину процесса в нек-рый фиксированный момент времени (н а ч а л ь н ы е у с л о в и я) и, во-вторых, задать режим на границе той среды, где протекает этот процесс (г р а н и ч н ы е у с л о в и я). Начальные и граничные условия образуют к р а е в ы е у с л о в и я, а дифференциальные уравнения вместе с соответствующими краевыми условиями — *краевые задачи* математич. физики.

Ниже приведены нек-рые примеры уравнений и соответствующих краевых задач.

Уравнение колебаний (волновое уравнение)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f(x,\ t) \qquad (1)$$

описывает малые колебания струн, стержней, мембран, акустические и электромагнитные колебания. В уравнении (1) пространственные переменные $x=(x_1, \ldots, x_n)$ изменяются в области $G \subset \mathbb{R}^n$, $n=1, 2, 3$, где развивается рассматриваемый физич. процесс; при этом в соответствии с физич. смыслом входящих величин должно быть $\rho>0$, $p>0$ и $q \geqslant 0$.

При $\rho=1$, $p=a^2=\text{const}$ и $q=0$ уравнение (1) превращается в *волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x,\ t), \qquad (2)$$

где Δ — оператор Лапласа.

Уравнение диффузии

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + f(x,\ t) \qquad (3)$$

описывает процессы диффузии частиц и распространения тепла в среде. При $\rho=1$, $p=a^2=\text{const}$ и $q=0$ уравнение (3) превращается в *теплопроводности уравнение*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x,\ t).$$

Для стационарных процессов, когда отсутствует зависимость от времени t, уравнения колебаний (1) и диффузии (3) принимают вид

$$-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu = f(x). \qquad (4)$$

При $p=1$ и $q=0$ уравнение (4) наз. *Пуассона уравнением*:

$$\Delta u = -f(x), \qquad (5)$$

а при $f=0$ — *Лапласа уравнением*:

$$\Delta u = 0.$$

Уравнениям Лапласа и Пуассона удовлетворяют различного рода потенциалы: ньютонов (кулонов) потенциал, потенциал течения несжимаемой жидкости и т. п.

Если в волновом уравнении (2) внешнее возмущение f — периодическое с частотой ω:

$$f(x,\ t) = a^2 f(x)\, e^{i\omega t},$$

то амплитуда $u(x)$ периодич. решений с той же частотой ω:

$$u(x,\ t) = u(x)\, e^{i\omega t}$$

удовлетворяет *Гельмгольца уравнению*:

$$\Delta u + k^2 u = -f(x),\ k^2 = \omega^2/a^2. \qquad (6)$$

К уравнению Гельмгольца приводят задачи на рассеяние (дифракцию).

Для полного описания процесса колебаний необходимо задать начальное возмущение и начальную скорость

$$u|_{t=0} = u_0(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x),\ x \in \overline{G},$$

а для процесса диффузии — только начальное возмущение

$$u|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \overline{G}.$$

Кроме того, на границе S области G необходимо удовлетворить заданному режиму. В простейших случаях физически осмысленные граничные условия для уравнений (1), (3),

(4) описываются соотношением

$$k\frac{\partial u}{\partial n}+hu\,|_S=v\,(x,\ t),\ t>0,$$

где k и h — заданные неотрицательные функции, не обращающиеся в нуль одновременно, n — внешняя нормаль к поверхности S и v — заданная функция.

Напр., для струны условие

$$u\,|_{x=x_0}=0$$

означает, что конец струны x_0 закреплён, а условие

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,\Big|_{x=x_0}=0$$

означает, что конец x_0 свободен. Для теплопроводности условие

$$u\,|_S=v_0\,(x,\ t)$$

означает, что на границе S области G поддерживается заданный температурный режим, а условие

$$\frac{\partial u}{\partial n}\,\Big|_S=v_1\,(x,\ t)$$

задаёт поток тепла через S. В случае неограниченных областей, напр. внешности ограниченной области, кроме условия на границе задаётся также условие на бесконечности. Так, для уравнения Пуассона (5) в пространстве ($n=3$) таким условием является условие

$$u\,(x)=o\,(1),\ |x|\longrightarrow\infty, \tag{7}$$

а на плоскости ($n=2$) — условие

$$u\,(x)=O\,(1),\ |x|\longrightarrow\infty. \tag{8}$$

Для уравнения Гельмгольца (6) на бесконечности задаются условия излучения:

$$\left.\begin{array}{l} u\,(x)=O\,(|x|^{-1}),\\ \dfrac{\partial u\,(x)}{\partial |x|}\mp iku\,(x)=o\,(|x|^{-1}),\ |x|\longrightarrow\infty \end{array}\right\}, \tag{9}$$

причём знак — соответствует расходящимся, а знак + сходящимся волнам.

Краевая задача, к-рая содержит только начальные условия (и, стало быть, не содержит граничных условий, так что область G — всё пространство $\mathbb{R}^n$), наз. *Коши задачей*. Если в краевой задаче присутствуют и начальные и граничные условия, то такая задача наз. с м е ш а н н о й з а д а ч е й. Для уравнения (4) краевая задача с граничным условием

$$u\,|_S=v_0\,(x)$$

наз. *Дирихле задачей*, а с граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial n}\,\Big|_S=v_1\,(x)$$

— *Неймана задачей*. Различают внешние и внутренние задачи Дирихле и Неймана. Для внешних задач, кроме граничных условий, необходимо задавать условия на бесконечности типа (7), (8), (9).

Поскольку краевые задачи математич. физики описывают реальные физич. процессы, то они должны удовлетворять нек-рым естественным требованиям, сформулированным впервые Ж. Адамаром в 1923 (см. об этом подробнее в ст. *Некорректные задачи*).

Перечисленные краевые задачи далеко не исчерпывают всё многообразие краевых задач математич. физики — это есть простейшие классич. примеры краевых задач. Краевые задачи, описывающие реальные физич. процессы, могут быть весьма сложными: это могут быть системы уравнений высших порядков, нелинейные уравнения. Сюда в первую очередь относятся: уравнение Шрёдингера, уравнения гидродинамики, уравнения Максвелла, уравнение Кортевега — де Фриса, уравнения теории упругости и пластичности, уравнения Гильберта — Эйнштейна и др.

○ Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977; Владимиров В. С., Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1987; Михайлов В. П., Дифференциальные уравнения в частных производных, 2 изд., М., 1983; Владимиров В. С., Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979. *В. С. Владимиров.*

МАТРИЦА (нем. Matrize, от лат. matrix — матка, источник, начало) — прямоугольная таблица A, образованная из элементов некоторого множества и состоящая из m строк и n столбцов:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{Vmatrix}\quad\text{или}\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Такая таблица наз. п р я м о у г о л ь н о й м а т р и ц е й размера $(m\times n)$ или $(m\times n)$-матрицей с элементами a_{ij} (элемент a_{ij} расположен в i-й строке и j-м столбце). При $m=n$ М. наз. к в а д р а т н о й, а число n — её п о р я д к о м. М. A и B считаются равными, если они одинакового размера (число строк и число столбцов М. A соответственно равны числам строк и столбцов М. B) и элементы, стоящие в A и B на одинаковых местах, равны между собой: $a_{ij}=b_{ij}$. Сокращённо М. обозначается $A=\|a_{ij}\|$ ($i=1,\dots,m$; $j=1,\dots,n$). Квадратная М. в сокращённой записи иногда обозначается $\|a_{ij}\|_1^n$. М., состоящая из одной строки, наз. с т р о к о й (в е к т о р - с т р о к о й), а состоящая из одного столбца — с т о л б ц о м (в е к т о р - с т о л б ц о м). М., получающаяся из М. A заменой строк столбцами, наз. т р а н с п о н и р о в а н н о й м а т р и ц е й по отношению к A и обозначается $A^{\top}$ (иногда A').

Наиболее часто рассматриваются М., элементами к-рых являются числа — действительные или комплексные или элементы нек-рого поля K. Соответственно М. наз. действительными, комплексными или М. над полем K. Если A — комплексная М., то М., получающаяся из A заменой её элементов комплексно сопряжёнными, наз. к о м п л е к с н о с о п р я ж ё н н о й с A и обозначается $\overline{A}$. Если же элементы транспонированной М. $A^{\top}$ заменяют на комплексно сопряжённые им числа, то получают М. $A^*=\|a_{ij}^*\|$, наз. с о п р я ж ё н н о й или э р м и т о в о - с о п р я ж ё н н о й с A: $a_{ij}=\overline{a}_{ji}$.

Действия над матрицами (все М. рассматриваются над одним полем K). Важнейшими алгебраич. операциями над М. являются сложение М., умножение М. на число (элемент поля K), умножение М.

С у м м о й $A+B$ двух прямоугольных М. A и B одного размера $(m\times n)$ наз. М. размера $(m\times n)$, $(i,\ j)$-й элемент к-рой равен сумме соответствующих элементов слагаемых: $a_{ij}+b_{ij}$.

П р о и з в е д е н и е м М. A на ч и с л о α наз. М. αA, элементы к-рой получаются из элементов М. A умножением на α: $\alpha A=\|\alpha a_{ij}\|$. Эти операции обладают следующими свойствами:

$$A+B=B+A,\ \alpha\,(A+B)=\alpha A+\alpha B,$$
$$A+(B+C)=(A+B)+C,\ (\alpha+\beta)\,A=\alpha A+\beta A,$$
$$\alpha\,(\beta A)=(\alpha\beta)\,A.$$

У м н о ж е н и е определяется только для такой пары М., у к-рой число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго сомножителя. П р о и з в е д е н и е AB М. $A=\|a_{ij}\|$ размера $(m\times n)$ на М. $B=\|b_{jk}\|$ размера $(n\times s)$ есть $(m\times s)$-М., элемент c_{ik} к-рой, стоящий в i-й строке и k-м столбце, есть сумма произведений элементов i-й строки М. A на соответствующие элементы k-го столбца М. B (говорят о правиле умножения «строки на столбец»):

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}.$$

Умножение М. обладает следующими свойствами:

$$(AB)\,C=A\,(BC),\ (A+B)\,C=AC+BC,\ A\,(B+C)=AB+AC,$$
$$\alpha\,(AB)=(\alpha A)\,B=A\,(\alpha B).$$

Справедливы также правила

$$(AB)^{\top}=B^{\top}A^{\top},\ \overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B},\ (AB)^*=B^*A^*.$$

Произведения AB и BA одновременно определены только для квадратных М. одного порядка, причём произведение зависит от порядка сомножителей, т. е. равенство $AB=BA$

может не выполняться; напр.,

$$\begin{Vmatrix}1&0\\0&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}0&1\\0&0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&1\\0&0\end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix}0&1\\0&0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}1&0\\0&0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0&0\\0&0\end{Vmatrix}.$$

Если $AB=BA$, то М. A и B наз. перестановочными (коммутирующими).

Квадратные матрицы. Элементы a_{ii} квадратной М. $A=\|a_{ij}\|_1^n$ наз. диагональными; эти элементы расположены на главной диагонали М. Квадратная М., у к-рой все элементы, не лежащие на главной диагонали, равны 0, т. е. М. вида

$$\begin{Vmatrix}d_1&0&\dots&0\\0&d_2&\dots&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&&d_n\end{Vmatrix}$$

наз. диагональной и обозначается $\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n)$. Если в диагональной М. все элементы $d_i=1$, то М. наз. единичной и обозначается E или I (соответственно E_n или I_n, если нужно указать её порядок):

$$E=\begin{Vmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&\dots&1\end{Vmatrix}$$

Для любой М. A размера $(m\times n)$ справедливы равенства

$$AE_n=A,\ E_mA=A.$$

Каждой квадратной М. можно поставить в соответствие число (элемент поля K), наз. её *определителем* или детерминантом. Определитель произведения двух квадратных М. равен произведению их определителей. Квадратная М. наз. невырожденной, если её определитель не равен нулю; в противном случае М. наз. вырожденной. Для любой невырожденной М. A существует единственная обратная матрица A^{-1}, определяемая равенством $AA^{-1}=E$. Обратная матрица перестановочна с исходной: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$. Верна формула $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Квадратные М. A и B одного порядка n наз. подобными, если существует невырожденная М. S того же порядка n такая, что $B=S^{-1}AS$. Одна из центральных задач теории М.— замена М. A подобной ей М. B, имеющей возможно более простой вид. Решение этой задачи связано с рассмотрением *характеристического многочлена* М. A и *собственных векторов* соответствующего линейного преобразования. В качестве канонич. вида М., подобной данной, принимается, напр., жорданова нормальная форма (см. *Жорданова матрица*).

В следующей таблице даны нек-рые важные типы комплексных М. со специальными свойствами симметрии:

Название матрицы	Определяющее условие
Симметрическая	$A^\top=A$
Кососимметрическая	$A^\top=-A$
Эрмитова	$A^*=A$
Косоэрмитова	$A^*=-A$
Ортогональная	$A^\top=A^{-1}$
Унитарная	$A^*=A^{-1}$
Нормальная	$AA^*=A^*A$

Эрмитова (и, в частности, симметрическая) М. с действительными элементами подобна диагональной М. $B=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, где все λ_i действительные. В качестве М. S в формуле $B=S^{-1}AS$ можно взять для эрмитовой М. унитарную, а для симметрической — ортогональную. Это свойство симметрич. М. с действительными элементами лежит в основе метода приведения квадратичной формы к главным осям, часто применяемого в аналитич. геометрии и механике.

Функции от матриц. Для любой квадратной М. A определена степень М. с натуральным показателем как произведение k одинаковых сомножителей A:

$$A^k=\underbrace{A\dots A}_{k\text{ раз}}.$$

Полагают $A^0=E$.

Каждый многочлен

$$P_n(t)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\dots+a_{n-1}t+a_n$$

степени n с коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n$ из поля K определяет функцию от квадратной матрицы X над полем K, имеющую вид

$$P_n(X)=a_0X^n+a_1X^{n-1}+\dots+a_{n-1}X+a_nE.$$

Рассматриваются также аналитич. функции от М. Если аналитич. функция $f(t)$ определяется рядом

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k,$$

сходящимся на всей комплексной плоскости, то рассматривается функция от матрицы

$$f(X)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kX^k.$$

Этот ряд является сходящимся для любой квадратной М. A. Напр.,

$$e^X=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{X^k}{k!}.$$

Применение исчисления матриц. Матричный язык, обозначения и матричные вычисления широко используются в различных областях современной математики и её приложений. М. являются основным математич. аппаратом *линейной алгебры* и применяются при исследовании линейных отображений векторных пространств, линейных и квадратичных форм, систем линейных уравнений. М. используются в математич. анализе при интегрировании систем дифференциальных уравнений, в механике и теоретич. электротехнике при исследовании малых колебаний механич. и электрич. систем, в теории вероятностей, в квантовой механике и др.

Историческая справка. Впервые М. как математич. понятие появилось в работах У. Гамильтона, А. Кэли и Дж. Сильвестра в сер. 19 в. Основы теории М. созданы К. Вейерштрассом и Г. Фробениусом во 2-й пол. 19 в. и нач. 20 в. Современное обозначение — две вертикальные чёрточки — ввёл А. Кэли (1841).

● Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975; Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967; Ланкастер П., Теория матриц, пер. с англ., 2 изд., М., 1982; Беллман Р., Введение в теорию матриц, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А., Матрицы и вычисления, М., 1984.

Т. С. Пиголкина.

МАТРИЧНАЯ ГРУППА — подгруппа группы всех матриц фиксированного порядка n над некоторым полем K. Любая М. г. естественно изоморфна нек-рой *линейной группе*, действующей в пространстве K^n, и обратно, любая линейная группа, действующая в конечномерном векторном пространстве размерности n, изоморфна группе матриц порядка n над тем же полем.

МАТРИЧНАЯ ИГРА — антагонистическая игра, в которой игроки имеют конечное число стратегий (именуемых также чистыми в отличие от смешанных стратегий — см. ниже). Если игрок I имеет m стратегий, а игрок II имеет n стратегий, то М. и. может быть задана $(m\times n)$-матрицей $H=\|h_{ij}\|$, где h_{ij} — выигрыш игрока I, если он выберет стратегию i, $i=1,\dots,m$, а игрок II — стратегию j, $j=1,\dots,n$. Следуя принципу минимакса, игрок I стремится выбрать такую стратегию i_0, на к-рой достигается

$$v_1=\max_i\min_j h_{ij},$$

игрок II стремится выбрать стратегию j_0, на к-рой достигается

$$v_2=\min_j\max_i h_{ij}.$$

Если $v_1=v_2$, то пара (i_0, j_0) составляет седловую точку матрицы H, т. е. выполняется двойное неравенство

$$h_{ij_0}\leqslant h_{i_0j_0}\leqslant h_{i_0j},\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n.$$

Число $h_{i_0 j_0}$ наз. значением игры, стратегии i_0, j_0 наз. оптимальными чистыми стратегиями соответственно игроков I и II. Пара оптимальных стратегий игроков наз. также решением игры.

Не во всех М. и. существуют оптимальные чистые стратегии игроков. В этих случаях оптимальные стратегии игроков ищутся в классе смешанных стратегий, т. е. во множестве стратегий смешанного расширения М. и., определяемого как антагонистич. игра $\langle X, Y, H(x, y)\rangle$. Здесь X и Y — множества вероятностных распределений на множествах исходных (чистых) стратегий,

$$H(x, y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_i y_j$$

— математич. ожидание выигрыша игрока I в условиях выбора игроками стратегий $x\in X$, $y\in Y$.

Основная теорема М. и. (теорема Неймана о минимаксе) утверждает, что в любой М. и. существуют оптимальные смешанные стратегии x^*, y^*, т. е. стратегии, для к-рых

$$H(x, y^*)\leqslant H(x^*, y^*)\leqslant H(x^*, y)$$

при любых стратегиях x, y. Величина $v=H(x^*, y^*)$ наз. значением игры (в смешанных стратегиях). Из приведённых неравенств следует, что

$$v=\max_{x\in X}\min_{y\in Y} H(x, y)=\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H(x, y).$$

Пример М. и. Нападающая сторона (игрок I) может напасть на любой из двух пунктов, ценности к-рых равны соответственно a_1 и a_2, причём $a_1>a_2$. Защищающаяся сторона (игрок II) может защитить лишь один из этих пунктов. При нападении вероятность захвата незащищённого пункта равна 1; для защищённого пункта она равна p. Эта ситуация моделируется М. и.

$$\begin{Vmatrix} pa_1 & a_1 \\ a_2 & pa_2 \end{Vmatrix},$$

в к-рой номер строки (столбца) отвечает чистой стратегии игрока I (соответственно игрока II), заключающейся в нападении на одноимённый пункт (соответственно в его защите); выигрыш игрока I определяется как математич. ожидание ценности захваченного пункта. При $pa_1\geqslant a_2$ имеют $v_1=v_2=pa_1$. Игроки имеют чистые оптимальные стратегии $i_0=1$ (нападение на более ценный пункт) и $j_0=1$ (его защита). При $pa_1<a_2$ чистых оптимальных стратегий нет. Смешанные оптимальные стратегии обоих игроков совпадают:

$$x^*=y^*=(a_2/(a_1+a_2),\ a_1/(a_1+a_2));$$

значение игры равно

$$v=(1+p)\,a_1a_2/(a_1+a_2).$$

Для фактич. нахождения оптимальных смешанных стратегий чаще всего используют возможность сведения решения М. и. к задачам линейного программирования. Можно использовать также различные итеративные методы, состоящие в последовательном разыгрывании данной игры с выбором игроками в каждой данной партии своих чистых стратегий. Игры, в к-рых один из игроков имеет только две стратегии, просто решаются графически.

● Дюбин Г. Н., Суздаль В. Г., Введение в прикладную теорию игр, М., 1981; Воробьев Н. Н., Теория игр для экономистов-кибернетиков, М., 1985.

МАТРИЧНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ МЕТОД, метод матричной прогонки,— метод решения конечноразностных систем, аппроксимирующих краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в одномерных задачах и для уравнений эллиптич. типа в двумерных задачах. См. *Прогонки метод.*

МАШИНА (франц. machine, от лат. machina, греч. μηχανή — орудие, приспособление) — абстрактное устройство, осуществляющее переработку *информации*. Употребительны также термины «абстрактная машина», «автомат». Абстрактные М. являются частным случаем *управляющих систем*. Возникновение их связано с анализом понятия *алгоритма*, начавшегося в сер. 30-х гг. 20 в., с развитие ЭВМ и с построением математич. моделей биологич. систе Наибольшее распространение получили М., перерабат вающие дискретную информацию, типичными представ телями к-рых являются *конечный автомат* и *Тьюрин машина*. Абстрактные М. обладают большой наглядность возможностью легко осуществлять различные композици элементарностью шагов работы. Изучение М. проводит в рамках *алгоритмов теории*, математич. *кибернетики* преследует цели анализа и формализации понятия алг ритма, математич. моделирования реальных устройств процессов. Существует плодотворная связь между аб страктными М. и реально существующими ЭВМ. Иде построения ЭВМ, программирования на ЭВМ в значитель ной мере опираются на соответствующие идеи из теори алгоритмов, математич. кибернетики. В свою очеред практика работы в ЭВМ ставит новые задачи, подсказыва ет модели М., наиболее удобные для их решения.

МАШИННАЯ ГРАФИКА — комплекс математических программных и технических средств, позволяющий ЭВ воспринимать и воспроизводить образную и графическу информацию. Играет всё возрастающую роль в *программ ном обеспечении* и применении ЭВМ как средство улучше ния взаимодействия с ЭВМ, использующее высокую спо собность человека к восприятию зрительной информации а также как средство автоматич. построения графич. ин формации в проектировании и полиграфии и в автоматич обработке изображений, в частности поступающих со спут ников.

По способу восприятия и формирования изображени М. г. делится на контурную и растровую. В контурной М. г. изображение строится как совокупность линий и кривых (обычно 2-го порядка) и воспроизводится с по мощью т. н. векторных дисплеев и графопостроителей Растровая М. г. основана на полном представлени всего поля зрения в виде растра, строящегося по принцип телевизионного или полиграфич. изображения. Соответ ствующими средствами воспроизведения являются элект ронно-лучевые трубки, матричные и лазерные печатаю щие устройства.

По использованию математич. средств и по типам при менений М. г. делится на двумерную и трёхмерную. Дву мерная М. г. является основой обработки изображений и построения графич. документации. Трёхмерная М. г. необходима для построения систем т. н. машинного зрения в робототехнике, машиностроительного проектирования, разного рода тренажёров, требующих визуального воспроизведения модели окружающей обстановки эта М. г. находит также применение в изобразительном искусстве.

М. г. требует развитого математич. аппарата проектив ной геометрии, теории поверхностей, приближённого представления фигур и поверхностей сплайн-функциями Задачи воспроизведения эффектов освещения и текстуры поверхности используют методы геометрической и инте гральной оптики, численное моделирование законов отра жения и поглощения света, специальные разделы теории нелинейных дифференциальных уравнений. В целом зада чи М. г. привели к формированию области прикладной математики, получившей название вычислительной геометрии.

● Ньюмен У., Спрулл Р., Основы интерактивной машинной графики, пер. с англ., М., 1976; Гилой В., Интерактивная машинная графика, пер. с англ., М., 1981.

МАШИННАЯ НОМОГРАФИЯ — см. *Номография.*

МАШИННО-ОРИЕНТИРОВАННЫЙ ЯЗЫК — язык программирования, позволяющий при составлении программ учитывать особенности системы команд и представления информации в объектной вычислительной машине. М.-о. я., в отличие от универсальных *проблемно-ориентированных языков* программирования, осуществляющих отображение множества P входных программ в множество M машинных программ, стремятся отображать P на M.

Простейшими М.-о. я. являются ассемблеры, к-рые полностью сохраняя структуру машинной програм-

мы, позволяют использовать символич. обозначения для команд и адресов памяти, а также собирать программы из нескольких отдельно написанных кусков.

МАЯТНИКА УРАВНЕ́НИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$x'' = -a \sin x,$$

описывающее свободные колебания математического маятника — материальной точки, движущейся по окружности под действием силы тяжести, расположенной в вертикальной плоскости. При этом $a=g/l$, где l — радиус окружности, а g — ускорение силы тяжести, направленной вертикально вниз, $x(t)$ — угол отклонения маятника в момент t от нижнего положения равновесия. В случае малых колебаний точное М. у. заменяется приближённым (линейным):

$$x'' = -ax.$$

МЁБИУСА ЛИСТ — поверхность, получающаяся при склеивании двух противоположных сторон AB и $A'B'$ прямоугольника $ABB'A'$ (рис. 1, *а*) так, что точки A и B совмещаются соответственно с точками B' и A' (рис. 1, *б*).

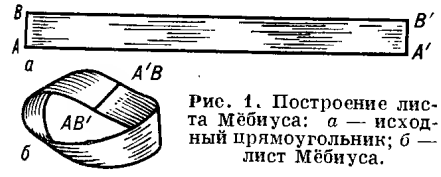


Рис. 1. Построение листа Мёбиуса: *а* — исходный прямоугольник; *б* — лист Мёбиуса.

М. л. был рассмотрен в 1858—65 независимо друг от друга А. Мёбиусом и И. Листингом в качестве первого примера односторонней поверхности. Если двигаться вдоль по М. л. (как и по любой другой односторонней поверхности), не пересекая его границы, то (в отличие от двусторонних поверхностей, напр. сферы, цилиндра) можно попасть в исходное место, оказавшись в перевёрнутом положении по сравнению с первоначальным. Это тесно связано с неориентируемостью М. л.: если отметить на нём небольшую окружность с фиксированным направлением обхода и двигать её вдоль М. л., не пересекая границы, то можно прийти к начальному положению так, что направление обхода окружности изменится на противоположное. М. л. ограничен всего лишь одной замкнутой линией. Поэтому если разрезать М. л. по средней линии, то он не распадётся на две части, а превратится в дважды перекрученную вокруг себя поверхность цилиндра (рис. 2).

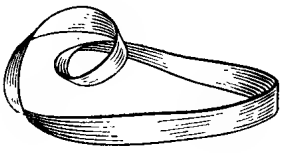


Рис. 2. Поверхность, получаемая из листа Мёбиуса разрезанием его по средней линии.

С топологич. точки зрения М. л. — неориентируемая поверхность с нулевой эйлеровой характеристикой, ограниченная одной замкнутой линией.

МЁБИУСА ФУ́НКЦИЯ — арифметическая функция натурального аргумента: $\mu(1)=1$, $\mu(n)=0$, если n делится на квадрат простого числа, в противном случае $\mu(n)=(-1)^k$, где k — количество простых множителей числа n. Введена А. Мёбиусом (1832).

МЕДИА́НА (от лат. mediana — средняя) — отрезок, соединяющий одну из вершин треугольника с серединой противоположной стороны. Три М. треугольника пересекаются в одной точке, к-рую иногда наз. центром тяжести треугольника, т. к. именно в этой точке находится центр тяжести однородной треугольной пластинки (а также центр тяжести системы трёх равных масс, помещённых в вершинах треугольника). Точка пересечения М. делит каждую из них в отношении 2 : 1 (считая от вершины к основанию).

МЕДИА́НА — одна из числовых характеристик распределения вероятностей случайной величины. Для непрерывно распределённой случайной величины X строго монотонной функцией распределения $F(x)$ медиана m определяется как единственный корень уравнения $F(m)=\frac{1}{2}$ (или как квантиль $K_{1/2}$), т. е. условием, что случайная величина X принимает с вероятностью $\frac{1}{2}$ как значения, бо́льшие m, так и значения, меньшие m. В общем случае М. определяется неоднозначно, но для любой случайной величины существует, по крайней мере, одна М.; в симметричном случае М. (если она единственна) совпадает с математич. ожиданием, если оно существует.

В математич. статистике для оценки М. к.-л. случайной величины по независимым результатам наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ используют М. соответствующего вариационного ряда $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ (выборочную медиану): величину $X_{(k)}$, если $n=2k+1$ — нечётное, или $\frac{1}{2}(X_{(k)}+X_{(k+1)})$, если $n=2k$ — чётное.

МЕЖДУНАРО́ДНЫЙ СОВЕ́Т НАУ́ЧНЫХ СОЮ́ЗОВ (МСНС; International Council of Scientific Unions — ICSU; Conseil international des unions scientifiques) — международная научная организация, объединяющая национальные научные учреждения, международные научные союзы и комитеты в области точных и естественных наук. Организационно оформилась в 1899 под названием Международной ассоциации академий (МАА), членами к-рой стали Петербургская АН, Национальная АН США, Парижская АН и Национальная АН деи Линчеи в Риме. В 1918 на базе МАА был создан Международный исследовательский совет. Современное название — с 1931. Имеет консультативный статус при ЮНЕСКО.

Цели МСНС согласно уставу, принятому в 1971: поощрение международной научной деятельности учёных, координация деятельности международных научных союзов, содействие разработке и проведению исследований по междисциплинарным научным программам глобального характера. В МСНС две основные категории членов: научные союзы и национальные члены (АН СССР с 1955). В МСНС, в частности, входят Международный математич. союз, Международный статистич. ин-т, Международная ассоциация по математич. геологии, Международная ассоциация по математической физике.

Высший руководящий орган — Генеральная ассамблея членов МСНС, созываемая 1 раз в 2 года; исполнительные органы — Генеральный комитет и Исполнительное бюро. Текущей перепиской и технич. работой занимается Секретариат МСНС, штаб-квартира к-рого находится в Париже. Для координации деятельности членов организации МСНС создаёт специальные и научные комитеты и комиссии. Печатные органы МСНС — ежегодный журнал «Jear book» и ежеквартальный бюллетень «ICSU Bullettin».

МЕЖОТРАСЛЕВО́Й БАЛА́НС — простейшая линейная модель *математической экономики*, описывающая производство, состоящее из n отраслей, каждая из которых выпускает один продукт, а каждый продукт выпускается одной отраслью. Различают статистич. и динамич. М. б.

Статистический М. б. даёт ответ на вопрос, существует ли вектор $x\in\mathbb{R}^n_+$, обеспечивающий при данной неотрицательной $(n\times n)$-матрице прямых затрат A выпуск заданного вектора конечного спроса $y\in\mathbb{R}^n_+$. Этот ответ сводится к отысканию неотрицательного решения уравнения $x-Ax=y$. Такое решение существует (и притом единственное) для любого $y\geqslant 0$ в том и только в том случае, когда матрица A продуктивна, т. е. найдётся вектор $x>0$, при к-ром $Ax<x$.

Динамический М. б. — это модель экономической динамики. В простейшем случае траектории динамич. М. б. порождаются технологиями, описывающими движение производственных мощностей. Мощность x_{t+1} в момент $t+1$ складывается из мощностей x_t в момент t и прироста Δx_t. Этот прирост и потребление c_t удовлетворяют неравенству

$$Az + B\Delta x_t + c_t \leqslant z,$$

где вектор z — выпуск продукции. Неравенство показывает, что сумма прямых производственных затрат Az (A —

матрица прямых затрат), капиталовложений $B\Delta x_t$ (B — матрица фондоёмкостей) и потребления c_t не превосходит выпуска z. При этом $z \leqslant x_t$. Кроме того, выполняется неравенство $(w, z) \leqslant W_t$, где w — заданный вектор удельной трудоёмкости, W_t — заданная численность трудовых ресурсов в период $[t, t+1]$. Основная задача динамич. М. б.— найти оптимальную траекторию, максимизирующую суммарную полезность при заданных функциях полезности, начальном и конечном условиях.

МЕ́ЛЕРА КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — наивысшей алгебраической степени точности квадратурная формула для отрезка $[-1, 1]$ и веса $1/\sqrt{1-x^2}$, имеющая вид

$$\int_{-1}^{1} (1/\sqrt{1-x^2})\, f(x)\, dx \cong$$

$$\cong \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\cos \frac{2k-1}{2N}\, \pi\right). \qquad (*)$$

Узлы — корни многочлена Чебышева

$$T_N(x) = \cos N \arccos x,$$

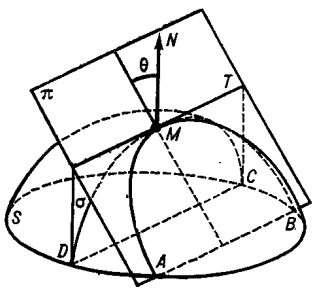
коэффициенты одинаковы и равны π/N. Алгебраич. степень точности равна $2N-1$. Формулу (*) получил Ф. Мелер (1864). Иногда её называют квадратурной формулой Эрмита.

МЕНЕЛА́Я ТЕОРЕ́МА: если прямая пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC (или их продолжения) в точках A', B', C', то справедливо соотношение

$$\frac{AC'}{C'B} \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} = -1.$$

Доказана Менелаем (1 в. н. э.).

МЕ́НЬЕ ФО́РМУЛА — формула дифференциальной геометрии, выражающая свойство кривизн плоских сечений поверхности. Пусть π — произвольная плоскость (рис.), проведённая через касательную MT в точке M поверхности S, θ—её угол с нормалью MN к поверхности, $1/R$ — кривизна в точке M кривой DMC, по к-рой поверхность S пересекается плоскостью σ, проходящей через нормаль MN и прямую MT (DMC — т. н. нормальное сечение поверхности). Тогда кривизна $1/\rho$ в точке M кривой AMB, по к-рой поверхность S пересекается плоскостью π, связана с кривизной $1/R$ нормального сечения формулой Мёнье:



$$\frac{1}{\rho} \cos\theta = \frac{1}{R}.$$

М. ф. была установлена Ж. Мёнье в 1776, но опубликована лишь в 1785.

МЕ́РА, мера множества,— обобщение понятия длины отрезка, площади плоской фигуры и объёма тела на множества более общей природы. В качестве примера можно привести определение меры Лебега (введённой А. Лебегом в 1902) для ограниченных множеств, лежащих на плоскости. При определении меры Лебега, так же, как и при определении площади плоских фигур в геометрии, исходят из сравнения части плоскости, занимаемой множеством, с выбранной единицей измерения. При этом и способ сравнения напоминает обычный процесс измерения площади. Меру Лебега $m(\Delta)$ любого квадрата Δ полагают равной его площади. Затем рассматриваемое множество A покрывают конечным или бесконечным числом квадратов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$; нижнюю грань чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(\Delta_n),$$

взятую по всевозможным покрытиям множества A, называют внешней (верхней) мерой $m^*(A)$ множества A. Внутренняя (нижняя) мера $m_*(A)$ множества A определяется как разность $m(\Delta) - m^*(\overline{A})$, где Δ — к.-л. квадрат, содержащий множество A, и $\overline{A}$ — множество всех точек этого квадрата, не содержащихся в A. Множества, для к-рых внешняя мера равна внутренней, называют измеримыми по Лебегу, а общее значение $m(A)$ внешней и внутренней мер — мерой Лебега множества A. Геометрич. фигуры, имеющие площадь в элементарном смысле, измеримы, и их мера Лебега совпадает с их площадью. Однако существуют и неквадрируемые измеримые множества. Аналогично можно определить меру Лебега на прямой. При этом внешнюю меру определяют, рассматривая покрытия множества интервалами.

Основные свойства меры Лебега: 1) мера любого множества неотрицательна: $m(A) \geqslant 0$; 2) мера суммы $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ конечной или счётной системы попарно непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ равна сумме их мер: $m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$; 3) при перемещении множества как твёрдого тела его мера не меняется.

Своеобразие понятия «М. множества» можно пояснить следующим примером: множество A рациональных точек интервала (0, 1) и множество B иррациональных точек того же интервала сходны в том смысле, что каждое из них плотно на интервале (0,1), т. е. что между любыми двумя точками указанного интервала найдутся как точки множества A, так и точки множества B; в то же время они резко различаются по мере: $m(A)=0$, а $m(B)=1$.

Для более узких классов множеств мера, совпадающая с мерой Лебега, была ранее определена К. Жорданом (1893) и Э. Борелем (1898).

Развитие ряда отделов современной математики привело к дальнейшим обобщениям — созданию т. н. абстрактной теории меры. При этом М. множества определяют аксиоматически. Пусть U — произвольное множество и $\mathfrak{M}$ — нек-рое семейство его подмножеств. Неотрицательную функцию $\mu(A)$, определённую для всех A, входящих в $\mathfrak{M}$, называют мерой, если она вполне аддитивна [т. е. если для любой последовательности непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, входящих в $\mathfrak{M}$, сумма A к-рых входит в $\mathfrak{M}$, имеет место равенство $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$] и если, кроме того, система $\mathfrak{M}$ удовлетворяет определённым дополнительным условиям. Множества, входящие в $\mathfrak{M}$, называют измеримыми (по отношению к мере μ). После того как определена мера μ, вводят понятие измеримых (по отношению к μ) функций и операцию интегрирования.

Многие основные утверждения из теории меры Лебега, теории измеримых функций и интеграла Лебега сохраняются с соответствующими видоизменениями и в абстрактной теории меры и интеграла. Последняя составляет математич. основание современной теории вероятностей, данное в 1933 А. Н. Колмогоровым. Специальный интерес для ряда областей математики представляют меры, инвариантные по отношению к той или иной группе преобразований множества U в себя.

● Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; Сакс С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; Халмош П. Р., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; Толстов Г. П., Мера и интеграл, М., 1976.

Ю. В. Прохоров.

МЕ́РА ТО́ЧНОСТИ — характеристика рассеяния значений случайной величины, используемая в теории ошибок. М. т. h связана с квадратичным отклонением σ формулой

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}.$$

МЕРИДИА́Н (от лат. meridianus — полуденный) — большой полукруг сферы, выходящий из полюса. См. *Сферическая геометрия*, *Вращения поверхность*.

МЕРОМО́РФНАЯ ФУ́НКЦИЯ (от греч. μέρος — часть, доля, здесь — дробь и μορφή — форма, вид) — функция комплексного переменного z, которую можно представить

в виде частного двух целых функций, т. е. частного сумм двух сходящихся на всей комплексной плоскости степенных рядов. М. ф.— аналитич. функция комплексного переменного z, не имеющая других конечных особых точек, кроме полюсов. В любой ограниченной области комплексной плоскости М. ф. имеет лишь конечное число полюсов. К М. ф. относятся многие важные функции и классы функций (рациональные, $\operatorname{tg} z=\sin z/\cos z$, $\operatorname{ctg} z=\cos z/\sin z$, $\sec z=1/\sin z$, $\operatorname{cosec} z=1/\cos z$, эллиптич. функции и др.).

МЕТАЛО́ГИКА (от греч. μετά — после, через, между) — *метатеория*, объектом исследования которой является некоторая логическая теория. Чаще всего исследуемая логич. теория представлена в виде логического исчисления. В М. описываются правила построения логич. формул, аксиомы и правила вывода исчисления, исследуются его свойства. Методы рассуждения, применяемые в М., могут отличаться от логич. средств, к-рые представлены в исследуемой логич. теории. Более того, часто к М. относят лишь такие рассуждения о логич. исчислениях, к-рые проводятся с использованием только конструктивной логики.

МЕТАМАТЕМА́ТИКА — раздел математической логики, изучающий формализованные математические теории.

Возникновение М. связано с намеченной Д. Гильбертом программой обоснования математики. Проблема обоснования математики стала особенно острой в кон. 19 — нач. 20 вв., когда в теории множеств Г. Кантора были обнаружены противоречия, или *антиномии*, и встал вопрос о причинах их возникновения и способах избавления от них. Почти одновременно наметились различные направления в решении этого вопроса. Л. Брауэр и его последователи считали, что рассуждения, применяемые в канторовской теории множеств, могут быть ложными по самой своей сути, т. к. они основаны на способах обращения с *бесконечностью*, выработанных для конечных совокупностей. Л. Брауэр предложил строить математику на концепциях *интуиционизма*, признавая лишь *потенциальную бесконечность* и отказываясь от логич. принципов, для обоснования к-рых требуется использование *актуальной бесконечности* (в частности, от *исключённого третьего закона*). Б. Рассел считал причиной антиномий использование понятий, определение к-рых имеет характер порочного круга (см. *Непредикативное определение*). Он предпринял попытку перестройки канторовской теории множеств, развивая её как часть логич. теории. Это направление в основаниях математики получило название логицизма. Наконец, ещё один подход состоял в аксиоматич. построении теории множеств. Э. Цермело и его сторонники пытались построить аксиоматич. системы, свободные от антиномий, но в то же время достаточно сильные, чтобы средствами этих систем можно было развить значительную часть классич. математики.

При аксиоматич. подходе к обоснованию теории множеств возникает необходимость в доказательстве *непротиворечивости* рассматриваемых систем. Традиционный метод доказательства непротиворечивости аксиоматич. системы состоял в указании её модели, взятой из другой теории, непротиворечивость к-рой не вызывала сомнений. Так, в 1899 Д. Гильберт построил модель евклидовой геометрии средствами арифметики действительных чисел. Однако этот метод нельзя было применить к аксиоматич. теории множеств, поскольку модель должна быть бесконечной, а в силу обнаруженных антиномий никакая теория, в к-рой можно строить бесконечные модели, не могла считаться заведомо непротиворечивой. Требовался другой метод установления непротиворечивости. Такой метод был предложен Д. Гильбертом, наметившим программу доказательства непротиворечивости классич. математики, к-рую намеревался осуществить в два этапа.

Прежде всего вся математика должна быть формализована, т. е. нужно построить *формальную систему*, из аксиом к-рой с помощью нек-рого чётко описанного множества *вывода правил* можно было бы вывести все основные математич. теоремы. К тому времени уже имелись аксиоматизации нек-рых разделов математики, напр. арифметики Дж. Пеано и теории множеств Э. Цермело, а в работах Г. Фреге, Б. Рассела и А. Уайтхеда была осуществлена формализация логики. На этой основе Д. Гильберт и его ученики разработали несколько формальных систем арифметики.

В качестве второго шага Д. Гильберт собирался доказать непротиворечивость формализованной математики. Предложенный им для этого метод основан на непосредственной трактовке непротиворечивости как отсутствия п р о т и в о р е ч и я, т. е. двух теорем, являющихся отрицаниями друг друга. Для установления непротиворечивости нужно показать, что никакое формальное доказательство не является доказательством противоречия. Таким образом, объектом исследования у Д. Гильберта становятся доказательства в формализованных математич. теориях. Теорию, в к-рой Д. Гильберт предполагал вести исследование математич. доказательств, он назвал М.

Чтобы доказательство непротиворечивости было убедительным, рассуждения, посредством к-рых оно получено, должны носить настолько элементарный характер, чтобы в их правильности нельзя было усомниться. Методы рассуждения, допускаемые в М., Д. Гильберт назвал ф и н и т н ы м и. Такие методы должны избегать использования актуальной бесконечности. Заметим, что гильбертовская формулировка проблемы установления непротиворечивости не использует актуальной бесконечности, поскольку в утверждении о непротиворечивости речь идёт не о совокупности всех доказательств, возможных в математике, а о произвольном доказательстве, к-рое, в свою очередь, является конечной цепочкой формул. Естественно поэтому было ожидать, что проблема непротиворечивости, сформулированная в финитных терминах, может быть решена финитными методами.

Таким образом, М., по Д. Гильберту,— это исследование математич. доказательств финитными методами. Целью М. было установление непротиворечивости математики в её формализованном виде. Доказательство непротиворечивости должно было спасти классич. математику от критики интуиционистов и представителей других школ, а также от тех ограничений, к-рые они пытались наложить на неё.

Программа Д. Гильберта оказалась невыполнимой. В 1931 К. Гёдель доказал, что всякая непротиворечивая формализация арифметики неполна в том смысле, что всегда можно указать истинное арифметич. предложение, к-рое не доказуемо средствами данной формальной системы. Надежда Д. Гильберта на формализацию всей классич. математики не оправдалась. К. Гёдель показал также, что если формальная система арифметики непротиворечива, то, хотя утверждение о её непротиворечивости выразимо на языке арифметики, его нельзя доказать средствами этой же системы. Это означает, что нет никакой надежды получить финитное доказательство непротиворечивости, если относить к финитным только такие методы, к-рые не выходят за рамки методов, применяемых в формальных системах.

Несмотря на неудачу метаматематич. подхода к обоснованию математики, М. сыграла большую роль в развитии математич. логики. Предложенный Д. Гильбертом метод формализации явился важным инструментом исследования математич. теорий. В рамках М. получено много значительных результатов, напр. уже упоминавшаяся *Гёделя теорема о неполноте*. Применяя средства более широкие, чем те, к-рые используются в формальной арифметике, и в то же время достаточно надёжные, Г. Генцен всё же доказал её непротиворечивость. В дальнейшем при исследовании формализованных математич. теорий стали широко применяться нефинитные методы, а сам термин «М.» стал иногда использоваться как синоним термина «теория доказательств».

● Гильберт Д., Бернайс П., Основания математики. Логические исчисления..., пер. с нем., 2 изд., М., 1979; их же, Основания математики. Теория доказательств, пер. с нем., М., 1982; Генцен Г., Непротиворечивость чистой теории чисел, в кн.:

Математическая теория логического вывода, М., 1967, с. 77–153; Карри Х., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969; Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; его же, Математическая логика, пер. с англ., М., 1973; Расёва Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972; Френкель А., Бар-Хиллел И., Основания теории множеств, пер. с англ., М., 1966.

МЕТАТЕОРЕ́МА — теорема *метатеории*, т. е. утверждение об объектной теории, доказываемое в метатеории. М. следует отличать от теорем объектной теории. Напр., утверждение о бесконечности множества простых чисел является теоремой арифметики, т. е. объектной теории, а *Гёделя теорема о неполноте* формальной арифметики — метаматематич. теоремой, т. е. М.

МЕТАТЕО́РИЯ — теория, объектом исследования которой является некоторая другая теория, называемая в этом случае предметной или объектной теорией. Особенно наглядной становится роль М. при аксиоматич. построении объектной теории (см. *Аксиоматический метод*). В аксиоматич. теории исследуемые объекты характеризуются нек-рым множеством аксиом. Все утверждения, к-рые выводятся из аксиом чисто логич. средствами, являются теоремами данной теории. Утверждения же о свойствах системы аксиом (таких, напр., как *непротиворечивость*, *полнота*, *независимость*) являются теоремами М., или *метатеоремами*. Так, в геометрии доказываются теоремы о точках, прямых, плоскостях и отношениях между ними на основании соответствующих аксиом. Теорема о независимости V постулата Евклида от других аксиом относится уже к М. (к-рую в данном случае естественно назвать метагеометрией).

В работах Д. Гильберта и его школы понятие аксиоматич. теории было уточнено в виде понятия *формальной системы*. Формализация объектной теории, т. е. построение её как формальной системы, позволяет в М. пользоваться строгими математич. методами.

Термин «М.» введён последователями Д. Гильберта по аналогии с термином «метаматематика», к-рый он использовал как название исследования формализованных математич. теорий, проводимого в рамках его программы обоснования математики.

● Клини С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973; Расева Е., Сикорский Р., Математика метаматематики, пер. с англ., М., 1972.

МЕТАЯ́ЗЫК — язык, на котором ведётся исследование некоторого другого языка, называемого в этом случае предметным языком или языком-объектом. Если человек, родным языком к-рого является русский язык, изучает французский язык, то М. является русский язык, а языком-объектом — французский. М. может совпадать с предметным языком. Так бывает, напр., когда грамматика русского языка излагается на русском языке.

В математике языком-объектом чаще всего является формализованный язык. На М. формулируются правила синтаксиса формализованного языка, описываются теории в этом языке, доказываются утверждения о предметном языке и теориях в нём. М. является языком метатеории. Обычно в качестве М. используется русский или к.-л. другой естественный язык. Однако и М. может быть формализован, тогда для его описания используется нек-рый метаметаязык. Формализация М. применяется, напр., при описании языков программирования.

● Карри Х. Б., Основания математической логики, пер. с англ., М., 1969; Клини С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973; Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., 2 изд., М., 1976.

МЕТРИЗУ́ЕМОЕ ПРОСТРА́НСТВО — топологическое пространство, топология которого порождается некоторой *метрикой* по правилу: точка принадлежит замыканию множества в том и только в том случае, если она лежит на нулевом расстоянии от этого множества. Достаточное условие метризуемости указал П. С. Урысон (1923): каждое нормальное пространство (и даже каждое регулярное пространство — А. Н. Тихонов, 1925) со счётной базой метризуемо. Первый общий критерий метризуемости пространства был предложен в 1923 П. С. Александровым и П. С. Урысоном.

МЕ́ТРИКА (от греч. μέτρον — мера, размер) — расстояние между двумя точками (элементами) a, b множества A — действительная числовая функция $\rho(a, b)$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $\rho(a, b) \geqslant 0$, причём $\rho(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$; 2) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$; 3) $\rho(a, b) + \rho(b, c) \geqslant \rho(a, c)$. На одном и том же множестве М. может вводиться различным образом. Напр., на плоскости за расстояние между точками a и b, имеющими координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно, можно принять не только обычное евклидово расстояние

$$\rho_1(a, b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

но и различные др. расстояния, напр.

$$\rho_2(a, b) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

В векторных пространствах (функциональных и координатных) М. часто задаются *нормами*, иногда — с помощью скалярного произведения. В дифференциальной геометрии М. вводится путём задания элемента длины дуги при помощи дифференциальной квадратичной формы. Множество с введённой на нём М. наз. *метрическим пространством*.

МЕТРИ́ЧЕСКАЯ ТЕО́РИЯ ДИНАМИ́ЧЕСКИХ СИСТЕ́М — см. *Эргодическая теория*.

МЕТРИ́ЧЕСКАЯ ТЕО́РИЯ ФУ́НКЦИЙ — раздел теории функций действительного переменного, в котором изучаются свойства функций на основе понятия *меры* множества.

В классическом математич. анализе основным объектом изучения являются непрерывные функции, заданные на (конечных или бесконечных) интервалах или областях и обладающие более или менее высокой степенью гладкости. Однако уже со 2-й пол. 19 в. развитие математики всё настоятельнее стало требовать систематич. изучения функций более общего типа. Основной причиной этого является то, что предел последовательности непрерывных функций может быть разрывным. Иными словами, класс непрерывных функций оказывается незамкнутым относительно важнейшей операции анализа — предельного перехода. В связи с этим функции, определяемые при помощи таких классич. средств, как тригонометрич. ряды, часто оказываются разрывными или недифференцируемыми. По той же причине могут быть разрывными производные непрерывных функций и т. п. Далее, дифференциальные уравнения, возникающие при рассмотрении физич. задач, иногда не имеют решений в классе достаточно гладких функций, но имеют их в более широких классах функций (если надлежащим образом обобщить само понятие решения). Весьма важно, что именно эти обобщённые решения и дают ответ на исходную физич. задачу. Эти и аналогичные им обстоятельства стимулировали развитие М. т. ф. К кон. 19 в. возникли проблемы, требовавшие решения: проблема меры множества, длины кривых и площади поверхностей, представление функций рядами, взаимосвязи интегрирования и дифференцирования, почленного интегрирования рядов и др.

Отдельные частные факты М. т. ф. были открыты ещё в 19 в. (существование рядов непрерывных функций с разрывной суммой, примеры нигде недифференцируемых непрерывных функций, неинтегрируемые функции и т. п.). Однако эти факты воспринимались обычно как исключения из правил и не объединялись никакими общими схемами. Лишь с начала 20 в., когда (гл. обр. в трудах Э. Бореля, Р. Бэра и А. Лебега) в основу изучения функций были положены методы теории множеств, стала систематически развиваться современная М. т. ф.

В М. т. ф. с общих точек зрения изучаются интегрирование и дифференцирование функций, различными способами обобщается понятие сходимости функциональных последовательностей, исследуется строение разрывных функций весьма широкого типа и т. п. Большой вклад в М. т. ф. был сделан московской математич. школой (Д. Ф. Егоров, Н. Н. Лузин, А. Я. Хинчин, Д. Е. Меньшов, Н. К. Бари, А. Н. Колмогоров и др.).

Измеримые функции. Важнейшим классом функций, изучаемым в М. т. ф., является класс т. н. измеримых функций. Функцию $f(x)$, заданную на к.-л. множестве E и могущую принимать также бесконечные значения определённого знака, называют и з м е р и м о й на E, если измеримо само E (см. *Измеримое множество*; впредь все измеримые множества предполагаются ограниченными), а также все его подмножества вида $E(f>a)$, где a — любое действительное число. При этом $E(f>a)$ обозначает множество всех точек $x\in E$, в к-рых $f(x)>a$ [аналогичный смысл имеют символы $E(a<f\leqslant b)$, $E(f=b)$ и т. п.]. Если $f(x)$ измерима на E, то измеримы все множества $E(f<a)$, $E(f=a)$, $E(f\geqslant a)$, $E(f\leqslant a)$. Функция $f(x)$, измеримая на каком-нибудь множестве E, измерима и на каждом его измеримом подмножестве. Обратно, если измеримое множество E является суммой конечного или счётного числа множеств E_1, E_2, E_3, ..., на каждом из к-рых $f(x)$ измерима, то $f(x)$ измерима и на всём множестве E. На множестве меры нуль все функции измеримы. Непрерывные функции измеримы на любом измеримом множестве. Абсолютная величина измеримой функции есть измеримая функция. Аналогично этому сумма, разность, произведение и частное двух измеримых функций также являются измеримыми функциями (в предположении, что рассматриваемые функции можно складывать, перемножать и т. п., т. е. что они заданы на одном и том же множестве и что мы не сталкиваемся с выражениями $\frac{a}{0}$, $\infty-\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$). Таким образом, класс измеримых функций замкнут относительно арифметич. операций.

Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на одном и том же множестве E и если $mE(f\neq g)=0$ (где mA обозначает меру измеримого множества A), то говорят, что $f(x)$ и $g(x)$ э к в и в а л е н т н ы, и пишут $f(x)\sim g(x)$. В М. т. ф. часто употребляется термин «почти всюду»: если к.-л. обстоятельство P имеет место для всех точек множества E, за исключением точек, образующих подмножество $A\subset E$ меры нуль, то говорят, что P имеет место почти всюду на E. Таким образом, эквивалентные функции — это такие, к-рые совпадают почти всюду на своей общей области задания. Если одна из этих функций измерима, то измерима и другая.

Класс измеримых функций замкнут относительно операции предельного перехода. Именно, если функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... измеримы на множестве E и для каждого $x\in E$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, то этот предел также является измеримой на E функцией.

Два важных свойства сходящихся последовательностей измеримых функций устанавливаются следующими теоремами:

1) Т е о р е м а Л е б е г а (1906). Если функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... конечны и измеримы на множестве E и всюду на E существует конеч ый предел $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, то при любом $\sigma>0$

$$\lim_{n\to\infty} mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)=0. \qquad (1)$$

2) Т е о р е м а Е г о р о в а (1911). В условиях предыдущей теоремы для всякого $\delta>0$ существует измеримое множество $E_\delta\subset E$ такое, что $mE_\delta>mE-\delta$ и сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$ на E_δ равномерна.

Теорема Егорова означает, что сходимость любой последовательности измеримых функций можно считать равномерной, если позволить себе пренебрегать множествами сколь угодно малой меры.

Приведённая теорема Лебега дала Ф. Риссу (1909) повод для следующего обобщения понятия сходимости. Пусть на измеримом множестве E заданы конечные измеримые функции $f_n(x)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, и $f(x)$. Если для любого $\sigma>0$ выполнено условие (1), то говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ с х о д и т с я к $f(x)$ п о м е р е. Это есть обобщение обычной сходимости, ибо существуют последовательности, сходящиеся по мере, но не сходящиеся в обычном смысле. Однако всякая последовательность, сходящаяся по мере, содержит подпоследовательность, сходящуюся к той же предельной функции почти всюду. Впрочем, функция, предельная для последовательности, сходящейся по мере, не единственна, ибо все эквивалентные ей функции (и только они) будут предельными для той же последовательности. В связи с этим часто отождествляют эквивалентные функции. Разумеется, это допустимо лишь в М. т. ф.

Всякая измеримая на отрезке функция представима в форме предела сходящейся почти всюду последовательности функций, непрерывных на этом отрезке (М. Фреше, 1905). Если при этом исходная функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $|f(x)|\leqslant K$, то и упомянутые непрерывные функции можно выбрать удовлетворяющими этому неравенству. Комбинируя этот результат с приведённой теоремой Егорова, можно получить одну из важнейших теорем М. т. ф.

Т е о р е м а Л у з и н а (1912). Если $f(x)$ конечна и измерима на $E=[a, b]$, то для любого $\delta>0$ существует такая непрерывная на $[a, b]$ функция $\varphi(x)$, что $mE(f\neq\varphi)<\delta$. При этом если $|f(x)|\leqslant K$, то и $\varphi(x)$ можно взять такой, что $|\varphi(x)|\leqslant K$.

Теорема Лузина означает, что всякую измеримую функцию можно считать непрерывной, если позволить себе пренебрегать множествами сколь угодно малой меры.

Интеграл Лебега. В классическом математич. анализе (см. *Интеграл*, *Интегральное исчисление*) определённый интеграл Римана вводится как предел сумм $\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ при стремлении наибольшей из разностей Δx_k к нулю. Это определение удобно, когда $f(x)$ на интервале интегрирования непрерывна. Однако разрывные функции часто оказываются неинтегрируемыми в указанном смысле. В частности, производная $F'(x)$ непрерывной функции может быть неинтегрируемой. Таким образом, операция интегрирования, относящая функции $f(x)$ функцию $F(x)=C+\int_a^x f(t)dt$, не может считаться полностью решающей задачу восстановления первообразной функции по производной. Не менее важно и то, что предел последовательности интегрируемых функций (даже будучи ограниченным) может уже не быть интегрируемым. Эти (и нек-рые другие) недостатки классич. определения привели А. Лебега к важному обобщению понятия интеграла.

Пусть $f(x)$ измерима и ограничена на множестве E, $A<f(x)<B$. А. Лебег дробит отрезок $[A, B]$ точками $A=y_0<y_1<\ldots<y_n=B$ и определяет интеграл как предел сумм

$$\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k mE(y_k\leqslant f<y_{k+1}),\quad y_k\leqslant\eta_k<y_{k+1},$$

при стремлении наибольшей разности Δy_k к нулю. Обозначается интеграл Лебега через $\int_E f(x)dx$ (или $\int_a^b f(x)dx$, если $E=[a, b]$). Всякая измеримая ограниченная функция интегрируема по Лебегу («интегрируема L»). Определение Лебега является обобщением классического, так как если $E=[a, b]$ и $f(x)$ интегрируема на E в классич. смысле Римана, то она обязательно интегрируема и по Лебегу, причём значения обоих интегралов равны.

Если функция $F(x)$ имеет ограниченную производную $F'(x)$, то последняя интегрируема по Лебегу и

$$F(x)=C+\int_a^x F'(t)\,dt, \qquad (2)$$

где интеграл понимается по Лебегу. Таким образом, интеграл Лебега до конца решает задачу восстановления первообразной по ограниченной производной. Чтобы решить ту же задачу для неограниченных производных, А. Лебег расширил своё определение на неограниченные функции. Это делается так: для каждой $f(x)$ вводится т. н. срезанная функция $[f(x)]_A^B$, равная $f(x)$, если $A\leqslant f(x)\leqslant B$,

равная A, если $f(x)<A$, и равная B, если $f(x)>B$. Интеграл $\int_E f(x)dx$ для измеримой, но неограниченной $f(x)$ определяется как (конечный или бесконечный, но определённого знака) предел интеграла $\int [f(x)]_A^B dx$ при $A\to-\infty$, $B\to+\infty$. Функцию $f(x)$ называют интегрируемой по Лебегу (или «суммируемой»), если она имеет конечный интеграл. Такая функция необходимо почти всюду конечна. Класс всех функций, интегрируемых по Лебегу на множестве E, обозначается $L(E)$.

Оказывается, что неограниченная производная $F'(x)$ непрерывной функции $F(x)$ может быть и не интегрируемой по Лебегу, однако если она всюду конечна и интегрируема по Лебегу, то формула (2) сохраняется. Чтобы дать совершенно исчерпывающее решение задачи восстановления функции по её производной, потребовались дальнейшие обобщения понятия интеграла, связанные с именами А. Данжуа, О. Перрона и А. Я. Хинчина.

Важнейшие свойства интеграла Лебега таковы.

1) На множестве E меры нуль всякая функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу и

$$\int_E f(x)\,dx=0.$$

2) Если $f(x)=C$ на множестве E, то

$$\int_E f(x)\,dx=CmE.$$

3) Измеримая функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу тогда и только тогда, когда интегрируема по Лебегу её абсолютная величина $|f(x)|$, причём

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right|\leqslant\int_E|f(x)|\,dx.$$

4) Если $f(x)\in L(E)$, то и $Cf(x)\in L(E)$ и

$$\int_E Cf(x)\,dx=C\int_E f(x)\,dx.$$

5) Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Лебегу, то интегрируемы по Лебегу и $f(x)\pm g(x)$, причём

$$\int_E[f(x)\pm g(x)]dx=\int_E f(x)\,dx\pm\int_E g(x)\,dx.$$

6) Если $f(x)\leqslant g(x)$ и эти функции интегрируемы по Лебегу, то

$$\int_E f(x)\,dx\leqslant\int_E g(x)\,dx.$$

7) Если $f(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве E, то она интегрируема по Лебегу и на всяком его измеримом подмножестве.

8) Если $f(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве E, являющемся суммой конечного или счётного числа попарно непересекающихся измеримых множеств $E_1, E_2, E_3, \ldots$, то

$$\int_E f(x)\,dx=\sum_k\int_{E_k} f(x)\,dx.$$

Это свойство называют полной аддитивностью интеграла Лебега.

9) Если интегрируемую по Лебегу функцию изменить на множестве меры нуль, то это не отразится ни на её интегрируемости, ни на величине интеграла. В частности, если $f(x)\sim0$, то

$$\int_E f(x)\,dx=0.$$

10) Если $f(x)\geqslant0$ и

$$\int_E f(x)\,dx=0,$$

то $f(x)\sim0$.

11) Если $f(x)\in L(E)$, то всякому $\varepsilon>0$ отвечает такое $\delta>0$, что

$$\left|\int_e f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

для любого измеримого множества $e\subset E$ с $me<\delta$. Это свойство называют абсолютной непрерывностью интеграла Лебега.

12) Если функции $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ интегрируемы по Лебегу на E и $f_n(x)\to f(x)$ почти всюду на E, причём существует такая интегрируемая по Лебегу на E функция $\Phi(x)$, что $|f_n(x)|\leqslant\Phi(x)$ для всех n, то предельная функция $f(x)$ тоже интегрируема по Лебегу на E и допустим предельный переход под знаком интеграла, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx.$$

13) Ряды неотрицательных измеримых функций можно почленно интегрировать, т. е. если функции $u_k(x)\geqslant0$, $k=1, 2, 3, \ldots$, измеримы на E, то

$$\int_E\left[\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right]dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E u_k(x)\,dx,$$

причём обе части этого равенства могут одновременно обращаться в $+\infty$. В частности, если ряд в правой части сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится почти всюду на E.

Функции с интегрируемым по Лебегу квадратом. Как в самой М. т. ф., так и особенно в её приложениях важную роль играют функции, измеримые на нек-ром множестве E, и такие, что $\int_E f^2(x)dx<+\infty$. Класс этих функций обозначают $L_2(E)$. Так как $|f(x)|\leqslant1+f^2(x)$, то все функции из $L_2(E)$ интегрируемы на E, то есть $L_2(E)\subset L(E)$. Сходным образом устанавливается интегрируемость произведения $f(x)g(x)$ двух функций из $L_2(E)$. При этом

$$\left(\int_E f(x)\,g(x)\,dx\right)^2\leqslant\left(\int_E f^2(x)\,dx\right)\left(\int_E g^2(x)\,dx\right)$$

(неравенство Буняковского). Если $f(x)$ и $g(x)$ входят в класс $L_2(E)$, то наряду с ними и функция $f(x)\pm g(x)$ входит в $L_2(E)$, причём

$$\left\{\int_E[f(x)+g(x)]^2\,dx\right\}^{1/2}\leqslant\left\{\int_E f^2(x)\,dx\right\}^{1/2}+\left\{\int_E g^2(x)\,dx\right\}^{1/2}$$

(неравенство Коши).

Величину

$$\|f\|=\left\{\int_E f^2(x)\,dx\right\}^{1/2},\quad f\in L_2$$

называют нормой функции $f(x)$. Она обладает свойствами, аналогичными свойствам модуля числа:

1) $\|f\|\geqslant0$, причём $\|f\|=0$, тогда и только тогда, когда $f(x)\sim0$.

2) $\|Cf\|=|C|\cdot\|f\|$; в частности, $\|-f\|=\|f\|$.

3) $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$.

Обычно эквивалентные функции отождествляют, и тогда соотношение $\|f\|=0$ оказывается равносильным с $f(x)\equiv0$. Введение расстояния $\rho(f, g)$ между элементами из $L_2(E)$ по формуле $\rho(f, g)=\|f-g\|$ превращает $L_2(E)$ в *метрическое пространство*.

При помощи нормы вводится понятие предела последовательности $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ элементов из $L_2(E)$. Именно, пределом этой последовательности [в смысле метрики пространства $L_2(E)$] называют такой элемент $f(x)\in L_2(E)$, для к-рого $\lim\|f_n-f\|=0$. Разумеется, не у всякой последовательности есть предел, но если он существует, то единствен и $\|f\|=\lim\|f_n\|$. То, что $f_i(x)$ есть предел (в указанном смысле) последовательности $\{f_n(x)\}$, записывают так: $f_n\to f(L_2)$. В обычных обозначениях М. т. ф. это соотношение означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_E[f_n(x)-f(x)]^2\,dx=0;\qquad(3)$$

такую сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$ наз. с р е д н е й к в а д р а т и ч н о й с х о д и м о с т ь ю. Она влечёт за собой сходимость $f_n(x)$ к $f(x)$ и по мере. Из (3) следует также, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,g(x)\,dx=\int_E f(x)\,g(x)\,dx$$

для любой $g(x)\in L_2(E)$. Справедливость последнего соотношения для любой $g(x)\in L_2(E)$ называют с л а б о й с х о д и м о с т ь ю $f_n(x)$ к $f(x)$. Из трёх типов сходимости — в среднем, по мере и слабой — никакие два не равносильны.

Если $f_n\to f(L_2)$, то всякому $\varepsilon>0$ соответствует такое N, что $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$ для всех n, $m>N$. Справедливо и обратное предложение: если для всякого $\varepsilon>0$ существует N, обладающее указанным свойством, то последовательность $\{f_n\}$ сходится в среднем к нек-рой $f(x)\in L_2(E)$. Это важное свойство пространства $L_2(E)$ называют его п о л н о т о й.

Терминологию, связанную с $L_2(E)$, обычно ещё больше «геометризуют», называя элементы $L_2(E)$ в е к т о р а м и, нормы — д л и н а м и этих векторов, а величину

$$(f,\,g)=\int_E f(x)\,g(x)\,dx$$

— с к а л я р н ы м п р о и з в е д е н и е м векторов f и g. Так как из неравенства Буняковского следует, что $|(f,\,g)|<\|f\|\cdot\|g\|$, то соотношение

$$\cos\theta=\frac{(f,\,g)}{\|f\|\cdot\|g\|}$$

однозначно определяет нек-рый угол θ, принадлежащий отрезку $[0,\,\pi]$. Этот угол называют у г л о м м е ж д у в е к т о р а м и f и g. Таким образом, как и в евклидовой геометрии, скалярное произведение двух векторов есть произведение их длин на косинус угла между ними. Если угол θ между векторами f и g равен $\pi/2$, то есть $(f,\,g)=0$, то векторы f и g называют в з а и м н о о р т о г о н а л ь н ы м и.

Пусть $\omega=\omega(x)$ есть о р т (единичный вектор) пространства $L_2(E)$, то есть $\omega\in L_2(E)$ и $\|\omega\|=1$. Как и в евклидовой геометрии, п р о е к ц и е й на ω вектора $f=f(x)$, образующего с ω угол θ, называют произведение

$$\|f\|\cos\theta=(f,\,\omega).$$

Конечную или счётную систему попарно взаимно ортогональных ортов ω_1, ω_2, ω_3, ... пространства $L_2(E)$ называют о р т о н о р м и р о в а н н о й с и с т е м о й (о. с.). Проекции вектора $f=f(x)$ на орты этой системы, т. е. числа $c_k=(f,\,\omega_k)$, называют к о э ф ф и ц и е н т а м и Ф у р ь е функции $f(x)$ по о. с. $\{\omega_k(x)\}$. Эти величины удовлетворяют т. н. н е р а в е н с т в у Б е с с е л я

$$\sum c_k^2\leqslant\|f\|^2.$$

Если же имеет место аналог теоремы Пифагора, т. е.

$$\sum c_k^2=\|f\|^2,$$

то это равенство называют р а в е н с т в о м П а р с е в а л я. Оно означает возможность сколь угодно хорошего приближения $f(x)$ (в метрике L_2) линейными комбинациями функций $\omega_k(x)$.

Во многих вопросах полезна т е о р е м а Р и с с а — Ф и ш е р а (1907). Пусть $\{\omega_k\}$ — о. с. Если числа $\{c_k\}$ таковы, что $\sum c_k^2<+\infty$, то в $L_2(E)$ существует один и только один элемент f, для к-рого числа c_k являются коэффициентами Фурье по о. с. $\{\omega_k\}$ и выполнено равенство Парсеваля.

Если о. с. $\{\omega_k\}$ такова, что равенство Парсеваля справедливо для л ю б о й функции $f(x)$ из $L_2(E)$, то эту о. с. называют з а м к н у т о й. Замкнутая система не может быть конечной. В. А. Стеклов (1911) показал, что для замкнутости о. с. достаточно выполнения равенства Парсеваля для многочленов.

Любая замкнутая о. с. $\{\omega_k\}$ может играть роль системы координат в пространстве $L_2(E)$, т. к. векторы из $L_2(E)$ вполне определяются своими проекциями на орты подобной системы: если векторы f и g таковы, что $(f,\,\omega_k)=(g,\,\omega_k)$, $k=1,\,2,\,\ldots$, то $f=g$. В частности, только у нулевого вектора равны нулю все проекции на орты замкнутой системы. Отсюда следует, что замкнутую о. с. нельзя дополнить ни одним элементом, не нарушая её ортонормальности. Опираясь на теорему Рисса — Фишера, можно доказать и обратное предложение: если о. с. «полна» в указанном смысле, то она замкнута.

Абсолютно непрерывные функции. Функцию $f(x)$, заданную на $[a,\,b]$, называют а б с о л ю т н о н е п р е р ы в н о й (а. н. ф.), если всякому $\varepsilon>0$ отвечает такое $\delta>0$, что для любой конечной или счётной системы попарно непересекающихся интервалов $\{(a_i,\,b_i)\}$, содержащихся в $[a,\,b]$, для к-рой $\sum(b_i-a_i)<\delta$, оказывается

$$\sum|f(b_i)-f(a_i)|<\delta.$$

Этот класс функций был введён Дж. Витали (1905). Простейшим примером а. н. ф. является $f(x)$, удовлетворяющая на $[a,\,b]$ условию Липшица $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$. Сумма, разность, произведение и частное (если его можно образовать) двух а. н. ф. также суть а. н. ф.

Если $\varphi(x)\in L([a,\,b])$, то функция

$$f(x)=C+\int_a^x\varphi(t)\,dt$$

(неопределённый интеграл Лебега) абсолютно непрерывна. Обратно, всякая а. н. ф. $f(x)$, заданная на $[a,\,b]$, представима в форме (4), где $\varphi(t)\in L([a,\,b])$. Иными словами, класс а. н. ф. совпадает с классом неопределённых интегралов Лебега. К этому следует добавить, что производная интеграла Лебега по переменному верхнему пределу почти всюду существует и равна подинтегральной функции. Поэтому всякая а. н. ф. дифференцируема почти всюду, её производная интегрируема по Лебегу и сама функция является неопределённым интегралом своей производной. В частности, если производная а. н. ф. $f(x)$ почти всюду равна нулю, то $f(x)=\mathrm{const}$.

Полная *вариация* функции $\overset{b}{V}_a(f)$ а. н. ф. $f(x)$ равна $\int_a^b|f'(t)|dt$, так что всякая а. н. ф. имеет конечную вариацию. Обратное неверно: существуют (непрерывные) функции с конечной вариацией, не являющиеся абсолютно непрерывными.

● Л е б е г А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, пер. с франц., М.— Л., 1934; Л у з и н Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.— Л., 1951; Б а р и Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; С а к с С., Теория интеграла, пер. с англ., М., 1949; Х а л м о ш П., Теория меры, пер. с англ., М., 1953; П е с и н И. Н., Развитие понятия интеграла, М., 1966; У л ь я н о в П. Л., Метрическая теория функций, в кн.: История отечественной математики, т. 3, К., 1968; Итоги науки. Математический анализ, 1970, М., 1971.

И. П. Натансон.

МЕТРИ́ЧЕСКАЯ ТЕО́РИЯ ЧИ́СЕЛ — раздел теории чисел, в котором изучаются и метрически (т. е. на основе теории меры) характеризуются множества чисел, обладающих определёнными арифметическими свойствами. М. т. ч. тесно связана с теорией вероятностей, что иногда даёт возможность использовать её методы и результаты для анализа теоретико-числовых моделей.

МЕТРИ́ЧЕСКАЯ ФО́РМА — дифференциальная квадратичная форма, определяющая линейный элемент. См. *Дифференциальная геометрия*, *Риманова геометрия*.

МЕТРИ́ЧЕСКИЙ ТЕ́НЗОР — дважды ковариантный тензор, определяющий метрическую форму. См. *Риманова геометрия*.

МЕТРИ́ЧЕСКОЕ ПРОСТРА́НСТВО — множество X, на котором задана некоторая *метрика*. Теоретико-множественный подход к изучению фигур (пространств) основан на исследовании взаимного расположения составляющих их элементарных частей. Одной из фундаментальных характеристик взаимного расположения точек пространства является расстояние между ними. Этот подход к пространственным отношениям и приводит к понятию М. п., впервые (1906) выделенному М. Фреше в связи с рассмотрением функциональных пространств. Оказалось, что естест-

венную метрику несут на себе множества объектов разной природы. Как М. п. могут рассматриваться множества состояний, функций и отображений, любые подмножества евклидовых пространств и гильбертова пространства. Рассмотрение метрик важно при исследовании сходимости (рядов, функций), при решении вопросов аппроксимации.

Каждая метрика ρ на множестве X позволяет ввести на X топологию (так что М. п. оказывается *топологическим пространством*) следующим образом. Замыканием $\bar{A}$ множества A в М. п. X наз. совокупность точек y таких, что

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y),\ y \in A\} = 0.$$

При этом величина $\rho(x, A)$ наз. расстоянием от x до A, она является (при фиксированном A) непрерывной функцией x.

Развитие теории М. п. шло по следующим важнейшим направлениям.

Общая теория М. п. В ней исследуются свойства М. п., инвариантные относительно изометрий — взаимно однозначных отображениях «на», сохраняющих расстояние. К числу таких свойств относятся полнота, ограниченность, вполне ограниченность. Свойства этого типа наз. метрическими.

Топологическая теория М. п. Предметом её являются свойства М. п., сохраняющиеся при *гомеоморфизмах*; среди них, напр., компактность, связность. Свойства этого типа наз. топологическими.

Теория пространств, на к-рых задана метрика, согласованная с к.-л. дополнительной алгебраич. структурой (напр., векторного пространства или группы). Сюда относятся евклидовы пространства, предгильбертовы и гильбертовы пространства, банаховы пространства и банаховы алгебры. Имеющиеся здесь факты существенно связаны с рассмотрением важнейших в идейном отношении свойств метрик или норм, но по содержанию целиком принадлежат соответствующим областям алгебры и функционального анализа.

Рассмотрение специальных метрик играет важную роль при исследовании неевклидовых геометрий, в дифференциальной геометрии, механике и физике. Центральное место здесь занимают понятия римановой метрики и риманова пространства.

МИЛЛИА́РД (франц. milliard), тысяча миллионов,— число, изображаемое единицей с 9 нулями, т. е. число 10^9. В русской, французской и американской литературе М. иногда наз. биллионом.

МИЛЛИО́Н (франц. million), тысяча тысяч,— число, изображаемое единицей с 6 нулями, т. е. число 10^6.

МИНИМА́КС — смешанный экстремум вида

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} F(x, y),\quad \min_{y \in Y} \max_{x \in X} F(x, y)$$

и т. п. М. можно интерпретировать (напр., в теории принятия решений, в исследовании операций или в математич. статистике) как наименьшие потери из тех, к-рые нельзя предотвратить принимающему решения субъекту в наихудших для него обстоятельствах. См. также *Максимин*.

МИНИМА́КСА ПРИ́НЦИП — принцип оптимальности в антагонистических играх, предписывающий игрокам выбирать стратегии, на которых достигается максимальный гарантированный выигрыш (поэтому М. п. иногда наз. принципом наибольшего гарантированного результата).

Пусть $\Gamma = (X, Y, H)$ — антагонистич. игра. Тогда, согласно М. п., игроки I и II выбирают стратегии, на к-рых достигаются внешние экстремумы соответственно выражений

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} H(x, y),\quad \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} H(x, y)$$

(если они существуют). Если выполняется равенство

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} H(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} H(x, y), \qquad (1)$$

то пара стратегий игроков I и II, реализующих М. п., является седловой точкой функции H, её компоненты наз. оптимальными стратегиями игроков. Если равенство (1) не имеет места, но выполняется равенство

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} H(x, y) - \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} H(x, y), \qquad (2)$$

то стратегии, реализующие внешние экстремумы с точностью до произвольного $\varepsilon > 0$, наз. ε-оптимальными стратегиями. Равенства (1) и (2) выполняются не всегда. Теоремы, устанавливающие их справедливость, наз. теоремами о минимаксах (см. *Матричная игра*).

МИНИМА́КСНАЯ ЗАДА́ЧА — задача об отыскании минимальных значений функций вида

$$f(x) = \max_{y \in G} \varphi(x, y),$$

где φ — непрерывна вместе с φ'_x, а G — компакт. Эти функции, вообще говоря, негладки, но при достаточно слабых предположениях дифференцируемы по направлению. Наряду с выпуклыми функциями они представляют собой один из наиболее хорошо изученных классов негладких функций. Для них установлены необходимые условия минимума как при отсутствии, так и при наличии ограничений. Для решения М. з. разработаны численные методы.

МИНИМА́ЛЬНАЯ ДОСТА́ТОЧНАЯ СТАТИ́СТИКА — см. *Достаточная статистика*.

МИНИМА́ЛЬНАЯ ПОВЕ́РХНОСТЬ (от лат. minimum — наименьшее) — поверхность, у которой средняя кривизна во всех точках равна нулю. М. п. появляются при решении следующей вариационной задачи: в пространстве дана нек-рая замкнутая кривая; среди всех возможных поверхностей, проходящих через эту кривую, найти такую, для к-рой часть её, заключённая внутри кривой, имела бы наименьшую площадь (минимальная площадь — отсюда назв.). Если заданная кривая — плоская, то решением будет ограниченный этой кривой кусок плоскости. В случае неплоской кривой необходимое условие, к-рому должна удовлетворять поверхность с минимальной площадью, было установлено Ж. Лагранжем (1760) и несколько позже истолковано геометрически Ж. Мёнье (1776) в форме, эквивалентной требованию, чтобы средняя кривизна обращалась в нуль. Хотя это условие не является достаточным, т. е. не гарантирует минимума площади, однако впоследствии назв. «М. п.» было сохранено за всякой поверхностью с нулевой средней кривизной. Если предположить, что поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то, приравнивая нулю выражение для средней кривизны, приходят к дифференциальному уравнению с частными производными 2-го порядка:

$$(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = 0,$$

где

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y},\quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Примерами М. п. могут служить: обыкновенная винтовая поверхность; катеноид — единственная (действительная) М. п. среди поверхностей вращения; поверхность Шерка, определяемая уравнением $z = \ln \frac{\cos y}{\cos x}$.

М. п. имеет во всех точках неположительную гауссову кривизну. Ж. Плато (1849) предложил способ экспериментального осуществления М. п. при помощи мыльных плёнок, натянутых на проволочный каркас.

МИНИМА́ЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕ́НТ частично упорядоченного множества — элемент, для которого в этом частично упорядоченном множестве нет элемента, строго меньшего его.

МИНИМА́ЛЬНЫХ НЕВЯ́ЗОК МЕ́ТОД — итерационный метод вида

$$u^{k-1} = u^k - \alpha_k (Au^k - f),\quad \alpha_k = (A\xi^k, \xi^k)/\|A\xi^k\|^2,$$

где $\xi^k = Au^k - f$, применяемый для решения уравнения $Au = f$ с линейным самосопряжённым положительно опре-

делённым оператором A, действующим в гильбертовом пространстве H.

Если спектр оператора A принадлежит отрезку $[m, M]$, то метод сходится со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем $q=(M-m)/(M+m)$, т. е. имеет место оценка

$$\|\xi^k\| \leqslant q^k \|\xi^0\|.$$

Различные способы выбора параметра α_k приводят к различным вариантам метода, в частности к *наискорейшего спуска методу*.

Условия сходимости М. н. м. могут быть ослаблены, если рассматривать его на нек-рых подмножествах из H. В частности, в вещественных пространствах H для сходимости М. н. м. достаточно, чтобы оператор A был положительно определённым и ограниченным.

МИНИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ — раздел вычислительной математики, посвящённый конструированию и исследованию методов, позволяющих находить приближённое с заранее указываемой точностью $\varepsilon>0$ решение поставленной задачи P из класса $\{P\}$ при наименьших затратах вычислительной работы (при наименьшем объёме вычислений). Двойственной по отношению к М. в. р. является проблема нахождения среди приближённых методов, требующих одинаковой допустимой вычислительной работы, метода, обладающего максимальной точностью (наименьшей погрешностью).

Пусть $\varepsilon \geqslant 0$ (обычно $\varepsilon>0$, при $\varepsilon=0$ ищется точное решение задачи P) — требуемая точность решения задачи P из заданного класса $\{P\}$ родственных задач, а m — допустимый метод для отыскания решения любой задачи из $\{P\}$ и множество таких методов обозначено через $\{m\}$. Пусть число $W_m(P, \varepsilon)>0$ характеризует затраты вычислительной работы в методе m, позволяющем найти решение с точностью ε, а

$$W_m(\{P\}, \varepsilon) = \sup_{P \in \{P\}} W_m(P, \varepsilon).$$

Тогда задача М. в. р. состоит в отыскании такого метода m_0, что

$$W_{m_0}(\{P\}, \varepsilon) = \inf_{m \in \{m\}} W_m(\{P\}, \varepsilon),$$

т. е., по существу, ищется оптимальный метод решения не одной фиксированной задачи P, а целого класса задач (оптимизация на классе). Чаще же всего М. в. р. производится в асимптотич. смысле при $\varepsilon \to 0$, $N \to \infty$, где N — параметр, определяющий «размерность» решаемой задачи. Метод m_0 наз. о п т и м а л ь н ы м п о п о р я д к у, если затраты вычислительной работы в нём не превышают более чем в конечное число раз полученную снизу оценку $\underline{W}(\{P\}, \varepsilon)$ затрат вычислительной работы в любом возможном методе; метод m_0 наз. л о г а р и ф м и ч е с к и о п т и м а л ь н ы м, если

$$\ln W_{m_0}(\{P\}, \varepsilon) = (1+o(1)) \ln \underline{W}(\{P\}, \varepsilon).$$

Вычислительная работа $W_m(P, \varepsilon)$ обычно характеризуется числом арифметич. действий (операций), производимых в методе m для достижения точности ε при его реализации на условной ЭВМ. От допустимых методов, как правило, требуют их устойчивости по отношению к ошибкам округления. Важно, чтобы и асимптотич. рост количества используемых ячеек машинной памяти не был бы в этих методах чересчур большим.

Решение многих таких конкретных проблем минимизации не только представляет теоретич. интерес, но и имеет большое прикладное значение, позволяя часто решать задачи на ЭВМ при сравнительно небольших затратах машинного времени. Особенно это важно для задач, требующих большого объёма вычислений, что характерно, напр., для многомерных задач математич. физики и для задач, являющихся стандартными, подобно задачам вычисления элементарных функций и нахождения дискретных преобразований Фурье, и многократно используемых для решения других, более сложных. Указанные проблемы М. в. р. достаточно сложны, и во многих случаях их решения получены лишь частично.

Для задачи вычисления значения многочленов $P_N(x)$ степени N при заданном x метод Горнера является оптимальным по числу операций. Для задачи нахождения дискретного преобразования Фурье

$$v_n = \sum_{k=0}^{N-1} u_k e^{i 2\pi n/N}, \quad n=0, 1, \ldots, N-1,$$

известен логарифмически оптимальный метод быстрого дискретного преобразования Фурье, позволяющий получать вектор $v=(v_0, v_1, \ldots, v_{N-1})$ за $O(N \ln N)$ арифметич. действий. Для задач решения систем линейных алгебраич. уравнений общего вида размерности N пока известны лишь методы с $W_m(\{P\}, 0)=O(N^\alpha)$, $\alpha \approx 2{,}5$. Для подобных же задач линейной алгебры в случае сеточных систем, возникающих при аппроксимации краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике или параллелепипеде, известен ряд хорошо зарекомендовавших себя на практике логарифмически оптимальных и оптимальных по порядку прямых методов. В случае общих областей и эллиптич. уравнений для решения сеточных систем с точностью $\varepsilon \asymp N^{-\alpha}$, $\alpha>0$, известен ряд логарифмически оптимальных и оптимальных по порядку итерационных методов. Они успешно применяются и при решении нелинейных краевых задач и при решении сеточных задач на собственные значения.

Если задача P состоит в решении корректного операторного уравнения

$$L(u) = f, \tag{1}$$

где оператор L действует из H в F (H и F — бесконечномерные банаховы пространства), то обычно класс $\{P\}$ состоит из таких задач с различными f, при к-рых решения (1) принадлежат к нек-рому компакту U. Обычно U задаётся условием

$$\|u\|_{H'} \leqslant R, \tag{2}$$

где H' — нек-рое банахово пространство. Если u ищется с точностью ε в метрике H, то часто известны оценки снизу наименьшей размерности $\underline{N}=\underline{N}(\varepsilon)$ вектора $v_{\underline{N}}=(v_1, \ldots, v_{\underline{N}})$, задание к-рого позволяет получить элемент

$$\hat{v}_{\underline{N}} = \sum_{i=1}^{\underline{N}} v_i \psi_i \in H, \quad \|u - \hat{v}_{\underline{N}}\|_H < \varepsilon \tag{3}$$

(известны оценки N-поперечников компакта U). Для ряда краевых задач для сильноэллиптич. систем построены варианты проекционно-сеточных методов (конечных элементов), приводящих к алгебраич. системам уравнений

$$L_N(\overline{u}_N) = \overline{f}_N \tag{4}$$

с N неизвестными, для к-рых, во-первых, известны оптимальные по порядку итерационные методы и, во-вторых, соответствующие восполнения $\hat{u}_N$ из (3) вектора $\overline{u}_N$ являются ε-аппроксимациями в H решения (1), причём $N \leqslant k\underline{N}(\varepsilon)$, где k — константа, не зависящая от ε. Если не учитывать работу на формирование (4), то такие методы приводят к оценкам затраты вычислительной работы, минимальным по порядку. Напр., в плоском случае для эллиптич. уравнения 2-го порядка $H=W_2^1(\Omega)$, $H'=W_2^2(\Omega)$, [$W_2^k(\Omega)$ — пространство Соболева] достижимы оценки затрат числа арифметич. действий $O(\varepsilon^{-2})$. Логарифмически оптимальные и оптимальные по порядку методы известны для разнообразных задач математич. физики, включая системы типа Навье — Стокса, интегральные уравнения, нестационарные задачи. При решении конкретной задачи важнейшим моментом является погружение её в тот или иной класс задач, для к-рого или известны или должны быть созданы эффективные численные методы. Наличие более детальной информации о свойствах решения позволяет сузить этот класс и в ряде случаев выбрать методы, приводящие к значительному теоретич. и практич. уменьшению затрат вычислительной работы.

Е. Г. Дьяконов.

МИ́НИМУМ (лат. minimum — наименьшее) функции, минимальное значение функции,— наименьшее значение функции $f(x)$ на данном множестве E; обозначается: $\min\limits_{x\in E} f(x)$. См. *Экстремум.*

МИНКО́ВСКОГО НЕРАВЕНСТВО — неравенство вида

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{1/p},$$

где a_i и b_i, $i=1, 2, \ldots, n$ — действительные числа и $p>1$. При $p=1$ М. н. утверждает, что модуль суммы не превосходит суммы модулей. М. н. имеет аналоги для бесконечных рядов

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p\right)^{1/p}$$

и интегралов

$$\left(\int_a^b|f_1(x)+f_2(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_a^b|f_1(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_a^b|f_2(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

(если стоящие в правых частях ряды и интегралы существуют). М. н. было установлено Г. Минковским (1896) и является обобщением неравенства треугольника для нормированных векторных пространств. М. н.— следствие *Гёльдера неравенства.*

МИНКО́ВСКОГО ПРОСТРА́НСТВО — пространство, введённое Г. Минковским (1908). См. *Дифференциальная геометрия.*

МИНКО́ВСКОГО ТЕОРЕ́МА — теорема о выпуклых *многогранниках*, доказанная Г. Минковским (1896). См. также *Геометрия чисел.*

МИНКО́ВСКОГО — ФА́РКАША ТЕОРЕ́МА — теорема о *линейных неравенствах*, установленная Г. Минковским (1896) и Ю. Фаркашем (1902).

МИНО́Р (от лат. minor — меньший) k-го порядка матрицы — определитель матрицы, составленный из элементов данной матрицы, стоящих на пересечении произвольно выделенных её k строк и k столбцов с сохранением их порядка, то есть М. k-го порядка есть определитель квадратной матрицы размера $k\times k$. Каждая матрица имеет $C_n^kC_m^k$ миноров k-го порядка. Минорами 1-го порядка являются элементы матрицы. Если номера строк, в к-рых расположен М., совпадают с номерами столбцов, то он наз. главным минором.

Базисный минор матрицы — отличный от нуля М. k-го порядка этой матрицы такой, что все содержащие его М. $(k+1)$-го порядка равны нулю или же М. $(k+1)$-го порядка не существует]. Порядок любого базисного М. матрицы над полем совпадает с рангом матрицы, причём каждый столбец (строка) матрицы есть линейная комбинация линейно независимых столбцов (строк), в к-рых расположен базисный М.

В квадратной матрице A n-го порядка дополнительным минором к минору М. порядка k наз. определитель порядка $n-k$, полученный из матрицы A вычёркиванием тех k строк и столбцов, в которых расположен М.

МИНОРА́НТА функции (франц. minorante, от minorer — объявлять меньшим) — функция, значения которой не больше соответствующих значений данной функции. См. также *Мажоранта.*

МИ́НУС (от лат. minus — менее) — знак (горизонтальная черта —) для обозначения действия вычитания, а также для обозначения отрицательности чисел.

МИНУ́ТА (от лат. minutus — маленький, мелкий) — единица измерения плоских углов, равная 1/60 градуса; обозначается знаком $'$.

МИТТАГ-ЛЁФФЛЕРА ТЕОРЕ́МА о разложении мероморфной функции — одна из основных теорем теории аналитических функций, дающая для мероморфных функций аналог разложения рациональной функции на простейшие дроби. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел

$$|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\ldots,\quad\lim_{n\to\infty}a_n=\infty,$$

и $\{G_n\}$ — последовательность рациональных функций вида

$$G_n(z)=\sum_{k=1}^{l_n}\frac{c_{n_k}}{(z-a_n)^k},\qquad(1)$$

так что точка a_n является единственным полюсом соответствующей функции $G_n(z)$. Тогда существуют мероморфные функции $f(z)$ в плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного z, имеющие полюсы в точках a_n, и только в них, с заданными главными частями (1) рядов Лорана, соответствующих точкам a_n. Все эти функции $f(z)$ представимы в виде разложения Миттаг-Лёффлера:

$$f(z)=h(z)+\sum_{n=1}^{\infty}[G_n(z)+P_n(z)],\qquad(2)$$

где $P_n(z)$ — нек-рые многочлены, подбираемые по a_n и $G_n(z)$ так, чтобы ряд (2) равномерно (после выбрасывания конечного числа членов) сходился на любом компакте $K\subset\mathbb{C}$, $h(z)$ — произвольная целая функция.

Теорема установлена Г. Миттаг-Лёффлером (1876).

МНИ́МАЯ ЕДИНИ́ЦА — число i, квадрат которого равен отрицательной единице; таким образом, $i=\sqrt{-1}$. См. *Комплексное число.*

МНИ́МАЯ ОСЬ гиперболы — см. *Гипербола.*

МНИ́МАЯ ЧАСТЬ комплексного числа $z=x+iy$ — действительное число y; обозначается $\operatorname{Im}z$.

МНИ́МОЕ ЧИСЛО́ — число вида $x+iy$, где $i=\sqrt{-1}$, x и y — действительные числа и $y\neq0$, т. е. комплексное число, не являющееся действительным; М. ч. вида iy наз. чисто мнимыми (иногда только их и называют М. ч.). Термин «М. ч.» возник, когда эти числа вошли уже в употребление, однако реальный смысл их ещё не был раскрыт. См. также *Комплексное число.*

МНОГОГРА́ННИК в трёхмерном пространстве — совокупность конечного числа плоских многоугольников такая, что: 1) каждая сторона любого из многоугольников есть одновременно сторона другого (но только одного), называемого смежным с первым (по этой стороне); 2) от любого из многоугольников, составляющих М., можно дойти до любого из них, переходя к смежному с ним, а от этого, в свою очередь,— к смежному с ним, и т. д. Эти многоугольники наз. гранями, их стороны — рёбрами, а их вершины — вершинами М.

Приведённое определение М. получает различный смысл в зависимости от того, как определить многоугольник. Если под многоугольником понимают плоские замкнутые ломаные (хотя бы и самопересекающиеся), то приходят к первому определению М. Основная часть статьи построена на основе второго определения М., при к-ром его грани являются многоугольниками, понимаемыми как части плоскости, ограниченные ломаными. С этой точки зрения, М. есть поверхность, составленная из многоугольных кусков. Если эта поверхность сама себя не пересекает, то она есть полная поверхность нек-рого геометрич. тела, к-рое также наз. М.; отсюда возникает третья точка зрения на М. как на геометрич. тела, причём допускается также существование у этих тел «дырок», т. е. эти тела не односвязны.

М. наз. выпуклым, если он весь лежит по одну сторону от плоскости любой его грани; тогда грани его тоже выпуклы. Выпуклый М. разрезает пространство на две части — внешнюю и внутреннюю. Внутренняя его

часть есть выпуклое тело. Обратно, если поверхность выпуклого тела многогранная, то соответствующий М.— выпуклый.

Важнейшие теоремы общей теории выпуклых М., рассматриваемых как поверхности, следующие.

Теорема Эйлера (1758): число вершин минус число рёбер плюс число граней выпуклого М.— эйлерова характеристика М.— равно двум; символически: в—р+г=2.

Теорема Коши (1813) (в современной форме): если два выпуклых М. изометричны друг другу (т. е. один М. может быть взаимно однозначно отображён на другой М. с сохранением длин лежащих в нём линий), то второй М. может быть получен из первого движением его как жёсткого целого (или движением и зеркальным отражением). Отсюда, в частности, следует, что если грани выпуклого М. жёстки, то он сам жёсток, хотя бы его грани были скреплены друг с другом по рёбрам шарнирно. Это предполагал верным ещё Евклид, но доказал О. Коши только через 2000 лет после Евклида.

Теорема Александрова (1939): если взять конечное число плоских выпуклых многоугольников (сделанных, напр., из бумаги) и указать, какую сторону какого из них с какой стороной какого другого мы будем склеивать (склеиваемые стороны, конечно, должны быть одинаковой длины), т. е. если рассмотреть развёртку (выкройку) М., то для того чтобы так склеенную замкнутую поверхность можно было, соответственно расправив (т. е. изогнув, если нужно, но не растягивая, не сжимая, не разрывая и больше не склеивая), превратить в поверхность выпуклого М., необходимо и достаточно, чтобы: а) удовлетворялось условие Эйлера в—р+г=2 и б) сумма плоских углов, сходящихся при склеивании в одной вершине, для любой вершины была меньше 360°. Эта теорема есть теорема существования, т. е. она показывает, с какими развёртками существуют выпуклые М., а теорема Коши есть для неё теорема единственности, т. е. она показывает, что существует только один выпуклый М. с такой развёрткой.

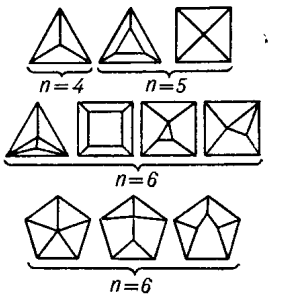
Теорема (существования) Минковского (1896): существует выпуклый М. с любыми площадями граней и любыми направлениями внешних нормалей к ним, лишь бы сумма векторов, имеющих направления нормалей и длины, равные площадям соответствующих граней, была равна нулю и эти векторы не лежали бы все в одной плоскости. Эти условия необходимы.

Теорема (единственности) Минковского (1896): выпуклый М. вполне определяется площадями своих граней и направлениями внешних нормалей к ним; и углубляющая её теорема (единственности) Александрова: два выпуклых М. с попарно параллельными гранями не равны друг другу только в том случае, если для одной из параллельных граней с одинаково направленными внешними нормалями одна из этих граней может быть при помощи параллельного переноса вложена в другую.

Теорема Штейница (1917): существует выпуклый М. с любой наперёд заданной сеткой. При этом сеткой выпуклого М. называют сетку, составленную его рёбрами. Два М. принадлежат одному и тому же типу, если топологически тождественны сетки их рёбер, т. е. если один из них отличается от другого лишь длиной своих рёбер и величиной углов между ними. Сетку рёбер выпуклого М. можно спроектировать на плоскость из внешней точки, весьма близкой к внутренней точке какой-нибудь его грани. Сама эта грань спроектируется тогда в виде внешнего выпуклого многоугольника, а все остальные — в виде малых выпуклых многоугольников, к-рые его заполняют, не налегая друг на друга, и смежны друг с другом целыми сторонами. Тип сетки рёбер М. при таком проектировании не меняется. Число m типов М. с данным числом n граней ограниченно, а именно: если $n=4, 5, 6, 7, 8, \ldots$, то $m=1, 2, 7, 34, 257, \ldots$. На рис. даны сетки всех типов для $n=4, 5, 6$.

Наиболее важны следующие специальные выпуклые М.

Правильные многогранники (тела Платона) — такие выпуклые М., все грани к-рых суть правильные многоугольники. Все многогранные углы правильного М. конгруэнтны. Как это следует уже из подсчёта суммы плоских углов при вершине, выпуклых правильных М. не больше пяти. Указанным ниже путём можно доказать, что существуют именно пять правильных М. (это доказал Евклид). Они — правильный *тетраэдр*, *куб*, *октаэдр*, *додекаэдр* и *икосаэдр* (см. табл., рис. 1—5).



Куб и октаэдр дуальны, т. е. получаются друг из друга, если центры тяжести граней одного принять за вершины другого и обратно. Аналогично дуальны додекаэдр и икосаэдр. Тетраэдр дуален сам себе. Правильный додекаэдр получается из куба построением «крыш» на его гранях (способ Евклида), вершинами тетраэдра являются любые четыре вершины куба, попарно не смежные по ребру. Так получаются из куба все остальные правильные М.

В приведённой ниже таблице указаны радиус описанной сферы, радиус вписанной сферы и объём всех правильных М. (a — длина ребра М.).

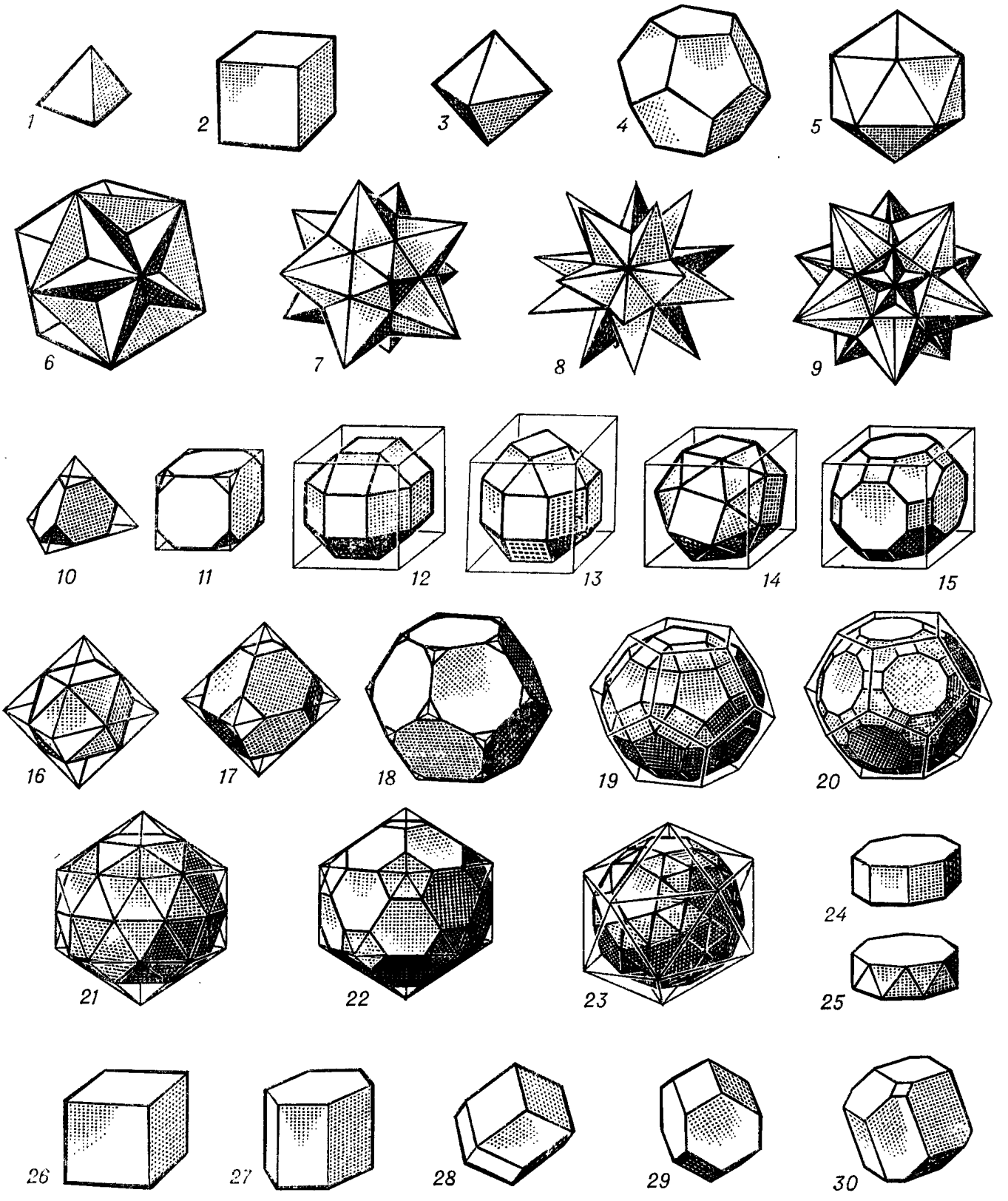
	Радиус описанной сферы	Радиус вписанной сферы	Объём
Тетраэдр . .	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Куб	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^3
Октаэдр . .	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Додекаэдр	$\frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$	$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$
Икосаэдр	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a}{12}(3+\sqrt{5})\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})$

Изоэдры и изогоны. Изоэдром (изогоном) наз. такой выпуклый М., что группа его поворотов (первого и второго, т. е. с отражениями, рода) вокруг центра тяжести переводит любую его грань (вершину) в любую другую его грань (вершину). Каждому изоэдру (изогону) соответствует дуальный изогон (изоэдр). Если М. одновременно и изогон и изоэдр, то он правильный М. Комбинаторно различных изоэдров (изогонов) имеется 13 специальных и две бесконечные серии. Оказывается, что каждый из этих изоэдров может быть реализован так, что все его грани суть правильные многоугольники. Полученные так М. наз. полуправильными многогранниками (телами Архимеда) (см. табл., рис. 10—23, призма — рис. 24, антипризма — рис. 25).

Параллелоэдры (выпуклые; найдены Е. С. Фёдоровым в 1881) — М., рассматриваемые как тела, параллельным переносом к-рых можно заполнить всё бесконечное пространство так, чтобы они не входили друг в друга и не оставляли пустот между собой, т. е. образовывать разбиение пространства. Таковы, напр., куб или правильная 6-угольная призма. Топологически различных сеток рёбер параллелоэдров пять (см. табл., рис. 26—30). Число их граней 6, 8, 12, 12, 14. Для того чтобы М. был параллелоэдром, необходимо и достаточно, чтобы он был выпуклым М. одного из пяти указанных топологич. типов и чтобы все грани его имели центры симметрии.

Если параллелоэдры разбиения смежны целыми гранями, разбиение наз. нормальным. Центры паралле-

Табл. ПРАВИЛЬНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ (ТЕЛА ПЛАТОНА) — рис. *1—5*. ПРАВИЛЬНЫЕ НЕВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ (ТЕЛА ПУАНСО) — рис. *6—9*. ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ (ТЕЛА АРХИМЕДА) — рис. *10—23*. ПРИЗМЫ И АНТИПРИЗМЫ АРХИМЕДА — рис. *24—25*. ВЫПУКЛЫЕ ПАРАЛЛЕЛОЭДРЫ (ТЕЛА ФЁДОРОВА) — рис. *26—30*.



лоэдров такого разбиения образуют решётку, т. е. совокупность всех точек с целыми координатами относительно какой-то, вообще говоря не прямоугольной, декартовой системы координат. Множество точек пространства, из к-рых каждая отстоит от нек-рой данной точки O рассматриваемой решётки Λ не дальше, чем от всякой другой точки этой решётки, наз. областью Вороного $D_{O\Lambda}$ точки O в решётке Λ. Область $D_{O\Lambda}$ является выпуклым М. с центром в точке O. Совокупность областей Вороного всех точек произвольной решётки образует нормальное разбиение пространства. Произвольное (даже n-мерное) нормальное разбиение на параллелоэдры, в каждой из вершин к-рого сходится $n+1$ параллелоэдр, может быть аффинным преобразованием превращено в разбиение Вороного для нек-рой решётки.

Всякое движение, переводящее в себя решётку Λ и оставляющее на месте её точку O, преобразует в себя область $D_{O\Lambda}$ и обратно. Групп всех таких движений семь: кубическая, ромбоэдрическая, квадратная (или тетрагональная), ортогональная (или ромбическая), моноклинная, триклинная и гексагональная.

Кристаллографические многогранники. Каждая из семи рассмотренных групп имеет подгруппы, всех различных таких групп и их подгрупп 32; их называют кристаллографич. классами. Если взять плоскость, не проходящую через точку O, и подвергнуть её всем поворотам какого-нибудь кристаллографич. класса, то полученные плоскости ограничивают либо нек-рый изоэдр с центром в точке O, либо бесконечно выпуклое призматич. тело, либо многогранный угол. Полученные тела наз. простыми формами кристаллов, в первом случае замкнутыми, во втором и третьем — открытыми. Две простые формы считают одинаковыми, если они имеют один и тот же комбинаторный тип, порождены одним и тем же кристаллографич. классом и повороты этого класса одинаковым образом связаны с формой. Существует 30 различных в этом смысле замкнутых форм и 17 открытых, каждая из них имеет вполне определённое название.

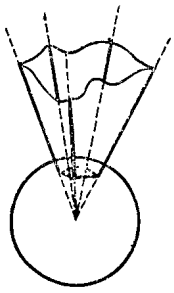
Основываясь на первом (указанном в начале статьи) определении М., можно указать ещё четыре правильных невыпуклых многогранника (т. н. тела Пуансо) (см. табл., рис. 6—9), впервые найденных Л. Пуансо (1809). Доказательство несуществования других невыпуклых правильных М. дал О. Коши (1811). В этих М. либо грани пересекают друг друга, либо сами грани — самопересекающиеся многоугольники. Для изучения вопросов, связанных с площадями поверхностей и объёмами таких М., удобно пользоваться именно первым определением М.

Если у М. можно так ориентировать грани, чтобы каждое ребро в тех двух гранях, к-рые смежны по этому ребру, имело бы обратные направления, то его наз. ориентируемым, в противном случае — неориентируемым. Для ориентируемого М. (даже если он самопересекающийся и его грани — самопересекающиеся многоугольники) можно ввести понятия площади поверхности и величины объёма. Площадью ориентируемого М. называют просто сумму площадей его граней (об определении площади самопересекающегося многоугольника см. в ст. *Многоугольник*). Для определения объёма надо заметить, что совокупность внутренних кусков граней М. разрезает пространство на определённое число связных кусков, из к-рых один по отношению к М. бесконечный (внешний), а остальные конечные (внутренние). Если из внешней по отношению к М. точке провести отрезок в к.-л. внутреннюю точку внутреннего куска, то сумму «коэффициентов» тех внутренних кусков граней М., к-рые пересечёт этот отрезок, называют коэффициентом рассматриваемого внутреннего куска М. (она не зависит от выбора внешней точки O); такой коэффициент есть целое положительное, отрицательное число или нуль. Сумму обычных объёмов всех внутренних кусков М., умноженных на эти их коэффициенты, называют объёмом М.

Можно рассматривать и n-мерные М. Нек-рые из указанных определений и теорем имеют n-мерное обобщение. В частности, найдены все выпуклые правильные М.: при $n=4$ их оказалось шесть, а при всех бо́льших n всего три: обобщение тетраэдра, куба и октаэдра. В то же время, напр., неизвестны (1987) все 4-мерные изоэдры и изогоны.

● Энциклопедия элементарной математики, кн. 4 — Геометрия, М., 1963; Люстерник Л. А., Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956; Берже М., Геометрия, т. 1—2, пер. с франц., М., 1984; Веннинджер М., Модели многогранников, пер. с англ., М., 1974. *Б. Н. Делоне.*

МНОГОГРА́ННЫЙ У́ГОЛ — часть пространства, ограниченная многогранной конической поверхностью, направляющая которой — многоугольник. Грани этой поверхности называют гранями М. у., вершину — вершиной М. у. Мерой М. у. является площадь, ограниченная сферич. многоугольником (рис.), полученным пересечением граней М. у. сферой с радиусом, равным единице, и с центром в вершине М. у. См. также *Телесный угол*.



МНОГОЗНА́ЧНАЯ АНАЛИТИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Аналитическая функция*.

МНОГОЗНА́ЧНАЯ ЛО́ГИКА — обобщение классической логики, при котором наряду с обычными истинностными значениями «истина» и «ложь» рассматриваются и другие («промежуточные») значения.

Исторически первыми М. л. явились трёхзначная логика Я. Лукасевича (1920) и m-значная логика Э. Поста (1921). Их изучение составило важный этап в создании теории М.л.

Построение М.л. осуществляется по аналогии с построением классич. двузначной логики. Один из путей такого построения, к-рый можно назвать семантическим, состоит в явном указании фиксированного множества истинностных значений, к-рые могут принимать высказывания, и задании логич. операций как функций на этом множестве истинностных значений. Формально каждая М.л. задаётся с помощью нек-рой фиксированной логич. матрицы. Логическая матрица $\mathfrak{M}=\langle M;\ D,\ \&,\ \vee,\ \supset,\ \neg\rangle$ состоит из непустого множества M истинностных значений с заданными на нём двуместными операциями $\&$, $\vee$, $\supset$ и одноместной операцией $\neg$, соответствующими логич. операциям конъюнкции, дизъюнкции, импликации и отрицания. Одно или несколько истинностных значений (но не все) составляют подмножество $D\subset M$, элементы к-рого наз. выделенными истинностными значениями и играют ту же роль, что и «истина» в классич. логике.

Пусть F — формула логики высказываний, построенная из переменных $p_1, \ldots, p_n$ с помощью логич. связок $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$. Интерпретацией формулы F в логич. матрице $\mathfrak{M}$ наз. функция θ, к-рая каждой переменной p_i сопоставляет нек-рый элемент $\theta(p_i)$ из M. Если переменные $p_1, \ldots, p_n$ в формуле F рассматривать как обозначения элементов $\theta(p_1), \ldots, \theta(p_n)$, а логич. связки интерпретировать как соответствующие операции логич. матрицы $\mathfrak{M}$, то при каждой интерпретации θ формула F естественным образом получает нек-рое значение $||F||_\theta\in M$. Если при любой интерпретации формула принимает выделенное значение, то она наз. тавтологией логич. матрицы $\mathfrak{M}$ или общезначимой в $\mathfrak{M}$. Совокупность всех тавтологий логич. матрицы $\mathfrak{M}$ и образует М.л., к-рая обозначается $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$.

Важный класс составляют М.л., заданные псевдобулевыми алгебрами. Псевдобулева алгебра — это логич. матрица $\mathfrak{M}=\langle M;\ \{1\},\ \&,\ \vee,\ \supset,\ \neg\rangle$, где M — дистрибутивная решётка относительно операций $\&$ и $\vee$ с наибольшим элементом 1, наименьшим элементом $0=\neg 1$, а операции $\supset$ и $\vee$ подчиняются условиям: 1) $a\leqslant(b\supset c)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a\&b)\leqslant c$; 2) $\neg a=(a\supset 0)$. М. л. псевдобулевых алгебр являются суперинтуиционистскими логиками. Они занимают промежуточное положение между интуиционистской и классич. логиками.

Своеобразное положение занимают так наз. М.л. Лукасевича. Для каждого натурального числа $k\geqslant 2$ k-значная логика Лукасевича $Ł_k$ задаётся логич. матрицей $\mathfrak{M}_k$, состоящей из k линейно упорядоченных элементов $0, 1/k-1, 2/k-1, \ldots, 1$, $D=\{1\}$, а логич. операции задаются так: $x\&y=\min\{x, y\}$; $x\vee y=\max\{x, y\}$; $x\supset y=\min\{1, (1+y-x)\}$; $\neg x=1-x$. Если же в качестве множества истинностных значений взять множество всех рациональных чисел отрезка $[0, 1]$ (или множество всех действительных чисел отрезка $[0, 1]$), а логич. операции определить так же, то получится бесконечнозначная логика Лукасевича $Ł_\infty$. Имеют место включения: $Ł_\infty\subset\ldots\ldots\subset Ł_{k+1}\subset Ł_k\subset\ldots\subset Ł_2$. Логика $Ł_2$ совпадает с классич. логикой, а все остальные логики Лукасевича даже не являются суперинтуиционистскими.

Альтернативным к семантич. способу задания М.л. является задание их в виде исчислений, т. е. с помощью нек-рого числа аксиом и правил вывода. По всякой суперинтуиционистской логике, заданной конечным числом аксиом, можно эффективно, т. е. с помощью алгоритма, узнать, является ли она М. л. с конечной логич. матрицей. С другой стороны, для каждой конечной псевдобулевой алгебры $\mathfrak{M}$ можно эффективно выписать конечную систему аксиом, к-рая вместе с правилами подстановки и модус поненс задаёт М. л. $\mathscr{L}(\mathfrak{M})$. Интуиционистская логика высказываний не может быть задана никакой конечной логич. матрицей, т. е. не является конечнозначной логикой, однако всякая не принадлежащая ей формула опровергается на нек-рой конечной логич. матрице, т. е. не является тавтологией этой матрицы. Все конечнозначные логики Лукасевича $Ł_k$ конечно аксиоматизируемы, а бесконечнозначная логика Лукасевича $Ł_\infty$ не только не является конечно аксиоматизируемой, но даже не является рекурсивно перечислимой.

По аналогии с алгеброй логики, изучающей произвольные логич. функции, в М. л. значительная часть исследований посвящена изучению их многозначного аналога — произвольных функций, заданных на нек-ром множестве истинностных значений. Наиболее изучены функции k-значной логики, определённые на множестве $E_k=\{0, 1, \ldots, k-1\}$ и принимающие значения в этом же множестве. Каждую функцию k-значной логики от n аргументов можно задать в виде таблицы, содержащей k^n строк, а общее число таких функций равно k^{k^n}. Множество всех функций k-значной логики обозначается P_k. Наиболее часто рассматриваются следующие функции: $x\&y=\min\{x, y\}$; $x\vee y=\max\{x, y\}$; $x+y(\mathrm{mod}\ k)$; $\bar{x}=x+1(\mathrm{mod}\ k)$;

$$J_i(x)=\begin{cases} k-1, & \text{если } i=x,\\ 0, & \text{если } i\neq x,\end{cases}\qquad (i=0, 1, \ldots, k-1).$$

Используя переменные, допустимыми значениями к-рых являются элементы множества E_k, и символы нек-рых функций из P_k, можно строить формулы, каждая из к-рых естественным образом задаёт (реализует) нек-рую функцию из P_k. Всякая функция f может быть представлена в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n)=$$
$$=\bigvee_{\sigma_1, \ldots, \sigma_n} J_{\sigma_1}(x_1)\,\&\,\ldots\,\&J_{\sigma_n}(x_n)\,\&f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

где дизъюнкция $\vee$ распространяется по всем наборам $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ элементов E_k. Это представление является аналогом совершенной дизъюнктивной нормальной формы.

Если функция f реализуется нек-рой формулой, содержащей лишь символы функций из данного класса $\mathfrak{N}$, то говорят, что f выразима через функции класса $\mathfrak{N}$. Класс функций $\mathfrak{M}$ наз. замкнутым, если всякая функция, выразимая через функции класса $\mathfrak{M}$, принадлежит этому классу. Система функций $\mathfrak{N}$ полна в замкнутом классе $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}$ состоит в точности из тех функций, к-рые выразимы через функции системы $\mathfrak{N}$. Система функций наз. базисом для замкнутого класса $\mathfrak{M}$, если она полна в $\mathfrak{M}$, а всякая её собственная подсистема не является полной в $\mathfrak{M}$.

Всякая полная в P_k система функций содержит конечную подсистему, к-рая также является полной в P_k. По каждой конечной системе функций можно эффективно распознать, является ли она полной в P_k. Можно построить конечную систему замкнутых классов $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$ такую, что произвольная система функций полна в P_k тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из классов $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_s$.

Все перечисленные факты о функциях k-значной логики справедливы при любом $k\geqslant 2$. Однако ряд результатов, верных для функций алгебры логики, т. е. при $k=2$, уже не переносится на случай произвольного $k\geqslant 3$. Напр., как показал Э. Пост, каждый замкнутый класс в P_2 имеет конечный базис, и поэтому число замкнутых классов в P_2 счётно. С другой стороны, для всякого $k\geqslant 3$ в P_k а) существует замкнутый класс, не имеющий базиса; б) существует замкнутый класс, имеющий счётный базис; в) имеется континуум различных замкнутых классов.

М. л. находят применение в математич. логике и её приложениях. Так, использование трёхзначной логики Бочвара позволяет устранить парадоксы теории множеств. В этой логике различаются высказывания, имеющие смысл, и бессмысленные высказывания, причём предложения, выражающие известные парадоксы теории множеств, оказываются бессмысленными. Различные М. л. используются при доказательстве независимости аксиом в пропозициональных исчислениях, в частности в классич. логике. Чтобы доказать, что к.-л. аксиома не выводится из остальных, достаточно найти М. л., в к-рой верны все аксиомы, кроме исследуемой. Аппарат М. л. используется для описания функционирования сложных управляющих систем, компоненты к-рых могут находиться в нек-ром числе различных состояний.

● Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. В., Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1966.

С. К. Соболев.

МНОГОЗНАЧНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, принимающая несколько значений для одного и того же значения аргумента из области определения этой функции. М. ф. возникают, напр., при решении уравнений, поэтому многозначными часто оказываются неявные функции и обратные функции. Напр., обратной к функции x^2 является двузначная функция $\pm\sqrt{x}$; обратной к функции $\mathrm{tg}\,x$ является бесконечнозначная функция $\mathrm{Arctg}\,x=\mathrm{arctg}\,x+k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

М. ф. комплексного переменного подробно изучаются в теории аналитич. функций. Основной элементарной аналитич. М. ф. является бесконечнозначная функция $\mathrm{Ln}\,z$. Через неё выражаются все остальные элементарные аналитич. М. ф., напр.:

$$z^a=e^{a\,\mathrm{Ln}\,z},\qquad \mathrm{arctg}\,z=\frac{i}{2}\ln\frac{1-iz}{1+iz}.$$

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ — раздел математического программирования, посвящённый проблемам выбора принципов оптимальности и методов нахождения их реализаций в экстремальных задачах с несколькими критериями.

Пусть G — произвольное множество, элементы к-рого наз. допустимыми решениями или альтернативами, а $f_1, \ldots, f_p$ — числовые функции (целевые функции, критерии), заданные на множестве G. Иногда говорят, что требуется максимизировать (минимизировать) функции $f_1, \ldots, f_p$ на множестве G. Однако, поскольку несколько функций, вообще говоря, не достигают экстремума в одной и той же точке, такое выражение не вполне корректно, и само понятие оптимального решения здесь должно быть пересмотрено. Именно под решением в М. о. естественно понимать такое подмножество

$G^* \subset G$, что значения $f_1, \ldots, f_p$ на G^* отвечали бы интуитивным представлениям о «наилучших» значениях этих функций при стремлении к их одновременной максимизации (минимизации) на множестве G. Эти интуитивные представления формализуются в различных принципах оптимальности.

Наиболее естественным является принцип оптимальности по Парето. Точка $x^* \in G$ наз. эффективной или оптимальной по Парето (для задачи максимизации), если не существует точки $y \in G$, для к-рой

$$f_i(y) \geqslant f_i(x^*), \quad i = 1, \ldots, p,$$

причём хотя бы для одного i неравенство является строгим (в случае задачи минимизации знаки неравенств нужно изменить на обратные). В большинстве случаев множество эффективных точек оказывается весьма обширным, что затрудняет выбор конкретного решения и требует введения нек-рых «вторичных» принципов оптимальности. В практич. задачах эти вторичные принципы нередко реализуются в виде итеративных человеко-машинных процедур, основанных на знании предпочтений принимающего решения лица на множестве альтернатив G или на множестве значений целевых функций.

В случае соизмеримых критериев часто используется принцип свёртки, т. е. максимизации (минимизации) нек-рой функции от заданных критериев $F(f_1, \ldots, f_p)$, монотонной по каждому из аргументов. Наиболее известными частными случаями являются взвешенная сумма

$$F = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1,$$

и минимальная компонента $F_2 = \min f_i$. При несоизмеримости критериев соответствующий принцип оптимальности может быть выработан аксиоматически (ср. *Оптимальности принцип*).

Иногда можно выделить один («главный») критерий f_{i_0} и вместо исходной задачи рассматривать задачу $\max\limits_{x \in G} f_{i_0}(x)$. Если при этом множество

$$G_{i_0} = \arg\max_{x \in G} f_{i_0}$$

состоит более чем из одной точки, то выбор альтернативы из G_{i_0} осуществляется путём решения задачи М. о. с критериями f_i, $i \neq i_0$, на множестве G_{i_0}. При другом подходе максимизация главного критерия производится не на всём G, а на его подмножестве, определяемом ограничениями на значения остальных критериев вида $f_i(x) \geqslant \alpha_i$, $i \neq i_0$, где α_i — нек-рые минимальные уровни. Задача М. о., в к-рой для критериев f_i заданы их «желательные уровни» β_i, $i = 1, \ldots, p$, и требуется минимизировать взвешенную сумму отклонений f_i от β_i, наз. задачей целевого программирования.

Важным классом задач М. о., пограничных с задачами теории игр, являются *арбитражные схемы*.

Задачами М. о. с нечисловыми критериями, задаваемыми упорядочениями множества альтернатив, занимается теория групповых решений. В ряде случаев задачи М. о. интерпретируются как задачи принятия решений при неопределённости; в результате выбора альтернативы $x \in G$ известно множество возможных исходов $f_1(x), \ldots, f_p(x)$, но неизвестно, какой из исходов окажется фактически реализованным.

См. также *Исследование операций*.

● Подиновский В. В., Ногин В. Д., Парето-оптимальные решения многокритериальных задач, М., 1982.

А. А. Корбут, Е. Б. Яновская.

МНОГОЛИ́СТНАЯ ФУ́НКЦИЯ — понятие, обобщающее понятие *однолистной функции*. Функция $f(z)$, регулярная или мероморфная в области D комплексной плоскости z, наз. p-листной в D, $p = 1, 2, \ldots$, если она принимает в этой области каждое своё значение не более p раз, т. е. если число корней уравнения $f(z) = w$ в области D при любом w не превосходит p. Геометрически это означает, что над каждой точкой плоскости w лежит не более p точек римановой поверхности, на к-рую функция $w = f(z)$ отображает область D. При $p = 1$ функция $f(z)$ является однолистной в области D.

М. ф., как и однолистные, изучаются в различных направлениях: с точки зрения характеристики искажения области при её отображениях этими функциями, оценки коэффициентов рядов, представляющих эти функции, и т. д.

МНОГОМЕ́РНАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ — геометрия пространств размерности, большей трёх. Термин «М. г.» применяется к тем пространствам, геометрия к-рых была первоначально развита для случая трёх измерений и только потом обобщена на число измерений $n > 3$, т. е. прежде всего к евклидову пространству, а также к пространствам Лобачевского, Римана, проективному, аффинному (общие же римановы и др. пространства были определены сразу для n измерений). Разделение трёх- и многомерной геометрий имеет историческое и учебное значение, т. к. задачи ставятся и решаются для любого числа измерений, когда и поскольку это осмысленно. Построение геометрии указанных пространств для n измерений проводится по аналогии со случаем трёх измерений. При этом можно исходить из обобщения непосредственно геометрич. оснований 3-мерной геометрии, из той или иной системы её аксиом или из обобщения аналитич. геометрии, перенося её основные выводы со случая трёх координат на произвольное n. Именно так и начиналось построение n-мерной евклидовой геометрии. В настоящее время предпочитают исходить из понятия векторного пространства.

Исторически представление в более чем 3-мерном пространстве зарождалось постепенно; первоначально — на почве геометрич. представления степеней: a^2 — «квадрат», a^3 — «куб», но a^4 и т. д. уже не имеет наглядного представления, и говорили a^4 — «биквадрат», a^5 — «кубоквадрат» и т. п. (ещё у Диофанта в 3 в. и далее у ряда средневековых авторов). Мысль о многомерном пространстве выражал И. Кант (1746), а о присоединении к пространству в качестве 4-й координаты времени писал Ж. Д'Аламбер (1764). Построение же евклидовой М. г. было осуществлено А. Кэли (1843), Г. Грассманом (1844) и Л. Шлефли (1852). Первоначальные сомнения и мистика, связанные со смешением этих обобщений с физич. пространством, были преодолены, и n-мерное пространство как плодотворное формально-математич. понятие скоро полностью укрепилось в математике.

Евклидово пространство произвольного числа измерений $n \geqslant 3$ (не исключая случая бесконечно-мерного) проще всего определить как такое, в к-ром выделены подмножества — прямые и плоскости, имеются обычные отношения: принадлежности, порядка, конгруэнтности (либо определены расстояния или движения), и выполняются все обычные аксиомы, кроме следующей: две плоскости, имеющие общую точку, имеют по крайней мере ещё одну. Если это выполнено, то пространство 3-мерно, если же не выполнено, так что есть две плоскости с единственной общей точкой, то пространство, как минимум, 4-мерно.

Понятие плоскости обобщается следующим образом: плоскостью наз. такое множество точек, к-рое вместе с любыми двумя своими точками содержит и проходящую через них прямую. В этом смысле всё пространство тоже является плоскостью. Пересечение всех плоскостей, содержащих данное множество точек M, будет плоскостью, «натянутой» на M (аффинной оболочкой M). Если плоскость натягивается на $m+1$ точку, но не натягивается на меньшее их число, то она наз. m-мерной или, короче, m-плоскостью. Точка есть 0-плоскость, прямая — 1-плоскость, обычная плоскость — 2-плоскость, 3-мерное пространство — 3-плоскость. Пространство наз. n-мерным, если оно является n-плоскостью. Т. е., для определения n-мерного евклидова пространства E_n при любом данном $n \geqslant 3$ достаточно добавить аксиому: пространство есть n-плоскость. В нём есть m-плоскости с $0 < m \leqslant n-1$. Каждая m-плоскость с $m \geqslant 2$ является m-мерным евклидовым

пространством E_m. Так как четыре точки всегда содержатся в 3-плоскости, то и любые две прямые содержатся в 3-плоскости, т. е. в E_3.

В E_n через любую точку можно провести n, и не более, взаимно перпендикулярных прямых и ввести соответственно прямоугольные координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$; в них длина любого отрезка XY выражается формулой

$$XY = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}. \qquad (*)$$

Формулу (*) можно положить в основу координатного определения E_n, равносильного предыдущему. Именно: E_n есть такое множество, в к-ром введены координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и каждой паре точек $X(x_1, \ldots, x_n)$, $Y(y_1, \ldots, y_n)$ сопоставляется число («расстояние») формулой (*); при этом к геометрии относятся те и только те определения и утверждения, к-рые могут быть формулированы через отношения расстояний. Напр., отрезок AB есть множество всех точек X, для к-рых $AX+XB=AB$; а прямая AB — всех тех X, для к-рых $\pm AX \pm XB = AB$.

Векторное исчисление строится в E_n так же, как в E_3 (исходя из геометрических или координатных определений); разница лишь в том, что в E_n вектор имеет n составляющих (соответственно, n векторов могут быть независимыми). Напр., скалярное произведение

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\alpha = \sum a_i b_i.$$

Только векторное произведение при $n>3$ не может быть определено, т. к. 2-плоскость имеет перпендикуляры разных направлений [проведённые из одной точки, они заполняют $(n-2)$-плоскость]. Вместо векторного произведения пользуются понятием бивектора. Сочетание непосредственно геометрических, координатных и векторных методов даёт наиболее полный арсенал средств развития геометрии пространства E_n.

Геометрический подход позволяет сразу перенести в E_n планиметрию и стереометрию, т. е. геометрию на 2- и 3-плоскостях, и далее построить стереометрию самого E_n, к-рая естественно обобщает стереометрию E_3: теоремы о перпендикулярах, параллельных плоскостях и др. Напр., прямая, перпендикулярная m прямым в m-плоскости, перпендикулярна ко всякой прямой в этой плоскости. Многие определения и доказательства даются для E_n индукцией по n. Напр., n-мерный многогранник (или n-многогранник) есть тело (замкнутая ограниченная область в E_n), граница к-рого состоит из конечного числа $(n-1)$-многогранников. Простейшие многогранники: призма заполняется равными параллельными отрезками, проведёнными из всех точек $(n-1)$-многогранника, пирамида — отрезками, проведёнными из одной точки во все точки $(n-1)$-многогранника; простейшие из них: n-куб — прямая призма, грани к-рой $(n-1)$-кубы (2-кубы — квадраты); n-симплекс с $(n-1)$-симплексом в основании (2-симплекс — треугольник). Объём определяется так же, как в E_3, соответственно в E_n имеется n объёмов: 1-объём — длина, 2-объём — площадь и т. д. У призмы n-объём $V=Sh$, у пирамиды $V=\frac{1}{n}Sh$, где S — $(n-1)$ — объём основания, h — высота. Обширную и развитую область геометрии E_n представляет теория выпуклых тел.

Можно различать три рода фактов М. г.: 1) те, к-рые являются прямым обобщением фактов из E_3 (напр., только что проведённые теоремы об объёмах); 2) те, к-рым соответствуют аналогичные факты для разных размерностей $m \ll n$. Напр., выпуклое тело с центром симметрии однозначно определяется m-объёмами своих m-мерных проекций при любом данном $m \geqslant 1$ и $m<n$; 3) те, в к-рых обнаруживаются существенные различия в разных E_n [напр., число правильных многогранников в E_3 — пять, в E_4 — семь, в E_n при $n \geqslant 5$ — всего три: симплекс, куб и двойственный кубу аналог октаэдра; выпуклый многогранный (не трёхгранный) угол в E_3 изгибаем, в E_n при $n>3$ всегда неизгибаем; существенно различаются в E_3 и в E_n с $n>3$ теории поверхностей].

Совершенно аналогично E_n определяются пространство Лобачевского Λ_n и аффинное A_n. В пространстве Λ_n выполняются все те же аксиомы, что в E_n, с заменой аксиомы параллельности на противоположную, а в A_n — все аксиомы E_n за вычетом аксиом конгруэнтности, вместе с к-рыми исключается и само понятие конгруэнтности. Аналогично, изменением аксиом сочетания можно определить n-мерное проективное пространство P_n. Другой способ определения всех этих пространств состоит в том, что в них вводятся координаты, задаётся группа их преобразований и геометрическими считаются те и только те соотношения, к-рые инвариантны относительно этой группы. В случае E_n — это группа подобий (сочетания ортогональных преобразований, переносов и умножений всех координат на число $a \neq 0$); для A_n — это группа всех линейных (неоднородных) преобразований.

А. Д. Александров.

МНОГОМЕ́РНАЯ СЛУЧА́ЙНАЯ ВЕЛИЧИ́НА — см. *Случайная функция.*

МНОГОМЕ́РНОЕ НОРМА́ЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ, см. *Нормальное распределение.*

МНОГОМЕ́РНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — распределение случайного вектора. См. *Распределение* вероятностей.

МНОГОМЕ́РНЫЙ СЛУЧА́ЙНЫЙ ПРОЦЕ́СС — см. *Случайный процесс.*

МНОГОМЕ́РНЫЙ СТАТИСТИ́ЧЕСКИЙ АНА́ЛИЗ — раздел математической статистики, объединяющий методы изучения статистических данных, которые являются значениями многомерных качественных или количественных признаков. Как правило, изучаемый признак интерпретируется как многомерный случайный вектор X — результат наблюдения, и выбор методов анализа осуществляется в зависимости от тех или иных допущений о многомерном распределении вероятностей вектора X. Наиболее разработанная часть М. с. а. основана на допущении, что результаты отдельных наблюдений независимы и подчинены одному и тому же многомерному нормальному распределению (обычно к этой части применяют термин «М. с. а. в узком смысле»). Предполагается, что результат X_j наблюдения с номером j можно представить вектором

$$X_j = (X_{j1}, X_{j2}, \ldots, X_{js}),$$

где случайные величины X_{jk} имеют математич. ожидание μ_k, дисперсию σ_k^2, а коэффициент корреляции между X_{jk} и X_{jl} равен ρ_{kl}. Вектор математич. ожиданий $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_s)$ и ковариационная матрица Σ с элементами $\sigma_k\sigma_l\rho_{kl}$, $k, l=1, \ldots, s$, являются основными параметрами распределения векторов $X_1, \ldots, X_n$ — результатов n независимых наблюдений. Выбор многомерного нормального распределения в качестве основной математич. модели М. с. а. отчасти может быть оправдан тем, что, с одной стороны, эта модель приемлема для большого числа приложений, с другой — в рамках этой модели удаётся вычислить точные распределения выборочных характеристик. В случае исходного нормального распределения выборочное среднее

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n)$$

и выборочная ковариационная матрица

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{j=n}^{n}(X_j-\overline{X})(X_j-\overline{X})^{\top}$$

[где $(X_j-\overline{X})^{\top}$ обозначает транспонированный вектор $(X_j-\overline{X})$] суть оценки максимального правдоподобия соответствующих параметров совокупности; при этом $\overline{X}$ имеет нормальное распределение с параметрами μ и $\frac{1}{n}\Sigma$, а совместное распределение элементов ковариационной матрицы S, называемое распределением

Уишарта, является естественным обобщением распределения хи-квадрат и играет значительную роль в М. с. а.

Ряд задач М. с. а. более или менее аналогичен соответствующим одномерным задачам (напр., задача проверки гипотез о равенстве средних значений в двух независимых нормальных выборках). Как обобщения соответствующих классич. разделов математич. статистики в М. с. а. входят такие разделы, как множественная регрессия, многомерный корреляционный анализ, многомерный дисперсионный анализ, ковариационный и конфлюэнтный анализ. Другого типа задачи непосредственно связаны с проверкой гипотез о независимости тех или иных групп компонент векторов X_j, проверкой таких специальных гипотез, как, напр., гипотеза сферич. симметрии распределения X_j и т. д. Необходимость разобраться в сложных взаимосвязях между компонентами случайных векторов X_j ставит новые проблемы. В целях сокращения числа рассматриваемых случайных признаков (уменьшения размерности) или сведения их к независимым случайным величинам применяют метод главных компонент и метод канонич. корреляций. В теории главных компонент осуществляется переход от векторов X_j к векторам $Y_j=(Y_{j1}, ..., Y_{jr})$, где Y_{j1} выделяется максимальной дисперсией среди всех нормированных линейных комбинаций компонент X_1; Y_{j2} имеет наибольшую дисперсию среди всех линейных функций компонент X_1, не коррелированных с Y_{j1}, и т. д. В теории канонич. корреляций каждое из двух множеств случайных компонент вектора X_j линейно преобразуется в новое множество т. н. канонич. величин так, что внутри каждого нового множества коэффициенты корреляции между величинами равны 0, первые координаты каждого множества имеют максимальную корреляцию, вторые координаты имеют наибольшую корреляцию из оставшихся координат и т. д. (упорядоченные таким образом координаты наз. каноническими). Последний метод указывает максимальную корреляцию линейных функций от двух групп случайных компонент вектора наблюдения. Выводы методов главных компонент и канонич. корреляций помогают понять структуру изучаемой многомерной совокупности. Сходным целям служит и *факторный анализ*, в схеме к-рого предполагается, что компоненты случайных векторов x_j являются линейными функциями от нек-рых ненаблюдаемых факторов, подлежащих изучению.

В рамках М. с. а. рассматривается и проблема дифференциации двух или большего числа совокупностей по результатам наблюдений. Одна часть проблемы заключается в том, чтобы на основе анализа выборок из нескольких совокупностей отнести новый элемент к одной из них (дискриминация), другая — в том, чтобы внутри совокупности разделить элементы на группы, в определённом смысле максимально отличающиеся друг от друга (классификация) (см. *Дискриминантный анализ*).

● Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ, пер. с англ., М., 1963; Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Многомерный статистический анализ и временные ряды, пер. с англ., М., 1976.

А. В. Прохоров.

МНОГООБРАЗИЕ — многомерное обобщение понятий линии и поверхности без особых точек. Топологическим многообразием размерности n наз. топологич. пространство M, каждая точка к-рого обладает окрестностью, гомеоморфной открытому шару $x_1^2+...+x_n^2<1$ n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Обычно предполагают также, что M покрывается конечным или счётным числом окрестностей такого рода и что M отделимо, т. е. любые две его точки обладают непересекающимися окрестностями.

Разнообразные примеры М. размерностей 1, 2 и 3 встречаются в геометрии. Прямая, открытый интервал, парабола, окружность, эллипс — одномерные М. Любая область на плоскости, сама плоскость, параболоид, сфера, эллипсоид, тор и т. п.— двумерные М. Поверхность конуса не является М., т. к. вершина конуса, в к-рой сходятся две его полости, не имеет окрестности, гомеоморфной кругу. Обычное трёхмерное евклидово пространство, а также любая область в нём — трёхмерное М.

Введение в математику понятия М. любого числа измерений было вызвано весьма разнообразными потребностями геометрии, математич. анализа, механики и физики. Это понятие применимо практически во всех ситуациях, когда рассматриваемые объекты могут быть параметризованы системами действительных чисел. Точками возникающих при этом М. могут быть объекты любой природы — прямые, сферы, матрицы, состояния механич. системы и пр. Напр., положение двойного плоского маятника определяется четырьмя координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) концов его стержней. Ставя каждому положению маятника в соответствие точку четырёхмерного пространства с координатами (x_1, y_1, x_2, y_2), получают нек-рое множество точек пространства $\mathbb{R}^4$, гомеоморфное тору. Положения механич. системы, состоящей из N точек трёхмерного пространства и имеющей n степеней свободы, во многих случаях изображаются точками n-мерного М., лежащего в $\mathbb{R}^{3N}$.

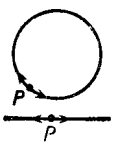


Рис. 1. Одномерные многообразия.

М. наз. замкнутым, если оно компактно, и открытым в противном случае. Каждое замкнутое М. размерности 1 гомеоморфно окружности, а каждое открытое — прямой (на рис. 1 изображены одномерные М. и окрестности точки P на каждом из них). В случае двух измерений уже замкнутые М. довольно разнообразны. Они распадаются на бесконечное число топологич. типов: сфера — поверхность рода 0 (рис. 2, *а*), тор — поверхность рода 1 (рис. 2, *б*), «крендель» — поверхность рода 2 (рис. 2, *в*), вообще «сфера с n ручками» — поверхность рода n (на рис. 2, *г* изображена такая поверхность при $n=3$). Этими примерами исчерпываются все топологич. типы замкнутых двумерных ориентируемых М. Существует ещё бесконечное число замкнутых двумерных неориентируемых М.— односторонних поверхностей (см. *Односторонние и двусторонние поверхности*), напр. проективная плоскость, т. н. односторонний тор (см. *Клейна поверхность*). Имеется и классификация открытых двумерных М. Полная классификация М. трёх измерений не найдена (даже для случая замкнутых М.). См. *Двумерное многообразие*, *Трёхмерное многообразие*, *Четырёхмерное многообразие*.

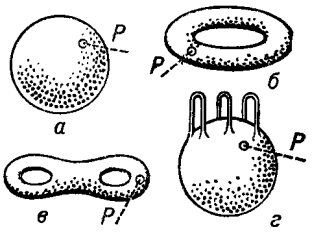


Рис. 2. Примеры замкнутых двумерных многообразий.

Определение топологич. М. не даёт возможности определить дифференцируемые функции и другие понятия математич. анализа на М. Чтобы эти понятия приобрели смысл, необходимо ввести на М. дополнительную структуру. В окрестности любой точки n-мерного топологич. М. существуют локальные координаты $x_1, ..., x_n$, однозначно определяющие положение точки этой окрестности. Если выбрать локальные координаты в окрестности любой точки М. таким образом, что две разные системы локальных координат в пересекающихся окрестностях выражаются друг через друга при помощи функций класса C^k, $k\geqslant 1$, то получится гладкая структура класса k. Обычно берут $k=\infty$ и М. с гладкой структурой называют дифференцируемым (или гладким) М. Дифференцируемые М. имеют особенно большое значение в современной математике, поскольку именно они наиболее широко используются в приложениях и смежных областях (см. *Дифференциальная геометрия*). На одном и том же топологич. М. могут существовать различные (и даже не изоморфные) гладкие структуры. Аналогично вводится понятие аналитич. М. Если считать локальные координаты комплекс-

ными числами и потребовать, чтобы они выражались друг через друга при помощи аналитич. функций, то получится понятие комплексного (аналитического) многообразия.

Понятие многомерного М. было впервые сформулировано Б. Риманом в его лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854). В 1913 Г. Вейль ввёл понятие (абстрактной) римановой поверхности, т. е. одномерного комплексного многообразия (с каждой аналитич. функцией комплексного переменного связывается такое М., называемое римановой поверхностью этой функции).

В современной математике рассматриваются также различные обобщения понятия М. Таковы, напр., М. с краем (типичным примером к-рых является замкнутый шар $x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant 1$ в пространстве $\mathbb{R}^n$), а также аналитич. пространства (включающие в себя вещественные или комплексные аналитические поверхности с особыми точками).

● Борисович Ю. Г. и др., Введение в топологию, М., 1980; Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия, М., 2 изд., 1985; Болтянский В. Г., Ефремович В. А., Наглядная топология, М., 1982.

Н. В. Ефимов, А. Л. Онищик.

МНОГООБРАЗИЕ универсальных алгебр — класс алгебр, характеризующийся выполнением некоторой системы тождеств во всех его алгебрах (см. *Универсальная алгебра*).

МНОГООСНО́ВНАЯ А́ЛГЕБРА — семейство множеств, на которых задана некоторая система операций. При этом n-арной алгебраической операцией, заданной на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и принимающей значения в множестве A, наз. отображение ω декартова произведения множеств A_i в A:

$$\omega: A_1\times A_2\times\ldots\times A_n \longrightarrow A.$$

Множества $A_1, \ldots, A_n, A$, вообще говоря, не предполагаются попарно различными. Если все они совпадают, то получается обычное определение n-арной алгебраич. операции на множестве A. В данном выше определении n — целое неотрицательное число. При $n=0$ операция наз. нульарной, она просто фиксирует в A нек-рый элемент. При $n=1$ операция наз. унарной, она является отображением из A_1 в A, при $n=2$ операция наз. бинарной и т. д.

Пусть S — нек-рое множество индексов (наз. сортами). Через S^* обозначают множество всевозможных слов над S, т. е. выражений вида $s_1s_2\ldots s_n$, где $s_i\in S$. В частности, слово может быть и пустым. Множество символов Ω наз. сигнатурой над S, если задано отображение τ: $\Omega\to S^*\times S$. Пусть $\omega\in\Omega$ и $\tau(\omega)=(s_1s_2\ldots s_n, s)$. Тогда ω наз. символом n-арной операции типа $(s_1s_2\ldots s_n, s)$. Запись $\omega(s_1s_2\ldots s_n, s)$ означает, что $\tau(\omega)=(s_1s_2\ldots s_n, s)$. Если каждому такому символу операции из Ω сопоставлена n-арная операция ω: $A_{s_1}\times\ldots\times A_{s_n}\to A_s$, то семейство множеств $\{A_s|s\in S\}$ наз. многоосновной или многосортной, или гетерогенной универсальной алгеброй сигнатуры Ω. Множества A_s наз. основаниями или несущими множествами М. а.

Для М. а. естественным образом определяются понятия подалгебры, факторалгебры, гомоморфизма, прямого произведения. Произведение гомоморфизмов снова является гомоморфизмом, поэтому все М. а. фиксированной сигнатуры образуют категорию.

Многие классич. объекты математики — векторные пространства, модули, группы с операторами — являются в действительности М. а. Напр., если V — векторное пространство над полем K, то в V действуют операции абелевой группы. Кроме того, каждый скаляр α из K определяет в V унарную операцию ω_α умножения векторов на α. Следовательно, V как обычная универсальная алгебра имеет, вообще говоря, бесконечную сигнатуру. Если же рассмотреть пару (K, V) как двуосновную алгебру, то её сигнатура окажется конечной: она состоит из операций в поле K, в абелевой группе V и единственной бинарной операции ω: $K\times V\to V$, к-рая пару (α, x) переводит в вектор αx. Изменение точки зрения на векторное пространство приводит к расширению понятия гомоморфизма — теперь гомоморфизмами будут пары гомоморфизмов (φ: $K\to K'$, f: $V\to V'$), удовлетворяющие условию

$$f(\omega(\alpha, x)) = \omega(\varphi(\alpha), f(x)),\ \alpha\in K,\ x\in V.$$

Такие пары наз. полулинейными преобразованиями. Для обычного линейного преобразования φ — тождественный автоморфизм поля K.

Другие примеры можно получить, интерпретируя как М. а. малые категории, функторы из малых категорий в категорию множеств и т. д.

МНОГОСВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ — область, в которой существуют замкнутые кривые, не стягиваемые в пределах этой области в точку. На рисунке A есть односвязная область, B — М. о.; пунктиром изображена кривая, не стягиваемая в точку в пределах B.

МНОГОСО́РТНАЯ А́ЛГЕБРА — то же, что *многоосновная алгебра*.

МНОГОУГО́ЛЬНИК — замкнутая ломаная линия. Подробнее, М.— линия, к-рая получается, если взять n любых точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и соединить прямолинейным отрезком каждую из них с последующей, а последнюю — с первой (рис. 1, *а*, *б*). Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ наз. вершинами М., а отрезки A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 — его сторонами. Далее рассматриваются только плоские М. (т. е. предполагается, что М. лежит в одной плоскости). М. может сам себя пересекать (рис. 1, *в*), причём точки самопересечения могут не быть его вершинами.

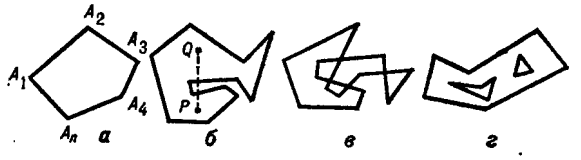


Рис. 1.

Существуют и другие точки зрения на то, что считать М. Многоугольником можно называть связную часть плоскости, вся граница к-рой состоит из конечного числа прямолинейных отрезков, наз. сторонами многоугольника. М. в этом смысле может быть и многосвязной частью плоскости (рис. 1, *г*), т. е. такой М. может иметь «многоугольные дыры». Рассматриваются также бесконечные М.— части плоскости, ограниченные конечным числом прямолинейных отрезков и конечным числом полупрямых.

Дальнейшее изложение опирается на данное выше первое определение М.

Если М. не пересекает сам себя (см., напр., рис. 1, *а* и *б*), то он разделяет совокупность всех точек плоскости, на нём не лежащих, на две части — конечную (внутреннюю) и бесконечную (внешнюю) в том смысле, что если две точки принадлежат одной из этих частей, то их можно соединить друг с другом ломаной, не пересекающей М., а если разным частям, то нельзя. Несмотря на совершенную очевидность этого обстоятельства, строгий его вывод из аксиом геометрии довольно труден (т. н. теорема Жордана для М.). Внутренняя по отношению к М. часть плоскости имеет определённую площадь. Если М.— самопересекающийся, то он разрезает плоскость на определённое число кусков, из к-рых один бесконечный (наз. внешним по отношению к М.), а остальные конечные односвязные (наз. внутренними), причём граница каждого из них есть нек-рый самонепересекающийся М., стороны к-рого суть целые стороны или части сторон, а вершины — вершины или точки самопересечения данного М. Если каждой стороне М. приписать направление, т. е. указать, какую из двух определяющих её вершин мы будем считать её нача-

лом, а какую — концом, и притом так, чтобы начало каждой стороны было концом предыдущей, то получится (замкнутый) многоугольный путь, или ориентированный М. Площадь области, ограниченной самопересекающимся ориентированным М., считается положительной, если контур М. обходит эту область против часовой стрелки, т. е. внутренность М. остаётся слева от идущего по этому пути, и отрицательной — в противоположном случае.

Пусть М.— самопересекающийся и ориентированный; если из точки, лежащей во внешней по отношению к нему части плоскости, провести прямолинейный отрезок к точке, лежащей внутри одного из внутренних его кусков, и М. пересекает этот отрезок p раз слева направо и q раз справа налево, то число $p-q$ (целое положительное, отрицательное или нуль) не зависит от выбора внешней точки и наз. коэффициентом этого куска. Сумма обычных площадей этих кусков, помноженных на их коэффициенты, считается «площадью» рассматриваемого замкнутого пути (ориентированного М.).

Сумма внутренних углов любого самонепересекающегося М. с n сторонами равна $(n-2)\,180°$. М. наз. выпуклым (рис. 1, *а*), если никакая сторона М., будучи неограниченно продолженной, не разрезает М. на две части. Выпуклый М. можно охарактеризовать также следующим свойством: прямолинейный отрезок, соединяющий любые две точки плоскости, лежащие внутри М., не пересекает М. Всякий выпуклый М.— самонепересекающийся, но не наоборот. Напр., на рис. 1, *б* изображён самонепересекающийся М., к-рый не является выпуклым, т. к. отрезок PQ, соединяющий нек-рые его внутренние точки, пересекает М.

Важнейшие М.: треугольники, в частности прямоугольные, равнобедренные, равносторонние (правильные); четырёхугольники, в частности трапеции, параллелограммы, ромбы, прямоугольники, квадраты. Выпуклый М. наз. правильным, если все его стороны равны и все внутренние углы равны. В древности умели по стороне или радиусу описанного круга строить циркулем и линейкой правильные М. только в том случае, если число сторон М. равно $m=3\cdot 2^n$, $4\cdot 2^n$, $5\cdot 2^n$, $3\cdot 5\cdot 2^n$, где n — любое положительное число или нуль. К. Гаусс (1801) показал, что можно построить циркулем и линейкой правильный М., когда число его сторон имеет вид $m=2^n\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные гауссовы простые числа, т. е. простые числа вида $p=2^{2^s}+1$ (s — целое положительное число). До сих пор известны только пять таких $p=3, 5, 17, 257, 65337$. Из теории Галуа следует, что никаких других правильных М., кроме указанных К. Гауссом, построить циркулем и линейкой нельзя. Таким образом, построение возможно при $m=3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 32, 34, \ldots$ и невозможно при $m=7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, \ldots$

В приведённой ниже таблице указаны радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности и площадь правильного n-угольника (для $n=3, 4, 5, 6, 8, 10$), сторона к-рого равна k.

Число сторон	Радиус описанной окружности	Радиус вписанной окружности	Площадь
3	$\frac{k\sqrt{3}}{3}$	$\frac{k\sqrt{3}}{6}$	$\frac{k^2\sqrt{3}}{4}$
4	$\frac{k\sqrt{2}}{2}$	$\frac{k}{2}$	k^2
5	$\frac{k}{10}\sqrt{10(5+\sqrt{5})}$	$\frac{k}{10}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{k^2}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$
6	k	$\frac{k\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3k^2\sqrt{3}}{2}$
8	$\frac{k}{2}\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$	$\frac{k}{2}(1+\sqrt{2})$	$2k^2(1+\sqrt{2})$
10	$\frac{k}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{k}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{5}{2}k^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

Начиная с пятиугольника, существуют также невыпуклые (самопересекающиеся, или звёздчатые) правильные М., т. е. такие, что все стороны равны и каждая следующая из сторон повёрнута в одном и том же направлении на один и тот же угол по отношению к предыдущей. Все вершины такого М. также лежат на одной окружности. Такова, напр., пятиконечная звезда. На рис. 2 даны все

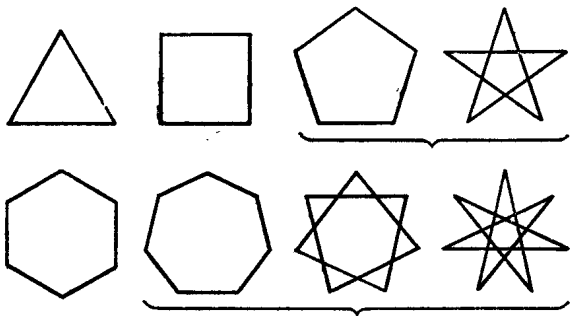


Рис. 2.

правильные (как выпуклые, так и невыпуклые) М. от треугольника до семиугольника. *Б. Н. Делоне.*

МНОГОУГОЛЬНЫЕ ЧИСЛА — см. *Фигурные числа.*

МНОГОЧЛЕ́Н, полином,— выражение вида

$$Ax^ky^l\ldots w^m+Bx^ny^p\ldots w^q+\ldots+Dx^ry^s\ldots w^t,$$

где $x, y, \ldots, w$ — переменные, а $A, B, \ldots, D$ (коэффициенты многочлена) и $k, l, \ldots, t$ (показатели степеней — целые неотрицательные числа) — постоянные. Слагаемые вида

$$Ax^ky^l\ldots w^m$$

наз. членами многочлена. Порядок членов, а также порядок множителей в каждом члене можно менять произвольно; точно так же можно вводить или опускать члены с нулевыми коэффициентами, а в каждом отдельном члене — степени с нулевыми показателями. В случае, когда М. имеет один, два или три члена, его наз. одночленом, двучленом или трёхчленом.

Относительно коэффициентов М. предполагается, что они принадлежат нек-рому полю, напр. полю рациональных, действительных или комплексных чисел.

Два члена М. наз. подобными, если в них показатели степеней при одинаковых переменных попарно равны. Подобные между собой члены

$$A'x^ky^l\ldots w^m,\ B'x^ky^l\ldots w^m,\ D'x^ky^l\ldots w^m$$

можно заменить одним (приведение подобных членов):

$$(A'+B'+\ldots+D')\,x^ky^l\ldots w^m.$$

Два М. наз. равными, если после приведения подобных все члены с отличными от нуля коэффициентами оказываются попарно одинаковыми (но, может быть, записанными в разном порядке), а также если все коэффициенты этих М. оказываются равными нулю. В последнем случае М. наз. тождественным нулём и обозначают знаком 0. Многочлен от одного переменного x можно всегда записать в виде

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_kx^{n-k},$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты. Корнем многочлена $P_n(x)$ с коэффициентами из нек-рого поля наз. решение алгебраич. уравнения $P_n(x)=0$. Корни М. связаны с его коэффициентами формулами Виета (см. *Виета теорема*).

Сумму показателей степеней к.-л. члена М. называют степенью этого члена. Если М. не тождественный нуль, то среди членов с отличными от нуля коэффициентами

(предполагается, что все подобные члены приведены) имеются один или несколько наибольшей степени; эту наибольшую степень наз. степенью многочлена. Тождественный нуль не имеет степени. М. нулевой степени сводится к одному члену A (постоянному, не равному нулю). Примеры: $xyz+x+y+z$ есть многочлен 3-й степени, $2x+y-z+1$ есть многочлен 1-й степени (линейный многочлен), $5x^2-2x^2-3x^2$ не имеет степени, т. к. это тождественный нуль. М., все члены к-рого одинаковой степени, наз. однородным многочленом или формой; формы 1-й, 2-й и 3-й степеней наз. соответственно линейными, квадратичными, кубичными, а по числу переменных (два, три) — бинарными, тернарными (напр., $x^2+y^2+z^2-xy-yz+xz$ есть тернарная квадратичная форма).

Выполняя над М. действия сложения, вычитания и умножения на основании переместительного, сочетательного и распределительного законов, получают снова М. Таким образом, совокупность всех М. с коэффициентами из данного поля образует кольцо — кольцо многочленов над данным полем; это кольцо не имеет делителей нуля, т. е. произведение М., не равных 0, не может дать 0.

Если для двух многочленов одного переменного $P(x)$ и $Q(x)$ можно найти такой многочлен $R(x)$, что $P=QR$, то говорят, что P делится на Q; Q наз. делителем, а R — частным. Если P не делится на Q, то можно найти такие многочлены $R(x)$ и $S(x)$, что $P=QR+S$, причём степень $S(x)$ меньше степени $Q(x)$ (деление с остатком).

Посредством повторного применения этой операции можно находить наибольший общий делитель P и Q, т. е. такой делитель P и Q, к-рый делится на любой общий делитель этих многочленов (см. *Евклида алгоритм*). М., к-рый можно представить в виде произведения М. низших степеней с коэффициентами из данного поля, наз. приводимым (в данном поле), в противном случае — неприводимым.

Неприводимые М. играют в кольце М. роль, сходную с простыми числами в кольце целых чисел. Так, напр., верна теорема: если произведение PQ делится на неприводимый многочлен R, а P на R не делится, то тогда Q должно делиться на R. Каждый М. степени, большей нуля, разлагается в данном поле в произведение неприводимых множителей единственным образом (с точностью до множителей нулевой степени). Напр., многочлен x^4+1, неприводимый в поле рациональных чисел, разлагается на два множителя

$$x^4+1=(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

в поле действительных чисел и на четыре множителя

$$x^4+1=\left(x-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$$

в поле комплексных чисел. Вообще, каждый М. от одного переменного x разлагается в поле действительных чисел на множители 1-й и 2-й степени, в поле комплексных чисел — на множители 1-й степени (основная теорема алгебры). Для двух и большего числа переменных этого уже нельзя утверждать; напр., многочлен x^3+yz+z^3 неприводим в любом числовом поле.

Если переменным $x, y, \ldots, w$ придать определённые числовые значения (напр., действительные или комплексные), то М. также получит определённое числовое значение. Отсюда следует, что каждый М. можно рассматривать как функцию соответствующих переменных. Эта функция непрерывна и дифференцируема при любых значениях переменных; её можно характеризовать как целую рациональную функцию, т. е. функцию, получающуюся из переменных и нек-рых постоянных (коэффициентов) посредством выполненных в определённом порядке действий сложения, вычитания и умножения. Целые рациональные функции входят в более широкий класс *рациональных функций*, где к перечисленным действиям присоединяется деление: любую рациональную функцию можно представить в виде частного двух М. Наконец, рациональные функции содержатся в классе *алгебраических функций*.

К числу важнейших свойств М. относится то, что любую непрерывную функцию можно с произвольно малой ошибкой заменить М. (теорема Вейерштрасса; точная её формулировка требует, чтобы данная функция была непрерывна на к.-л. ограниченном, замкнутом множестве точек, напр. на отрезке числовой оси). Этот факт, доказываемый средствами математич. анализа, даёт возможность приближённо выражать многочленами любую связь между величинами, изучаемую в к.-л. вопросе естествознания и техники.

Специальные системы М.— *ортогональные многочлены* используются в теории приближений как средство представления функций в виде рядов.

С точки зрения теории функций комплексного переменного, М. являются простейшим классом *целых функций*. М. степени n отображает расширенную комплексную плоскость на себя так, что каждая точка образа $w=P_n(z)$ имеет n прообразов $z_1, z_2, \ldots, z_n$. *А. И. Маркушевич.*

МНОЖЕСТВ КАТЕГОРИЯ — категория, объектами которой являются всевозможные множества, а морфизмами между ними — всевозможные отображения одного множества в другое. Умножение морфизмов совпадает с последовательным выполнением (суперпозицией) отображений.

МНОЖЕСТВ ТЕОРИЯ — учение об общих свойствах множеств, преимущественно бесконечных. Понятие множества, или совокупности, принадлежит к числу простейших математич. понятий; оно не определяется, но может быть пояснено при помощи примеров. Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку, множестве всех точек данной линии, множестве всех решений данного уравнения. Книги данной библиотеки, точки данной линии, решения данного уравнения являются элементами соответствующего множества. Чтобы определить множество, достаточно указать характеристич. свойство элементов, т. е. такое свойство, к-рым обладают все элементы этого множества и только они. Может случиться, что данным свойством не обладает вообще ни один предмет; тогда говорят, что это свойство определяет пустое множество. То, что данный предмет x есть элемент множества M, записывают так: $x\in M$ (читают: x принадлежит множеству M).

Подмножества. Если каждый элемент множества A является в то же время элементом множества B, то множество A наз. подмножеством, или частью множества B. Это записывают так: $A\subset B$ или $B\supset A$. Таким образом, подмножеством данного множества B является и само подмножество B. Пустое множество, по определению, считают подмножеством всякого множества. Всякое непустое подмножество A данного множества B, отличное от всего множества B, наз. правильной частью или собственным подмножеством последнего.

Мощность множеств. Первым вопросом, возникшим в применении к бесконечным множествам, был вопрос о возможности их количественного сравнения между собой. Ответ на этот и близкие вопросы дал в кон. 70-х гг. 19 в. Г. Кантор, основавший М. т. как математич. науку. Возможность сравнительной количественной оценки множеств опирается на понятие взаимно однозначного соответствия между двумя множествами. Пусть каждому элементу множества A поставлен в соответствие в силу какого бы то ни было правила или закона нек-рый определённый элемент множества B; если при этом каждый элемент множества B оказывается поставленным в соответствие одному и только одному элементу множества A, то говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное, или одно-однозначное, соответствие. Очевидно, между двумя конечными множествами можно установить взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда оба множества состоят из одного и того же числа элементов. В обобщение этого факта определяют количест-

ченную эквивалентность, или равномощность, двух бесконечных множеств как возможность установить между ними взаимно однозначное соответствие.

Ещё до создания М. т. Б. Больцано владел, с одной стороны, вполне точно формулированным понятием взаимно однозначного соответствия, а с другой стороны, считал несомненным существование бесконечностей различных ступеней; однако он не только не сделал взаимно однозначное соответствие основой установления количественной равносильности множеств, но решительно возражал против этого. Б. Больцано останавливало то, что бесконечное множество может находиться во взаимно однозначном соответствии со своей правильной частью. Напр., если каждому натуральному числу n поставить в соответствие натуральное число $2n$, то получают взаимно однозначное соответствие между множеством всех натуральных чисел и множеством всех чётных чисел. Вместо того чтобы в применении к бесконечным множествам отказаться от аксиомы: часть меньше целого, Б. Больцано отказался от взаимной однозначности как критерия равномощности и, таким образом, остался вне основной линии развития М. т. В каждом бесконечном множестве M имеется (как легко доказывается) правильная часть, равномощная всему M, тогда как ни в одном конечном множестве такой правильной части найти нельзя. Поэтому наличие правильной части, равномощной целому, можно принять за определение бесконечного множества (Р. Дедекинд).

Для двух бесконечных множеств A и B возможны лишь следующие три случая: либо A есть правильная часть, равномощная B, но в B нет правильной части, равномощной A; либо, наоборот, в B есть правильная часть, равномощная A, а в A нет правильной части, равномощной B; либо, наконец, в A есть правильная часть, равномощная B, и в B есть правильная часть, равномощная A. Доказывается, что в третьем случае множества A и B равномощны. В первом случае говорят, что мощность множества A больше мощности множества B, во втором — что мощность множества B больше мощности множества A. A priori возможный четвёртый случай — в A нет правильной части, равномощной B, а в B нет правильной части, равномощной A,— в действительности не может осуществиться (для бесконечных множеств).

Ценность понятия мощности множества определяется существованием неравномощных бесконечных множеств. Напр., множество всех подмножеств данного множества M имеет мощность большую, чем множество M. Множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, наз. счётным множеством. Мощность счётных множеств есть наименьшая мощность, к-рую может иметь бесконечное множество; всякое бесконечное множество содержит счётную правильную часть. Г. Кантор доказал, что множество всех рациональных и даже всех алгебраич. чисел счётно, тогда как множество всех действительных чисел несчётно. Тем самым было дано новое доказательство существования т. н. трансцендентных чисел, т. е. действительных чисел, не являющихся корнями никакого алгебраич. уравнения с целыми коэффициентами (и даже несчётность множества таких чисел). Мощность множества всех действительных чисел наз. мощностью континуума. Множеству всех действительных чисел равномощны: множество всех подмножеств счётного множества, множество всех комплексных чисел и, следовательно, множество всех точек плоскости, а также множество всех точек трёх- и вообще n-мерного пространства при любом n. Г. Кантор высказал гипотезу (т. н. континуум-гипотезу): всякое множество, состоящее из действительных чисел, либо конечно, либо счётно, либо равномощно множеству всех действительных чисел; по поводу этой гипотезы и существенных связанных с нею результатов см. *Континуума проблема*.

Отображения множеств. В М. т. аналитич. понятие функции, геометрич. понятие отображения или преобразования фигуры и т. п. объединяются в общее понятие отображения одного множества в другое. Пусть даны два множества X и Y, пусть каждому элементу $x \in X$ поставлен **в соответствие** нек-рый определённый элемент $y=f(x)$ множества Y; тогда говорят, что имеется отображение множества X в множество Y или что имеется функция, аргумент x к-рой пробегает множество X, а значения y принадлежат множеству Y; при этом для каждого данного $x \in X$ элемент $y=f(x)$ множества Y наз. образом элемента $x \in X$ при данном отображении или значением данной функции для данного значения её аргумента x.

Примеры. 1) Пусть задан в плоскости с данной на ней прямоугольной системой координат квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) и осуществлена проекция этого квадрата, напр., на ось абсцисс; эта проекция есть отображение множества X всех точек квадрата на множество Y всех точек его основания; точке с координатами (x, y) соответствует точка $(x, 0)$.

2) Пусть X — множество всех действительных чисел; если для каждого действительного числа $x \in X$ положить $y=f(x)=x^3$, то тем самым будет установлено отображение множества X в себя.

3) Пусть X — множество всех действительных чисел; если для каждого $x \in X$ положить $y=f(x)=\operatorname{arctg} x$, то этим будет установлено отображение множества X на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$.

Взаимно однозначное соответствие между двумя множествами X и Y есть такое отображение множества X в множество Y, при к-ром каждый элемент множества Y является образом одного и только одного элемента множества X. Отображения примеров 2) и 3) взаимно однозначны, примера 1) — нет.

Операции над множествами. Суммой, или объединением, двух, трёх, вообще произвольного конечного или бесконечного множества множеств наз. множество всех тех предметов, каждый из к-рых есть элемент хотя бы одного из данных множеств-слагаемых. Пересечением двух, трёх, вообще любого конечного или бесконечного множества множеств наз. множество всех элементов, общих всем данным множествам. Пересечение даже двух непустых множеств может быть пустым. Разностью между множеством B и множеством A наз. множество всех элементов из B, не являющихся элементами из A; разность между множеством B и его частью A наз. дополнением множества A в множестве B.

Операции сложения и пересечения множеств удовлетворяют условиям сочетательности и переместительности (см. *Ассоциативность*, *Коммутативность*). Операция пересечения, кроме того, распределительна по отношению к сложению и вычитанию. Эти действия обладают тем общим свойством, что если их производить над множествами, являющимися подмножествами одного и того же множества M, то и результат будет подмножеством множества M. Указанным свойством не обладает прямое умножение множеств [прямым произведением множеств X и Y наз. множество $X \times Y$ всевозможных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$]. Другим в этом смысле действием является «возведение в степень» Y^X (множество всех отображений множества X в множество Y). Если ξ и η мощности множеств X и Y, то $\xi \cdot \eta$ и η^{ξ} определяются соответственно как мощности множеств $X \times Y$ и Y^X, что в случае конечных множеств согласуется с умножением и возведением в степень натуральных чисел. Аналогично определяется сумма мощностей как мощность суммы попарно непересекающихся множеств с заданными мощностями.

Упорядоченные множества. Установить в данном множестве X порядок — значит установить для нек-рых пар x', x'' элементов этого множества какое-то правило предшествования (следования), выражаемое словами «элемент x' предшествует элементу x'', $x' < x''$» или, что то же, «элемент x' следует за элементом x'', $x' < x''$», причём предполагается выполненным условие транзитивности: если $x < x'$ и $x' < x''$, то $x < x''$. Множество, рассматриваемое вместе с каким-нибудь установленным в нём порядком, наз.

«частично упорядоченным множеством»; иногда вместо «частично упорядоченное множество» говорят «упорядоченное множество» (Н. Бурбаки). Однако чаще упорядоченным множеством наз. такое частично упорядоченное множество, в к-ром порядок удовлетворяет следующим дополнительным требованиям («линейного порядка»): 1) никакой элемент не предшествует самому себе; 2) из всяких двух различных элементов x, x' один предшествует другому, т. е. или $x<x'$ или $x'<x$.

Примеры. 1) Всякое множество $\mathfrak{M}$, элементами к-рого являются нек-рые множества x, является «частично упорядоченным „по включению“»: $x<x'$, если $x\subset x'$.

2) Любое множество функций f, определённых на числовой прямой, частично упорядочено, если положить $f_1<f_2$, тогда и только тогда, когда для каждого действительного числа x имеем $f_1(x)\leqslant f_2(x)$.

3) Всякое множество действительных чисел линейно упорядочено: меньшее из двух чисел считается предшествующим большему.

Два упорядоченных множества наз. подобными между собой или имеющими один и тот же порядковый тип, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок. Элемент упорядоченного множества наз. первым, если он предшествует в этом упорядоченном множестве всем остальным элементам; аналогично определяется и последний элемент. Примеры: в упорядоченном множестве всех действительных чисел нет ни первого, ни последнего элемента; в упорядоченном множестве всех неотрицательных чисел нуль есть первый элемент, а последнего элемента нет; в упорядоченном множестве всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a\leqslant x\leqslant b$, число a есть первый элемент, а число b — последний.

Упорядоченное множество наз. вполне упорядоченным, если оно само и всякое его правильное подмножество имеют первый элемент. Порядковые типы вполне упорядоченных множеств наз. порядковыми или ординальными числами. Если вполне упорядоченное множество конечно, то его порядковое число есть обычное порядковое число элементарной арифметики. Порядковые типы бесконечных вполне упорядоченных множеств наз. *трансфинитными числами*.

Точечные множества. Теория точечных множеств, т. е. в первоначальном понимании слова — теория множеств, элементами к-рых являются действительные числа (точки числовой прямой), а также точки двух-, трёх- и вообще n-мерного пространства, основана Г. Кантором, установившим понятие *предельной точки* множества и примыкающие к нему понятия *замкнутого множества* и др. Дальнейшее развитие теории точечных множеств привело к понятиям *метрического пространства* и *топологического пространства*, изучением к-рых занимается *общая топология*. Наиболее самостоятельное существование ведёт *дескриптивная теория множеств*.

Значение теории множеств. Влияние М. т. на развитие современной математики очень велико. Прежде всего, М. т. явилась фундаментом ряда новых математич. дисциплин (теории функций действительного переменного, общей топологии, общей алгебры, функционального анализа и др.).

Постепенно теоретико-множественные методы находят всё большее применение и в классич. частях математики. Напр., в области математич. анализа они широко применяются в качественной теории дифференциальных уравнений, вариационном исчислении, теории вероятностей и др.

Наконец, М. т. оказала глубокое влияние на понимание самого предмета математики или таких её больших отделов, как геометрия. Только М. т. позволила отчётливо сформулировать понятие изоморфизма систем объектов, заданных вместе со связывающими их отношениями, и привела к пониманию того обстоятельства, что каждая математич. теория в её чистой абстрактной форме изучает ту или иную систему объектов лишь «с точностью до изоморфизма», т. е. может быть без всяких изменений перенесена на любую систему объектов, изоморфную той, для изучения к-рой теория была первоначально создана.

Что касается М. т. в вопросах обоснования математики, т. е. создания строгого, логически безупречного построения математич. теорий, то следует иметь в виду, что сама М. т. нуждается в обосновании применяемых в ней методов рассуждения. Более того, все логич. трудности, связанные с обоснованием математич. учения о *бесконечности*, при переходе на точку зрения общей М. т. приобретают лишь бо́льшую остроту (см. *Аксиоматическая теория множеств*, *Математическая логика*, *Конструктивная математика*, *Континуум*).

● Кантор Г., Труды по теории множеств, пер. с нем., М., 1985; Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, пер. с англ., М., 1970; Бурбаки Н., Теория множеств, пер. с франц., М., 1965; Успенский В. А., Теорема Гёделя о неполноте, М., 1982; Коэн П., Теория множеств и континуум-гипотеза, пер. с англ., М., 1969.

П. С. Александров.

МНО́ЖЕСТВЕННЫЙ КОЭФФИЦИЕ́НТ КОРРЕЛЯ́ЦИИ — мера линейной зависимости между одной и некоторой совокупностью случайных величин. См. *Корреляция*.

МНО́ЖЕСТВО — набор, совокупность, собрание каких-либо объектов, называемых его элементами, обладающими общим для всех них характеристическим свойством. «Множество есть многое, мыслимое как единое» (Г. Кантор). Это не является в полном смысле логич. определением понятия М., а всего лишь пояснением. При этом можно либо дать перечень элементов М.— его перечисление, либо дать правило для определения того, принадлежит или нет данный объект рассматриваемому М.— его описание (впрочем, первое приемлемо, лишь когда речь идёт о конечных М.). Для содержательного развития «наивной» *множеств теории* такого пояснения вполне достаточно, ибо для математич. теории существенны определённые соотношения между элементами М. (или между самими М.), а не их природа.

***A*-МНО́ЖЕСТВО,** суслинское множество,— см. *Дескриптивная теория множеств*.

***B*-МНО́ЖЕСТВО** — то же, что *борелевское множество*.

МНО́ЖИМОЕ — см. *Умножение*.

МНО́ЖИТЕЛЬ — см. *Умножение*; в русской литературе термин «М.» впервые встречается у Л. Ф. Магницкого (1703).

МО́ДА (от лат. modus — мера, способ, правило) — одна из числовых характеристик распределения вероятностей случайной величины. Для случайной величины, имеющей плотность вероятности $p(x)$, модой наз. любая точка максимума $p(x)$. М. определяется и для распределений, не имеющих плотности. Распределения с одной, двумя или большим числом М. наз. соответственно унимодальными (или одновершинными), бимодальными или мультимодальными. В теории вероятностей и математич. статистике наиболее важными распределениями являются унимодальные распределения. Для унимодального и симметричного относительно нек-рой точки a распределения М. равна a и совпадает с медианой и математич. ожиданием, если последнее существует. Если распределение случайной величины X унимодально и непрерывно, то для любого $\varepsilon>0$

$$\mathsf{P}\{|X-x_0|\geqslant\varepsilon\tau\}\leqslant\frac{4}{9\varepsilon^2},$$

где x_0 есть М., а τ^2 — момент 2-го порядка относительно М.: $\tau^2=\mathsf{E}|X-x_0|$. См. также *Чебышева неравенство*.

МОДА́ЛЬНАЯ ЛО́ГИКА — область логики, в которой наряду с обычными высказываниями рассматриваются модальные высказывания, то есть высказывания типа «необходимо, что...», «возможно, что...» и т. п. В математич. логике рассматриваются различные формальные системы М. л., выявляется взаимосвязь между этими системами, изучаются их интерпретации.

Большое разнообразие систем М. л. объясняется тем, что понятия «возможно» и «необходимо» можно уточнять

различными способами и, кроме того, по-разному трактовать сложные модальности типа «необходимо возможно» и «взаимоотношения» модальностей с логич. связками. Большинство изучавшихся систем М. л. опирается на классич. логику.

В классич. системах М. л. (для к-рых справедлив *исключённого третьего закон* $A \vee \neg A$ или закон снятия двойного отрицания $\neg\neg A \supset A$) для модальностей имеют место соотношения двойственности, аналогичные законам де Моргана

$$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \& \neg B) \quad \text{и} \quad \neg(A \& B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$$

алгебры логики и соответствующим эквивалентностям для кванторов, связывающие операторы возможности $\Diamond$ и необходимости $\Box$ с отрицанием $\neg$:

$$\Box A \equiv \neg\Diamond\neg A \quad \text{и} \quad \Diamond A \equiv \neg\Box\neg A.$$

Поэтому в аксиоматич. системах М. л. в качестве исходной вводят обычно одну модальную операцию (используя к.-л. из этих эквивалентностей в качестве определения другой операции). Аналогично вводятся и другие модальные операции (не входящие в число логич. операций и не выразимые через них).

Системы М. л. могут быть интерпретированы в терминах *многозначной логики* (напр., как трёхзначные — «истина», «ложь», «возможно»).

МОДЕ́ЛЕЙ ТЕО́РИЯ — раздел математической логики, изучающий взаимосвязи между формализованными логико-математическими языками и математическими структурами, описываемыми с помощью этих языков.

Понятие модели тесно связано с методом интерпретаций, применявшимся при исследовании аксиоматич. теорий (см. *Аксиоматический метод*), и впервые появилось в работах Э. Бельтрами и Ф. Клейна, посвящённых непротиворечивости геометрии Лобачевского. Построение модели данной аксиоматич. теории означает сопоставление исходным понятиям и отношениям этой теории нек-рых математич. объектов и отношений между ними, при к-ром аксиомы теории превращаются в истинные предложения об этих объектах. Исследование общих взаимосвязей между математич. теориями и их моделями стало возможным в результате выработки математич. понятий, естественным образом уточняющих понятия теории и модели.

Метод формализации, получивший особенное развитие в работах Д. Гильберта и его школы, предусматривает запись всех утверждений данной математич. теории с помощью подходящего формализованного логико-математич. языка. Отождествляя аксиоматич. теорию с множеством её аксиом, записанных на соответствующем *формализованном языке*, мы приходим к принятому в М. т. представлению о т е о р и и как произвольной совокупности предложений нек-рого формализованного логико-математич. языка.

Математич. объекты, сопоставляемые при построении модели исходным понятиям данной математич. теории, являются элементами нек-рой математич. системы, но из всего многообразия свойств этих объектов и отношений между ними нас интересуют лишь те, к-рые сопоставлены исходным отношениям данной теории. Эти математич. объекты образуют *алгебраическую систему*.

МОДЕ́ЛЬ (франц. modèle, от лат. modulus — мера) — интерпретация *формализованного языка*. Среди формализованных логико-математич. языков важное место занимают я з ы к и п е р в о г о п о р я д к а. Каждый такой язык включает счётное множество п р е д м е т н ы х п е р е м е н н ы х $x_1, x_2, \ldots$, нек-рое (возможно, пустое) множество ф у н к ц и о н а л ь н ы х с и м в о л о в $f_1, f_2, \ldots$, непустое множество п р е д и к а т н ы х с и м в о л о в $R_1, R_2, \ldots$, логич. связки $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$. Для каждого функционального и предикатного символа указывается, к какому числу аргументов может применяться этот символ. 0-местные функциональные символы наз. п р е д м е т н ы м и к о н с т а н т а м и. Совокупность функциональных и предикатных символов наз. с и г н а т у р о й данного языка. Язык первого порядка с сигнатурой

$$\Omega = \langle f_1, f_2, \ldots, R_1, R_2, \ldots \rangle$$

будем обозначать посредством L_Ω.

Т е р м ы языка L_Ω образуются при помощи правил: 1) предметные переменные и предметные константы являются термами; 2) если f есть n-местный функциональный символ, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ также считается термом. Ф о р м у л ы языка L_Ω строятся из элементарных формул вида $P(t_1, \ldots, t_n)$, где P есть n-местный предикатный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, при помощи следующих правил: если F и $\mathfrak{G}$ — формулы, x — предметная переменная, то

$$(F\&\mathfrak{G}),\ (F \vee \mathfrak{G}),\ (F \supset \mathfrak{G}),\ (\neg F),\ \forall x F,\ \exists x F$$

— формулы.

Следующим образом определяется понятие с в о б о д н о й п е р е м е н н о й в формуле. Все переменные, входящие в элементарную формулу, свободны в ней. Если переменная свободна в формуле F или в формуле $\mathfrak{G}$, то она свободна также в формулах $(F\&\mathfrak{G})$, $(F \vee \mathfrak{G})$, $(F \supset \mathfrak{G})$, $\neg F$. В формулах $\forall x F$ и $\exists x F$ свободными являются все свободные переменные формулы F, кроме x. Формула без свободных предметных переменных наз. з а м к н у т о й формулой или п р е д л о ж е н и е м.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — алгебраич. система сигнатуры Ω. Ей естественным образом соответствует язык первого порядка L_Ω, содержащий функциональные и предикатные символы, соответствующие основным операциям и предикатам алгебраич. системы $\mathfrak{A}$. Алгебраич. система $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ наз. моделью языка L_Ω.

Функциональные и предикатные символы языка L_Ω могут рассматриваться как обозначения для соответствующих операций и предикатов модели $\mathfrak{A}$. При этом каждое предложение F языка L_Ω превращается в высказывание об элементах алгебраич. системы $\mathfrak{A}$, к-рое может быть истинным или ложным. В соответствии с этим говорят об истинности или ложности предложения F в М. $\mathfrak{A}$.

Предложение, истинное в М. $\mathfrak{A}$, истинно также в любой алгебраич. системе, изоморфной $\mathfrak{A}$.

Совокупность всех предложений языка L_Ω, истинных в М. $\mathfrak{A}$, наз. *элементарной теорией* М. $\mathfrak{A}$ и обозначается $Th(\mathfrak{A})$.

Алгебраич. система $\mathfrak{A}$ сигнатуры Ω наз. М. для совокупности Σ предложений языка L_Ω, если все формулы из Σ истинны в $\mathfrak{A}$. Класс всех М. для Σ обозначается $\mathrm{Mod}(\Sigma)$.

Взаимосвязь между алгебраич. системами и их теориями, а также между формализованными языками и их М. изучает *моделей теория*.

МОДЕ́ЛЬ ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ — см. *Вычислительная модель*.

МОДЕ́ЛЬ МАТЕМАТИ́ЧЕСКАЯ — см. *Математическая модель*.

МО́ДУЛЬ (от лат. modulus — мера) в е к т о р а — одна из характеристик вектора — его длина (норма). М. вектора обозначается $|a| \equiv a$. М. вектора равен нулю тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой. М. вектора $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ вычисляется по формуле:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Термин «М.» вектора ввёл Ж. Арган (1806).

МО́ДУЛЬ д е й с т в и т е л ь н о г о (к о м п л е к с н о г о) ч и с л а — то же, что *абсолютная величина*.

МО́ДУЛЬ н а д а с с о ц и а т и в н ы м к о л ь ц о м R — абелева группа A, для элементов которой дополнительно определено умножение на элементы из кольца R, удовлетворяющее определённым правилам. А именно, абелева группа A есть л е в ы й м о д у л ь над R (или л е в ы й

R-модуль), если произведение λa, $\lambda \in R$; $a \in A$, лежит в A, причём:

$$(1)\ \lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b,$$
$$(2)\ (\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a,$$
$$(3)\ (\lambda\mu)a=\lambda(\mu a),$$

где $\lambda, \mu \in R$, $a, b \in A$. Аналогично определяется **правый модуль** над R (**правый R-модуль**), для к-рого задано произведение $a\lambda \in A$, а свойства (1)—(3) изменяются естественным образом; напр., (3) принимает вид: $a(\lambda\mu)=(a\lambda)\mu$. Если R — коммутативное кольцо, то левый и правый R-модули можно не различать, ибо, положив $a\lambda=\lambda a$, $\lambda \in R$, $a \in A$, мы превращаем левый R-модуль в правый, поскольку $a(\lambda\mu)=(\lambda\mu)a=(\mu\lambda)a=\mu(\lambda a)=(a\lambda)\mu$.

Обычно, если R — кольцо с единицей, то, говоря о модуле, подразумевают *унитарный модуль*, т. е. удовлетворяющий аксиоме:

$$(4)\ 1a=a\ \ (1 \in R).$$

Примеры модулей. 1) Любая абелева группа A является М. над кольцом $\mathbb{Z}$ целых чисел (причём унитарным М.), где для $n \in \mathbb{Z}$ и $a \in A$

$$na=\begin{cases} \underbrace{a+\ldots+a}_{n}, & \text{если } n>0,\\ 0, & \text{если } n=0,\\ \underbrace{(-a)+\ldots+(-a)}_{n}, & \text{если } n<0. \end{cases}$$

2) Линейное пространство над полем P является P-модулем.

3) Левый идеал L любого кольца R (и, в частности, само кольцо R) является левым R-модулем, где произведение λa для $\lambda \in R$, $a \in L$, совпадает с произведением, имеющимся в R.

4) Каждую абелеву группу A можно рассматривать как левый М. над её кольцом эндоморфизмов $R=\mathrm{End}\,A$, если произведение $\lambda\mu$, где $\lambda, \mu \in R$, определить равенством $(\lambda\mu)(x)=\lambda(\mu(x))$ для всех $x \in A$ и положить $\lambda a=\lambda(a)$ для всех $\lambda \in R$ и $a \in A$.

Если A — левый R-модуль, то отображение Γ кольца R в кольцо $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}\,A$ эндоморфизмов абелевой группы A, определяемое равенством $\Gamma(\lambda)(x)=\lambda x$ для всех $\lambda \in R$ и $x \in A$, оказывается гомоморфизмом кольца R в кольцо $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}\,A$. Такой гомоморфизм наз. **представлением** кольца R в абелевой группе A. Ядро гомоморфизма Γ оказывается аннулятором модуля A.

Подмодулем левого R-модуля A наз. подгруппа группы A, содержащая вместе с любым элементом a всевозможные произведения λa, где $\lambda \in R$. Подмодулями любого М. служат сам М. и его одноэлементный подмодуль $\{0\}$. **Сумма** подмодулей B и C в М. A определяется равенством

$$B+C=\{b+c \mid b \in B,\ c \in C\}.$$

Сумма $\sum_{i \in I} B_i$ любого множества $\{B_i \mid i \in I\}$ подмодулей определяется как совокупность всевозможных конечных сумм элементов, принадлежащих подмодулям B_i. Сумма $B=\sum_{i \in I} B_i$ наз. **прямой**, если выполнено одно из следующих эквивалентных между собой условий: (1) каждый элемент из B имеет единственное представление в виде суммы $b_{i_1}+\ldots+b_{i_m}$, где $b_{i_k} \in B_{i_k}$ и индексы $i_1, \ldots, i_m$ различны; (2) если $b_{i_1}+\ldots+b_{i_m}=0$, где $b_{i_k} \in B_{i_k}$ и индексы $i_1, \ldots, i_k$ различны, то $b_{i_1}=\ldots=b_{i_k}=0$; (3) для любого i $B_i \cap \sum_{k \neq i} B_k=\{0\}$. Если $I=\{1, \ldots, n\}$, то эти условия равносильны равенству $(B_1+\ldots+B_{i-1}) \cap B_i=0$ для любого i. Эта сумма естественным образом изоморфна подмодулю прямого произведения М. B_i, а в случае конечного множества I — всему произведению. Если B — подмодуль R-модуля A, то факторгруппа A/B естественным образом превращается в R-модуль — **фактормодуль** модуля A по подмодулю B.

Отображение φ левого R-модуля A в левый R-модуль B наз. **гомоморфизмом**, если для любых $x, y \in A$, $\lambda \in R$

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),\quad \varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x).$$

Множество всех гомоморфизмов из A в B обозначается $\mathrm{Hom}_R(A, B)$. Это множество становится абелевой группой, если сумму $\varphi+\psi$, $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, определить равенством $(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ для всех $x \in A$. Если кольцо R коммутативно, то равенство $\lambda\varphi(x)=(\lambda\varphi)(x)$ превращает $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ в R-модуль.

Левый R-модуль A наз. **конечно порождённым**, если $A=Ra_1+\ldots+Ra_m$ для нек-рых $a_1, \ldots, a_m$ из A. Фактормодуль A/B конечно порождённого М. A конечно порождён. Наоборот, если A/B и B — конечно порождённые М., то A также конечно порождён.

Если кольцо R является линейной алгеброй с единицей над нек-рым полем P, то всякий левый R-модуль оказывается линейным пространством над P, причём

$$(\xi\lambda)a=\lambda(\xi a)=\xi(\lambda a)$$

для любых $\xi \in P$, $\lambda \in R$, $a \in A$.

Каждый левый R-модуль можно рассматривать как универсальную алгебру, сигнатура к-рой состоит из групповых операций и унарных операций f_λ, где $\lambda \in R$ и $f_\lambda(x)=\lambda x$.

Под **левым модулем над группой** G понимают абелеву группу A, для к-рой при любых $\lambda \in G$ и $a \in A$ определено произведение $\lambda a \in A$, обладающее свойствами (3) и (4). Всякий такой М. естественным образом превращается в левый R-модуль над групповым кольцом $\mathbb{Z}G$, где

$$\left(\sum\nolimits_{g \in G} m_g g\right)=\sum m_g(ga)$$

для любых $\sum m_g g \in \mathbb{Z}G$ и $a \in A$. Если A — линейное пространство над полем P, то вместо $\mathbb{Z}G$ можно рассматривать групповую алгебру PG.

Рассматриваются также М. над алгебрами Ли и другими неассоциативными алгебрами.

● Мишина А. П., Скорняков Л. А., Абелевы группы и модули, М., 1969; Ламбек И., Кольца и модули, пер. с англ., М., 1971; Фейс К., Алгебра: кольца, модули и категории, пер. с англ., т. 1—2, М., 1977—79; Каш Ф., Модули и кольца, пер. с нем., М., 1981; Пирс Р., Ассоциативные алгебры, пер. с англ., М., 1986.

Л. А. Скорняков.

МОДУЛЯ́РНАЯ РЕШЁТКА — то же, что *дедекиндова решётка*.

МОДУЛЯ́РНЫЙ ЗАКО́Н — см. *Дедекиндова решётка*.

МО́ДУС ПО́НЕНС (лат. modus ponens), **правило отделения**,— *вывода правило* в формальных логических системах. Правило М. п. записывается в виде схемы

$$\frac{A\ \ A \supset B}{B},$$

где A и B — обозначения для формул формальной логич. системы, а $\supset$ — логич. связка импликации. М. п. разрешает выводить B из посылок A (**малая посылка**) и $A \supset B$ (**большая посылка**). Если в нек-рой интерпретации формальной системы формулы A и $A \supset B$ истинны, то по смыслу импликации истинна формула B. М. п. вместе с другими правилами вывода и аксиомами формальной системы определяет класс формул, выводимых из множества формул M, как наименьший класс, содержащий формулы из M, аксиомы и замкнутый относительно правил вывода.

М. п. можно рассматривать как операцию над выводами данной формальной системы, позволяющую образовывать вывод формулы B из вывода α формулы A и вывода β формулы $A \supset B$.

МО́ЛЬВЕЙДЕ ФО́РМУЛЫ — соотношения, связывающие длины сторон и тригонометрические функции углов произвольного (плоского) треугольника. Если углы треугольника обозначить через A, B, C, а длины противолежащих

сторон через a, b, c, то М. ф. можно записать так:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}, \quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Аналогичные формулы имеют место для суммы и разности двух любых сторон треугольника. М. ф. названы по имени К. Мольвейде (1808), но они были известны ранее, напр. И. Ньютону.

МОМЕ́НТ (от лат. momentum — движущая сила, толчок, побудительное начало) — одна из числовых характеристик распределения вероятностей. Момент порядка k ($k>0$, целое) случайной величины X определяется как математич. ожидание $\mathsf{E}X^k$ случайной величины X^k, если оно существует. Если $F(x)$ — функция распределения случайной величины X, то

$$\mathsf{E}X^k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\,dF(x) \qquad (*)$$

при условии, что интеграл сходится абсолютно. В частности, если X принимает значения $x_1, x_2, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots$, то

$$\mathsf{E}X^k=\sum_{k=1}^{\infty}x^kp_k;$$

если X имеет плотность распределения $f(x)$ на прямой, то

$$\mathsf{E}X^k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^kf(x)\,dx.$$

При определении М. в теории вероятностей используется прямая аналогия с соответствующим понятием, играющим важную роль в механике: формулой (*) определяется М. распределения масс. М. 1-го порядка (статич. М. в механике) случайной величины X — математич. ожидание $\mathsf{E}X$. Величина $\mathsf{E}(X-a)^k$ наз. моментом порядка k относительно a, $\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^k$ — центральным моментом порядка k. Центральный М. 2-го порядка $\mathsf{E}(X-\mathsf{E}X)^2$ наз. дисперсией $\mathsf{D}X$ (М. инерции в механике). Величина $\mathsf{E}|X|^k$ наз. абсолютным моментом порядка k (абсолютный М. определяется и для нецелых k). Аналогично определяется М. совместного распределения случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ (т. н. многомерного распределения): для любых целых $k_i\geqslant 0, k_1+\ldots+k_n=k$, математическое ожидание $\mathsf{E}(X_1^{k_1}\ldots X_n^{k_n})$ наз. смешанным моментом порядка k, а $\mathsf{E}(X_1-\mathsf{E}X_1)^{k_1}\ldots(X_n-\mathsf{E}X_n)^{k_n}$ — центральным смешанным моментом порядка k. Смешанный М. $\mathsf{E}(X_1-\mathsf{E}X_1)(X_2-\mathsf{E}X_2)$ наз. ковариацией и служит одной из основных характеристик зависимости между случайными величинами (см. *Корреляция*).

Если известны М. распределения, то можно сделать нек-рые утверждения о вероятностях отклонения случайной величины от её математич. ожидания в терминах неравенств; наиболее известны неравенство Чебышева

$$\mathsf{P}\{|X-\mathsf{E}X|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon>0,$$

и его обобщения.

Задача, состоящая в определении распределения вероятностей последовательностью его М., носит название проблемы моментов. Эта задача впервые рассматривалась П. Л. Чебышевым (1874) в связи с исследованиями по предельным теоремам теории вероятностей. В математич. статистике для статистич. оценки параметров распределения служат выборочные моменты. *А. В. Прохоров.*

МОМЕ́НТОВ МЕ́ТОД в теории вероятностей — метод нахождения распределения вероятностей по его моментам. В теоретич. отношении М. м. основывается на единственности решения проблемы моментов. Если $F_n(x)$ — последовательность функций распределения с конечными моментами $\alpha_k(n)$ любого порядка $k\geqslant 1$, функция распределения $F(x)$ однозначно определяется своими моментами β_k и $\alpha_k(n)\to\beta_k$ при $n\to\infty$ и каждом k, то $F_n(x)\to F(x)$ при $n\to\infty$ в каждой точке x, где $F(x)$ непрерывна. На этом основано использование М. м. при доказательстве предельных теорем теории вероятностей и математич. статистики, в частности о сходимости к нормальному распределению. Впервые М. м. для случая сходимости к нормальному распределению был разработан П. Л. Чебышевым. Первое строгое доказательство центральной предельной теоремы теории вероятностей было получено А. А. Марковым (1898) с помощью М. м.

В математич. статистике М. м. — это один из общих методов нахождения статистич. оценок для неизвестных параметров распределения по результатам наблюдений. М. м. был использован для этих целей К. Пирсоном (1894), при решении задачи аппроксимации эмпирич. распределений с помощью системы распределений Пирсона.

Процедура М. м. такова: определяются выборочные моменты (моменты эмпирич. распределения) и в количестве, равном числу оцениваемых параметров, приравниваются к соответствующим моментам распределения, являющимся функциями от неизвестных параметров; полученные уравнения решают относительно параметров и находят искомые оценки. На практике М. м. связан часто с весьма простыми вычислениями. При нек-рых довольно общих условиях М. м. позволяет найти оценки, к-рые при больших n асимптотически нормальны, имеют математич. ожидание, лишь величиной порядка $1/n$ отличающееся от истинного значения параметра, и стандартное отклонение — порядка $1/\sqrt{n}$. Однако оценки, найденные по М. м., не являются наилучшими из возможных с точки зрения эффективности — их дисперсия не является наименьшей возможной дисперсией. В случае оценивания параметров нормального распределения М. м. и метод максимального правдоподобия приводят к совпадающим результатам: к асимптотически несмещенным и асимптотически эффективным оценкам.

● Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей, 3 изд., М., 1987; Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; Кендалл М., Стьюарт А., Теория распределений, пер. с англ., М., 1966.

А. В. Прохоров.

МОМЕ́НТОВ МЕ́ТОД — то же, что *Галёркина метод*.

МОМЕ́НТОВ ПРОБЛЕ́МА — задача математического анализа, состоящая в том, чтобы охарактеризовать свойства функции $f(x)$ по свойствам последовательности её моментов

$$\mu_k=\int_a^b x^kf(x)\,dx, \quad k=1, 2, \ldots \qquad (*)$$

Эта задача впервые рассматривалась П. Л. Чебышевым (1874) в связи с исследованиями по теории вероятностей. М. п. представляет собой один из весьма мощных аппаратов современного математич. анализа. Она тесно связана с общей теорией ортогональных многочленов (эта связь также была указана П. Л. Чебышевым), теорией непрерывных дробей, теорией квазианалитич. классов функций, приближённым вычислением определённых интегралов (квадратурные формулы).

Основные вопросы: разрешимость — существует ли хоть одна функция $f(x)$, имеющая заданные моменты μ_k; определённость и неопределённость — при каких ограничениях на последовательность моментов существует лишь одна функция $f(x)$, имеющая заданные моменты (определённость), и в каких случаях таких функций может быть несколько (неопределённость); проблема класса — при каких условиях последовательность μ_k является последовательностью моментов для функции из того или иного класса.

Подразделения: если в формуле (*) a и b конечны, то соответствующую М. п. называют проблемой моментов на конечном интервале (М. п. на конечном интервале всегда является определённой); в случае $a=0$, $b=+\infty$ М. п. называют проблемой моментов Стилтьеса, а при $a=-\infty$, $b=+\infty$ — проблемой моментов Гамбургера (проблема моментов Стилтьеса и Гамбургера может быть как определённой, так и неопределённой).

Рассматривают также более о б щ у ю М. п., когда по моментам

$$\mu_k = \int_a^b x^k \, d\sigma(x)$$

ищется неубывающая функция $\sigma(x)$, и т р и г о н о м е т р и ч е с к у ю М. п., в к-рой функция $\sigma(x)$ ищется по моментам

$$\lambda_k = \int_a^b e^{ikx} \, d\sigma(x).$$

МОНЖА—АМПЕ́РА УРАВНЕ́НИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными 2-го порядка вида

$$rt - s^2 = ar + 2bs + ct + \varphi,$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y},$$

коэффициенты которого зависят от переменных x, y неизвестной функции $z(x, y)$ и её первых производных $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Тип М.— А. у. зависит от знака выражения

$$\Delta = \varphi + ac - b^2.$$

Если $\Delta > 0$, М.— А. у. есть уравнение эллиптического типа, если $\Delta < 0$ — гиперболического, если $\Delta = 0$ — параболического. Развитие теории М.— А. у. связано главным образом с решением различных задач геометрии; ряд физич. задач (напр., в метеорологии) также приводит к уравнениям такого типа.

М.— А. у. рассматривались Г. Монжем (1784) и А. Ампером (1820).

МОНО́ИД (от греч. μόνος — один и εἶδος — вид) — *полугруппа* с единицей.

МОНОМОРФИ́ЗМ (от греч. μόνος — один и *морфизм*) — морфизм *категории*, на который можно сокращать справа. В категории множеств М.— это *инъективное отображение*.

МОНОТО́ННАЯ ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ (от греч. μονότονος — однотонный) — последовательность $\{x_n\}$ такая, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется одно из неравенств:
$x_n < x_{n+1}$ (с т р о г о в о з р а с т а ю щ а я п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь),
$x_n \leqslant x_{n+1}$ (н е у б ы в а ю щ а я п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь),
$x_n > x_{n+1}$ (с т р о г о у б ы в а ю щ а я п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь),
$x_n \geqslant x_{n+1}$ (н е в о з р а с т а ю щ а я п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь).

МОНОТО́ННАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция одного переменного, определённая на некотором подмножестве действительных чисел, приращение которой $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$ при $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$ не меняет знака, т. е. либо всегда неотрицательно, либо всегда неположительно. Если $\Delta f(x)$ строго больше(меньше) нуля, когда $\Delta x > 0$, то М. ф. наз. с т р о г о м о н о т о н н о й (см. *Возрастающая функция, Убывающая функция*). Различные типы М. ф. представлены в таблице.

$\Delta f(x) \geqslant 0$	Неубывающая	
$\Delta f(x) \leqslant 0$	Невозрастающая	
$\Delta f(x) > 0$	Возрастающая	
$\Delta f(x) < 0$	Убывающая	

Если функция f в каждой точке нек-рого интервала имеет производную, к-рая не меняет знака (соответственно сохраняет постоянный знак), то функция f м о н о т о н н а (с т р о г о м о н о т о н н а) на этом и н т е р в а л е.

Монотонная на интервале функция в каждой точке этого интервала имеет левый и правый пределы (конечные), т. е. каждая точка является или точкой непрерывности М. ф., или точкой разрыва 1-го рода.

Дифференцируемая на интервале функция $f(x)$ является М. ф. на этом интервале, если $f'(x)$ не меняет знака, т. е. либо $f'(x) \geqslant 0$ на всём интервале, либо $f'(x) \leqslant 0$.

МОНОТО́ННОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — то же, что *изотонное отображение*.

МОНОТО́ННЫЙ ОПЕРА́ТОР — оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H такой, что для всех $x, y \in H$

$$(Ax - Ay, \; x - y) \geqslant 0.$$

МО́НТЕ-КА́РЛО МЕ́ТОД, м е т о д с т а т и с т и ч е с к и х и с п ы т а н и й,— численный метод, использующий моделирование случайных величин и построение статистических оценок для искомых величин.

А л г о р и т м ы М.-К. м. д л я о ц е н к и м н о г о к р а т н ы х и н т е г р а л о в. Пусть необходимо оценить интеграл $J = \int h(x) dx$ по мере Лебега в евклидовом s-мерном пространстве X и $f_\xi(x)$ — плотность вероятности такая, что J можно записать в виде математич. ожидания следующим образом:

$$J = \int_X f_\xi(x) \frac{h(x)}{f_\xi(x)} dx = \mathsf{E}\xi,$$

где $\xi = h(\xi)/f_\xi(\xi)$. Моделируя ξ на ЭВМ, можно получить N выборочных значений $x_1, \ldots, x_N$. Согласно закону больших чисел,

$$J \approx J_N = \frac{\sum_{k=1}^N h(x_k)/f(x_k)}{N}.$$

Одновременно можно оценить среднеквадратичную погрешность J_N, т. е. величину $\sigma_N = (\mathsf{D}\xi/N)^{1/2}$, и приближённо построить подходящий доверительный интервал для J. Выбором плотности f можно распорядиться для получения оценки с возможно меньшей дисперсией. Соответствующие алгоритмы наз. существенной выборкой (выборкой по важности). Иногда полезны сочетания М.-К. м. с классич. квадратурами — т. н. случайные квадратурные формулы, основная идея к-рых состоит в том, что узлы и коэффициенты к.-л. квадратурной суммы (напр., интерполяционной) выбираются случайно из распределения, обеспечивающего несмещённость получаемой оценки интеграла. При этом порядок скорости сходимости М.-К. м. повышается и в нек-рых случаях становится максимально возможным на рассматриваемом классе задач.

Если подинтегральная функция зависит от параметра, то целесообразно использовать метод зависимых испытаний, т. е. вычислять интегралы для различных значений параметра по одним и тем же случайным узлам. Важным свойством М.-К. м. является сравнительно слабая зависимость среднеквадратичной погрешности σ_N от размерности задачи, причём порядок сходимости по числу узлов N всегда один и тот же: $N^{-1/2}$. Это позволяет вычислять (после предварительных преобразований задачи) интегралы очень высокой и даже бесконечной кратности.

А л г о р и т м ы М.-К. м. д л я р е ш е н и я и н т е г р а л ь н ы х у р а в н е н и й 2-г о р о д а. Пусть необходимо вычислить линейный функционал $J_h = (\varphi, h)$, где $\varphi = K\varphi + f$, причём для интегрального оператора K с ядром $k(x', x)$ выполняется условие, обеспечивающее сходимость ряда Неймана: $\|K^{n_0}\| < 1$. Цепь Маркова $\{x_n\}$ определяется начальной плотностью $\pi(x)$ и переходной плотностью $p(x', x) = p(x' \to x)$; вероятность обрыва цепи в точке x' равна

$$g(x') = 1 - \int p(x', x) \, dx;$$

N — случайный номер последнего состояния. Далее определяется функционал от траектории цепи, математич. ожидание к-рого равно J_h. Чаще всего используется т. н. оценка по столкновениям

$$\xi = \sum_{n=0}^N Q_n h(x_n),$$

где

$$Q_0 = \frac{f(x_0)}{\pi(x_0)}, \quad Q_n = Q_{n-1} \frac{k(x_{n-1}, x_n)}{p(x_{n-1}, x_n)}.$$

Если $p(x', x) \neq 0$ при $k(x', x) \neq 0$ и $\pi(x) \neq 0$ при $f(x) \neq 0$, то при нек-ром дополнительном условии

$$\mathsf{E}\xi = \sum_{n=0}^{\infty} (K^n f, h) = (\varphi, h) = \int_X \varphi(x)\, h(x)\, dx.$$

Возможность достижения малой дисперсии в знакопостоянном случае показывает следующее утверждение: если

$$\pi(x) = \frac{f(x)\,\varphi^*(x)}{(f, \varphi^*)} \quad \text{и} \quad p(x', x) = \frac{h(x', x)\,\varphi^*(x)}{[K^* p^*](x')},$$

где $\varphi^* = K^* \varphi^* + h$, то $\mathsf{D}\xi = 0$, а $\mathsf{E}\xi = J_h$. Моделируя подходящую цепь Маркова на ЭВМ, получают статистич. оценку линейных функционалов от решения интегрального уравнения 2-го рода. Это даёт возможность и локальной оценки решения на основе представления: $\varphi(x) = (\varphi, h_x) + f(x)$, где $h_x(x') = k(x', x)$. М.-К. м. оценка 1-го собственного значения интегрального оператора осуществляется итерационным методом на основе соотношения

$$M\,[Q_n h(x_n)] = (K^n f, h).$$

Все рассмотренные результаты почти автоматически распространяются на системы линейных алгебраич. уравнений вида $x + Hx = h$.

Решение дифференциальных уравнений осуществляется М.-К. м. на базе соответствующих интегральных соотношений (см. *Статистическое моделирование*).

Изложенное представляет собой основу для построения эффективных модификаций статистич. моделирования.

● Ермаков С. М., Михайлов Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982; Соболь И. М., Численные методы Монте-Карло, М., 1973.

Г. А. Михайлов.

МО́РГАНА ЗАКО́НЫ, законы де Моргана,— см. *Алгебра логики*. Установлены О. де Морганом (19 в.).

МОРЕ́РЫ ТЕОРЕ́МА — теорема, дающая интегральный признак аналитической функции. Пусть f — однозначная непрерывная функция комплексного переменного z, определённая в нек-рой односвязной области D комплексной плоскости. Тогда если интеграл $\int_\gamma f(z)dz$ от функции $f(z)$, взятый по контуру γ любого треугольника, целиком расположенного в D, равен нулю, то $f(z)$ — аналитич. функция в области D. Получена Дж. Морерой (1886).

М. т. является обратной к *Коши интегральной теореме* и выражает вместе с ней важное характеристич. свойство аналитич. функций.

МОРЛЕ́Я ТЕОРЕ́МА: точки пересечения смежных трисектрис произвольного треугольника — вершины равностороннего треугольника. Теорему сформулировал Ф. Морлей (1899).

МОРФИ́ЗМ (от греч. μορφή — форма, вид) — термин теории *категорий*, используемый для обозначения элементов произвольной категории, играющих роль отображений множеств друг в друга, гомоморфизмов групп, колец, непрерывных отображений топологических пространств и т. п. М. категории — неопределяемое понятие. Каждая категория состоит из элементов двух классов, наз. классом объектов и классом морфизмов соответственно.

МОСКО́ВСКИЙ ПАПИ́РУС — древнеегипетская математическая рукопись, хранящаяся в Музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина в Москве. См. *Папирусы математические*.

МОСКО́ВСКОЕ МАТЕМАТИ́ЧЕСКОЕ О́БЩЕСТВО — одно из старейших математических обществ Европы. Основано в 1864 (до 1867 существовало в виде математич. кружка, образовавшегося по инициативе группы профессоров и преподавателей Московского ун-та Н. Д. Брашмана, А. Ю. Давидова). С нач. 70-х гг. 19 в. одним из активнейших членов общества стал Н. Е. Жуковский; его доклады, а также других учёных определяли характер деятельности общества в 19 в., когда вопросы математич. естествознания занимали не меньшее место, чем чисто математич. доклады; среди последних особенно важны доклады К. М. Петерсона — основателя московской школы дифференциальной геометрии. В кон. 19 в. в общество входили Б. К. Млодзеевский, Д. Ф. Егоров, С. А. Чаплыгин и др. После Октябрьской революции 1917 произошёл подъём в работе общества. Чрезвычайно расширилась тематика (теория вероятностей, топология, алгебра, различные направления математич. анализа). Наряду с докладами, посвящёнными текущей научной работе, стали систематически ставиться обобщающие доклады обзорного характера. М. м. о. ежегодно присуждает премии молодым математикам; общество участвует в издаваемых АН СССР журналах «Математический сборник» и «Успехи математических наук», а также издаёт «Труды» в виде непериодич. сборников.

● Александров П. С., Московское математическое общество, «Успехи матем. наук», 1946, т. 1, в. 1.

МО́ЩНОСТНАЯ ХАРАКТЕ́РИСТИКА топологического пространства — функция, сопоставляющая этому пространству бесконечное *кардинальное число* и принимающая одинаковые значения на гомеоморфных пространствах. М. х. наз. также кардинальными инвариантами. Областью определения М. х. может служить класс всех топологич. пространств или нек-рый его подкласс. Следующие, наиболее важные М. х. были выделены уже на первом этапе развития общей топологии. Пусть X — произвольное топологич. пространство. Его мощность $|X|$ есть мощность множества всех его точек — тривиальный инвариант. Вес $w(X)$ — минимум мощностей всевозможных *баз* пространства X. Плотность $d(X)$ — минимум мощностей всюду плотных в X множеств.

МО́ЩНОСТЬ континуума — мощность множества всех действительных чисел, обозначается $\mathfrak{c}$ или $2^{\aleph_0}$.

МО́ЩНОСТЬ множества — обобщение на произвольные множества понятия «число элементов». М. множества определяется методом абстракции как то общее, что есть у всех множеств, эквивалентных (количественно) данному; при этом два множества наз. эквивалентными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Мощности наз. часто кардинальными (т. е. количественными) числами. Наименьшей бесконечной М. является $\aleph_0$ — М. множества натуральных чисел. Понятие М. введено основателем теории множеств Г. Кантором (1878), к-рый установил, что М. множества действительных чисел больше $\aleph_0$, и тем самым показал, что бесконечные множества могут быть расклассифицированы по их М. См. *Множеств теория*.

МО́ЩНОСТЬ СТАТИСТИ́ЧЕСКОГО КРИТЕ́РИЯ — см. *Статистических гипотез проверка*.

МУА́ВРА ФО́РМУЛА — формула, содержащая правило для возведения в степень комплексного числа, представленного в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

согласно М. ф., модуль r комплексного числа возводится в эту степень, а аргумент φ умножается на показатель степени

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

М. ф. была найдена А. Муавром (1707); современная её запись предложена Л. Эйлером (1748).

М. ф. может быть использована для выражения $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через степени $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots,$$

$$\sin n\varphi = C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \ldots,$$

где $C_m^n = n!/m!\,(n-m)!$ — биномиальные коэффициенты.

МУА́ВРА—ЛАПЛА́СА ТЕОРЕ́МА — см. *Лапласа теорема*.

МУЛЬТИГРА́Ф (от лат. multum — много) — *граф* без петель, в котором допускаются кратные рёбра.

МУЛЬТИМОДА́ЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ (от лат. multum — много и modus — мера, способ, правило) — распределение вероятностей с несколькими *модами*.

МУЛЬТИНОМИА́ЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ (от лат. multum — много и nomen — имя) — то же, что *полиномиальное распределение*.

МУЛЬТИОПЕРА́ТОРНАЯ ГРУ́ППА — понятие, объединяющее понятия группы, линейной алгебры (над полем) и кольца. М. г.— это универсальная алгебра, являющаяся

группой относительно фиксированной операции сложения $+$ (не обязательно коммутативной), в к-рой дополнительно задана нек-рая система алгебраич. операций Ω (арностей $\geqslant 1$), причём нулевой элемент группы является подалгеброй, т. е. $0 \ldots 0\ \omega = 0$ для всех $\omega \in \Omega$.

МУЛЬТИПЛИКАТИ́ВНАЯ ПОЛУГРУ́ППА (от лат. multiplico — умножаю, увеличиваю) а с с о ц и а т и в н о г о к о л ь ц а — полугруппа, образуемая всеми элементами данного ассоциативного кольца относительно умножения. Обратимые элементы этой полугруппы образуют подгруппу, наз. м у л ь т и п л и к а т и в н о й г р у п п о й кольца. В случае, когда кольцо является телом (тем более полем), М. п. и мультипликативная группа совпадают.

Н

НА́БЛА-ОПЕРА́ТОР (от греч. νάβλα — арфа, форма к-рой напоминает символ ∇ этого понятия) — то же, что *Гамильтона оператор*.

НАБЛЮДЕ́НИЙ ОБРАБО́ТКА — применение к результатам наблюдений математических методов для построения выводов об истинных значениях искомых величин. Всякий результат наблюдений, связанных с измерениями, содержит ошибки (погрешности) различного происхождения. По своему характеру ошибки делятся на три группы: грубые, систематические и случайные (о грубых ошибках см. *Ошибок теория*; ниже предполагается, что наблюдения не содержат грубых ошибок). Обычно результат измерения X нек-рой величины μ считают случайной величиной, тогда ошибка измерения

$$\delta = X - \mu$$

будет также случайной величиной. Пусть $b = \mathsf{E}\delta$ — математич. ожидание ошибки. Тогда

$$X = \mu + b + (\delta - b).$$

Величину b называют с и с т е м а т и ч е с к о й о ш и б к о й, а $(\delta - b)$ — с л у ч а й н о й о ш и б к о й; математич. ожидание $(\delta - b)$ равно нулю. Систематич. ошибка b часто бывает известна заранее и в этом случае легко устраняется. Напр., в астрономии при измерении величины угла между направлением на светило и плоскостью горизонта систематич. ошибка является суммой двух ошибок: систематич. ошибки, к-рую даёт прибор при отсчёте данного угла (инструментальные ошибки), и систематич. ошибки, обусловленной преломлением лучей света в атмосфере (рефракция). Инструментальная ошибка определяется с помощью таблицы или графика поправок для данного прибора; ошибку, связанную с рефракцией (для зенитных расстояний, меньших 80°), достаточно точно можно вычислить теоретически.

Влияние случайных ошибок оценивается с помощью методов теории ошибок. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — результаты n независимых измерений величины μ, произведённых в одинаковых условиях и одинаковыми средствами, то обычно полагают

$$\mu \approx \overline{X} - b = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - b, \qquad (1)$$

где b — систематич. ошибка. Об оценке абсолютной погрешности приближённого равенства (1) см. в статьях *Наименьших квадратов метод*, *Значимости уровень*.

В том случае, когда требуется вычислить значение нек-рой функции $f(x)$ в точке $x = \mu$, причём величина μ оценивается по n независимым наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$, приближённо полагают

$$f(\mu) \approx f(\overline{X} - b). \qquad (2)$$

Пусть B — математич. ожидание случайной величины

$$\Delta = f(\overline{X} - b) - f(\mu),$$

тогда

$$f(\overline{X} - b) = f(\mu) + B + (\Delta - B).$$

Поэтому B — систематич. ошибка и $(\Delta - B)$ — случайная ошибка приближённого равенства (2). Если случайные ошибки независимых наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ подчиняются одному и тому же распределению и функция $f(x)$ в окрестности точки $x = \mu$ мало отличается от линейной, то $B \approx 0$ и

$$\Delta \approx f'(\mu)\,\overline{(\delta - b)},$$

где $\overline{(\delta - b)}$ — среднее арифметическое случайных ошибок отдельных наблюдений. Это означает, что если

$$\mathsf{E}(\delta_i - b)^2 = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

то

$$\mathsf{E}(\Delta - B)^2 \approx \mathsf{E}\Delta^2 \approx \frac{[f'(\mu)]^2 \sigma^2}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty.$$

В случае нескольких неизвестных параметров Н. о. часто осуществляется с помощью метода наименьших квадратов.

Если изучается зависимость между случайными величинами X и Y на основе совокупности n независимых наблюдений, каждое из к-рых есть вектор (X_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$, координаты к-рого X_i и Y_i подчиняются исследуемому совместному распределению величин X и Y, то соответствующая Н. о. выполняется с помощью теории корреляции и регрессии.

При Н. о. приходится делать нек-рые предположения и допущения о характере функциональной зависимости, распределении случайных ошибок и т. д., поэтому Н. о. должна включать в себя проверку согласия сделанных предположений с результатами использованных и др. наблюдений. См. *Статистических гипотез проверка*.

● Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962.

Л. Н. Большев.

НА́ГЕЛЯ ТО́ЧКА — точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с точками касания противолежащих сторон с вневписанными окружностями. Названа по имени Х. Нагеля (1836).

НАДЁЖНОСТИ ТЕО́РИЯ — направление прикладной математики, в к-рой разрабатываются методы обеспечения эффективной работы изделий (систем). В Н. т. вводятся количественные показатели надёжности изделий, разрабатываются рекомендации по обеспечению надёжности на этапах проектирования, производства, хранения, эксплуатации и ремонта изделий. Одним из основных в Н. т. является понятие о т к а з а — потери работоспособности. В Н. т. изучаются процессы возникновения отказов, разрабатываются методы выявления предотказовых состояний. События, определяющие надёжность изделий (моменты отказов, длительности ремонта и др.), в Н. т. рассматриваются как случайные. Поэтому особое место в Н. т. занимают методы теории вероятностей и математич. статистики.

Важной количественной характеристикой надёжности является функция $P(t)$ — вероятность безотказной работы (в. б. р.) изделия в течение времени t:

$$P(t) = \exp\{-\Lambda(t)\},$$

где $\Lambda(t)$ — функция ресурса. Надёжность часто характеризуют ф у н к ц и е й и н т е н с и в н о с т и о т к а з о в

$$\lambda(t) = d\Lambda(t)/dt.$$

Если $\lambda(t)$ не убывает по t, то в. б. р. наз. стареющей; если $\Lambda(t)/t$ не убывает по t, то в. б. р. наз. стареющей в среднем. В Н. т. наряду с непараметрич. классами (стареющих, стареющих в среднем и др.) в. б. р. широко используются параметрич. в. б. р., напр. экспоненциальные: $\lambda(t)=\lambda\cdot t$; Вейбулла — Гнеденко:

$$\lambda(t)=(at)^b, \quad a>0, \quad b>0, \quad t>0.$$

С целью получения данных о надёжности проводятся испытания. Напр., при испытаниях по п л а н у $[N, B, r]$ испытываются N однотипных изделий до момента $t_{(r)}$ появления r-го отказа. Отказавшие изделия снимаются с испытаний. Статистич. выводы о надёжности часто делают на основе числа отказов и суммарной наработки, равной сумме времён безотказной работы всех испытывавшихся изделий. Для плана $[N, B, r]$ суммарная наработка равна

$$S_r=t_{(1)}+\ldots+t_{(r-1)}+(N-r+1)\,t_{(r)},$$

где $t_{(1)}\leqslant\ldots\leqslant t_{(r)}$ — последовательность моментов отказов. Если в. б. р. является экспоненциальной, то несмещённой оценкой λ при испытаниях по плану $[N, B, r]$ является $\hat{\lambda}=(r-1)/S_r$.

Показатели надёжности существенно зависят от режима испытаний. Их пересчёт с одних режимов испытаний на другие, в том числе с ускоренных испытаний на номинальные, является одной из актуальных проблем Н. т. Важным методом повышения надёжности на этапе проектирования является введение избыточности (по числу элементов, времени исполнения, требуемой информации), называемое р е з е р в и р о в а н и е м. При оптимальном резервировании используются методы нелинейного дискретного программирования.

Напр., при независимых отказах и нагруженном резерве из $x_i=0, 1, 2, \ldots$ изделий i-го типа, $i=1, \ldots, m$, в. б. р. системы равна

$$P(x_1, \ldots, x_m)=\prod_{i=1}^{m}\left[1-(1-p_i)^{x_i+1}\right],$$

где p_i — в. б. р. изделий i-го типа в течение заданного времени t. Пусть c_i — «вес» изделий i-го типа, а C — ограничение на суммарный вес резервных изделий. З а д а ч а о п т и м а л ь н о г о р е з е р в и р о в а н и я состоит в отыскании среди всех наборов чисел $(x_1, \ldots, x_m)$, удовлетворяющих ограничению

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \leqslant C,$$

набора $(x_1^*, \ldots, x_m^*)$, определяющего максимальное значение в. б. р. $P(x_1^*, \ldots, x_m^*)$. Если $x_i^*=0$, то резерв по элементам i-го типа не вводится.

Для поддержания высокой надёжности разрабатываются методы оптимальной эксплуатации, основанные на правильном выборе режимов работы, профилактич. осмотров и числа запасных частей. Возможность восстановления отказавших систем существенно повышает их показатели надёжности. Расчёт количественных показателей надёжности восстанавливаемых систем во многом аналогичен расчёту систем в теории массового обслуживания. Аналитич. методы расчёта сочетаются с методами статистич. моделирования на ЭВМ. Особую роль играют асимптотич. методы анализа надёжности.

Пусть в качестве примера рассматривается система из двух однотипных машин, одна из к-рых находится в ненагруженном резерве. При отказе машины начинается её ремонт, а резервная машина начинает работать. Продолжительности интервалов безотказной работы (ремонта) каждой из машин являются взаимно независимыми случайными величинами с функцией распределения $F(t)$ [соответственно $G(t)$]. В момент τ, когда впервые одновременно не работают обе машины, наступает отказ системы. Среднее время до отказа такой системы равно

$$T\left(1+\frac{1}{q}\right),$$

где

$$T_1=\int_0^\infty t\,dF(t)$$

— средняя продолжительность интервала безотказной работы, а

$$q=\int_0^\infty (1-G(t))\,dF(t)$$

— вероятность того, что интервал безотказной работы окажется короче длительности последующего ремонта. Если

$$\frac{1}{q}\int_0^\infty\left(1-e^{-\frac{xq}{T}}\right)dF(x)\longrightarrow 0,$$

то вероятность события $\left\{\frac{q\tau}{T}>x\right\}$ сходится к e^{-x} при любом x. Таким образом, в. б. р. системы приближённо можно рассматривать как экспоненциально убывающую по t.

В Н. т. разрабатываются методы технич. диагностики — поиска и локализации отказов, основанные на специальных системах тестов и процедурах их применения. При этом используются методы математич. логики.

● Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д., Математические методы в теории надежности, М., 1965; Барлоу Р., Прошан Ф., Статистическая теория надежности и испытания на безотказность, пер. с англ., М., 1984; Барзилович Е. Ю., Беляев Ю. К., Каштанов В. А. и др., Вопросы математической теории надежности, М., 1983; Беляев Ю. К., Богатырёв В. А., Болотин В. В. и др., Надежность технических систем, М., 1985. *Ю. К. Беляев.*

НАДЁЖНОСТЬ И КОНТРОЛЬ УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ, п р о б л е м ы н а д ё ж н о с т и у п р а в л я ю щ и х с и с т е м, — одно из направлений теории управляющих систем, которое изучает управляющие системы, подверженные помехам.

Пусть $\mathfrak{U}=\{U\}$ — нек-рый класс управляющих систем (у. с.) и пусть имеется источник помех, или источник неисправностей, к-рый, воздействуя на у. с. U, переводит её в у. с. $U_1, \ldots, U_r$ из нек-рого класса $\mathfrak{U}'$. Если допустить, что источник помех может также сохранять у. с. неизменной, напр. $U_1=U$, то $\mathfrak{U}\subseteq\mathfrak{U}'$. Пусть каждая у. с. из $\mathfrak{U}'$ вполне определяется своей схемой Σ, тогда воздействие источника помех сводится к воздействию на её схему Σ. Источник неисправностей преобразует схему, что может проявляться: а) путём нарушения работы элементов, т. е. изменением элементов; б) путём изменения соединений элементов и т. п. В результате действия источника неисправностей исходная схема Σ у. с. U переходит в «неисправные» состояния $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$, где $\Sigma_1=\Sigma$, определяющие соответственно у. с. $U_1, \ldots, U_r$. Пусть этим схемам соответствуют функции $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$, наз. также ф у н к ц и я м и н е и с п р а в н о с т е й (здесь $\Phi_1=\Phi$ характеризует функционирование у. с. U). Обычно источник неисправностей дополнительно характеризуется либо распределением вероятностей ошибок, либо ограничениями на возможное число элементарных неисправностей. П р о б л е м ы н а д ё ж н о с т и рассматриваются в основном для трёх классов у. с.: схем из функциональных элементов, контактных схем и *автоматов*. При этом с х е м а и з ф у н к ц и о н а л ь н ы х э л е м е н т о в может рассматриваться как а в т о м а т б е з п а м я т и (т. е. конечный автомат с одним состоянием или эквивалентный ему), а к о н т а к т н а я с х е м а есть специальная у. с., реализующая функции алгебры логики.

Пусть $\mathfrak{U}$ — класс схем из функциональных элементов, принадлежащих данному базису Б, где $\text{Б}=\text{Б}_1\cup\text{Б}_2$ и $\text{Б}_1=\{F_1, \ldots, F_s\}$ ($F_1, \ldots, F_s$ — функциональные элементы). В случае если источник неисправностей воздействует только на элементы схемы, то он преобразует элементы F_i из Б_1, $i=1, \ldots, s$, в элементы с таким же числом входов, как и F_i, но, быть может, с иным функционированием, а элементы из Б_2 оставляет неизменными. Таким образом, Б_1 состоит из ненадёжных, а Б_2 — из надёжных элементов. В этом случае источник можно характеризовать вероятностями $p_1, \ldots, p_s$ выхода из строя соответственно элементов $F_1, \ldots, F_s$.

В случае когда $\mathfrak{U}$ — класс контактных схем, рассматривают источник неисправностей, к-рый в качестве эле-

ментарных неисправностей даёт либо короткое замыкание контакта, либо разрыв контакта. При этом дополнительно предполагают, что для контактных схем, реализующих функции от n переменных, возможно не более $m(n)$ элементарных повреждений.

В проблематике Н. и к. у. с. выделяют три основных направления: построение надёжных схем из ненадёжных элементов, построение самокорректирующихся схем (т. е. функционирующих правильно, несмотря на воздействие источника неисправностей) и контроль у. с.

С. В. Яблонский.

НАДПО́ЛЕ — то же, что расширение *поля*.

НАИБО́ЛЕЕ МО́ЩНЫЙ СТАТИСТИ́ЧЕСКИЙ КРИТЕ́РИЙ — см. *Статистических гипотез проверка*.

НАИБО́ЛЬШЕГО ГАРАНТИ́РОВАННОГО РЕЗУЛЬТА́ТА ПРИ́НЦИП — то же, что *минимакса принцип*.

НАИБО́ЛЬШИЙ О́БЩИЙ ДЕЛИ́ТЕЛЬ двух или нескольких натуральных чисел — наибольшее из чисел, на которые делится каждое из данных чисел. Н. о. д. пользуются при сокращении дробей: наибольшее число, на к-рое могут быть сокращены числитель и знаменатель дроби,— их Н. о. д. Если известны разложения заданных чисел на простые множители, то для получения Н. о. д. этих чисел нужно составить произведение тех множителей, к-рые входят во все разложения, взяв каждый наименьшее число раз, какое он встречается. Общим приёмом отыскания Н. о. д. двух чисел является способ последовательного деления, указанный ещё в 3 в. до н. э. Евклидом (см. *Евклида алгоритм*). Если Н. о. д. двух чисел равен единице, то эти числа наз. взаимно простыми. Н. о. д. d двух чисел a и b и *наименьшее общее кратное* m этих чисел связаны соотношением $dm=ab$.

Понятие Н. о. д. применимо не только к числам. Так, напр., Н. о. д. двух или нескольких многочленов есть многочлен наивысшей степени, на к-рый делится каждый из данных; для его нахождения также может быть применён алгоритм Евклида.

НАИБО́ЛЬШИЙ ЭЛЕМЕ́НТ частично упорядоченного множества M — элемент $a\in M$ такой, что $b\leqslant a$ для любого $b\in M$.

НАИВЫСШЕЙ АЛГЕБРАИ́ЧЕСКОЙ СТЕ́ПЕНИ ТО́ЧНОСТИ КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — формула вида

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx \cong \sum_{j=1}^{N} C_j f(x_j), \qquad (*)$$

где весовая функция $p(x)$ предполагается неотрицательной на $[a, b]$ и такой, что существуют интегралы

$$p_k=\int_a^b p(x)\,x^k\,dx, \quad k=0, 1, 2, \ldots,$$

при этом $p_0>0$. Узлы x_j квадратурной формулы (*) — корни ортогонального на $[a, b]$ с весом $p(x)$ многочлена $P_N(x)$ степени N, а коэффициенты определяются тем, что (*) является интерполяционной. Формула (*) точна для многочленов степени $2N-1$. Её называют также квадратурной формулой Гаусса.

НАИЛУ́ЧШАЯ КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — то же, что *оптимальная квадратура*.

НАИЛУ́ЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕ́НИЕ — понятие теории приближения функций. Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная функция, заданная на нек-ром отрезке $[a, b]$, а $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ — фиксированная система непрерывных на том же отрезке функций. Тогда максимум выражения

$$|f(x)-a_1\varphi_1(x)-a_2\varphi_2(x)-\ldots-a_n\varphi_n(x)| \qquad (*)$$

на отрезке $[a, b]$ наз. уклонением функции $f(x)$ от полинома

$$P_n(x)=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\ldots+a_n\varphi_n(x),$$

а минимум уклонения для всевозможных полиномов $P_n(x)$ (т. е. при всевозможных наборах коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$) — наилучшим приближением функции $f(x)$ посредством системы $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$; Н. п. обозначают через $E_n(f, \varphi)$. Таким образом, Н. п. является минимумом максимума или, как говорят, минимаксом. Полином $P_n^*(x, f)$, для к-рого уклонение от функции $f(x)$ равно Н. п. (такой полином всегда существует), наз. полиномом, наименее уклоняющимся от функции $f(x)$ (на отрезке $[a, b]$).

Понятия Н. п. и полинома, наименее уклоняющегося от функции $f(x)$, были впервые введены П. Л. Чебышевым (1854) в связи с исследованиями по теории механизмов. Можно также рассматривать Н. п., когда под уклонением функции $f(x)$ от полинома $P_n(x)$ понимается не максимум выражения (*), а, напр.,

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)-P_n(x)]^2\,dx}.$$

См. *Приближение функций*.

НАИМЕ́НЬШЕЕ О́БЩЕЕ КРА́ТНОЕ двух или нескольких натуральных чисел — наименьшее, делящееся на каждое из них, положительное число. Н. о. к. используются при сложении и вычитании дробей: наименьшим общим знаменателем двух или нескольких дробей является Н. о. к. их знаменателей. Если известны разложения заданных чисел на простые множители, то для получения Н. о. к. этих чисел нужно составить произведение всех множителей, взяв каждый наибольшее число раз, какое он встречается. Понятие Н. о. к. применимо не только к числам. Так, напр., Н. о. к. двух или нескольких многочленов есть многочлен наинизшей степени, делящийся на каждый из данных. См. также *Наибольший общий делитель*.

НАИМЕ́НЬШИЙ ЭЛЕМЕ́НТ частично упорядоченного множества M — элемент $a\in M$ такой, что $b\geqslant a$ для любого $b\in M$.

НАИМЕ́НЬШИХ КВАДРА́ТОВ МЕ́ТОД — один из методов теории ошибок для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащим случайные ошибки. Н. к. м. применяется также для приближённого представления заданной функции другими (более простыми) функциями и часто оказывается полезным при обработке наблюдений. Н. к. м. предложен К. Гауссом (1794—95) и А. Лежандром (1805—06). Первоначально Н. к. м. использовался для обработки результатов астрономич. и геодезич. наблюдений. Строгое математич. обоснование и установление границ содержательной применимости Н. к. м. дано А. А. Марковым и А. Н. Колмогоровым. Н. к. м. представляет собой один из важнейших разделов математич. статистики и широко используется для статистич. выводов в различных областях науки и техники.

Сущность обоснования Н. к. м. (по К. Гауссу) заключается в допущении, что «убыток» от замены точного (неизвестного) значения физич. величины μ её приближённым значением X, вычисленным по результатам наблюдений, пропорционален квадрату ошибки $(X-\mu)^2$. В этих условиях оптимальной оценкой естественно признать такую лишённую систематич. ошибки величину X, для к-рой среднее значение «убытка» минимально. Именно это требование и составляет основу Н. к. м. В общем случае отыскание оптимальной в смысле Н. к. м. оценки X — задача весьма сложная, поэтому практически эту задачу сужают и в качестве X выбирают линейную функцию от результатов наблюдений, лишённую систематич. ошибки и такую, для к-рой среднее значение «убытка» минимально в классе всех линейных функций. Если случайные ошибки наблюдений подчиняются нормальному распределению и оцениваемая величина μ зависит от средних значений результатов наблюдений линейно (случай, весьма часто встречающийся в приложениях Н. к. м.), то решение этой задачи будет одновременно являться и решением общей задачи. При этом оптимальная оценка X также подчиняется нормальному распределению со средним значением μ и, следовательно, плотность вероятности случайной величины X

$$p(x;\ \mu,\ \sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\,[(x-\mu)/\sigma]^2\right)$$

при $x=X$ достигает максимума в точке $\mu=X$ (это свойство и выражает точное содержание распространённого в теории ошибок утверждения «оценка X, вычисленная согласно Н. к. м.,— наиболее вероятное значение неизвестного параметра μ»).

Случай одного неизвестного. Пусть для оценки значения неизвестной величины μ произведено n независимых наблюдений, давших результаты $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, т. е.

$$Y_1=\mu+\delta_1,\quad Y_2=\mu+\delta_2,\quad \ldots,\quad Y_n=\mu+\delta_n,$$

где $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ — случайные ошибки (по определению, принятому в классич. теории ошибок, случайные ошибки — независимые случайные величины с нулевым математич. ожиданием: $\mathsf{E}\delta_i=0$; если же $\mathsf{E}\delta_i\neq 0$, то $\mathsf{E}\delta_i$ наз. систематическими ошибками). Согласно Н. к. м., в качестве оценки величины μ принимают такое X, для к-рого будет наименьшей сумма квадратов (отсюда и само название метода):

$$S(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i (Y_i-X)^2,$$

где

$$p_i=k/\sigma_i^2 \quad \text{и} \quad \sigma_i^2=\mathsf{D}\delta_i=\mathsf{E}\delta_i^2$$

(коэффициент $k>0$ можно выбирать произвольно). Величину p_i называют весом результата измерения, а σ_i — квадратичным отклонением измерения с номером i. В частности, если все измерения равноточны, то $\sigma_1=\sigma_2=\ldots=\sigma_n$, и в этом случае можно положить $p_1=p_2=\ldots=p_n=1$; если же каждое Y_i — среднее арифметическое из n_i равноточных измерений, то полагают $p_i=n_i$.

Сумма $S(X)$ будет наименьшей, если в качестве X выбрать взвешенное среднее:

$$X=\overline{Y}=\sum p_i Y_i/P,$$

где $P=\sum p_i$. Оценка $\overline{Y}$ величины μ лишена систематич. ошибки, имеет вес P и дисперсию k/P. В частности, если все измерения равноточны, то $\overline{Y}$ — среднее арифметическое результатов измерений:

$$\overline{Y}=\sum Y_i/n \quad \text{и} \quad \mathsf{D}Y=\sigma^2/n.$$

При нек-рых общих предположениях можно показать, что если количество наблюдений n достаточно велико, то распределение оценки Y мало отличается от нормального с математич. ожиданием μ и дисперсией k/P. В этом случае абсолютная погрешность приближённого равенства

$$\mu\approx\overline{Y}$$

меньше $t=\sqrt{k/P}$ с вероятностью, близкой к значению интеграла

$$I(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du, \qquad (1)$$

напр. $I(1{,}96)=0{,}950$; $I(2{,}58)=0{,}990$; $I(3{,}00)=0{,}997$.

Если веса измерений p_i заданы, а множитель k до наблюдений остаётся неопределённым, то этот множитель и дисперсия оценки $\overline{Y}$ могут быть оценены по формулам:

$$k=S(Y)/(n-1) \quad \text{и} \quad \mathsf{D}Y=k/P\approx s^2=\frac{S(\overline{Y})}{[(n-1)P]}$$

(обе оценки лишены систематич. ошибок).

В том практически важном случае, когда ошибки δ_i подчиняются нормальному распределению, можно найти точное значение вероятности, с к-рой абсолютная погрешность приближённого равенства $\mu\approx\overline{Y}$ окажется меньше ts (t — произвольное положительное число). Эту вероятность, как функцию от t, называют функцией распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы и вычисляют по формуле

$$I_{n-1}(t)=C_{n-1}\int_0^t \left(1+\frac{v^2}{n-1}\right)^{-n/2} dv, \qquad (2)$$

где постоянная C_{n-1} выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие $I_{n-1}(\infty)=1$. При больших n формулу (2) можно заменить формулой (1). Однако применение формулы (1) при небольших n привело бы к грубым ошибкам. Так, напр., согласно (1), значению $I=0{,}99$ соответствует $t=2{,}58$; истинные значения t, определяемые при малых n как решения соответствующих уравнений $I_{n-1}(t)=0{,}99$, приведены в таблице:

n	2	3	4	5	10	20	30
t	63,66	9,92	5,84	4,60	3,25	2,86	2,76

Пример. Для определения веса нек-рого тела произведено 10 независимых равноточных измерений, давших результаты Y_i (в г):

Y_i	18,41	18,42	18,43	18,44	18,45	18,46
n_i	1	3	3	1	1	1

(здесь n_i — число случаев, в к-рых наблюдался вес Y_i, причём $n=\sum n_i=10$). Так как все взвешивания равноточные, то следует положить $p_i=n_i$ и в качестве оценки для неизвестного веса μ выбрать величину $\overline{Y}=\sum n_i Y_i/\sum n_i=18{,}431$. Задавая, напр., $I_9=0{,}95$, по таблицам распределения Стьюдента с девятью степенями свободы можно найти, что $t=2{,}262$, и поэтому в качестве предельной абсолютной погрешности приближённого равенства $\mu=18{,}431$ следует принять величину

$$ts=t\sqrt{\sum n_i (Y_i-Y)^2/90}=2{,}262\cdot 0{,}0048=0{,}011.$$

Таким образом, $18{,}420<\mu<18{,}422$.

Случай нескольких неизвестных (линейные связи). Пусть n результатов измерений $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ связаны с m неизвестными величинами $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ($m<n$) независимыми линейными соотношениями

$$Y_i=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j+\delta_i;\quad i=1, 2, \ldots, n, \qquad (3)$$

где a_{ij} — известные коэффициенты, а δ_i — независимые случайные ошибки измерений. Требуется оценить неизвестные величины x_i (эту задачу можно рассматривать как обобщение предыдущей, в к-рой $\mu=x_1$ и $m=a_{i1}=1$; $i=1, 2, \ldots, n$).

Так как $\mathsf{E}\delta_i=0$, то средние значения результатов измерений $y_i=\mathsf{E}Y_i$ связаны с неизвестными величинами $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линейными уравнениями (линейные связи)

$$y_i=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j;\quad i=1, 2, \ldots, n. \qquad (4)$$

Следовательно, искомые величины x_j представляют собой решение системы (4), уравнения к-рой предполагаются совместными. Точные значения измеряемых величин y_i и случайные ошибки δ_i обычно неизвестны, поэтому вместо систем (3) и (4) принято записывать т. н. условные уравнения

$$Y_i=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j;\quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Согласно Н. к. м., в качестве оценок для неизвестных x_j принимают такие величины X_j, для к-рых сумма квадратов отклонений

$$S=\sum_{i=1}^{n} p_i\left(Y_i-\sum_{j=1}^{m} a_{ij}X_j\right)^2$$

будет наименьшей (как и в предыдущем случае, p_i — вес измерения, Y_i — величина, обратно пропорциональная дисперсии случайной ошибки δ_i). Условные уравнения, как правило, несовместны, т. е. при любых значениях X_j разности

$$\Delta_i=Y_i-\sum_{j=1}^{m} a_{ij}X_j;\quad i=1, 2, \ldots, n,$$

не могут, вообще говоря, все обратиться в нуль, и в этом случае $S=\sum p_i\Delta_i^2$ также не может обратиться в нуль. Н. к. м. предписывает в качестве оценок выбрать такие значения X_j, к-рые минимизируют сумму S. В тех исключительных случаях, когда условные уравнения совместны и, значит, обладают решением, это решение совпадает с оценками, полученными согласно Н. к. м.

Сумма S представляет собой квадратичный многочлен относительно переменных X_j; этот многочлен достигает минимума при таких значениях $X_1, X_2, \ldots, X_m$, при к-рых обращаются в нуль все первые частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial X_j}=-2\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta_i=0; \quad j=1, 2, \ldots, m.$$

Отсюда следует, что оценки X_j, полученные согласно Н. к. м., должны удовлетворять системе т. н. нормальных уравнений, к-рая в обозначениях, предложенных К. Гауссом, имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{m}[pa_ja_l]\,X_j=[pYa_l]; \quad l=1, 2, \ldots, m, \qquad (5)$$

где

$$[pa_j,\ a_l]=\sum_{i=1}^{n} p_ia_{ij}a_{il} \text{ и } [pYa_l]=\sum_{i=1}^{n} p_iY_ia_{il}.$$

Оценки X_j, получающиеся в результате решения системы нормальных уравнений, лишены систематич. ошибок ($\mathsf{E}X_j=x_j$); дисперсии $\mathsf{D}X_j$ величин X_j равны kd_{jj}/d, где d — определитель системы (5), d_{jj} — минор, соответствующий диагональному элементу $[pa_j, a_j]$ (иными словами, d_{jj}/d — вес оценки X_j). Если множитель пропорциональности k (k наз. дисперсией на единицу веса) заранее неизвестен, то для его оценки, а также для оценки дисперсии $\mathsf{D}X_j$ служат формулы

$$k\approx S/(n-m) \text{ и } \mathsf{D}X_j\approx s_j^2=Sd_{jj}/d\,(n-m)$$

(S — минимальвое значение исходной суммы квадратов). При нек-рых общих предположениях можно показать, что если количество наблюдений n достаточно велико, то абсолютная погрешность приближённого равенства $x_j\approx X_j$ меньше ts_j с вероятностью, близкой к значению интеграла (1). Если случайные ошибки наблюдений δ_j подчиняются нормальному распределению, то все отношения $(X_j-x_j)/s_j$ распределены по закону Стьюдента с $n-m$ степенями свободы [точная оценка абсолютной погрешности приближённого равенства производится здесь с помощью интеграла (2) так же, как в случае одного неизвестного]. Кроме того, минимальное значение суммы S в вероятностном смысле не зависит от $X_1, \ldots, X_m$ и поэтому приближённые значения дисперсий оценок $\mathsf{D}X_j\approx s_j^2$ не зависят от самих оценок X_j.

Один из наиболее типичных случаев применения Н. к. м.— «выравнивание» таких результатов наблюдений Y_i, для к-рых в уравнениях (3) $a_{ij}=a_j(t_i)$, где $a_j(t)$ — известные функции нек-рого параметра t (если t — время, то $t_1, t_2, \ldots$ — те моменты времени, в к-рые производились наблюдения). Особенно часто встречается в приложениях случай т. н. параболич. интерполяции, когда $a_j(t)$ — многочлен [напр., $a_1(t)=1$, $a_2(t)=t$, $a_3(t)=t^2$, ... и т. д.]; если $t_2-t_1=t_3-t_2=\ldots=t_n-t_{n-1}$, а наблюдения равноточные, то для вычисления оценок X_j можно воспользоваться таблицами ортогональных многочленов, имеющимися во многих руководствах по современной вычислительной математике. Другой важный для приложения случай — т. н. гармонич. интерполяция, когда в качестве $a_j(t)$ выбирают тригонометрич. функции [напр., $a_j(t)=\cos(j-1)t$, $j=1, 2, \ldots, m$].

Пример. Для оценки точности одного из методов химич. анализа этим методом определялась концентрация CaO в десяти эталонных пробах заранее известного состава. Результаты равноточных наблюдений указаны в таблице (i — номер эксперимента, t_i — истинная концентрация CaO, T_i — концентрация CaO, определённая в результате химич. анализа, $Y_i=T_i-t_i$ — ошибка химич. анализа):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i	4	8	12,5	16	20	25	31	36	40	40
Y_i	−0,3	−0,2	−0,4	−0,4	−0,2	−0,5	+0,1	−0,5	−0,6	−0,3

Если результаты химич. анализа не имеют систематич. ошибок, то $\mathsf{E}Y_i=0$. Если же такие ошибки имеются, то в первом приближении их можно представить в виде

$$\mathsf{E}Y_i=\alpha+\beta t_i$$

(α наз. постоянной ошибкой, а βt_i — методич. ошибкой) или, что то же самое,

$$\mathsf{E}Y_i=(\alpha+\beta\overline{t})+\beta\,(t_i-\overline{t}),$$

где

$$\overline{t}=\sum_{i=1}^{10} t_i/10=23{,}25.$$

Для отыскания оценок α и β достаточно оценить коэффициенты $x_1=\alpha+\beta\overline{t}$ и $x_2=\beta$. Условные уравнения в данном случае имеют вид:

$$Y_i=x_1+x_2\,(t_i-\overline{t}); \quad i=1, 2, \ldots, 10,$$

поэтому $a_{i1}=1$, $a_{i2}=t_i-\overline{t}$ (согласно предположению о равноточности наблюдений, все $p_i=1$). Так как $[a_1a_2]=[a_2a_1]=\sum(t_i-t)=0$, то система нормальных уравнений записывается особенно просто:

$$[a_1a_1]\,X_1=[Ya_1];$$

$$[a_2a_2]\,X_2=[Ya_2],$$

где

$$[a_1a_1]=10, \quad [a_2a_2]=\sum(t_i-\overline{t})^2=1569,$$

$$[Ya_1]=\sum Y_1=-3{,}5,$$

$$[Ya_2]=\sum Y_i\,(t_i-\overline{t})=-8{,}225.$$

Дисперсии компонент решения этой системы суть

$$\mathsf{D}X_1=\frac{k}{[a_1a_1]}=\frac{k}{10} \text{ и } \mathsf{D}X_2=\frac{k}{[a_2a_2]}=\frac{k}{1569},$$

где k — неизвестная дисперсия на единицу веса (в данном случае k — дисперсия любой из величин Y_i).

Так как в этом примере компоненты решения принимают значения $X_1=0{,}35$ и $X_2=-0{,}00524$, то

$$k\approx S/(n-m)=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{10}[Y_i-X_1-X_2\,(t_i-\overline{t})]^2=0{,}0427,$$

$$\mathsf{D}X_1\approx s_1^2=0{,}00427,$$

$$\mathsf{D}X_2\approx s_2^2=0{,}0000272,$$

$$s_1=0{,}065, \quad s_2=0{,}00522.$$

Если случайные ошибки наблюдений подчиняются нормальному распределению, то отношения $|X_j-x_j|/s_j$, $j=1, 2$, распределены по закону Стьюдента. В частности, если результаты наблюдений лишены систематич. ошибок, то $x_1=x_2=0$ и, значит, закону распределения Стьюдента должны подчиняться отношения $|X_1|/s_1$ и $|X_2|/s_2$. С помощью таблиц распределения Стьюдента $n-m=8$ степенями свободы можно убедиться, что если действительно $x_1=x_2=0$, то с вероятностью 0,999 каждое из этих отношений не должно превосходить 5,04 и с вероятностью 0,95 не должно превосходить 2,31. В данном случае $|X_1|/s_1=5{,}38>5{,}04$, поэтому гипотезу отсутствия систематич. ошибок целесообразно отвергнуть; в то же время следует признать, что гипотеза об отсутствии методич. ошибки ($x_2=0$) не противоречит результатам наблюдений, так как $|X_2|/s_2=1{,}004<2{,}31$. Таким образом, можно заключить, что для определения t по результату наблюдения T целесообразно пользоваться приближённой формулой $t=T+0{,}35$.

Во многих практически важных случаях (и, в частности, при оценке сложных нелинейных связей) количество неизвестных параметров бывает велико и поэтому реализация Н. к. м. оказывается эффективной лишь при использовании современной вычислительной техники.

● Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962.

Л. Н. Большев.

НАИСКОРЕ́ЙШЕГО СПУ́СКА МЕ́ТОД — частный случай метода спуска, когда направление g^k, указывающее спуск, выбирается противоположным grad $f(x^k)$. Формулы Н. с. м. имеют вид

$$x^{k+1}=x^k-\alpha_k f'(x^k),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

где параметры α_k выбираются из условия максимального убывания на каждом шаге функции $f(x)$. Если функция f дважды непрерывно дифференцируема и матрица $\|f''\|$ её вторых производных удовлетворяет при любых x, y неравенству

$$m\|y\|^2\leqslant(f''(x)\,y,\ y)\leqslant M\|y\|^2$$

с константами $M\geqslant m>0$, то последовательность $\{x^k\}$ сходится к решению x^* задачи минимизации функции f со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем $q<1$.

Широкое применение Н. с. м. нашёл при решении систем линейных алгебраич. уравнений $Ax=f$ с эрмитовой и положительно определённой матрицей A. В действительном случае задача решения этой системы эквивалентна нахождению вектора x^*, минимизирующего в пространстве n-мерных векторов функционал

$$f(x)=(Ax,\ x)-2(x,\ f).\qquad(*)$$

Применительно к (*) формулы Н. с. м. принимают вид

$$x^{k+1}=x^k-\alpha_k(Ax^k-f),\quad k=0,\ 1,\ \ldots,$$

причём значение α_k определяется из условия минимума функционала (*) по формуле

$$\alpha_k=(\xi^k,\ \xi^k)/(A\xi^k,\ \xi^k),\quad \xi^k=Ax^k-f.$$

Если спектр матрицы A принадлежит отрезку действительной оси $[m,\ M]$, где $M\geqslant m>0$, то последовательность $\{x^k\}$ сходится к решению x^* со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем $q=(M-m)/(M+m)$.

Н. с. м. может быть применён для решения операторного уравнения $Au=f$ с самосопряжённым положительно определённым ограниченным оператором A. Если оператор A не удовлетворяет наложенным условиям, задачу можно симметрировать, сведя к задаче

$$A^*Au=A^*f,$$

и уже затем применить Н. с. м.

● Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963.

НАКЛО́ННАЯ к прямой l — прямая, пересекающая прямую l под углом, отличным от прямого. Н. к плоскости — прямая, пересекающая эту плоскость под углом, отличным от прямого.

НАКЛО́ННОЙ ПРОИЗВО́ДНОЙ ЗАДА́ЧА — см. *Краевая задача.*

НАКОПЛЕ́НИЕ ПОГРЕ́ШНОСТИ — суммарное влияние погрешностей, сделанных на отдельных шагах вычислительного процесса, на точность полученного решения. Наиболее распространённым способом априорной оценки суммарного влияния ошибок округления является схема обратного анализа.

В применении к решению системы линейных алгебраич. уравнений

$$Ax=b\qquad(1)$$

схема обратного анализа заключается в следующем. Вычисленное прямым методом M решение x_M не удовлетворяет (1), но может быть представлено как точное решение возмущённой системы

$$(A+F_M)\,x=b+k_M.\qquad(2)$$

Качество прямого метода оценивается по наилучшей априорной оценке, к-рую можно дать для норм матрицы F_M и вектора k_M.

Если оценки для F_M и k_M имеются, то ошибка приближённого решения x_M может быть оценена с помощью неравенства

$$\frac{\|x-x_M\|}{\|x\|}\leqslant\frac{\|A\|\cdot\|A\|^{-1}}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|F_M\|}\left(\frac{\|F_M\|}{\|A\|}+\frac{\|k_M\|}{\|b\|}\right).\qquad(3)$$

Оценка для $\|A^{-1}\|$ редко бывает известна, основной смысл (3) состоит в возможности сравнения качества различных методов.

Для методов с ортогональными преобразованиями и арифметики с плавающей запятой (в системе (1) A и b считаются действительными)

$$\|F_M\|_E\leqslant Cn^k\|A\|_E\varepsilon.\qquad(4)$$

Здесь ε — относительная точность арифметич. операций в ЭВМ, $\|A\|_E=(\sum a_{ij}^2)^{1/2}$ — евклидова матричная норма. Точные значения константы C и показателя k определяются такими деталями вычислительного процесса, как способ округления, использование операции накопления скалярных произведений и т. д. Наиболее часто $k=1$ или $^3/_2$.

В случае методов типа метода Гаусса в правую часть оценки (4) входит ещё множитель $g(A)$, отражающий возможность роста элементов матрицы A на промежуточных шагах метода по сравнению с первоначальным уровнем (такой рост отсутствует в ортогональных методах). Чтобы уменьшить значение $g(A)$, применяют различные способы выбора ведущего элемента, препятствующие возрастанию элементов матрицы.

Развитием метода обратного анализа является метод эквивалентных возмущений. Вычисления по нек-рой расчётной схеме с округлениями рассматриваются как вычисления без округлений, но для уравнения с возмущёнными коэффициентами. Сравнивая решение исходного уравнения с решением уравнения с невозмущёнными коэффициентами, получают оценку погрешности.

При исследовании накопления вычислительной погрешности обычно считают, что вычислительные погрешности на каждом шаге вносятся самым неблагоприятным образом и получают мажорантную оценку погрешности. Иногда предполагают, что эти погрешности случайны с определённым законом распределения.

При умеренной точности решения задачи мажорантные и вероятностные подходы к оценке накопления вычислительной погрешности обычно дают качественно одинаковые результаты: или в обоих случаях Н. п. происходит в допустимых пределах, или в обоих случаях Н. п. превосходит такие пределы.

Характер Н. п. зависит от решаемой задачи, метода решения и ряда других факторов, на первый взгляд могущих показаться несущественными; сюда относятся форма записи чисел в ЭВМ (с фиксированной запятой или с плавающей запятой), порядок выполнения арифметич. операций и т. д. Даже в такой простой задаче как вычисление суммы N чисел

$$A_N=a_1+\ldots+a_N,$$

существен порядок выполнения операций. Пусть вычисления производятся на машине с плавающей запятой с t двоичными разрядами и все $|a_n|\leqslant1$. При непосредственном вычислении A_N с помощью рекуррентной формулы

$$A_{n+1}=A_n+a_n,\ n=1,\ \ldots,\ N-1,$$

мажорантная оценка погрешности имеет порядок $2^{-t}N$. Можно поступить иначе. Вычисляют попарные суммы $A_k^1=a_{2k-1}+a_{2k}$ (если $N=2l+1$ нечётно, полагают $A_{l+1}^1=a_{2l+1}$). Далее вычисляют их попарные суммы $A_k^2=A_{2k-1}^1+A_{2k}^1$ и т. д. При $2^{m-1}<N\leqslant2^m$ после m шагов образования попарных сумм по формулам

$$A_k^q=A_{2k-1}^{q-1}+A_{2k}^{q-1},\quad A_k^0\equiv a_k,$$

получают $A_1^m=A_N$; мажорантная оценка погрешности порядка $2^{-t}\log_2 N$.

В типичных задачах величины a_m вычисляются по формулам, в частности рекуррентным, или поступают последовательно в оперативную память ЭВМ; в этих случаях применение описанного приёма приводит к увеличению загрузки памяти ЭВМ. Однако можно организовать последовательность вычислений так, что загрузка оперативной памяти не будет превосходить $\sim\log_2 N$ ячеек.

При численном решении дифференциальных уравнений возможны следующие случаи. 1. При стремлении шага сетки h к нулю погрешность растёт как $(a(h))^{h^{-l}}$, где $l>0$, а $\overline{\lim\limits_{h\to 0}}\, a(h)>1$. Такие методы решения задач относят к классу неустойчивых. Их применение носит эпизодич. характер. 2. Погрешность растёт как Ch^{-q}.

Уделяется существенное внимание выбору метода по возможности с меньшими значениями q и C. При фиксированном методе решения задачи расчётные формулы обычно удаётся преобразовать к виду, где $q\leqslant 1$. Это особенно существенно в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, где число шагов в отдельных случаях оказывается очень большим.

Накопление вычислительной погрешности существенно зависит от метода, применяемого для решения задачи. Напр., при решении сеточных краевых задач, соответствующих обыкновенным дифференциальным уравнениям, методами стрельбы и прогонки в типичных случаях Н. п. имеет характер Ch^{-q}, где q одно и то же. Значения C у этих методов могут отличаться настолько, что в определённой ситуации один из методов становится неприменимым.

● Воеводин В. В., Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977; Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; Уилкинсон Дж. Х., Алгебраическая проблема собственных значений, пер. с англ., М., 1970.

Н. С. Бахвалов, Х. Д. Икрамов.

НАКОПЛЕ́НИЯ ТО́ЧКА, предельная точка, множества M — точка x топологического пространства $X\supset M$, любая окрестность которой содержит бесконечно много точек множества M.

НАПРАВЛЕ́НИЙ ПО́ЛЕ — область на плоскости, в каждой точке которой задана прямая. Для задания таких прямых достаточно знать тангенс угла между прямой и осью Ox, поэтому понятие Н. п. чаще всего связывается с Н. п. касательных нек-рого семейства кривых, заполняющих данную область. В частности, через каждую точку (t, x) области определения $G\subset\mathbb{R}^2$ правой части уравнения

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x) \qquad (1)$$

можно провести отрезки малой длины с угловым коэффициентом $f(t, x)$, так что (ориентированный) угол между осью Ot и этим отрезком равен $\operatorname{arctg} f(t, x)$. Часто дифференциальное уравнение (1) рассматривается в совокупности с дифференциальным уравнением

$$\frac{dt}{dx}=F(t, x), \qquad (2)$$

где $F(t, x)=1/f(t, x)$ для точек $(t, x)\in G$, в к-рых $f(t, x)\neq 0$, и $F(t, x)=0$ для точек $(t, x)\in\mathbb{R}^2\setminus G$, в к-рых функцию $F(t, x)$ можно доопределить этим значением по непрерывности. Тем самым для пары уравнений (1), (2) область G расширяется до области G_0 за счёт пополнения точками, в к-рых направление параллельно оси Ox, а интегральным кривым разрешается иметь и точки с вертикальной касательной. Если в области G для уравнения (1) (или в области G_0 для пары уравнений (1), (2)) изобразить Н. п. достаточно подробно, то по построенным отрезкам можно составить примерное качественное представление о картине поведения интегральных кривых. Это соображение лежит в основе приближённого графич. метода решения уравнения (1) — метода изоклин, в к-ром построение Н. п. осуществляется с помощью *изоклин*.

НАПРА́ВЛЕННОЕ МНО́ЖЕСТВО — частично упорядоченное множество, в котором для всякой пары элементов a и b найдётся хотя бы один такой элемент c, что $a\leqslant c$ и $b\leqslant c$ (направленное вверх множество). Дуальным образом определяется направленное вниз множество: для любых a и b найдётся c такой, что $c\leqslant a$ и $c\leqslant b$. Понятие Н. м. позволяет дать весьма общее определение предела. Пусть $f(p)$ (числовая) функция, заданная на Н. м. M; число c наз. пределом функции $f(p)$ по направленному множеству M, если для всякого $\varepsilon>0$ найдётся такой элемент $\overline{p}\in M$, что для всех p из M, для к-рых $p\leqslant\overline{p}$, выполняется неравенство $|f(p)-c|<\varepsilon$. Это определение позволяет установить все обычные свойства предела и охватывает весьма широкий класс частных случаев.

Понятие Н. м. и понятие предела по Н. м. ввёл С. О. Шатуновский (1906—07).

НАПРАВЛЯ́ЮЩАЯ линия — см. *Линейчатая поверхность, Конус, Цилиндр.*

НАПРАВЛЯ́ЮЩИЙ КО́СИНУС — см. *Плоскость.*

НАПРЯЖЕ́НИЕ вихревой трубки — см. *Векторная трубка.*

НАСЛЕ́ДСТВЕННО НОРМА́ЛЬНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — см. *Нормальное пространство.*

НАТУРА́ЛЬНОЕ ЧИСЛО́ — одно из основных понятий математики. Множество $\mathbb{N}=\{1, 2, \ldots\}$ всех натуральных, т. е. целых положительных чисел, снабжённое естественным порядком, наз. натуральным рядом. Натуральный ряд представляет собой вполне упорядоченное множество. Всякое Н. ч. может быть истолковано как кардинальное число нек-рого непустого конечного множества. Система Н. ч. удовлетворяет аксиоме индукции: любое подмножество множества $\mathbb{N}$, содержащее 1 и вместе с каждым элементом a сумму $a+1$, совпадает с $\mathbb{N}$. См. также *Арифметика.*

НАТУРА́ЛЬНЫЕ УРАВНЕ́НИЯ кривой — уравнения, выражающие кривизну k и кручение σ кривой как функции её дуги:

$$k=k(s), \quad \sigma=\sigma(s).$$

Наименование «Н. у.» объясняется тем обстоятельством, что функции $k(s)$ и $\sigma(s)$ не зависят от положения кривой в пространстве (от выбора системы координат), а зависят только от формы кривой. Две трижды непрерывно дифференцируемые кривые, имеющие одинаковые Н. у., могут отличаться друг от друга только положением в пространстве. Иначе говоря, форма кривой однозначно определяется её Н. у. Если заданы две непрерывные функции $k(s)$ и $\sigma(s)$, из к-рых первая положительная, то всегда существует кривая, для к-рой данные функции являются соответственно кривизной и кручением.

НАТУРА́ЛЬНЫЙ ЛОГАРИ́ФМ — логарифм, основанием которого служит число $e=2{,}71826\ldots$. Н. л. числа N обозначается $\ln N$. Первые таблицы Н. л. чисел от 1 до 1000 были опубликованы Дж. Спейделлом в «Новых логарифмах» (1619); название «Н. л.» принадлежит П. Менголи (1659) и Н. Меркатору (1668), обозначение ln — А. Принсхейму (1893).

НАТУРА́ЛЬНЫЙ РЯД — см. *Натуральное число.*

«НАЧА́ЛА» ЕВКЛИ́ДА (греч. «Στοιχεῖα», букв.— азбука; переносное значение — основные начала) — научное произведение, написанное Евклидом в 3 в. до н. э., содержащее основы античной математики: элементарной геометрии, теории чисел, общей теории отношений и метода определения площадей и объёмов, включавшего элементы теории пределов. Евклид подвёл в этом сочинении итог трёхсотлетнему развитию греч. математики и создал прочный фундамент для дальнейших математич. исследований. «Н.» Е. не являются, однако, энциклопедией математич. знаний своей эпохи. Так, в «Н.» Е. не излагается теория конич. сечений, к-рая была тогда достаточно развита, отсутствуют и вопросы приближённых вычислений.

«Н.» Е. включают 13 книг, посвящённых геометрии (книги I—IV и VI — планиметрии, XI—XIII — стереометрии) и арифметике (книги V и VII—X; подробнее см. ниже). Каждая книга начинается с определений, в I книге, кроме того, приведены постулаты и аксиомы, за к-рыми следуют (под общим названием «предложения») теоремы и

задачи на построение, расположенные в строгой последовательности так, что доказательство (решение) каждого последующего предложения опирается на предыдущие. Все книги «Н.» Е. представляют собой единое целое, части к-рого находятся в тесной связи. «Н.» Е. построены строго логически, по дедуктивной системе, общие принципы построения к-рой созданы в 5 в. до н. э. Платоном и особенно Аристотелем. «Н.» Е. не являются первым трудом такого рода. Составление первого систематич. курса геометрии, основанного на определениях и аксиомах, под названием «Начала» приписывается Гиппократу Хиосскому (5 в. до н. э.), известны «Начала» из школы Платона. Однако последующие античные математики ссылались только на «Н.» Е.

В I книге даны 23 определения, напр.: 1. Точка есть то, что не имеет частей. 2. Линия есть длина без ширины. 4. Прямая есть такая линия, к-рая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам. За определениями следуют пять постулатов. I. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую. II. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой. III. Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг. IV. Все прямые углы равны между собой. V. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутреиние односторонние углы, меньше двух прямых, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых. Постулаты I—III описывают простейшие построения, к-рые можно осуществить с помощью циркуля и линейки. IV постулат обеспечивает единственность продолжения прямой. V — знаменитый постулат о параллельных, к-рый ещё в древности пытались вывести из остальных постулатов и аксиом. Попытки доказать V постулат продолжались вплоть до работ Н. И. Лобачевского, построившего геометрич. теорию, в к-рой этот постулат не выполняется,— *Лобачевского геометрию*. Вслед за постулатами идут пять аксиом (в нек-рых списках «Н.» Е. к ним добавлены ещё четыре аксиомы). I. Равные одному и тому же равны между собой. II. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны. III. И если от равных отнимаются равные, то и остатки будут равны. IV. И совмещающиеся друг с другом равны между собой. V. И целое больше части. Постулаты и аксиомы представляют собой утверждения, принимаемые без доказательств. По какому принципу одни утверждения относятся к постулатам, а другие к аксиомам, неизвестно. Примером теоремы может служить предложение 4: Если в двух треугольниках две стороны одного равны двум сторонам другого и углы, содержащиеся между равными сторонами, равны, то и основание одного треугольника равно основанию другого и один треугольник равен другому, и остальные углы одного треугольника равны остальным углам другого, именно равны углы, противолежащие равным сторонам.

На протяжении более 2 тыс. лет «Н.» Е. служили образцом математич. строгости. До 18 в. включительно «Н.» Е. или их сокращённые и переработанные варианты были основным пособием по геометрии. Однако «Н.» Е. не достигают уровня современной строгости изложения. Нек-рые определения геометрич. образов, данные в I книге, являются скорее описанием, причём далеко не совершенным. Так, определение 4 прямой линии не отличает её от окружности, а определение 2 произвольной линии содержит упоминание о длине и ширине, к-рые сами нуждаются в определении. Формулировки постулатов и аксиом зато безупречны, содержащиеся в них утверждения существенны и составляют основу следующих за ними доказательств. Однако в доказательствах неоднократно используются такие свойства геометрич. образов и отношения между ними, к-рые не выясняются ни постулатами, ни аксиомами. Так, в ряде доказательств используются понятия движения и расположение точек на прямой, выражаемое словами «между». В то же время в «Н.» Е. отсутствуют аксиомы порядка, движения и конгруэнтности (кроме аксиомы IV); из аксиом непрерывности представлена только аксиома Архимеда. Логич. недостатки «Н.» Е. были полностью выяснены в кон. 19 в., тогда же была создана полная аксиоматика современной *евклидовой геометрии*.

В книге I рассматриваются основные свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов и производится сравнение их площадей. Заканчивается книга теоремой Пифагора. В книге II строится геометрич. аппарат для решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям. При этом величины изображаются отрезками, а произведения двух величин — площадями; алгебраич. символика в «Н.» Е. отсутствует. В книге III рассматриваются свойства круга, его касательных и хорд (эти проблемы были исследованы ещё Гиппократом Хиосским), в книге IV — правильные многоугольники. В книге V даётся общая теория отношений величин, созданная Евдоксом Книдским (4 в. до н. э.); она отличается особенной логич. завершённостью и в основном эквивалентна теории дедекиндовых сечений (созданной во 2-й пол. 19 в.), являющейся одним из обоснований учения о действительных числах. Общая теория отношений является основой учения о подобии (книга VI) и метода исчерпывания (книга XII), также восходящих к Евдоксу. В книгах VII—IX изложены начала теории чисел, основанные на алгоритме нахождения наибольшего общего делителя (*Евклида алгоритме*). В эти книги входит теория делимости, включая теоремы об однозначности разложения целого числа на простые множители и о бесконечности числа простых чисел, а также строится учение об отношении целых чисел, эквивалентное, по существу, теории рациональных (положительных) чисел. В книге X на этой основе даётся классификация квадратичных и биквадратичных иррациональностей и обосновываются нек-рые правила их преобразования. Результаты книги X применяются в книге XIII для определения рёбер пяти правильных многогранников. Значительная часть книг X и XIII (а вероятно, и VII) принадлежит Теэтету (нач. 4 в. до н. э.). В книге XI излагаются начала стереометрии. В книге XII определяются с помощью метода исчерпывания отношение площадей двух кругов и отношение объёмов пирамид и призмы, конуса и цилиндра. Эти теоремы были впервые доказаны Евдоксом. Наконец, в книге XIII определяется отношение объёмов двух шаров, строятся пять правильных многогранников и доказывается, что иных правильных тел не существует. Последующими греч. математиками к «Н.» Е. были присоединены книги XIV и XV, не принадлежащие Евклиду; они часто и теперь издаются совместно с основным текстом «Н.» Е. В XIV книге (написана во 2 в. до н. э. Гипсиклом) сравниваются объёмы и поверхности додекаэдра и икосаэдра, вписанных в одну и ту же сферу. В XV книге (составлена в школе Исидора Милетского; 6 в. н. э.) содержатся нек-рые предложения о правильных многогранниках.

«Н.» Е. получили широкую известность уже в древности. Архимед, Аполлоний Пергский и другие учёные опирались на них при своих исследованиях в области математики и механики. В кон. 8 — нач. 9 вв. появляются переводы «Н.» Е. на арабский язык. Первый перевод на латинский язык был сделан с арабского Ательхартом из Бата в 1-й четв. 12 в. Старинные списки «Н.» Е. отличаются существенными разночтениями; подлинный текст их точно не восстановлен. Первопечатное издание «Н.» Е. в переводе Дж. Кампано на латинский язык (осуществлённом ок. 1250—60) появилось в 1482 с чертежами на полях книги. Наилучшим в настоящее время считается издание И. Хейберга («Euclidis Elementa», v. 1—5, Lipsiae, 1883—88), в к-ром приводится как греческий текст, так и его латинский перевод. Имеются следующие переводы на русский язык: И. Астаров — «Евклидовы елементы», сокращённые А. Фархварсоном (8 кн., 1739, пер. с лат.); Н. Курганов — «Евклидовы елементы геометрии» (8 кн., 1769, пер. с франц.); П. Суворов и В. Никитин — «Евклидовы стихии» (осьм книг, 1—6, 11, 12, 1784, пер. с греч.); Ф. Петрушевский — «Эвклидовых начал восемь книг, а именно: первые шесть, одиннадцатая и двенадцатая, содержащие

в себе основания геометрии» (1819, пер. с греч.), Ф. Петрушевский — «Эвклидовых начал три книги, а именно: седьмая, осьмая и девятая, содержащие общую теорию чисел древних геометров» (1835, пер. с греч.); М. Е. Ващенко-Захарченко — «Начала Евклида» (1880); лучшим считается перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского — «Начала Евклида» (3 тт., 1948—50, пер. с греч.).

● История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 1, М., 1970. *И. Г. Башмакова, А. П. Маркушевич.*

НАЧА́ЛО КООРДИНА́Т — см. *Аналитическая геометрия. Координаты.* Термин «Н. к.» и обозначение для точки O — по первой букве лат. origo (начало) — ввёл Ф. Лаир (1679).

НАЧА́ЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — см. *Маркова цепь.*

НАЧА́ЛЬНОЕ УСЛО́ВИЕ — состояние процесса в какой-либо момент времени, принятый за начальный. Если процесс описывается дифференциальным уравнением, то задача об отыскании решений по Н. у. наз. *Коши задачей.* Для уравнения

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(t,\ y,\ \frac{dy}{dt},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)$$

Н. у. состоит в задании $y,\ \frac{dy}{dt},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$ при значении $t=t_0$. Если $n=2$ и $y=y(t)$ — закон движения материальной точки, то в Н. у. задаётся положение точки и её скорость в момент $t=t_0$. Н. у. для дифференциального уравнения с частными производными ставится аналогично. Так, для уравнения свободных колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, где $u(t,\ x)$ — отклонение точки x струны в момент t от её положения покоя на оси Ox, Н. у. состоит в задании начальной формы струны $u|_{t=t_0}=f(x)$ и начальных скоростей точек струны $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0}$. Роль времени может играть к.-л. другой аргумент; тогда Н. у. задаётся при нек-ром значении аргумента.

НАЧЕРТА́ТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ — раздел геометрии, в котором пространственные фигуры, а также методы решения и исследования пространственных задач изучаются при помощи построения их изображений на плоскости. Построение изображений осуществляется при помощи центрального или параллельного проектирования фигуры (на́туры, объекта, оригинала) на плоскость *проекций.* Наиболее распространённым видом технич. чертежа является комплексный чертёж (эпюр), к-рый строится при помощи ортогональной проекции. Сущность этого способа заключается в следующем: выбирают две взаимно перпендикулярные плоскости проекций Π_1 и Π_2. Плоскость Π_1 наз. горизонтальной плоскостью проекций, а плоскость Π_2 — фронтальной плоскостью проекций. Произвольную точку A пространства ортогонально проектируют на эти плоскости (рис. 1); получают горизонтальную проекцию A_1 и фронтальную проекцию A_2. Часто бывает полезным добавить третью — профильную проекцию A_3 на профильную плоскость Π_3, перпендикулярную к плоскостям Π_1 и Π_2. Для получения комплексного чертежа, состоящего из трёх указанных проекций, плоскости Π_1 и Π_3 совмещают с плоскостью Π_2 («главной» плоскостью) путём вращения их вокруг линий p_{12} и p_{23} пересечения этих плоскостей с плоскостью Π_2

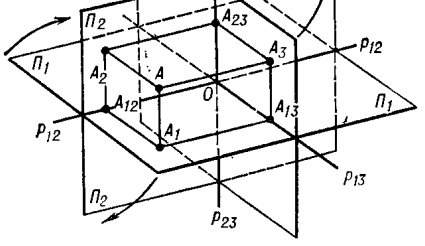


Рис. 1.

(рис. 2). Обычно на практике не указывается положение осей проекций p_{12} и p_{13}, т. е. положение плоскостей проекций определяется с точностью до параллельного переноса.

Для построения более наглядных изображений в Н. г. применяется *аксонометрия.* Для изображения объектов, обладающих большой протяжённостью, применяют изображения, выполненные в центральной проекции — *перспективе.*

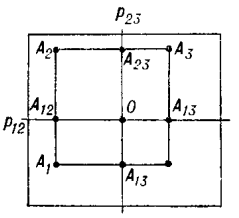


Рис. 2.

Научные основы Н. г. были разработаны Ж. Дезаргом и Г. Монжем.

НЕАТОМИ́ЧЕСКАЯ ИГРА́ — теоретико-игровая модель (см. *Игр теория*), соответствующая явлениям конфликтного типа, с настолько большим числом однородных участников, что это число можно считать бесконечным, а роль любого конечного множества участников в формировании ситуации — пренебрежимо малой. Н. и. естественно описывать явления типа массового поведения населения (напр., пользование общественным транспортом в условиях крупного города). Более строго Н. и. можно определить как игры с конечным (континуальным) множеством игроков, на к-ром задана неатомическая мера (т. е. такая мера, в к-рой любое конечное подмножество имеет меру нуль), и любое множество игроков меры нуль не оказывает влияния на исход игры. Рассматриваются как бескоалиционные Н. и. (см. *Бескоалиционная игра*), так и кооперативные Н. и. (см. *Кооперативная игра*), теории к-рых математически довольно сложны.

НЕВОЗМО́ЖНОЕ СОБЫ́ТИЕ — см. *Случайное событие.*

НЕВОЗРАСТА́ЮЩАЯ ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ — см. *Монотонная последовательность.*

НЕВОЗРАСТА́ЮЩАЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Убывающая функция, Монотонная функция.*

НЕВЫПУКЛЫЙ ПРАВИ́ЛЬНЫЙ МНОГОГРА́ННИК — см. *Многогранник.*

НЕВЫРО́ЖДЕННАЯ МА́ТРИЦА, неособая (неособенная) матрица, несингулярная матрица,— квадратная матрица, определитель к-рой не равен нулю. Всякая Н. м. (над полем) имеет обратную матрицу. Квадратная матрица невырождена тогда и только тогда, когда все её собственные значения отличны от нуля. Н. м. служат матрицами перехода от одного базиса векторного пространства к другому.

НЕВЫРО́ЖДЕННОЕ ЛИНЕ́ЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — см. *Линейное преобразование.*

НЕВЫ́ЧЕТ степени n по модулю m — число a, для которого сравнение $x^n\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$ не имеет решения.

НЕВЯ́ЗКА приближённого решения — одна из характеристик качества приближённого решения $\bar{u}$ операторного уравнения $P(u)=0$ (напр., линейной алгебраической системы, дифференциального уравнения). Невязкой наз. величину $P(\bar{u})$ или нек-рую её норму $\|P(\bar{u})\|$. Если известна оценка

$$\|u_1-u_2\|\leqslant C\|P(u_1)-P(u_2)\|$$

(нормы в левой и правой частях могут быть различны), то погрешность решения можно оценить через Н.

$$\|\bar{u}-u\|\leqslant C\|P(\bar{u})\|.$$

Если такой оценки нет, то Н. является косвенной характеристикой качества приближённого решения.

См. также *Обращение матрицы, Регуляризации метод.*

НЕДЕЛИ́МЫХ МЕ́ТОД — возникшее в кон. 16 в. наименование совокупности довольно разнородных приёмов определения отношений площадей или объёмов фигур. В основе Н. м. лежит сравнение «неделимых» элементов (или же совокупностей элементов), так или иначе образующих фигуры, отношение размеров к-рых требуется найти. Само понятие о «неделимых» в разные времена различные учёные понимали по-разному.

Н. м. ведёт начало от древнегреч. науки. Демокрит (5—4 вв. до н. э.), по-видимому, рассматривал тела как

«суммы» чрезвычайно большого числа чрезвычайно малых «неделимых» атомов; Архимед (3 в. до н. э.) нашёл площади и объёмы многих фигур, сочетая принципы учения о рычаге с представлением, что плоская фигура состоит из бесчисленного количества параллельных прямых отрезков, а геометрич. тело — из бесчисленного количества параллельных плоских сечений. Однако уже в древности подобные представления и методы подверглись серьёзной критике. Архимед, напр., считал обязательным передоказывать результаты, полученные с помощью Н. м., *исчерпывания методом*. Идеи Н. м. были возрождены в математич. исследованиях на рубеже 16—17 вв. И. Кеплером и особенно Б. Кавальери, с именем к-рого и связывают чаще всего Н. м. Развитый Б. Кавальери Н. м. был затем существенно преобразован Э. Торричелли, Дж. Валлисом, Б. Паскалем и другими учёными и послужил одним из этапов в создании интегрального исчисления. См. также *Бесконечно малых исчисление*.

НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМАЯ ФУНКЦИЯ — функция, не имеющая дифференциала. В случае функций одного переменного Н. ф.— это функция, не имеющая производной. Напр., функция $f(x)=|x|$ не дифференцируема в точке $x=0$, вместе с тем она дифференцируема в этой точке как слева, так и справа, т. е. имеет в этой точке левую и правую производные. Непрерывная функция $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$ не только не дифференцируема в точке $x=0$, но и не имеет в этой точке производной (ни конечной, ни бесконечной) ни справа, ни слева.

Первые примеры непрерывных на всей числовой оси функций, во всех точках не имеющих конечных производных, были указаны Б. Больцано (1830, опубл. в 1930) и К. Вейерштрассом (1860, опубл. в 1872). Функция Вейерштрасса задаётся рядом

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos(b^n\pi x),$$

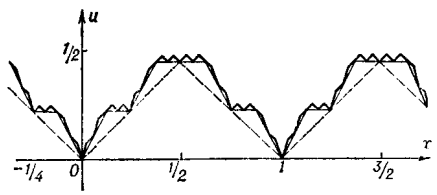
где $0<a<1$, b — нечётное натуральное число, $ab>1+\frac{3\pi}{2}$. Более простой пример, основанный на той же идее, в к-ром периодич. функции типа $\cos\omega x$ заменены периодич. ломаными, был построен Б. Л. ван дер Варденом. Пусть $u_0(x)$ — функция, равная для каждого действительного числа x абсолютной величине разности между числом x и ближайшим к нему целым числом. Эта функция линейна на каждом отрезке вида $[n/2, (n+1)/2]$, где n — целое; она непрерывна и имеет период, равный единице. Пусть

$$u_k(x)=u_0(4^k x)/4^k,\quad k=1, 2, \ldots,$$

тогда функция ван дер Вардена задаётся равенством

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Эта функция непрерывна на всей числовой оси и ни в одной точке не имеет конечной производной. Первые три частные суммы полученного ряда изображены на рисунке.



Для функций более одного переменного дифференцируемость в точке не эквивалентна существованию в этой точке частных производных; существуют недифференцируемые функции, имеющие частные производные. Напр., функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2>0,\\ 0 & \text{при } x=y=0\end{cases}$$

во всех точках плоскости непрерывна и имеет частные производные, однако в точке (0, 0) не дифференцируема.

НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ — в буквальном понимании — все геометрич. системы, отличные от геометрии Евклида; однако обычно термин «Н. г.» применяется лишь к геометрич. системам (отличным от геометрии Евклида), в которых определено движение фигур, причём с той же степенью свободы, что и в геометрии Евклида. Степень свободы движения фигур в евклидовой плоскости характеризуется тем, что каждая фигура без изменения расстояний между её точками может быть перемещена так, чтобы любая выбранная её точка заняла любое заранее назначенное положение; кроме того, каждая фигура может вращаться вокруг любой своей точки. В евклидовом пространстве (трёхмерном) каждая фигура может быть перемещена так, чтобы любая выбранная её точка заняла любое заранее назначенное положение; кроме того, каждая фигура может вращаться вокруг любой оси, проходящей через любую её точку.

Среди Н. г. особое значение имеют *Лобачевского геометрия* и *Римана геометрия*, к-рые чаще всего и подразумеваются, когда говорят о Н. г. Геометрия Лобачевского — первая геометрич. система, отличная от геометрии Евклида, и первая более общая теория (включающая евклидову геометрию как предельный случай). Геометрия Римана, открытая позднее, в нек-рых отношениях противоположна геометрии Лобачевского, но вместе с тем служит ей необходимым дополнением. Совместное исследование геометрий Евклида, Лобачевского и Римана позволило в должной мере выяснить особенности каждой из них, а также их связи друг с другом и с другими геометрич. системами. Ниже обе Н. г. и геометрия Евклида сопоставляются как синтетич. теории, затем в плане дифференциальной геометрии, и, наконец, в виде проективных моделей.

Н. г. имеют существенные приложения в математике и смежных с нею областях: в теории аналитич. функций, теории групп, теории относительности и др. Эти приложения основаны на том, что разнообразные конкретные модели Н. г. находятся в тесном контакте с различными объектами и понятиями указанных разделов математики в смежных с нею областях.

Неевклидовы геометрии как синтетические теории. Геометрия Лобачевского строится на основе тех же аксиом, что и евклидова, за исключением только одной аксиомы о параллельных. Именно, согласно аксиоме о параллельных евклидовой геометрии, через точку, не лежащую на данной прямой a, проходит точно одна прямая, к-рая лежит в одной плоскости с прямой a и не пересекает эту прямую; в геометрии Лобачевского принимается, что таких прямых несколько (затем доказывается, что их бесконечно много).

В геометрии Римана принимается аксиома: каждая прямая, лежащая в одной плоскости с данной прямой, пересекает эту прямую. Эта аксиома противоречит системе аксиом евклидовой геометрии с исключением аксиомы о параллельных. Таким образом, система аксиом, лежащая в основе геометрии Римана, необходимо должна отличаться от системы аксиом евклидовой геометрии не только заменой одной аксиомы о параллельных другим утверждением, но и части остальных аксиом. Различными в этих геометриях являются аксиомы, к-рые служат для обоснования т. н. отношений порядка геометрич. элементов. Сущность в следующем: в евклидовой геометрии и в геометрии Лобачевского порядок точек на прямой является линейным, т. е. подобным порядку в множестве действительных чисел; в геометрии Римана порядок точек на прямой является циклическим, т. е. подобным порядку в множестве точек на окружности. Кроме того, в геометриях Евклида и Лобачевского каждая прямая, лежащая в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две части; в геометрии Римана прямая не разделяет плоскость на две части, т. е. любые две точки плоскости, не лежащие на данной прямой, можно соединить в этой плоскости непрерывной дугой, не пересекая данную прямую (топологич. моделью плоскости Римана служит *проективная плоскость*).

Требования аксиом, определяющих движение фигур, для всех трёх геометрий одинаковы.

Примеры теорем Н. г.

1) В геометрии Лобачевского сумма внутренних углов любого треугольника меньше двух прямых; в геометрии Римана эта сумма больше двух прямых (в евклидовой геометрии она равна двум прямым).

2) В геометрии Лобачевского площадь треугольника выражается формулой

$$S = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma), \qquad (1)$$

где α, β, γ — внутренние углы треугольника, R — нек-рая постоянная, к-рая определяется выбором единицы измерения площадей. В геометрии Римана имеет место формула

$$S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) \qquad (2)$$

при аналогичном значении символов (в евклидовой геометрии зависимости между площадью треугольника и суммой его углов нет).

3) В геометрии Лобачевского между сторонами и углами треугольника существует ряд зависимостей, напр.:

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha, \qquad (3)$$

где sh, ch — гиперболические синус и косинус, a, b, c — стороны треугольника, α, β, γ — противолежащие им углы, R — постоянная, определяемая выбором масштаба; для прямоугольного треугольника (с гипотенузой c и прямым углом γ) имеет место, напр., равенство

$$\operatorname{ch}\frac{c}{R} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta. \qquad (4)$$

При нек-ром согласовании линейного масштаба и единицы измерения площадей постоянная R в формулах (1), (3), (4) будет одинаковой. Число R наз. радиусом кривизны плоскости (или пространства) Лобачевского. Число R при данном масштабе выражает определённый отрезок в плоскости (пространстве) Лобачевского, к-рый также наз. радиусом кривизны. Если масштаб меняется, то меняется число R, но радиус кривизны как отрезок остаётся неизменным. Если радиус кривизны принять за масштабный отрезок, то $R=1$. В геометрии Римана существуют сходные равенства:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha \qquad (5)$$

(для произвольного треугольника) и

$$\cos\frac{c}{R} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \qquad (6)$$

(для прямоугольного) при аналогичном значении символов. Число R наз. радиусом кривизны плоскости (или пространства) Римана. Как видно из формул (4), (6), в каждой из Н. г. гипотенуза прямоугольного треугольника определяется его углами, более того, в Н. г. стороны любого треугольника определяются его углами, т. е. не существует подобных треугольников, кроме равных. В евклидовой геометрии нет формул, аналогичных формулам (4), (6), и нет никаких других формул, выражающих линейные величины через угловые. При замене R на Ri ($i=\sqrt{-1}$) формулы (1), (3), (4) превращаются в формулы (2), (5), (6); вообще, при замене R на Ri все метрич. формулы геометрии Лобачевского (сохраняющие при этой замене геометрич. смысл) переходят в соответствующие формулы геометрии Римана. При $R \to \infty$ и те и другие дают в пределе формулы евклидовой геометрии (либо теряют смысл). Стремление к бесконечности величины R означает, что масштабный отрезок является бесконечно малым по сравнению с радиусом кривизны (как с отрезком). То обстоятельство, что при этом формулы Н. г. переходят в пределе в формулы евклидовой геометрии, означает, что для малых (по сравнению с радиусом кривизны) неевклидовых фигур соотношения между их элементами мало отличны от евклидовых.

Неевклидовы геометрии в плане дифференциальной геометрии. В каждой из Н. г. дифференциальные свойства плоскости аналогичны дифференциальным свойствам поверхностей евклидова пространства; именно, в неевклидовой плоскости могут быть введены внутренние координаты u, v так, что дифференциал ds дуги кривой, соответствующий дифференциалам du, dv координат, определяется равенством

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \qquad (7)$$

Пусть, в частности, в качестве координаты u произвольной точки M берётся длина перпендикуляра, опущенного из M на фиксированную прямую, а в качестве координаты v — расстояние от фиксированной точки O этой прямой до основания указанного перпендикуляра; величины u, v следует брать со знаком, подобно обычным декартовым координатам. Тогда формула (7) для плоскости Лобачевского будет иметь вид

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2\left(\frac{u}{R}\right)dv^2, \qquad (8)$$

а для плоскости Римана

$$ds^2 = du^2 + \cos^2\left(\frac{u}{R}\right)dv^2, \qquad (9)$$

R — та же постоянная, к-рая входит в формулы предыдущего раздела (радиус кривизны). Правые части (8) и (9) суть метрич. формы поверхностей евклидова пространства, имеющих соответственно постоянную отрицательную кривизну $K=-1/R^2$ (как, напр., псевдосфера) и постоянную положительную кривизну $K=1/R^2$ (как, напр., сфера). Поэтому внутренняя геометрия достаточно малой части плоскости Лобачевского совпадает с внутренней геометрией на соответствующей части поверхности постоянной отрицательной кривизны. Аналогично, внутренняя геометрия достаточно малых частей плоскости Римана реализуется на поверхностях постоянной положительной кривизны (поверхностей, к-рые реализуют геометрию всей плоскости Лобачевского, в евклидовом пространстве нет). При замене R на Ri метрич. форма (8) переходит в метрич. форму (9). Так как метрич. форма определяет внутреннюю геометрию поверхности, то при такой замене и другие метрич. соотношения геометрии Лобачевского переходят в метрич. соотношения геометрии Римана (что уже было отмечено выше). При $R=\infty$ каждое из равенств (8) и (9) даёт

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

т. е. метрич. форму евклидовой плоскости.

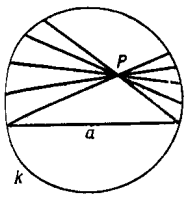
Трёхмерные неевклидовы пространства по своим дифференциальным свойствам относятся к числу римановых пространств в широком смысле и выделяются среди них прежде всего тем, что имеют постоянную риманову кривизну (см. *Риманова геометрия*). Как в двумерном, так и в трёхмерном случае постоянство кривизны обеспечивает однородность пространства, т. е. возможность движения фигур в нём, причём с той же степенью свободы, как (соответственно) на евклидовой плоскости или в евклидовом пространстве. Пространство Лобачевского имеет отрицательную кривизну, равную $-1/R^2$, пространство Римана — положительную кривизну, равную $1/R^2$ (R — радиус кривизны). Евклидово пространство занимает промежуточное положение и является пространством нулевой кривизны.

Пространства постоянной кривизны могут иметь весьма разнообразное строение в смысле топологии. Среди всех пространств постоянной отрицательной кривизны пространство Лобачевского однозначно выделяется двумя своими свойствами: 1) оно полно (в смысле полноты метрич. пространства), 2) оно топологически эквивалентно обычному евклидову пространству. Пространство Римана среди всех пространств положительной кривизны однозначно выделяется свойством топологич. эквивалентности проективному пространству. Аналогичными условиями выделяются многомерные пространства Лобачевского и Римана среди многомерных пространств постоянной римановой кривизны.

Неевклидовы геометрии в плане теории групп. Пусть на проективной плоскости введены проективные однородные координаты (x_1, x_2, x_3) и задана нек-рая овальная линия k 2-го порядка, напр.:

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0.$$

Каждое проективное отображение проективной плоскости на себя, к-рое оставляет на месте линию k наз. автоморфизмом относительно k. Каждый автоморфизм отображает внутренние точки линии k также во внутренние её точки. Множество всех автоморфизмов относительно линии k составляет группу. Пусть рассматриваются только точки проективной плоскости, лежащие внутри k; хорды линии k называют «прямыми». Две фигуры пусть считаются равными, если одна из них переводится в другую нек-рым автоморфизмом. Т. к. автоморфизмы составляют группу, то имеют место основные свойства равенства фигур: если фигура A равна фигуре B, то B равна A; если фигура A равна фигуре B, а B равна фигуре C, то A равна C. В получаемой таким образом геометрич. теории будут соблюдены требования всех аксиом евклидовой геометрии, кроме аксиомы о параллельных; вместо этой последней аксиомы соблюдается аксиома о параллельных Лобачевского (см. рис., где показано, что через точку P проходит бесконечно много «прямых», не пересекающих «прямой» a). Тем самым получается истолкование (двумерной) геометрии Лобачевского при помощи объектов проективной плоскости или, как говорят, проективная модель геометрии Лобачевского; линию k называют а б с о л ю т о м этой модели. Автоморфизмы относительно k играют роль движений. Поэтому геометрию Лобачевского можно рассматривать как теорию, изучающую свойства фигур и связанные с фигурами величины, к-рые остаются неизменными при автоморфизмах; короче говоря, геометрию Лобачевского можно рассматривать как теорию инвариантов группы автоморфизмов относительно овального абсолюта.



Геометрия Римана (двумерная) допускает сходное истолкование; именно, она является теорией инвариантов относительно нулевого абсолюта

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0. \qquad (10)$$

При этом в качестве точек и прямых модели берутся все точки и прямые проективной плоскости, автоморфизмы определяются чисто алгебраически, как линейные преобразования, к-рые переводят уравнение (10) в уравнение того же вида.

Евклидову геометрию также можно рассматривать как теорию инвариантов нек-рой группы проективных преобразований; именно, группы автоморфизмов относительно вырожденного абсолюта

$$x_1^2+x_2^2=0, \quad x_3=0,$$

т. е. относительно мнимых точек $(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$; эти точки наз. круговыми точками. Предметом модели являются все точки проективной плоскости, кроме точек прямой $x_3=0$, и все прямые проективной плоскости, кроме прямой $x_3=0$. В последнем случае автоморфизмы играют роль подобных преобразований, а не движений, как в случае Н. г.

Рассмотренные модели относятся к двумерным геометриям; проективные модели высших размерностей строятся аналогично.

Соответственно характеру уравнений абсолютов, геометрия Лобачевского наз. г и п е р б о л и ч е с к о й, геометрия Римана — э л л и п т и ч е с к о й, геометрия Евклида — п а р а б о л и ч е с к о й.

● А л е к с а н д р о в П. С., Что такое неевклидова геометрия, М., 1950; К л е й н Ф., Неевклидова геометрия, пер. с нем., М.—Л., 1936; Е ф и м о в Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978.
Н. В. Ефимов.

НЕЗАВИСИМОСТЬ в т е о р и и в е р о я т н о с т е й — одно из важнейших специфических понятий теории вероятностей. В качестве примера можно привести определение Н. двух случайных событий. Пусть A и B — два случайных события, а $P(A)$ и $P(B)$ — их вероятности. У с л о в н у ю вероятность $P(B|A)$ события B при условии осуществления события A (с $P(A)>0$) определяют формулой

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},$$

где $P(A\cap B)$ — вероятность совместного осуществления событий A и B. Событие B наз. н е з а в и с и м ы м от события A, если

$$P(B\mid A)=P(B).$$

Это равенство может быть записано в виде, симметричном относительно A и B (и свободном от условия $P(A)>0$):

$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B), \qquad (1)$$

откуда видно, что если событие B не зависит от A, то и A не зависит от B. Таким образом, можно говорить просто о Н. двух событий в смысле определения (1). Конкретный статистич. смысл данного определения Н. можно пояснить, переходя от вероятности события к частоте; если производится большое число испытаний, то между частотой появления события B во всех испытаниях и частотой его появления в тех испытаниях, в к-рых наступает событие A, должно иметь место приближённое равенство. Н. событий указывает таким образом либо на отсутствие связи между наступлением этих событий, либо на несущественный характер этой связи.

При определении Н. нескольких (более двух) событий различают попарную и взаимную Н. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ наз. п о п а р н о н е з а в и с и м ы м и, если любые два из них независимы в смысле данного выше определения (1). События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ наз. в з а и м н о н е з а в и с и м ы м и, если для любого целого числа s, $2\leqslant s\leqslant n$, и всех наборов различных событий $A_{i_1}, \ldots, A_{i_s}$ из числа $A_1, \ldots, A_n$ имеют место равенства

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_s})=P(A_{i_1})\,P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_s}). \qquad (2)$$

Очевидно, что условие попарной Н. является частью условия взаимной Н. (при $s=2$). Условие Н. (2) содержит 2^n-n-1 соотношений, и при больших n проверка взаимной Н. событий $A_1, \ldots, A_n$ затруднена. Однако в теории вероятностей обычно Н. вводится в модели как допущение.

Понятие Н. переносится и на случайные величины. Две случайные величины X и Y наз. независимыми, если для любых интервалов Δ_1 и Δ_2 события, заключающиеся в том, что значение X принадлежит интервалу Δ_1, а значение Y — интервалу Δ_2, независимы. Аналогично определение Н. для нескольких случайных величин. На гипотезе Н. тех или иных событий и случайных величин основаны важнейшие схемы теории вероятностей (см. напр., *Бернулли испытания*). Основные фундаментальные результаты теории вероятностей доказаны в предположении Н. случайных величин (см. *Предельные теоремы* теории вероятностей). О способах проверки статистич. гипотезы Н. каких-либо событий или случайных величин в математич. статистике см. в ст. *Статистических гипотез проверка.*

● Ф е л л е р В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1—2, М., 1984.
Ю. В. Прохоров.

НЕЗАВИСИМОСТЬ с и с т е м ы а к с и о м — свойство системы аксиом данной аксиоматич. теории, состоящее в том, что каждая аксиома является независимой, т. е. не является логич. следствием из множества остальных аксиом этой теории. Система аксиом, обладающая этим свойством, наз. н е з а в и с и м о й.

Н. той или иной аксиомы данной аксиоматич. теории означает, что эту аксиому можно без противоречия заменить её отрицанием. Иными словами, аксиома независима в том и только в том случае, когда имеется *интерпретация*, при к-рой эта аксиома ложна, а все остальные аксиомы данной теории истинны. Построение такой интерпретации является классич. методом доказательства Н. аксиом.

При построении аксиоматич. теории в виде *формальной системы*, где отношение логич. следования формализуется

в виде понятия выводимости, аксиома считается независимой, если она не может быть выведена из других аксиом с помощью правил вывода данной формальной системы. Для широкого класса формальных систем (т. н. теорий первого порядка) Н. относительно выводимости совпадает с Н. относительно логич. следования.

По отношению к формальным системам и вообще исчислениям имеет смысл говорить о Н. правил вывода. Правило вывода наз. независимым, если не всякая теорема данного исчисления может быть выведена без использования этого правила.

Н. системы аксиом сама по себе не является обязательным свойством аксиоматич. теории. Она лишь свидетельствует о том, что совокупность исходных положений теории не является избыточной и представляет нек-рые технич. удобства. Однако исследования, посвящённые Н. систем аксиом, и доказательства Н. способствуют лучшему пониманию изучаемой теории. Достаточно вспомнить, какое влияние на развитие математики оказал вопрос о Н. V постулата Евклида в системе аксиом геометрии.

НЕЗАВИ́СИМЫЕ СЛУЧА́ЙНЫЕ ВЕЛИЧИ́НЫ — см. *Вероятностей теория*, *Независимость* в теории вероятностей.

НЕЗАВИ́СИМЫЕ СОБЫ́ТИЯ — см. *Вероятностей теория*, *Независимость* в теории вероятностей.

НЕ́ЙЛЯ ПАРА́БОЛА — то же, что *полукубическая парабола*. Название по имени У. Нейля, к-рый нашёл в 1675 длину её дуги.

НЕ́ЙМАНА ЗАДА́ЧА, вторая краевая задача,— одна из *краевых задач*, ставящихся для дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка. В простейших случаях (в частности, для уравнения Лапласа) Н. з. состоит в отыскании решения в нек-рой области, имеющего на границе этой области заданную *нормальную производную*. Впервые систематически исследована К. Нейманом (1877).

НЕ́ЙМАНА ТЕОРЕ́МА о минимаксах — см. *Антагонистическая игра*, *Матричная игра*. Установлена Дж. Нейманом (1928).

НЕ́ЙМАНА ФУ́НКЦИИ — *цилиндрические функции* 2-го рода. Предложены К. Нейманом (1867).

НЕКЛАССИ́ЧЕСКИЕ ЛО́ГИКИ — логические системы, в основе которых лежит иное, чем в классической логике, истолкование традиционных логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и кванторов. В нек-рых Н. л. к числу исходных традиционных логич. связок добавляются такие, как «необходимо», «возможно», «разрешено», «будет» и др. Н. л. являются *интуиционистская логика*, *конструктивная логика*, *многозначная логика*, *модальная логика*.

Существуют и другие Н. л.

НЕКОРРЕ́КТНЫЕ ЗАДА́ЧИ, некорректно поставленные задачи,— задачи, для которых не выполняется хотя бы одно из условий, характеризующих корректно поставленные задачи. Задача определения решения $z=R(u)$ из метрич. пространства F [с расстоянием $\rho_F(,)$] по «исходным данным» $u\in U$ [с расстоянием $\rho_U(F, U)$] наз. корректно поставленной (Ж. Адамар, 1923) на паре пространств (F, U), если: а) для всякого $u\in U$ существует решение $z\in F$, б) оно единственно на F, в) задача устойчива на (F, U), что означает: для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любых u_1, u_2 из U с $\rho_U(u_1, u_2)\leqslant\delta(\varepsilon)$ имеет место $\rho_F(z_1, z_2)<\varepsilon$, где $z_i=R(u_i)$, $i=1, 2$.

Ж. Адамар высказал точку зрения, что всякая математич. задача, соответствующая к.-л. физич. задаче, должна быть корректной. В самом деле, какой смысл может иметь решение, если как угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям его? Однако эта точка зрения, естественная в применении к нек-рым явлениям, не может быть перенесена на все задачи. К Н. з. относится широкий класс т. н. обратных задач, возникающих в физике и других отраслях знаний, в частности задачи обработки и интерпретации результатов физич. экспериментов. Пусть z — количественная характеристика изучаемого объекта. Часто она недоступна непосредственному измерению, а измеряется нек-рое её проявление $Az=u$. Для интерпретации результатов измерений u надо определять z по u, т. е. решать уравнение

$$Az=u. \qquad (1)$$

Такие задачи часто называют задачами распознавания образов. Задачи, приводящие к задачам минимизации функционалов (задачи синтеза антенн и других систем и конструкций, задачи оптимального управления и многие др.), наз. также задачами синтеза. Пусть изучаемый объект характеризуется элементом z_0 (функцией, вектором) из множества F метрич. пространства F и z_0 недоступен для прямого измерения, а измеряется его проявление $Az_0=u_0$. Очевидно, $z_0=A^{-1}u_0$, где A^{-1} — оператор, обратный оператору A. Так как элемент u_0 получают путём измерений, то он известен приближённо. Пусть $\tilde{u}$ — это приближение. Речь может идти лишь о нахождении приближённого к элементу z_0 «решения» уравнения

$$Az=\tilde{u}, \qquad (2)$$

точнее, приближения к элементу z_0. Во многих случаях обратный оператор A^{-1} не является непрерывным, напр. когда A — вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве, в частности интегральный оператор вида

$$Az\equiv\int_a^b K(x, s)\,z(s)\,ds.$$

В этих условиях нельзя брать в качестве приближения к z_0 точное решение уравнения (2), т. е. элемент $z=A^{-1}\tilde{u}$, так как: а) такого решения может не существовать, поскольку $\tilde{u}$ может не принадлежать образу AF множества F при отображении его с помощью оператора A; б) такое решение, если даже оно существует, не будет устойчивым к малым изменениям $\tilde{u}$ и, следовательно, не может быть физически интерпретируемым. Задача (2) является Н. з.

Численные методы решения некорректных задач. Для Н. з. вида (1) возникают вопросы: 1) что надо понимать под приближённым решением таких задач и 2) каковы алгоритмы построения таких решений? Эти вопросы впервые были рассмотрены А. Н. Тихоновым (1963).

Метод подбора. В нек-рых случаях приближённые решения задач (2) находят методом подбора. Он состоит в том, что из класса возможных решений $M\subset F$ подбирают элемент $\tilde{z}$, для к-рого $A\tilde{z}$ приближает $\tilde{u}$ с требуемой точностью. В качестве искомого приближения берут элемент $\tilde{z}$. Но этот метод применим при условии, что множество M — компакт; на основе этого сформулировано понятие корректности по Тихонову, наз. также условной корректностью.

Во многих случаях правая часть $\tilde{u}$ не принадлежит множеству AM. Тогда уравнение (2) не имеет классич. решения и в качестве приближённого решения берётся т. н. квазирешение. Элемент $\tilde{z}\in M$, минимизирующий при данном $\tilde{u}$ функционал $\rho_U(Az, \tilde{u})$ на множестве M, наз. квазирешением уравнения (2) на M. Существование квазирешения гарантируется лишь при условии компактности множества возможных решений M.

Метод регуляризации. Для ряда задач, приводящих к уравнению (2), характерна ситуация, когда множество возможных решений F не является компактом, оператор A^{-1} не является непрерывным на AF и изменения правой части $\tilde{u}$, связанные с её приближённым характером, могут выводить её за пределы множества AF. Такие задачи наз. существенно некорректными (с. н. з.). Разработан подход к решению с. н. з., называемый методом регуляризации. В дальнейшем для простоты предполагается, что приближённой является лишь правая часть уравнения (1). В основе нового подхода лежит идея

отбора возможных решений и понятие регуляризирующего оператора. Пусть $Az_0=u_0$: оператор $R(u, \alpha)$ из U в F, зависящий от параметра α, наз. регуляризирующим оператором (р. о.) для уравнения (1), если он обладает свойствами: 1) существует такое число $\delta_1>0$, что оператор $R(u, \alpha)$ определён для всякого $\alpha>0$ и любого $u_\delta \in U$, для к-рого $\rho_U(u_\delta, u_0)\leqslant\delta\leqslant\delta_1$; 2) существует такая функция от δ, $\alpha=\alpha(\delta)$, что для любого $\varepsilon>0$ найдётся число $\delta(\varepsilon)\leqslant\delta_1$ такое, что если $u_\delta\in U$ и $\rho_U(u_\delta, u_0)\leqslant\delta(\varepsilon)$, то $\rho_F(z_\delta, z_0)\leqslant\varepsilon$, где $z_\delta=R(u_\delta, \alpha(\delta))$. В этом определении не предполагается однозначности оператора $R(u, \alpha)$.

Если $\rho_U(u_\delta, u_0)\leqslant\delta$, то в качестве приближённого решения уравнения (1) с правой частью u_δ можно брать элемент $z_{\alpha(\delta)}=R(u_\delta, \alpha(\delta))$, где $\alpha=\alpha(\delta)$ согласовано с погрешностью исходных данных u_δ. Это решение наз. регуляризованным решением уравнения $Az=u_\delta$. Параметр α наз. параметром регуляризации. При $\delta\to 0$ регуляризованное решение $z_{\alpha(\delta)}\to z_0$ (в метрике F). Таким образом, задача нахождения приближённых решений уравнения (2), устойчивых к малым изменениям правой части $\tilde{u}$, сводится: а) к нахождению р. о.; б) к определению параметра регуляризации α по дополнительной информации о задаче, напр. по оценке погрешности δ, с к-рой задаётся правая часть $\tilde{u}$.

В основе построения р. о. лежит принцип отбора, вариационный или другие (см. *Регуляризации метод*). Так, при вариационном принципе отбора используется сглаживающий функционал

$$M^\alpha[z, A, \tilde{u}]=\rho_U^2(Az, \tilde{u})+\alpha\Omega[z].$$

Ищется элемент z_α, минимизирующий M^α на множестве возможных решений. Параметр α находится по дополнительной информации о задаче. Если известно, напр., что $\rho_U(\tilde{u}, u_0)\leqslant\delta$ и A — линейный оператор, то α может быть найдено из соотношения $\rho_U(Az_\alpha, \tilde{u})=\delta$, т. е. по невязке. Возможны и другие способы нахождения α. Они определяются характером имеющейся дополнительной информации о задаче.

Если уравнение (1) имеет бесконечное множество решений, то вводится понятие нормального решения (н. р.). Пусть пространство F нормировано, тогда в качестве н. р. можно брать, напр., решение $\bar{z}$, норма уклонения к-рого от заданного элемента z_1 минимальна, т. е.

$$\|\bar{z}-z_1\|_F=\inf\|z-z_1\|.$$

Приближение к н. р. находится описанным выше методом регуляризации. К числу таких задач относятся вырожденные системы линейных алгебраич. уравнений. В качестве н. р. совместной вырожденной системы можно брать её решение $\bar{z}$ с минимальной нормой $||z||$, следовательно, можно брать $\Omega[z]=||z||^2$. Приближённые решения плохо обусловленных систем находятся методом регуляризации с $\Omega[z]=||z||^2$. Аналогично решается задача нахождения решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода на спектре, т. е. в случае, когда параметр λ уравнения равен одному из собственных значений ядра.

Приближённые решения несовместных систем линейных алгебраич. уравнений (напр., переопределённых) также находятся методом регуляризации на основе метода наименьших квадратов.

Задачи минимизации функционалов $f[z]$; $z\in F$. Различают два типа таких задач. 1) Задачи, в к-рых надо находить минимальное (или максимальное) значение $f[z]$ (напр., задачи проектирования оптимальных систем, конструкций и др.). Для этих задач несущественно, на каких элементах z достигается искомый минимум; поэтому в качестве приближённых решений таких задач можно брать значения $f[z]$ на любой минимизирующей последовательности. 2) Задачи минимизации по аргументу; в них надо найти элементы z, на к-рых достигается минимум $f[z]$. В нек-рых из них минимизирующие последовательности могут быть несходящимися. Такие задачи наз. неустойчивыми или некорректно поставленными. К ним относятся, напр., нек-рые задачи оптимального управления, в к-рых оптимизируемый (целевой) функционал зависит только от фазовых переменных.

Минимизирующую последовательность $\{z_n\}$ функционала $f[z]$ называют регуляризованной, если существует компактное в F множество $\overline{F}$, содержащее $\{z_n\}$. Для решения неустойчивой задачи 2-го типа достаточно указать алгоритмы построения регуляризованных минимизирующих последовательностей. Это можно сделать, используя стабилизирующие функционалы $\Omega[z]$ и аналог сглаживающего функционала M^α.

В прикладных Н. з. исходные данные часто содержат случайные погрешности. Для построения приближённых решений таких задач возможен как детерминированный, так и вероятностный подходы. Использование при этом метода наибольшего правдоподобия — один из способов получения р. о.

● Тихонов А. Н., Об устойчивости обратных задач, «Докл. АН СССР», 1943, т. 39, № 5; Иванов В. К., О некорректно поставленных задачах, «Матем. сб.», 1963, т. 61, № 2; Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979; Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П., Теория линейных некорректных задач и ее приложения, М., 1978; Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П., Некорректные задачи математической физики и анализа, М., 1980.

А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин.

НЕКОРРЕЛИ́РОВАННЫЕ ВЕЛИЧИ́НЫ — см. *Корреляция*.

НЕЛИНЕ́ЙНОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — раздел математического программирования, посвящённый теории и методам нахождения экстремумов (максимумов или минимумов) нелинейных функций многих переменных при наличии дополнительных ограничений на эти переменные, имеющих форму равенств и (или) неравенств. Общая постановка задачи Н. п. состоит в следующем: максимизировать целевую функцию $f(x)$ при условиях

$$g_i(x)\geqslant 0,\ i=1, \ldots, m;\quad h_i(x)=0,\ i=1, \ldots, k,$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$. В соответствии с общей терминологией математич. программирования точка x, удовлетворяющая всем $m+k$ ограничениям задачи, наз. допустимой или допустимым решением задачи Н. п. Допустимая точка, в к-рой f принимает наибольшее значение по сравнению с другими допустимыми точками (близкими к данной), наз. (локально) оптимальной или (локально) оптимальным решением.

В зависимости от свойств функций f, g_i, h_i в Н. п. выделяется ряд разделов: *выпуклое программирование* (f, g_i — вогнутые функции, h_i — аффинные функции), квадратичное программирование (f — квадратичная форма или сумма линейной и квадратичной форм, а g_i, h_i — аффинные функции), геометрическое программирование (f, g_i — функции специального вида, h_i — аффинные функции).

Основой всех численных методов Н. п. являются условия оптимальности. Необходимые условия оптимальности первого порядка состоят в следующем. Если x^* — локально оптимальная точка, то при соблюдении нек-рых дополнительных требований существуют такие числа (множители Лагранжа) $y_1^*\geqslant 0, \ldots, y_m^*\geqslant 0$ и $z_1^*, \ldots, z_k^*$, что все частные производные $\partial L(x, y^*, z^*)/\partial x_i$ функции Лагранжа

$$L(x, y^*, z^*)=f(x)+\sum_{i=1}^m y_i^* g_i(x)+\sum_{i=1}^k z_i^* h_i(x)$$

задачи Н. п. обращаются в нуль при $x=x^*$, т. е.

$$\frac{\partial L(x^*, y^*, z^*)}{\partial x_i}=0,\quad i=1, \ldots, n,$$

причём $y_i^* g_i(x^*)=0$, $i=1, \ldots, m$. Это утверждение обобщает хорошо известное в математич. анализе необходимое условие экстремума для функции $\varphi(t)$ одной переменной: $\varphi'(t^*)=0$, если t^* — локально оптимальная точка. Необходимые (достаточные) условия оптимальности второго порядка для задачи Н. п. являются обобщением аналогичного условия того, чтобы дважды дифференцируемая функция $\varphi(t)$ достигала в точке t^* своего локального максимума:

$$\varphi'(t^*)=0, \quad \varphi''(t^*)\leqslant 0 \quad (\varphi'(t^*)=0, \quad \varphi''(t^*)<0)$$

и формулируются с помощью первых и вторых частных производных функций f, g_i, h_i.

Одним из наиболее популярных методов Н. п. является м е т о д ш т р а ф н ы х ф у н к ц и й. Он сводит задачу Н. п. с ограничениями к задаче Н. п. без ограничений путём формирования ш т р а ф н о й ф у н к ц и и, образующейся из целевой функции задачи вычитанием «штрафов» за нарушение её ограничений. Чем выше штрафы, тем ближе задача максимизации штрафной функции к исходной задаче. Для оптимизации штрафной функции используется широкий спектр методов безусловной максимизации. К ним относятся методы нулевого порядка, в к-рых используются только значения оптимизируемой функции, методы первого порядка (напр., градиентный метод и метод сопряжённых градиентов), когда кроме значений функции привлекаются её первые производные, и методы второго порядка (напр., метод Ньютона), при реализации к-рых необходимо знание производных оптимизируемой функции до второго порядка включительно. Другие методы Н. п. основаны на текущей аппроксимации функций f, g_i, h_i, причём для целевой функции обычно применяется линейная или квадратичная аппроксимация, а для других функций — линейная. В ряде таких методов используются функция Лагранжа и её модификации. Процесс решения задачи Н. п. с помощью подобных методов складывается из ряда шагов, на каждом из к-рых решается задача линейного или квадратичного программирования.

Методы Н. п. позволяют, как правило, получить точку, удовлетворяющую с определённой погрешностью тем или иным условиям оптимальности. Таким образом они приводят, вообще говоря, к локальному оптимуму (исключением являются задачи Н. п., в к-рых каждый локальный оптимум является оптимальной точкой, напр. задачи выпуклого программирования). Методы Н. п., к-рые гарантированно приводят к оптимальной точке в любой задаче Н. п., сводятся к просмотру весьма большого числа точек, а поэтому применимы лишь для задач Н. п. с очень малым числом переменных. Практич. задачи Н. п. содержат значительное число переменных и ограничений. Поэтому даже самые эффективные методы Н. п. оказываются перед ними бессильными без привлечения высокопроизводительных ЭВМ.

Для анализа задач Н. п. создан ряд пакетов программ. Эти пакеты содержат как оптимизационные модули, реализующие различные методы Н. п., так и сервисные программы, облегчающие пользователю процесс общения с ЭВМ.

См. также *Исследование операций*.

● Фиакко А.-В., Мак-Кормик Г.-П., Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации, пер. с англ., М., 1972; Карманов В. Г., Математическое программирование, 2 изд., М., 1980; Поляк Б. Т., Введение в оптимизацию, М., 1983.

Е. Г. Гольштейн.

НЕЛИНЕ́ЙНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — алгебраическое или трансцендентное уравнение вида

$$\varphi(x)=0, \tag{1}$$

где x — действительное число, $\varphi(x)$ — нелинейная функция. Системой Н. у. наз. система

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_N)=0,\\ &\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_N)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\varphi_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)=0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

не являющаяся системой линейных алгебраич. уравнений. Уравнение (1) и система (2) могут трактоваться как нелинейное операторнсе уравнение

$$L(u)=f \tag{3}$$

с нелинейным оператором L, действующим из векторного конечномерного пространства H_N в H_N.

Для численного решения Н. у. (3) применяются итерационные методы, определяемые переходом от уже известного приближения u^n на n-й итерации к новому приближению u^{n+1} и позволяющие при достаточно большом числе итераций найти решение Н. у. (3) с нужной точностью ε.

Нелинейные операторные уравнения, связанные с рассмотрением бесконечномерных пространств, являются весьма широким математич. понятием, содержащим в себе как частные случаи, напр., нелинейные интегральные уравнения и нелинейные краевые задачи. Для таких нелинейных операторных уравнений численными методами наз., как и в линейном случае, методы их аппроксимации с помощью дискретных нелинейных систем типа (2) (напр., разностные методы, проекционно-сеточные, коллокаций, наименьших квадратов и т. п.).

Одним из важнейших методов решения Н. у. (3) является м е т о д п р о с т о й и т е р а ц и и, предполагающий возможность замены (3) эквивалентной системой

$$u=P(u), \tag{4}$$

где $u=(u_1, \ldots, u_N)$ — элемент конечномерного пространства H_N, а оператор P, отображающий H_N в H_N, является оператором сжатия: найдётся такое $q<1$, что для любых u и $v\in H_N$

$$\|P(u)-P(v)\|\leqslant q\|u-v\|. \tag{5}$$

Для дважды непрерывно дифференцируемых функций φ_i при наличии хорошего начального приближения к решению системы (2) часто эффективным методом повышения точности является м е т о д Н ь ю т о н а — К а н т о р о в и ч а (см. *Ньютона метод*).

Метод Ньютона — Канторовича может быть отнесён к группе *линеаризации методов*. Другим представителем этой группы является *секущих метод*.

Большое число итерационных методов (т. н. методов спуска) основано на замене задачи решения Н. у. (3) задачей минимизации нек-рого функционала $I(u)$, напр.:

$$I(u)\equiv\|L(u)-f\|^2.$$

В ряде случаев, когда исходные Н. у. сами являются уравнениями Эйлера, для задачи минимизации нек-рого функционала $I(u)$, такая вариационная формулировка задачи является ещё более естественной, операторы L в подобных ситуациях являются градиентами функционалов $I(u)$ и наз. п о т е н ц и а л ь н ы м и о п е р а т о р а м и. Среди различных вариантов методов спуска можно назвать метод покоординатного спуска, различные градиентные методы и, в частности, метод наискорейшего спуска, метод сопряжённых градиентов и др., а также и их модификации. Ряд итерационных методов для решения Н. у. (3), описывающих нек-рое стационарное состояние, можно трактовать как дискретизации соответствующих нестационарных задач. Методы из этого класса наз. м е т о д а м и у с т а н о в л е н и я.

Введение новой независимой переменной характерно и для метода дифференцирования по параметру (см. также *Продолжения по параметру метод*). Его суть состоит во введении вспомогательного параметра $\lambda\in[0, 1]$, в выборе непрерывно дифференцируемых функций $F_i(x, \lambda)$ и замене системы (2) на

$$F_i(x, \lambda)=0, \quad i=1, 2, \ldots, N, \quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1; \tag{6}$$

при $\lambda=0$ система (6) должна легко решаться, а функции $F_i(x, 1)$ должны совпадать с $\varphi_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, N$. Система (6), вообще говоря, определяет $x(\lambda)\equiv(x_1(\lambda), x_2(\lambda), \ldots, x_N(\lambda))$ как функцию от λ. и искомое решение (2) совпадает с $x(1)$. Если систему (6) продифференцировать по λ, то

получится система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{d\lambda}+\frac{\partial F_i}{\partial \lambda}=0, \quad i=1, 2, \ldots, N. \qquad (7)$$

Поэтому если на отрезке [0, 1] решить для неё задачу Коши с начальным условием, являющимся решением системы (6) при $\lambda=0$, то будет найдено и нек-рое решение (2). Дискретизация (7) по λ и приводит к численному методу для решения (2). В методе продолжения по параметру система (6) решается при $\lambda=\tau$, 2τ, . . ., $m\tau$ ($m\tau=1$), причём при каждом указанном значении λ применяется нек-рый итерационный метод с начальным приближением, совпадающим с приближённо полученным решением системы при предыдущем значении λ. Методы продолжения и дифференцирования по параметру играют особую роль при построении ветвей $u(\lambda)$ решения (6) в ситуациях, когда единственности решения может не быть и могут встретиться точки бифуркации. В этих случаях особое внимание уделяется выбору параметра λ и добавочным по отношению к (6) соотношениям, обеспечивающим гладкое продолжение ветви решения.

Для решения Н. у. (1), являющихся простейшими частными случаями (3), число известных и применяемых на практике итерационных методов очень велико. Помимо уже рассмотренных можно, напр., указать итерационные методы высших порядков, включающих в себя метод Ньютона как частный случай, и большое число итерационных методов, специально ориентированных на нахождение действительных или комплексных корней многочленов

$$p_n(z)\equiv a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0.$$

Итерационные методы для решения систем (3), возникающих в сеточных аналогах нелинейных краевых задач для уравнений с частными производными, являются частными случаями методов решения сеточных систем. Одним из наиболее часто применяемых методов решения корректных Н. у. (3), вероятно, является модифицированный метод простой итерации, записываемый в виде

$$Bu^{n+1}=Bu^n-\gamma_n(L(u^n)-f), \qquad (8)$$

где (3) рассматривается как операторное уравнение в N-мерном евклидовом пространстве $H_N\equiv H$, B — нек-рый линейный симметричный и положительный оператор, отображающий H в H, γ_n — итерационный параметр. При специальном выборе B в классе методов (8) для многих ситуаций построены логарифмически оптимальные и оптимальные по порядку итерационные методы и тем самым осуществлена асимптотич. *минимизация вычислительной работы.* *Е. Г. Дьяконов.*

НЕЛИНЕ́ЙНЫЙ ОПЕРА́ТОР — отображение A векторного пространства X в векторное пространство Y над общим полем скаляров, не обладающее свойством линейности, т. е. такое, что, вообще говоря, $A(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\neq \neq\alpha_1Ax_1+\alpha_2Ax_2$, напр. оператор суперпозиции $Af= =F(x, f(x))$. На Н. о., действующие из одного топологич. векторного пространства в другое, переносятся многие понятия и операции математич. анализа, напр. монотонность, ограниченность, дифференцируемость.

Если Y есть множество действительных или комплексных чисел, то Н. о. наз. н е л и н е й н ы м ф у н к ц и о н а л о м.

НЕЛИНЕ́ЙНЫЙ ФУНКЦИОНА́Л — частный случай нелинейного оператора, определённого на векторном пространстве. Примерами Н. ф. могут служить функционалы вариационного исчисления

$$f(x)=\int_a^b F(t, x(t), x'(t))\,dt$$

и нормы.

НЕОБХОДИ́МЫЕ И ДОСТА́ТОЧНЫЕ УСЛО́ВИЯ — условия правильности утверждения A, без выполнения которых утверждение A заведомо не может быть верным (н е о б х о д и м ы е у с л о в и я) и, соответственно, при выполнении которых утверждение A заведомо верно (д о с т а т о ч н ы е у с л о в и я). Часто выражение «необходимо и достаточно» заменяется выражением «тогда и только тогда» или же выражением «в том и только в том случае». Н. и д. у. обладают большой познавательной ценностью. В сложных математич. проблемах разыскание удобных для пользования Н. и д. у. бывает иногда чрезвычайно трудным. В таких случаях достаточные условия стараются сделать возможно более широкими, т. е. охватывающими возможно большее число случаев, в к-рых интересующий нас факт всё ещё имеет место, а необходимые условия — возможно более узкими, т. е. охватывающими возможно меньше лишних случаев, в к-рых изучаемый факт уже не имеет места. Таким образом, достаточные условия постепенно сближаются с необходимыми.

НЕОГРАНИ́ЧЕННАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция, не являющаяся ограниченной (см. *Ограниченная функция*). Точнее, функция $f(x)$ наз. н е о г р а н и ч е н н о й (н е о г р а н и ч е н н о й с в е р х у, соответственно с н и з у) на множестве E, если для любого числа M существует такое $x\in E$, что $|f(x)|\geqslant M$ ($f(x)\geqslant M$, соответственно $f(x)\leqslant M$). Если функция неограниченна на какой-нибудь части своей области определения, то она является Н. ф. на всей области определения. Для того чтобы $f(x)$ была Н. ф., необходимо и достаточно, чтобы существовала такая сходящаяся (быть может, к бесконечности) последовательность $\{x_n\}$, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\infty.$$

Н. ф. может быть ограниченной сверху или снизу, а может быть неограниченной и сверху и снизу. Напр., Н. ф. $1-2^x$ — ограниченная сверху функция; Н. ф. x^2 — ограниченная снизу функция; Н. ф. $\ln x$ — неограниченная и сверху и снизу.

НЕОГРАНИ́ЧЕННАЯ ЧИСЛОВА́Я ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ — см. *Числовая последовательность.*

НЕОПРЕДЕЛЁННАЯ СИСТЕ́МА л и н е й н ы х у р а в н е н и й — см. *Линейное уравнение.*

НЕОПРЕДЕЛЁННАЯ ФО́РМА — см. *Квадратичная форма.*

НЕОПРЕДЕЛЁННОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение, содержащее более одного неизвестного. Систему уравнений, в к-рой число неизвестных больше числа уравнений, называют неопределённой системой уравнений. Н. у. и неопределённые системы уравнений имеют, как правило, бесконечное число решений. Термин «Н. у.» употребляется в теории чисел, где интересуются решениями Н. у., удовлетворяющими тем или иным арифметич. условиям (обычно ищут решения Н. у. в целых или рациональных числах). Изучение таких решений составляет предмет теории *диофантовых уравнений.*

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ ВЫРАЖЕ́НИЯ — выражения, предел которых не может быть найден путём непосредственного применения теорем о пределах. Р а с к р ы т и е м н е о п р е д е л ё н н о с т и наз. методы нахождения пределов функций, заданных формулами, к-рые в результате формальной подстановки в них предельных значений аргумента теряют смысл, т. е. переходят в выражения типа

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty,$$

по к-рым нельзя судить о том, существуют или нет искомые пределы, не говоря уже о нахождении их значений, если они существуют. Основным инструментом для раскрытия неопределённостей служит формула Тейлора, с помощью к-рой выделяется главная часть функции. Так, в случае неопределённости типа 0/0, для того чтобы найти предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

где

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0,$$

функции f и g представляют по формуле Тейлора в окрестности точки x_0 (если это возможно) до первого не равного нулю члена:

$$f(x)=a(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\ a\neq 0,$$
$$g(x)=b(x-x_0)^m+o((x-x_0)^m),\ b\neq 0,$$

в результате получается, что

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{n-m}=\begin{cases}0, & \text{если } n>m,\\ \frac{a}{b}, & \text{если } n=m,\\ \infty, & \text{если } n<m.\end{cases}$$

В случае неопределённости типа ∞/∞ для нахождения предела

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

где

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty,$$

применяют преобразование

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}},$$

сводящее задачу к раскрытию неопределённости типа 0/0.

Неопределённости типа $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ также целесообразно приводить к виду 0/0 следующими преобразованиями:

$$f(x)\,g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

и

$$f(x)-g(x)=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\,\frac{1}{g(x)}}$$

соответственно.

Для раскрытия неопределённостей типа 0^0, ∞^0, 1^∞ целесообразно первоначально прологарифмировать выражения, предел к-рых требуется найти.

Другим общим методом раскрытия неопределённостей типа 0/0 и ∞/∞ и сводимых к ним является *Лопиталя правило*.

Неопределённость вида 0/0 (без обозначений) исследовал Г. Лопиталь (1696); символ 0/0 ввёл И. Бернулли (1730). Неопределённости $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ рассматривал Л. Эйлер (1748), а ∞^0, 1^∞ О. Коши (1821, 1823).

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ — общее выражение первообразной для подинтегральной функции $f(x)$; обозначается: $\int f(x)dx$. См. *Интегральное исчисление*.

НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОД — метод, применяемый для отыскания коэффициентов выражений, вид которых заранее известен. Так, напр., на основании теоретич. соображений дробь

$$\frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}$$

может быть представлена в виде суммы

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1},$$

где A, B и C — коэффициенты, подлежащие определению. Чтобы найти их, приравнивают второе выражение первому:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}$$

и, освобождаясь от знаменателя и собирая слева члены с одинаковыми степенями x, получают

$$(A+B+C)x^2+(B-C)x-A=3x^2-1.$$

Т. к. последнее равенство должно выполняться для всех значений x, то коэффициенты при одинаковых степенях x справа и слева должны быть одинаковы. Таким образом, получаются три уравнения для определения трёх неизвестных коэффициентов: $A+B+C=3$, $B-C=0$, $A=1$, откуда $A=B=C=1$. Следовательно,

$$\frac{3x^2-1}{x(x^2-1)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1};$$

справедливость этого равенства легко проверить непосредственно.

Пусть ещё нужно представить дробь $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ в виде $A+B\sqrt{2}+C\sqrt{3}+D\sqrt{6}$, где A, B, C и D — неизвестные рациональные коэффициенты. Приравнивая второе выражение первому:

$$A+B\sqrt{2}+C\sqrt{3}+D\sqrt{6}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

или, освобождаясь от знаменателя, вынося, где можно, рациональные множители из-под знака корней и приводя подобные члены в левой части, получают

$$(A-2B+3C)+(-A+B+3D)\sqrt{2}+$$
$$+(A+C-2D)\sqrt{3}+(B-C+D)\sqrt{6}=1+\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

Но такое равенство возможно лишь в случае, когда равны между собой рациональные слагаемые обеих частей и коэффициенты при одинаковых радикалах. Таким образом, получаются четыре уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов A, B, C и D:

$$A-2B+3C-1,\quad -A+B+3D=1,$$
$$A+C-2D=-1,\quad B+C+D=0,$$

откуда $A=0$, $B=-1/2$, $C=0$, $D=1/2$, то есть

$$\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

В приведённых примерах успех Н. к. м. зависел от правильного выбора выражений, коэффициенты к-рых отыскивались. Если бы в последнем примере вместо выражения $A+B\sqrt{2}+C\sqrt{3}+D\sqrt{6}$ было взято выражение $A+B\sqrt{2}+C\sqrt{3}$, то, рассуждая как и выше, получили бы для трёх коэффициентов A, B и C четыре уравнения: $A-2B+3C=1$, $-A-B=1$, $A+C=-1$, $B-C=0$, к-рым нельзя удовлетворить выбором чисел A, B и C.

Особенно важны применения Н. к. м. к задачам, в к-рых число неизвестных коэффициентов бесконечно. К ним относятся задача деления степенных рядов, задача нахождения решения дифференциального уравнения в виде степенного ряда и др. Пусть, напр., нужно найти решение дифференциального уравнения $y''+xy=0$ такое, что $y=0$ и $y'=1$ при $x=0$. Из теории дифференциальных уравнений следует, что такое решение существует и имеет вид степенного ряда

$$y=x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+\ldots;$$

подставляя это выражение вместо y в правую часть уравнения, а вместо y'' — выражение

$$2c_2+3\cdot 2c_3x+4\cdot 3c_4x^2+5\cdot 4c_5x^3+\ldots,$$

затем умножая на x и соединяя члены с одинаковыми степенями x, получают

$$2c_2+3\cdot 2c_3x+(1+4\cdot 3c_4)x^2+(c_2+5\cdot 4c_5)x^3+\ldots=0,$$

откуда при определении неизвестных коэффициентов получается бесконечная система уравнений: $2c_2=0$; $3\cdot 2c_3=0$; $1+4\cdot 3c_4=0$; $c_2+5\cdot 4c_5=0$; . . .

Решая последовательно эти уравнения, находят

$$c_2=0,\ c_3=0,\ c_4=-\frac{1}{3\cdot 4},\ c_5=0,\ c_6=0,$$

$$c_7=+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7},\ c_8=0,\ \ldots,$$

то есть

$$y=x-\frac{1}{3\cdot 4}x^4+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7-\ldots.$$

НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕТОД построения численных алгоритмов — специальный метод построения алгоритмов, основанный на требовании, чтобы алгоритм был точен или имел погрешность определённого порядка точности на некотором множестве задач.

Типичным примером задач, к-рые наряду с другими методами могут решаться Н. к. м., является следующий. Известны значения функции $f(P_1), \ldots, f(P_N)$. Требуется построить формулу для приближения функции:

$$f(P) \approx g(f(P_1), \ldots, f(P_N), P);$$

формулу для вычисления производной:

$$Df \approx g_D(f(P_1), \ldots, f(P_N), P);$$

формулу для вычисления интеграла:

$$I(f) \approx \int_\Omega f(P)\, p(P)\, dP \approx g_I(f(P_1), \ldots, f(P_N)).$$

Для решения последней из этих задач задают нек-рую форму приближённого решения, напр. линейную

$$g_I = \sum_{n=1}^{N} C_n f(P_n),$$

и определяют коэффициенты C_n из требования, чтобы приближённая формула была точной для функций из нек-рой совокупности, напр. вида

$$f(P) = \sum_{m=1}^{M} a_m \omega_m(P),$$

где $\omega_m(P)$ фиксированы, a_m произвольны. Как правило, берут $M=N$. В задаче вычисления интеграла равенство

$$I\left(\sum_{m=1}^{M} a_m \omega_m\right) = \sum_{n=1}^{N} C_n \left(\sum_{m=1}^{M} a_m \omega_m(P_n)\right)$$

выполняется при всех a_m, если выполнены соотношения

$$I(\omega_m) = \sum_{n=1}^{N} C_n \omega_m(P_n), \quad m=1, \ldots, M.$$

Отсюда определяют (если это возможно) искомые C_n.

Иногда задают более сложную форму зависимости. Напр., при приближении функций часто известно, что рассматриваемая функция хорошо приближается функциями вида

$$g(a_1, \ldots, a_M, P),$$

где a_m неизвестны. Параметры a_m подбирают из системы уравнений

$$g(a_1, \ldots, a_M, P_n) = f(P_n), \quad n=1, \ldots, N.$$

В случае формул численного интегрирования в качестве неизвестных параметров часто выступают и координаты узлов интегрирования. Напр., в квадратурных формулах Гаусса вида

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, p(x)\, dx \approx \sum_{n=1}^{N} C_n f(P_n)$$

рассматриваются как свободные параметры координаты узлов P_n; благодаря этому удаётся построить квадратуры, точные для многочленов степени $2N-1$. При конструировании аппроксимаций дифференциальных уравнений с помощью Н. к. м. требуют, чтобы при подстановке в конечно-разностную схему решения задачи получалась величина рассогласования (*невязка*) требуемого порядка малости по отношению к шагу сетки. Такой приём положен в основу способов построения методов Рунге — Кутты и конечно-разностных методов.

Особенно широко Н. к. м. используется при построении аппроксимаций уравнений с частными производными.

● Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, 3 изд., т. 1, М., 1966; 2 изд., т. 2, М., 1962; Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы. Введение в теорию, 2 изд., М., 1977.

Н. С. Бахвалов.

НЕОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ — см. *Граф*.

НЕОРИЕНТИРУЕМЫЙ МНОГОГРАННИК — см. *Многогранник*.

НЕОСОБАЯ МАТРИЦА, неособенная матрица,— то же, что *невырожденная матрица*.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ ГИПОТЕЗА — см. *Статистическая гипотеза*.

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ математической статистики — методы непосредственной оценки и проверки гипотез о теоретическом распределении вероятностей и тех или иных его общих свойствах (симметрии, независимости и т. п.) по результатам наблюдений. Название «Н. м.» подчёркивает их отличие от классических (параметрических) методов, в к-рых предполагается, что неизвестное теоретич. распределение принадлежит к.-л. семейству, зависящему от конечного числа параметров (напр., семейству нормальных распределений), и к-рые позволяют по результатам наблюдений оценивать неизвестные значения этих параметров и проверять те или иные гипотезы относительно их значений. Особенность Н. м. в отличие от классич. методов состоит в независимости от неизвестного теоретич. распределения.

В качестве примера Н. м. можно привести критерий проверки согласованности теоретич. и эмпирич. распределений (критерий Колмогорова). Пусть результаты n независимых наблюдений имеют функцию распределения $F(x)$ и пусть $F_n(x)$ обозначает эмпирич. функцию распределения, построенную по n независимым наблюдениям (F_n — несмещённая и состоятельная оценка для F). Пусть D_n — наибольшее по абсолютной величине значение разности $F_n(x) - F(x)$. Случайная величина $\sqrt{n} D_n$ имеет, в случае непрерывности $F(x)$, функцию распределения $K_n(\lambda)$, не зависящую от $F(x)$ и стремящуюся при безграничном возрастании n к пределу

$$K(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2\lambda^2}.$$

Отсюда при достаточно больших n для вероятности $p_{n,\lambda}$ неравенства $\sqrt{n} D_n \geqslant \lambda$ получается приближённое выражение

$$p_{n,\lambda} \approx 1 - K(\lambda); \qquad (*)$$

функция $K(\lambda)$ табулирована. Её значения для нек-рых λ приведены в таблице.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $K(\lambda)$

λ	0,57	0,71	0,83	1,02	1,36	1,63
$K(\lambda)$	0,10	0,30	0,50	0,75	0,95	0,99

Равенство (*) используется для проверки гипотезы о том, что теоретич. распределением является распределение с заданной непрерывной функцией распределения $F(x)$: сначала по результатам наблюдений находят значение величины D_n, а затем по формуле (*) вычисляют вероятность получить отклонение F_n от F, большее или равное наблюдённому. Если указанная вероятность достаточно мала, точнее равна наперёд заданному малому числу α, $0<\alpha<1$ (см. *Значимости уровень*), то в соответствии с общими принципами *статистических гипотез проверки* проверяемую гипотезу отвергают. В противном случае считают, что результаты опыта не противоречат проверяемой гипотезе. Аналогично проверяется гипотеза о том, что две независимые выборки объёма n_1 и n_2 соответственно получены из одной и той же генеральной совокупности с непрерывным законом распределения, т. е. что соответствующие функции распределения одинаковы (гипотеза однородности двух выборок). При этом вместо формулы (*) пользуются тем, что вероятность неравенства

$$D_{n_1, n_2} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} < \lambda$$

имеет пределом $K(\lambda)$, где $D_{n_1 n_2}$ есть наибольшее по абсолютной величине значение разности $F_{n_1}(x) - F_{n_2}(x)$. Приведённые примеры относятся к Н. м., основанным на разностях теоретич. и эмпирич. или двух эмпирич. распределений.

Дополнительным примером Н. м. могут служить методы проверки гипотезы о том, что теоретич. распределение принадлежит семейству нормальных распределений. Один

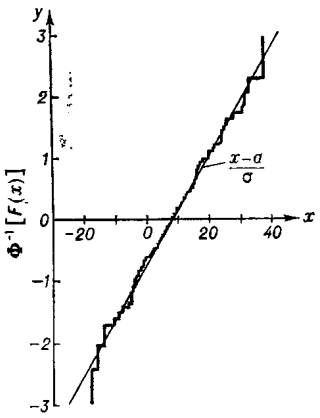
из этих методов — т. н. метод выпрямленной диаграммы. Этот метод основывается на следующем замечании. Если случайная величина имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, то

$$\Phi^{-1}[F(x)]=\frac{x-a}{\sigma},$$

где Φ^{-1} — функция, обратная нормальной:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du.$$

Таким образом, график функции $y=\Phi^{-1}[F(x)]$ будет прямой линией, а график функции $y=\Phi^{-1}[F_n(x)]$ — ломаной линией, близкой к этой прямой (рис.). Степень близости и служит простейшим критерием для проверки гипотезы нормальности распределения $F(x)$ (см. *Вероятностная бумага*).



Значительное место в современной математич. статистике занимают Н. м., в к-рых используются не сами эмпирич. функции распределения, а нек-рые функции от порядковых статистик — членов вариационного ряда. Если используются порядковые номера результатов наблюдений или ранги, то такие непараметрич. критерии наз. ранговыми, они, как правило, являются критериями однородности. Напр., пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — взаимно независимые элементы двух выборок с непрерывными функциями распределений. Для проверки гипотезы о том, что соответствующие X_i и Y_j функции распределения одинаковы, можно использовать ранговый критерий, основанный на значениях функций от рангов:

$$W=s(r_1)+\ldots+s(r_m),$$

где r_j — ранг случайных величин Y_j в общем вариационном ряду X_i и Y_j, а функция $s(r)$, $r=1, \ldots, n+m$, определяется заранее заданной подстановкой

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n+m\\ s(1) & s(2) & \ldots & s(n+m)\end{pmatrix},$$

где $s(1), \ldots, s(n+m)$ — одна из возможных перестановок чисел $1, 2, \ldots, n+m$. Выбор подстановки может быть осуществлён оптимальным образом.

Ранговые критерии также используются для проверки гипотез случайности и независимости.

● Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В., Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969; Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

Ю. В. Прохоров.

НЕ́ПЕРА ПРА́ВИЛО — мнемоническое правило для получения формул *сферической тригонометрии*. Названо связано с именем Дж. Непера.

НЕ́ПЕРОВО ЧИСЛО́ — см. *e* (число).

НЕ́ПЕРОВЫ АНАЛО́ГИИ — формулы сферической тригонометрии, применяемые для решения сферических треугольников по данным двум сторонам a, b и углу C между ними и по данным двум углам A, B и прилежащей к ним стороне c:

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{C}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}. \quad (2)$$

Для решения первой задачи сначала применяют обе формулы (1), затем одну из формул (2); для решения второй — сначала формулы (2), затем одну из формул (1). Формулы (1) (у Г. Бригса) и (2) (у Дж. Непера) приводились в форме пропорций (греч. ἀναλογία — пропорция).

НЕПОДВИ́ЖНАЯ ТО́ЧКА отображения f множества X в себя — такая точка $x\in X$, что $f(x)=x$. Доказательства существования Н. т. и методы их нахождения — важные задачи математики, поскольку к ним сводится решение многих классов уравнений. В зависимости от того, какой структурой наделено множество X и каковы свойства отображения f, возникают те или иные принципы Н. т.; простейший из них — *сжимающих отображений принцип*.

НЕПО́ЛНАЯ ГА́ММА-ФУ́НКЦИЯ — см. *Гамма-функция*.

НЕПРА́ВИЛЬНАЯ ДРОБЬ — арифметическая дробь, числитель которой больше знаменателя (или равен ему), напр. $^5/_3$, $^4/_2$, $^7/_7$. Н. д. можно представить, выделяя из неё целую часть, в виде смешанного числа, т. е. числа, имеющего целую и дробную части, напр. $^5/_3=1^2/_3=1+^2/_3$. Обратно, всякое смешанное число можно записать в виде Н. д., напр. $3^1/_7=^{22}/_7$.

НЕПРЕДИКАТИ́ВНОЕ ОПРЕДЕЛЕ́НИЕ — определение некоторого объекта путём указания соотношения между этим объектом и всеми объектами из некоторого множества, к которому определяемый объект предполагается принадлежащим. Пример Н. о.: «b — житель деревни, бреющий всех тех и только тех жителей этой деревни, к-рые не бреются сами». Здесь объект определяется через множество жителей деревни, к к-рому он сам принадлежит. Это определение лежит в основе антиномии «деревенский парикмахер».

При рассмотрении формализованных языков понятие Н. о. уточняется следующим образом. Определение наз. непредикативным, если оно задаёт определяемый объект выражением, содержащим переменную, возможным значением к-рой является определяемый объект. Так, определение $S=\{x|x\notin x\}$ является непредикативным, ибо определяющее выражение содержит переменную x, возможными значениями к-рой являются произвольные множества, в частности определяемое множество S. Это множество участвует в антиномии Рассела.

Термин «Н. о.» ввёл А. Пуанкаре, к-рый впервые высказал возражение против употребления Н. о. в математике, т. к. по своей форме Н. о. имеет характер порочного круга. Б. Рассел считал Н. о. источником всех антиномий в теории множеств.

НЕПРЕРЫ́ВНАЯ ГРУ́ППА — математическое понятие, как и понятие обыкновенной группы, возникающее при рассмотрении преобразований. Пусть M — множество элементов x к.-л. рода, напр. чисел, точек пространства, функций и т. п. Говорят, что имеется преобразование f множества M, если каждому элементу x из M поставлен в соответствие определённый элемент

$$y=f(x), \quad (1)$$

также принадлежащий M; при этом предполагается, что для каждого y найдётся такой элемент x, и притом единственный, к-рый удовлетворяет уравнению (1). Таким образом, уравнение (1) разрешимо относительно x:

$$x=f^{-1}(y)$$

и f^{-1} также есть преобразование множества M. Преобразование f^{-1} наз. обратным к преобразованию f. Преобразование e, переводящее каждый элемент x в себя: $e(x)=x$, наз. тождественным. Если имеются два преобразования f и g, то последовательное их применение даёт новое преобразование k:

$$k(x)=f[g(x)].$$

Преобразование k наз. произведением преобразований f и g:

$$k=fg.$$

Умножение нек-рого преобразования f на тождественное e не меняет его:

$$fe=ef=f. \quad (2)$$

Произведение преобразования f на его обратное f^{-1} даёт тождественное:

$$ff^{-1}=f^{-1}f=e. \quad (3)$$

Для любых трёх преобразований имеет место ассоциативный закон:

$$(fg)\,h=f\,(gh). \quad (4)$$

Таким образом, совокупность всех преобразований множества M является группой. Можно, однако, рассматривать совокупность не всех преобразований, а любую такую совокупность преобразований, что наряду с каждым преобразованием в неё входит обратное к нему, а наряду с каждыми двумя — их произведение, т. е. подгруппу группы всех преобразований множества M. Если множество M является непрерывной средой (топологич. пространством), точнее говоря, если известно, что означает

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x, \quad (5)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — нек-рая последовательность элементов из M, а x также принадлежит M (как это имеет место, напр., в множестве чисел или точек), то можно выделить непрерывные преобразования. Преобразование f наз. **непрерывным**, если из (5) следует

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x).$$

Множество всех непрерывных преобразований составляет группу непрерывных преобразований. Во многих случаях (но не всегда!) группа непрерывных преобразований сама естественным образом оказывается непрерывной средой, т. е. в ней определяется понятие предельного перехода: можно говорить о том, что нек-рая последовательность преобразований сходится к преобразованию. При этом оказывается, что из

$$\lim_{n\to\infty} f_n=f \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} g_n=g$$

следует

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{-1}g_n=f^{-1}g. \quad (6)$$

Такая группа наз. Н. г. преобразований. Пусть M есть множество точек плоскости. Преобразование f наз. **движением** точек плоскости, если для каждой пары x и y из M расстояние между x и y равно расстоянию между $f(x)$ и $f(y)$. Преобразование плоскости наз. **проективным**, если точки, лежащие на одной прямой, переходят в точки, также лежащие на одной прямой. Частным случаем проективного преобразования является **аффинное**, при к-ром параллельные прямые переходят в параллельные. Это три простейших геометрич. примера Н. г. преобразований: группа движений, группа проективных преобразований и группа аффинных преобразований. Если рассматривать те свойства геометрич. фигур на плоскости, к-рые не меняются при движениях плоскости, то получают обычную элементарную геометрию. Аналогично возникают проективная и аффинная геометрии. Ф. Клейном была выдвинута общая точка зрения (см. *Эрлангенская программа*), согласно к-рой геометрия изучает те свойства фигур, к-рые не меняются при заданной группе непрерывных преобразований. Отсюда — роль теории Н. г. в геометрии. Если принять за множество M всевозможные упорядоченные системы n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, к-рые можно трактовать как компоненты вектора X и рассматривать линейные преобразования f, переводящие вектор X в вектор Y с компонентами $y_1, y_2, \ldots, y_n$, где

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} f_{ij}x_j, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

то множество всех линейных преобразований составляет Н. г. преобразований. Можно рассматривать не все линейные преобразования, а, напр., только те, к-рые не меняют длины векторов, т. е. для к-рых выполнено условие

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2.$$

Такие преобразования составляют группу линейных ортогональных преобразований. Группы линейных преобразований играют весьма важную роль, в частности находят своё приложение в квантовой механике.

Современное развитие теории групп показало, что при изучении группы целесообразно бывает отвлечься от того факта, что элементы её являются преобразованиями, а следует трактовать просто как множество элементов, в к-ром установлена операция умножения, т. е. каждой паре элементов группы поставлен в соответствие элемент, наз. произведением исходных: $k=fg$, причём в качестве аксиом выдвигаются условия (2), (3), (4). Элемент e, раньше бывший тождественным преобразованием, теперь наз. **единицей** группы. Вместо обратного преобразования появляется **обратный элемент**. Существование единицы и обратного элемента теперь являются аксиомами. Если для любых двух элементов f и g верно $fg=gf$, то группа наз. коммутативной. Для того чтобы получить Н. г., следует предположить, что элементы её составляют топологич. пространство и что операция умножения непрерывна, т. е. выполнено условие (6), к-рое теперь выдвигается как аксиома. Так возникло в математике новое, абстрактное понятие **непрерывной** или, что то же самое, **топологической группы**. Логически оно слагается из операции умножения и операции предельного перехода. Так как обе эти операции весьма часто встречаются в математике, то понятие Н. г. принадлежит к числу важных и находит многочисленные приложения. Важнейшим типом Н. г. являются *Ли группы*.

● Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3 изд., М., 1973.

Л. С. Понтрягин.

НЕПРЕРЫВНАЯ ДРОБЬ, **цепная дробь**,— один из важнейших способов представления чисел и функций. Н. д. есть выражение вида

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n+\ddots}}}, \quad (1)$$

где a_0 — любое целое число, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — натуральные числа, наз. **неполными частными** или **элементами** данной Н. д. К Н. д., изображающей нек-рое число α, можно прийти, записывая это число в виде $\alpha=a_0+\frac{1}{\alpha_1}$, где a_0 — целое число и $0<1/\alpha_1<1$, затем записывая в таком же виде α_1 и т. д. Число элементов Н. д. может быть конечным или бесконечным; в зависимости от этого Н. д. называют конечной или бесконечной. Н. д. (1) часто символически обозначают так:

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots] \quad \text{(бесконечная Н. д.)} \quad (2)$$

или

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n] \quad \text{(конечная Н. д.)}. \quad (3)$$

Конечная Н. д. всегда представляет собой рациональное число; обратно, каждое рациональное число может быть представлено в виде конечной Н. д. (3); такое представление единственно, если потребовать, чтобы $a_n\neq 1$. Н. д. $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$, $k\leqslant n$, записанную в виде несократимой дроби p_k/q_k, называют **подходящей дробью** порядка k данной Н. д. (2). Числители и знаменатели подходящих дробей связаны рекуррентными формулами

$$p_{k+1}=a_{k+1}p_k+p_{k-1}, \quad q_{k+1}=a_{k+1}q_k+q_{k-1},$$

к-рые служат основанием всей теории Н. д. Из этих формул непосредственно вытекает важное соотношение

$$p_kq_{k+1}-q_kp_{k+1}=\pm 1.$$

Для каждой бесконечной Н. д. существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_k}{q_k}=\alpha,$$

наз. значением данной Н. д. Каждое иррациональное число является значением единственной бесконечной Н. д., получаемой разложением α указанным выше образом, напр. $(e-1)/2=[0; 1, 6, 10, 14, 18, \ldots]$; $\sqrt{2}=[1; 2, 2, \ldots]$, квадратичные иррациональности разлагаются в периодические Н. д.

Основное значение Н. д. для приложений заключается в том, что подходящие дроби являются наилучшими приближениями числа α, то есть что для любой другой дроби m/n, знаменатель к-рой не более q_k, имеет место неравенство $|n\alpha-m|>|q_k\alpha-p_k|$; при этом $|q_k\alpha-p_k|<1/q_{k+1}$. Нечётные подходящие дроби больше α, а чётные — меньше. При возрастании k нечётные подходящие дроби убывают, а чётные возрастают.

Н. д. используются для приближения иррациональных чисел рациональными. Напр., известные приближения 22/7, 355/113 для числа π (отношения длины окружности к диаметру) суть подходящие дроби для разложения π в Н. д. Следует отметить, что первое доказательство иррациональности чисел e и π было дано с помощью Н. д. И. Ламбертом (1766). Ж. Лиувилль (1844) доказал: что для любого алгебраич. числа α степени n можно найти такую постоянную λ, что для любой дроби x/y выполняется неравенство $|\alpha-x/y|>\lambda/y^n$. С помощью Н. д. можно построить числа α такие, что разность $|\alpha-p_k/q_k|$ делается меньше λ/q_k, какую бы постоянную λ мы ни взяли. Так, используя Н. д., можно строить трансцендентные числа. Недостатком Н. д. является чрезвычайная трудность арифметич. действий над ними, равносильная практич. невозможности этих действий; напр., зная элементы двух дробей, мы не можем сколько-нибудь просто получить элементы их суммы или произведения.

Н. д. встречаются уже в 16 в. у Р. Бомбелли. В 17 в. Н. д. изучал Дж. Валлис; ряд важных свойств Н. д. открыл Х. Гюйгенс, занимавшийся ими в связи с теорией зубчатых колёс. Многое сделал для теории Н. д. Л. Эйлер в 18 в.

В 19 в. П. Л. Чебышев, А. А. Марков и др. применили Н. д., элементами к-рых являются многочлены, к изучению ортогональных многочленов.

● Хинчин А. Я., Цепные дроби, 4 изд., М., 1978.

НЕПРЕРЫВНАЯ КРИВАЯ — см. *Жордана кривая.*

НЕПРЕРЫВНАЯ ПРОПОРЦИЯ — пропорция, в которой средние или крайние члены равны; напр., $a/c=c/b$.

НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА — см. *Плотность вероятности, Случайная величина.*

НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, получающая бесконечно малые приращения при бесконечно малых приращениях аргумента. Однозначная функция $f(x)$ наз. непрерывной при значении аргумента x_0, если для всех значений аргумента x, отличающихся достаточно мало от x_0, значения функции $f(x)$ отличаются сколь угодно мало от её значения $f(x_0)$.

Точнее, функция $f(x)$ наз. непрерывной при значении аргумента x_0 (или, как говорят, в точке x_0), если, каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно указать такое $\delta>0$, что при $|x-x_0|<\delta$ будет выполняться неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Это определение равносильно следующему: функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если при x, стремящемся к x_0, значение функции $f(x)$ стремится к пределу $f(x_0)$. Если все условия, указанные в определении Н. ф., выполняются только при $x\geqslant x_0$ или только при $x\leqslant x_0$, то функция наз. соответственно непрерывной справа или слева в точке x_0. Функция $f(x)$ наз. непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке x при $a<x<b$ и, кроме того, в точке a непрерывна справа, а в точке b — слева.

Понятию Н. ф. противопоставляется понятие *разрывной функции.* Одна и та же функция может быть непрерывной для одних и разрывной для других значений аргумента. Так, дробная часть числа x [её принято обозначать через (x), напр. $\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}$; $(\pi)=0{,}14159\ldots$; $(2)=0$] является функцией разрывной при любом целом значении и непрерывной при всех других значениях (рис. 1), причём в целочисленных точках она непрерывна справа.

Простейшими функциями переменного x, непрерывными при всяком значении x, являются многочлены, синус ($y=\sin x$), косинус ($y=\cos x$), показательная функция ($y=a^x$, где a — положительное число). Сумма, разность и произведение Н. ф. снова дают Н. ф. Частное двух Н. ф. также есть Н. ф., за исключением тех значений x, для к-рых знаменатель обращается в нуль (т. к. в таких точках рассматриваемое частное не определено). Напр., $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ есть Н. ф. для всех значений x, кроме нечётных кратных $\pi/2$, при к-рых $\cos x$ обращается в нуль.

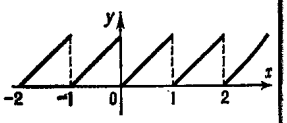


Рис. 1.

Н. ф. обладают многими важными свойствами, к-рыми и объясняется огромное значение этих функций в математике и её приложениях. Одно из важнейших свойств выражается следующей теоремой: для всякой функции, непрерывной на отрезке $[a, b]$, можно найти многочлен, значения к-рого отличаются на этом отрезке от значений функции менее чем на произвольно малое, наперёд заданное число (теорема Вейерштрасса о приближении Н. ф. многочленами). Справедлива также и обратная теорема: всякая функция, к-рую на нек-ром отрезке можно с произвольной степенью точности заменить многочленом, непрерывна на этом отрезке.

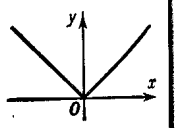


Рис. 2.

Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на нём и достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значения. Кроме того, она принимает на этом отрезке все значения, лежащие между её наименьшим и наибольшим значениями. Функции, непрерывные на отрезке, обладают свойством *равномерной непрерывности.* Всякая функция, непрерывная на нек-ром отрезке, интегрируема на нём, т. е. является производной другой Н. ф. Однако не всякая Н. ф. сама имеет производную. Геометрически это означает, что график Н. ф. не обязательно обладает в каждой точке определённым направлением (касательной); это может произойти, напр., потому, что график имеет угловую точку (рис. 2, функция $y=|x|$), или потому, что он совершает в любой близости точки 0 бесконечно много колебаний между двумя пересекающимися прямыми (рис. 3, функция $y=x\sin\left|\frac{1}{x}\right|$ при $x\neq0$ и $y=0$ при $x=0$).

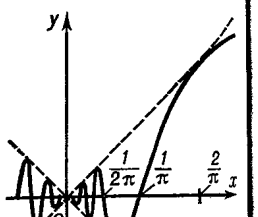


Рис. 3.

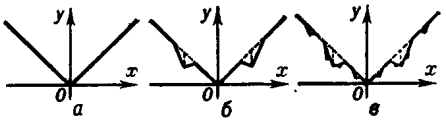


Рис. 4.

Существуют Н. ф., не имеющие производной ни в одной точке (первый пример такого рода был найден Б. Больцано, 1830). Представление о графике подобной функции даёт рис. 4, где изображены первые этапы построения, состоящего в неограниченно продолжающейся замене средней трети каждого прямолинейного отрезка двузвенными

ломаными; соотношения длин подбираются так, чтобы в пределе получить Н. ф.

Функция $F(x, y, z, \ldots)$ нескольких переменных, определённая в нек-рой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$, наз. н е п р е р ы в н о й в этой точке, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что при одновременном выполнении неравенств

$$|x-x_0|<\delta, \quad |y-y_0|<\delta, \quad |z-z_0|<\delta, \quad \ldots$$

выполняется также и неравенство

$$|F(x, y, z, \ldots)-F(x_0, y_0, z_0, \ldots)|<\varepsilon.$$

Такая функция будет непрерывной по отношению к каждому аргументу в отдельности (если остальным аргументам приданы определённые числовые значения). Обратное, однако, неверно: функция $F(x, y, z, \ldots)$, непрерывная по каждому аргументу в отдельности, может и не быть Н. ф. этих аргументов. Простейший пример этого даёт функция $F(x, y)$, равная $\frac{xy}{(x^2+y^2)}$, если $x^2+y^2\neq 0$, и равная 0 при $x=y=0$. Она непрерывна по x при любом фиксированном значении y и по y — при любом фиксированном значении x. В частности, она непрерывна по x при $y=0$ и по y при $x=0$. Если же положить, напр., $y=x\neq 0$, то значение функции будет оставаться равным $\frac{x^2}{(x^2+x^2)}=\frac{1}{2}$, т. е. нельзя будет указать такое число $\delta>0$, чтобы при одновременном выполнении неравенств $|x|<\delta$, $|y|<\delta$ выполнялось неравенство $\left|\frac{xy}{(x^2+y^2)}\right|<\varepsilon$. На Н. ф. нескольких переменных распространяются все основные теоремы, относящиеся к Н. ф. одного переменного. *А. И. Маркушевич.*

НЕПРЕРЫВНОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — отображение $f\colon X\to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y такое, что для всякой точки $x_0\in X$ и для всякой окрестности $V=V(f(x_0))$ её образа $f(x_0)$ существует такая окрестность $U=U(x_0)$ точки x_0, что $f(U)\subset V$. Это определение является перефразировкой окрестностного определения непрерывности функций действительного переменного (см. *Непрерывная функция*). Существует много эквивалентных определений непрерывности. Так, для непрерывности отображения $f\colon X\to Y$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий:

а) прообраз $f^{-1}(G)$ всякого открытого в Y множества G открыт в X;

б) прообраз $f^{-1}(F)$ всякого замкнутого в Y множества F замкнут в X;

в) $f[A]\subset[fA]$ для всякого множества $A\subset X$ (образ замыкания содержится в замыкании образа).

НЕПРЕРЫВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — распределение вероятностей случайной величины X, функция распределения $F(x)$ которой непрерывна. Вместе с дискретным распределением Н. р. образует основные типы *распределений*. Любое распределение вероятностей есть смесь дискретного распределения и Н. р. Напр., пусть $F(x)$ — нек-рая функция распределения, тогда $F=pF_1+(1-p)F_2$, где $0\leqslant p\leqslant 1$, а $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции распределения, отвечающие соответственно дискретному и непрерывному типу. Среди Н. р. наиболее важны а б с о л ю т н о н е п р е р ы в н ы е р а с п р е д е л е н и я. К этому типу относятся распределения, для к-рых $F(x)$ имеет представление

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(u)\,du,$$

где $p(x)\geqslant 0$, плотность вероятности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=1;$$

при этом почти всюду (по мере Лебега) $F'(x)=p(x)$.

Наиболее важны следующие Н. р.: *Коши распределение, нормальное распределение, равномерное распределение, показательное распределение, Стьюдента распределение, хи-квадрат распределение.*

НЕПРЕРЫВНОСТИ АКСИО́МА — аксиома, выражающая тем или иным образом непрерывность множества действительных чисел. Н. а. действительных чисел может быть сформулирована в терминах сечений действительных чисел: всякое сечение действительных чисел определяется нек-рым числом (*Дедекинда аксиома*); в терминах вложенных отрезков: всякое семейство вложенных отрезков имеет непустое пересечение (*Кантора аксиома*); в терминах верхней или нижней грани множеств: всякое непустое ограниченное сверху множество имеет конечную верхнюю грань, а всякое ограниченное снизу — нижнюю грань (*Вейерштрасса аксиома*).

НЕПРЕРЫВНОСТИ МО́ДУЛЬ ф у н к ц и и — величина $\omega(\delta)$, связанная с данной функцией $f(x)$ следующим образом:

$$\omega(\delta)=\sup_{|x_1-x_2|<\delta}|f(x_1)-f(x_2)|,$$

где точная верхняя грань берётся по всем x_1 и x_2 из данного множества. Здесь $f(x)$ — числовая функция от одного или нескольких переменных. Н. м. $\omega(\delta)$ — неотрицательная неубывающая функция, определённая при $\delta>0$. Н. м. $\omega(\delta)$ стремится к нулю при $\delta\to+0$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ — равномерно непрерывная функция на данном множестве.

НЕПРЕРЫ́ВНОСТЬ — одно из важнейших математических понятий, встречающееся в двух основных концепциях — Н. множества и Н. отображения. Исторически раньше подверглось математич. обработке понятие *непрерывного отображения*, или *непрерывной функции*, чем логически предшествующее ему понятие Н. множества. Определение Н. отображения зависит от того, как в самих множествах X и Y определены предельные соотношения. Множество элементов с определёнными предельными соотношениями между ними называют *топологическим пространством*. В терминах теории топологич. пространств обычно и излагаются понятия, характеризующие свойства Н. различных множеств математич. объектов.

НЕПРЕРЫ́ВНЫЙ КАНА́Л с в я з и — *канал* связи, у которого сигналы на входе и выходе суть функции непрерывного параметра (времени).

НЕПРЕРЫ́ВНЫЙ ОПЕРА́ТОР — то же, что *непрерывное отображение*; термин применяется обычно для топологических векторных пространств.

НЕПРЕРЫ́ВНЫЙ СПЕ́КТР — см. *Спектральный анализ* линейных операторов.

НЕПРИВОДИ́МОЕ ПРЕДСТАВЛЕ́НИЕ, п р о с т о е п р е д с т а в л е н и е,— линейное представление T, не имеющее нетривиальных (т. е. отличных от самого T и от нулевого представления) подпредставлений.

НЕПРИВОДИ́МОЕ УРАВНЕ́НИЕ — алгебраическое уравнение $f(x)=0$, левая часть которого представляет собой *неприводимый многочлен*. Если уравнение не является неприводимым (т. е. является п р и в о д и м ы м), то решение его облегчается тем, что оно сводится к решению нескольких алгебраич. уравнений более низкой степени.

НЕПРИВОДИ́МЫЙ МНОГОЧЛЕ́Н — многочлен, не разлагающийся на множители более низких степеней. Возможность разложить многочлен на множители (а потому и свойство неприводимости) зависит от того, в какой числовой области рассматривается этот многочлен. Так, многочлен x^3+2 неприводим, если в качестве коэффициентов допускать только рациональные числа, но разлагается в произведение двух Н. м. $x+\sqrt[3]{2}$ и $x^2-x\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$, если в качестве коэффициентов брать любые действительные числа, и в произведение трёх множителей

$$x+\sqrt[3]{2}, \quad x-\sqrt[3]{2}\cdot\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad x-\sqrt[3]{2}\,\frac{1-i\sqrt{3}}{2},$$

если коэффициентами будут комплексные числа. В общем случае понятие неприводимости определяется для многочленов над произвольным полем. Всякий многочлен от одного переменного разлагается на линейные множители над соответствующим образом подобранным расширением рассматриваемого основного поля, т. е. п р и в о д и м над этим расширением. В случае же двух и более перемен-

ных над любым полем P существуют **абсолютно неприводимые многочлены** произвольной степени, т. е. многочлены, остающиеся неприводимыми при любом расширении этого поля.

НЕПРИВОДИМЫЙ МОДУЛЬ, простой модуль,— ненулевой *модуль*, не содержащий никаких собственных подмодулей кроме нулевого.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ — свойство аксиоматической теории, состоящее в том, что в этой теории нельзя получить противоречие, т. е. доказать некоторое предложение и вместе с тем его отрицание или доказать некоторое заведомо абсурдное утверждение. Аксиоматич. теории, обладающие этим свойством, наз. **непротиворечивыми**. Для широкого класса аксиоматич. теорий (в частности, для тех, в основе к-рых лежит обычная классич. логика) Н. имеет место тогда и только тогда, когда существует предложение, формулируемое в данной теории и недоказуемое в ней.

Понятие Н. и методы установления Н. аксиоматич. теорий развивались и уточнялись вместе с развитием *аксиоматического метода*. Для т. н. материальных аксиоматик, т. е. аксиоматич. теорий, в к-рых значения исходных терминов считаются заданными с самого начала, вопрос о Н. не стоял сколько-нибудь остро. Напр., интуитивная убеждённость в Н. евклидовой аксиоматич. системы геометрии основывается на «опыте», поскольку аксиомы — это непосредственно очевидные предложения о геометрич. объектах. Построение неевклидовых геометрий и связанное с ним возникновение формальной аксиоматики, в рамках к-рой значения исходных терминов считаются неопределёнными, впервые поставило проблему доказательства Н. аксиоматич. теорий. Так, геометрия Лобачевского получается из евклидовой геометрии заменой аксиомы о параллельных другим постулатом, противоречащим тем интуитивным представлениям, в силу к-рых признаются истинными аксиомы Евклида. Поэтому Н. геометрии Лобачевского не усматривается непосредственно из «опыта» и требует своего обоснования. Первые результаты, касающиеся Н. аксиоматич. теорий, были получены с помощью **метода интерпретаций**, к-рый состоит в том, что исходным понятиям исследуемой теории сопоставляются нек-рые конкретные математич. объекты, причём аксиомы оказываются истинными утверждениями об этих объектах. Примером применения этого метода может служить интерпретация Клейна для системы аксиом геометрии Лобачевского. В этой интерпретации плоскость трактуется как внутренность овала на обычной евклидовой плоскости, а прямые — как хорды этого овала.

Другой метод доказательства Н. (**метаматематический метод**) был предложен Д. Гильбертом. Он связан с представлением аксиоматич. теории в виде *формальной системы*. Утверждение о Н. нек-рой формальной системы означает, что среди доказательств, возможных в этой системе, нет двух таких, одно из к-рых является доказательством нек-рой формулы φ, а другое — доказательством её отрицания $\neg\varphi$. Выдвинутая Д. Гильбертом программа обоснования математики состояла в установлении Н. основных её разделов путём анализа доказательств в соответствующих формальных системах. Теория, объектами к-рой являются произвольные математич. доказательства, наз. **теорией доказательств** или *метаматематикой*. Примером применения метаматематич. метода может служить предложенное Г. Генценом доказательство Н. формальной системы арифметики.

Любое математич. доказательство Н. является относительным: оно лишь сводит вопрос о Н. одной теории к вопросу о Н. другой теории. Это особенно наглядно проявляется в методе интерпретаций. Объекты, служащие для интерпретации исходных понятий данной аксиоматич. теории T, сами оказываются предметом рассмотрения нек-рой другой математич. теории T', и полученное этим методом доказательство Н. теории T действительно лишь в случае, если теория T' непротиворечива. Таким образом, напр., была установлена Н. геометрии Лобачевского в предположении Н. геометрии Евклида, а вопрос о Н. последней был сведён к проблеме Н. арифметики.

Метаматематич. метод доказательства Н. не требует изобретения интерпретации для каждой конкретной теории (что на данном этапе развития математики может оказаться делом затруднительным). Оставаясь по своей сути относительным, метаматематич. доказательство Н. сводит вопрос о Н. данной теории к вопросу о надёжности метаматематики, объекты к-рой не зависят от содержания конкретной рассматриваемой теории. В этом состоит одно из главных преимуществ метаматематич. метода перед методом интерпретаций. Программа Д. Гильберта предусматривала использование в метаматематике лишь таких понятий и методов, надёжность к-рых не вызывает сомнений.

Цель всякого доказательства Н.— свести вопрос о Н. данной теории к аналогичному вопросу для такой теории, Н. к-рой представляется более обоснованной. В этой связи большое значение имеет вторая теорема Гёделя о неполноте, к-рая утверждает, что Н. аксиоматич. теории, содержащей арифметику, невозможно доказать с помощью средств самой рассматриваемой теории. Таким образом, вопрос о Н. данной теории может быть решён лишь с привлечением средств нек-рой существенно более сильной теории.

● Новиков П. С., Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973.

НЕРАВЕНСТВО — отношение, связывающее два числа a_1 и a_2 посредством одного из знаков: $<$ (меньше), $\leqslant$ (меньше или равно), $>$ (больше), $\geqslant$ (больше или равно), $\neq$ (неравно), то есть

$$a_1 < a_2, \quad a_1 \leqslant a_2, \quad a_1 > a_2, \quad a_1 \geqslant a_2, \quad a_1 \neq a_2.$$

Иногда несколько Н. записываются вместе, напр.:

$$a < b < c.$$

Н. обладают многими свойствами, общими с равенствами. Так, Н. остаётся справедливым, если к обеим частям его прибавить (или от обеих частей отнять) одно и то же число. Точно так же можно умножить обе части Н. на одно и то же положительное число. Однако если обе части Н. умножить на отрицательное число, то смысл Н. изменится на противоположный (т. е. знак $>$ заменяется на $<$, а $<$ на $>$). Из неравенств $A<B$ и $C<D$ следует $A+C<B+D$ и $A-D<B-C$, т. е. одноимённые Н. ($A<B$ и $C<D$) можно почленно складывать, а разноимённые Н. ($A<B$ и $D>C$) — почленно вычитать. Если числа A, B, C и D положительны, то из неравенств $A<B$ и $C<D$ следует также $AC<BD$ и $\frac{A}{D}<\frac{B}{C}$, т. е. одноимённые Н. (между положительными числами) можно почленно перемножать, а разноимённые — почленно делить.

Н., в к-рые входят величины, принимающие различные числовые значения, могут быть верны для одних значений этих величин и неверны для других. Так, неравенство $x^2-4x+3>0$ верно при $x=4$ и неверно при $x=2$. Для Н. этого типа возникает вопрос об их решении, т. е. об определении границ, в которых следует брать входящие в Н. величины для того, чтобы Н. были справедливы. Так, переписывая неравенство $x^2-4x+3>0$ в виде $(x-1)(x-3)>0$, замечают, что оно будет верно для всех x, удовлетворяющих одному из следующих неравенств: $x<1$, $x>3$, к-рые и являются решением данного Н.

Ниже приводятся нек-рые Н., выполняющиеся тождественно в той или иной области изменения входящих в них переменных.

1) **Неравенство для модулей.** Для любых действительных или комплексных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо Н.

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|.$$

2) **Неравенства для средних.** Наиболее известны Н., связывающие гармоническое, геометриче-

ское, арифметическое и квадратичное средние:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}};$$

здесь все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны.

3) Неравенства для сумм и их интегральные аналоги. Таковы, напр., *Буняковского неравенство*, *Гёльдера неравенство*, *Коши неравенство*.

4) Неравенства для степеней и чисел. Наиболее известно здесь *Минковского неравенство* и его обобщения на случай рядов и интегралов.

5) Неравенства для некоторых классов последовательностей и функций. Примерами могут служить *Чебышева неравенство* для монотонных последовательностей и *Иенсена неравенство* для выпуклых функций.

6) Линейные неравенства. Рассматривается система Н. вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geqslant b_i, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Совокупность решений этой системы Н. представляет собой нек-рый выпуклый многогранник в n-мерном пространстве $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; задача теории *линейных неравенств* состоит в том, чтобы изучить свойства этого многогранника.

Н. имеют существенное значение для всех разделов математики. В теории чисел целый раздел этой дисциплины — *диофантовы приближения* — полностью основан на Н.; аналитич. теория чисел тоже часто оперирует с Н. В геометрии Н. постоянно встречаются в теории выпуклых тел и в изопериметрич. задаче. В теории вероятностей многие законы формулируются с помощью Н. (см., напр., *Чебышева неравенство*). В теории дифференциальных уравнений используются т. н. дифференциальные неравенства. В теории функций постоянно употребляются различные Н. для производных от многочленов и тригонометрич. полиномов (см., напр., *Бернштейна неравенство*). В функциональном анализе при определении нормы в функциональном пространстве требуется, чтобы она удовлетворяла Н. треугольника $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$. Многие классич. Н. в сущности определяют значения нормы линейного функционала или линейного оператора в том или ином пространстве или дают оценки для них (см., напр., *Бесселя неравенство*, *Минковского неравенство*). В вычислительной математике Н. применяются для оценки погрешности приближённого решения задачи.

● Коровкин П. П., Неравенства, 3 изд., М., 1966; Беккенбах Э., Беллман Р., Неравенства, пер. с англ., М., 1965; Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства, пер. с англ., М., 1948.

НЕРАВНОМЕ́РНЫЙ КОД — *код*, слова которого имеют различную (переменную) длину.

НЕРАЗРЕШИ́МОСТЬ — невозможность решения данной задачи точно очерченными средствами.

Пример Н.— невозможность решения при помощи циркуля и линейки таких геометрич. задач на построение, как *удвоение куба*, *трисекция угла*, *квадратура круга*.

Алгоритмическая неразрешимость. В различных областях математики возникают проблемы, в к-рых требуется найти единую механич. процедуру (*алгоритм*), с помощью к-рой можно было бы решить любую задачу из нек-рого бесконечного класса однотипных задач. Такие проблемы наз. массовыми проблемами. Примером может служить 10-я проблема Гильберта, состоящая в построении алгоритма, к-рый позволил бы для любого заданного многочлена с целыми коэффициентами узнать, существуют ли целые значения переменных, обращающие этот многочлен в нуль. Многие массовые проблемы долгое время не поддавались решению и оказалось, что трудность их решения имеет принципиальный характер. Это удалось установить лишь после того, как в 30-е гг. 20 в. в математике было выработано точное понятие алгоритма и для нек-рых массовых проблем было доказано, что искомые в них алгоритмы не существуют. Такие массовые проблемы наз. неразрешимыми или алгоритмически неразрешимыми. В частности, такова 10-я проблема Гильберта (см. также *Алгоритмическая проблема*). Установление алгоритмич. Н. той или иной проблемы показывает, что для решения задач из данного класса требуются методы, специфические для каждой задачи.

Неразрешимые предложения. Одним из способов построения математич. теории является *аксиоматический метод*. При аксиоматич. построении теории ряд её положений принимается в качестве исходных, или аксиом, а другие получаются как их следствия. В работах Д. Гильберта и его школы понятие аксиоматич. теории было уточнено в виде понятия *формальной системы*. Намеченная Д. Гильбертом программа обоснования математики предусматривала, в частности, формализацию основных разделов математики — арифметики, анализа, теории множеств, т. е. построение формальной системы, из аксиом к-рой можно было бы вывести практически все математич. теоремы. Однако в 1931 К. Гёдель показал, что всякая формальная система арифметики неполна в том смысле, что можно указать предложение, к-рое нельзя ни доказать, ни опровергнуть (т. е. доказать его отрицание) в этой системе. Такие предложения наз. неразрешимыми или формально неразрешимыми в данной системе. В частности, для всякой непротиворечивой формальной системы, содержащей достаточно богатую часть арифметики, утверждение о непротиворечивости этой системы оказывается неразрешимым в ней (см. *Гёделя теорема о неполноте*).

Н. предложения в данной формальной системе означает, что невозможно убедиться в его истинности или ложности на основании лишь тех представлений об исследуемом объекте, к-рые выражены в аксиомах. Часто оказывается возможным расширить формальную систему за счёт новых аксиом таким образом, что нек-рое конкретное неразрешимое в ней предложение можно доказать или опровергнуть в получившейся системе. Обнаружение в аксиоматич. теории неразрешимых предложений имеет важное значение для развития этой теории, вызывая необходимость поиска новых фундаментальных положений, к-рые можно было бы принять в качестве аксиом.

НЕСВЯ́ЗНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — см. *Связность*.

НЕСИНГУЛЯ́РНАЯ МА́ТРИЦА — то же, что *невырожденная матрица*.

НЕСМЕЩЁННАЯ ОЦЁНКА — статистическая оценка параметра распределения вероятностей по результатам наблюдений, лишённая систематич. ошибки. Более точно: если оцениваемое распределение зависит от параметра θ, то функция $\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ от результатов наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ наз. несмещённой оценкой для параметра θ, если при любых допустимых значениях параметра θ математич. ожидание

$$\mathsf{E}\theta^*(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0.$$

Напр., если результаты наблюдений $X_1, X_2, \ldots, X_n$ суть взаимно независимые случайные величины, имеющие одинаковое нормальное распределение, заданное плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$$

с неизвестными параметрами a и σ^2, то среднее арифметическое

$$\overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n \qquad (1)$$

будет Н. о. для a. Часто используемая для оценки σ^2 выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})^2$$

не является несмещённой оценкой. Н. о. для σ^2 служит

$$s_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \overline{X})^2, \qquad (2)$$

величина Н. о. квадратичного отклонения σ имеет более сложное выражение

$$\sqrt{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,s. \qquad (3)$$

Оценка (1) для математич. ожидания и оценка (2) для дисперсии являются Н. о. и при распределениях, отличных от нормального; оценка (3) для квадратичного отклонения, вообще говоря (при распределениях, отличных от нормального), может быть смещённой. Оценка s^2 дисперсии принадлежит классу т. н. асимптотически несмещённых оценок, к-рый определяется соотношением $\mathsf{E}\theta^*(X_1, \ldots, X_n) \to \theta$ при $n \to \infty$.

Использование Н. о. необходимо при оценке неизвестного параметра по большому числу серий наблюдений, каждая из к-рых состоит из небольшого числа наблюдений. Пусть, напр., имеется k серий

$$X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in}, \quad i=1, 2, \ldots, k,$$

по n наблюдений в каждой и пусть s_i^2 — несмещённая оценка s^2 для σ^2, составленная по i-й серии наблюдений. Тогда при большом k в силу закона больших чисел

$$\frac{1}{k}\left(s_1^2+s_2^2+\ldots+s_k^2\right) \sim \mathsf{E}s_i^2=\sigma^2,$$

даже когда n невелико.

Наилучшие оценки параметров распределения, как правило, разыскиваются среди Н. о. См. *Статистическая оценка*.

Ю. В. Прохоров.

НЕСО́БСТВЕННЫЕ ЭЛЕМЕ́НТЫ — то же, что *бесконечно удалённые элементы*.

НЕСО́БСТВЕННЫЙ ИНТЕГРА́Л — обобщение классического понятия интеграла на случай неограниченных функций и функций, заданных на бесконечном промежутке интегрирования (см. *Интеграл*). Определённый интеграл, как предел интегральных сумм Римана, может существовать (иметь определённое конечное значение) лишь для ограниченных функций, заданных на конечном интервале. Поэтому, если интервал интегрирования или подинтегральная функция не ограничены, для определения интеграла требуется ещё один предельный переход; получающиеся при этом интегралы наз. несобственными интегралами.

Если функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[a, N]$ и если существует

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx,$$

то его наз. Н. и. функции $f(x)$ на интервале $[a, \infty)$ и обозначают

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

В этом случае говорят, что Н. и. сходится. Когда этот предел, а значит и Н. и., не существует, то иногда говорят, что Н. и. расходится. Напр., $\int_1^\infty x^{-\gamma}dx$ сходится при $\gamma>1$ и расходится при $\gamma\leqslant 1$. Аналогично определяют Н. и. на интервалах $(-\infty, b]$ и $(-\infty, \infty)$.

Если функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, не ограничена в окрестности точки a, но интегрируема на любом отрезке $[a+\varepsilon, b]$, $0<\varepsilon<b-a$, и если существует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

то его наз. Н. и. функции $f(x)$ на $[a, b]$ и записывают обычным образом:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Аналогично поступают, если $f(x)$ не ограничена в окрестности точки b.

Если существует Н. и. $\int_a^\infty |f(x)|dx$ или $\int_a^b |f(x)|\,dx$, то говорят, что Н. и. $\int_a^\infty f(x)dx$ или $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится; если же последние интегралы сходятся (но первые расходятся), то Н. и. $\int_a^\infty f(x)dx$ или $\int_a^b f(x)dx$ наз. условно сходящимся.

Задачи, приводящие к Н. и., рассматривались в геометрич. форме Э. Торричелли и П. Ферма в 1644. Точные определения Н. и. даны О. Коши (1823). Различие условно и абсолютно сходящихся Н. и. установлено Дж. Стоксом и П. Дирихле (1854). Ряд работ математиков 19 в. посвящён вычислению Н. и. в случаях, когда соответствующая первообразная не выражается через элементарные функции. Основными приёмами вычисления Н. и. являются дифференцирование и интегрирование по параметру, разложение в ряды, применение теории вычетов. Значения многих Н. и. приводятся в различных таблицах.

Н. и. имеют важное значение во многих областях математич. анализа и его приложений. В теории специальных функций (цилиндрич. функций, ортогональных многочленов и др.) одним из основных способов изучения является изображение функций в виде Н. и., зависящих от параметра, напр. $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$ (см. *Гамма-функция*). К Н. и. относится и *Фурье интеграл*, а также интегралы, встречающиеся при других интегральных преобразованиях. Решения краевых задач математич. физики записываются кратными Н. и. с неограниченной подинтегральной функцией. В теории вероятностей важное значение имеет Н. и.

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi},$$

в теории света — Н. и.

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

В ряде случаев расходящимся Н. и. можно приписать определённое значение. В частности, если интеграл $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ расходится, но существует

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^N f(x)\,dx=A,$$

то A наз. главным значением Н. и.; его обозначают

$$\text{V. p.}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx.$$

Так,

$$\text{V. p.}\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2}=0.$$

Аналогично вводится главное значение Н. и. от неограниченной функции.

НЕСО́БСТВЕННЫЙ ИНТЕРВА́Л — см. *Интервал и сегмент*.

НЕСОВМЕСТИ́МОСТЬ — свойство некоторого класса формул в языке данной формальной системы S, состоящее в том, что в результате присоединения этого класса к множеству аксиом системы S получается противоречивая система, т. е. система, не обладающая свойством *непротиворечивости*. В случае Н. нек-рого класса формул данной формальной системы говорят, что этот класс несовместим с данной системой. В частности, если класс, состоящий из одной формулы, несовместим с формальной системой, эта формула наз. несовместимой с этой системой. Если бесконечный класс формул несовместим с нек-рой формальной системой, то он содержит конечный подкласс, также несовместимый с этой системой. Для широкого класса формальных систем Н. формулы φ имеет место тогда и только тогда, когда в системе выводимо отрицание $\neg\varphi$ этой формулы.

НЕСОВМЕ́СТНАЯ СИСТЕ́МА — система уравнений, которая не имеет решений.

НЕСОВМЕ́СТНЫЕ СОБЫ́ТИЯ — см. *Вероятностей теория.*

НЕСОИЗМЕРИ́МЫЕ ВЕЛИЧИ́НЫ — см. *Соизмеримые и несоизмеримые величины.*

НЕСПРЯМЛЯ́ЕМАЯ КРИВА́Я — см. *Спрямляемая кривая.*

НЕСТАНДА́РТНАЯ МОДЕ́ЛЬ — модель данной математической теории, не изоморфная её стандартной модели, т. е. модели, соответствующей той интерпретации основных понятий, которая подразумевалась при построении теории. Ниже в качестве иллюстрации рассматриваются Н. м. арифметики и анализа.

При построении формальной арифметики предполагается интерпретация предметных переменных как переменных по натуральным числам, символов 0, ′, + и · соответственно как числа 0, операций прибавления 1, сложения и умножения. Иными словами, алгебраич. система $\mathfrak{N}=(N, =, ′, +, \cdot, 0)$, где N — множество натуральных чисел, является стандартной моделью формальной арифметики. Наряду с ней возможны и другие Н. м.

Существование Н. м. арифметики является важным следствием одной из фундаментальных теорем математич. логики — т. н. теоремы компактности, к-рая утверждает, что если Σ — произвольное множество формул нек-рого логико-математич. языка 1-го порядка и всякое его конечное подмножество имеет модель, то и Σ имеет модель. Пусть A — любое множество истинных арифметич. формул, т. е. формул языка арифметики, истинных в алгебраич. системе $\mathfrak{N}$. К языку арифметики присоединяют новую предметную константу c и рассматривают множество формул $\Sigma=A\cup\{c>0, c>0′, c>0″, \ldots\}$, где $c>n$ есть сокращение для $\exists x(n+x′=c)$. Любое конечное подмножество множества Σ выполняется в стандартной модели. По теореме компактности существует модель для всего множества Σ, к-рая оказывается не изоморфной алгебраич. системе $\mathfrak{N}$. В этой модели должны быть «натуральные числа» — объекты, являющиеся интерпретацией термов 0, 0′, 0″, . . ., а также «бесконечно большое число» — интерпретация константы c. В качестве A можно взять множество всех истинных арифметич. формул и построить для него Н. м. Это означает, что невозможно однозначно задать натуральный ряд посредством какой бы то ни было аксиоматики в языке 1-го порядка.

Впервые Н. м. арифметики в явном виде была построена Т. Сколемом (1934). В дальнейшем были построены Н. м. математич. анализа, в к-рых наряду с обычными, стандартными действительными числами присутствуют новые, нестандартные, в том числе бесконечно малые и бесконечно большие. Положительное бесконечно малое число больше нуля, но меньше всякого положительного действительного числа. Элементы такой расширенной числовой системы можно сравнивать по величине, над ними можно совершать арифметич. действия. Результатом деления стандартного числа на бесконечно малое является бесконечно большое число. Для каждого стандартного числа существует окрестность бесконечно близких к нему нестандартных чисел. Рассмотрение подобных моделей привело к возникновению отдельной области математики — нестандартного анализа.

● Успенский В. А., Что такое нестандартный анализ?, М., 1987.

НЕСЧЁТНОЕ МНО́ЖЕСТВО — бесконечное множество, не являющееся счётным множеством, т. е. неэквивалентное множеству натуральных чисел. Напр., множество действительных чисел, в отличие от множества рациональных, является Н. м.

НЁТЕРОВ МО́ДУЛЬ — модуль, любой подмодуль которого обладает конечной системой образующих. Эквивалентное условие: любая строго возрастающая цепочка подмодулей Н. м. M обрывается на конечном номере. Подмодуль и фактормодуль Н. м. также нётеровы. Если N и M/N — Н. м., то и M — нётеров. Модуль над *нётеровым кольцом* является Н. м. тогда и только тогда, когда он имеет конечное число образующих.

НЁТЕРОВО КО́ЛЬЦО́ — ассоциативное кольцо с единицей, в котором любая строго возрастающая цепочка левых (соответственно правых идеалов) обрывается на конечном номере. При этом левое Н. к. не обязательно будет правым Н. к. и наоборот. Двойственным образом (через убывающие цепочки идеалов) определяется артиново кольцо. Н. к. может быть определено и как кольцо, являющееся левым (правым) нётеровым модулем над собой, или как кольцо, любой левый (правый) идеал к-рого имеет конечное число образующих (конечный базис). Факторкольцо и конечная прямая сумма Н. к. снова нётеровы, но подкольцо Н. к. может не быть нётеровым. Любое артиново кольцо нётерово.

Примеры Н. к.— кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, вообще, любое *главных идеалов кольцо*. Если A — коммутативное Н. к., то кольцо многочленов над A от конечного числа неизвестных — нётерово (теорема Гильберта о базисе). Аналогичное утверждение справедливо и для кольца формальных степенных рядов.

Н. к. названы по имени Э. Нётер, определившей и систематически исследовавшей такие кольца и перенёсшей на них ряд важных результатов теории конечномерных алгебр.

НЕУБЫВА́ЮЩАЯ ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ — см. *Монотонная последовательность.*

НЕУБЫВА́ЮЩАЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Возрастающая функция, Монотонная функция.*

НЕУСТО́ЙЧИВЫЙ ПРЕДЕ́ЛЬНЫЙ ЦИКЛ — см. *Предельный цикл.*

НЕЧЁТНАЯ ПОДСТАНО́ВКА — см. *Подстановка.*

НЕЧЁТНАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция $f(x)$, удовлетворяющая условию: $f(-x)=-f(x)$ для всех x из области определения этой функции. Область определения Н. ф. симметрична относительно точки $x=0$. Напр., x^3, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ — Н. ф. График Н. ф. симметричен относительно начала координат.

Сумма и разность Н. ф. являются Н. ф., а произведение и частное двух Н. ф. являются *чётными функциями*. Произведение и частное чётной и нечётной функций являются Н. ф. Если область определения функции $f(x)$ не симметрична относительно точки $x=0$, то эта функция не является ни чётной, ни нечётной. Существуют функции с областью определения, симметричной относительно точки $x=0$, но не являющиеся ни чётными, ни нечётными. Таковы, напр., функции $1+x$, $x+\cos x$, 2^x. Любую функцию $f(x)$ с областью определения, симметричной относительно точки $x=0$, можно представить в виде суммы чётной и нечётной функций:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

где

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

— чётная функция,

$$f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

— Н. ф.

НЕЧЁТНОЕ ЧИСЛО́ — целое число, не делящееся на 2, напр. 1, 3, 5, . . ., —1, —3, ... Всякое Н. ч. можно представить в виде $2m+1$ или $2m-1$, где m — целое число.

НЕЯ́ВНАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция, заданная уравнением $F(x, y)=0$, т. е. таким образом, что каждому значению x из некоторого множества поставлено в соответствие такое значение y, что $F(x, y)=0$. Н. ф. может быть однозначной или многозначной. Напр., уравнение $xy-1=0$ задаёт однозначную Н. ф. при $x\neq0$, к-рую, решив данное уравнение, можно записать в явном виде: $y=1/x$; уравнение $x^2+y^2-1=0$ задаёт двузначную Н. ф. на интервале $-1<x<1$, к-рую можно записать в явном виде: $y=\pm\sqrt{1-x^2}$.

Для доказательства существования Н. ф., заданной уравнением $F(x, y)=0$, нужно доказать, что существует реше-

ние этого уравнения, т. е. существует такая функция $y=f(x)$, что $F(x, f(x))\equiv 0$ на нек-ром множестве значений x. Основная теорема о существовании Н. ф. следующая. Пусть функция $F(x, y)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) такой, что $F(x_0, y_0)=0$ и $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$. Тогда существует такая окрестность точки (x_0, y_0), в к-рой уравнение $F(x, y)=0$ имеет единственное решение $y=f(x)$ такое, что $y_0=f(x_0)$ и $F(x, f(x))\equiv 0$ в окрестности точки x_0. При этом функция $y=f(x)$ имеет непрерывную производную в окрестности точки x_0 и

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Для Н. ф. многих переменных, заданной уравнением $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)=0$, имеет место теорема существования, аналогичная теореме существования Н. ф. одного переменного.

НИГДЕ́ НЕ ПЛО́ТНОЕ МНО́ЖЕСТВО — множество A в топологическом пространстве X, которое не является *плотным множеством* ни в каком открытом множестве из X.

НИ́ЖНИЙ ИНТЕГРА́Л ДАРБУ́ — см. *Интеграл.*

НИ́ЖНИЙ ПРЕДЕ́Л — см. *Верхний и нижний пределы.*

НИ́ЖНЯЯ ГРАНИ́ЦА множества — см. *Верхняя и нижняя грани.*

НИ́ЖНЯЯ ГРАНЬ — см. *Верхняя и нижняя грани.*

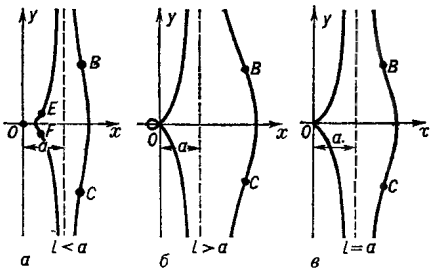
НИКОМЕ́ДА КОНХО́ИДА (от греч. κογχοειδής — похожий на раковину) — плоская алгебраическая кривая 4-го порядка, уравнение которой в декартовых прямоугольных координатах имеет вид

$$(x^2+y^2)(y-a)^2-l^2y^2=0;$$

в полярных координатах:

$$\rho=\frac{a}{\sin\varphi}\pm l.$$

Правая ветвь (рис.): асимптота $x=a$, точки перегиба B и C. Левая ветвь: асимптота $x=a$, начало координат — двойная точка, характер которой зависит от величин a и l: при $l<a$ — изолированная точка, кривая имеет ещё две точки перегиба E, F; при $l>a$ — узловая точка; при $l=a$ — точка возврата. Н. к.— *конхоида* прямой $x=a$. Кривая названа по имени Никомеда (3—2 вв. до н. э.), к-рый применял её для решения задачи о трисекции угла.



НИЛЬПОТЕ́НТНАЯ ГРУ́ППА (от лат. nil — ничто, ничего и potens, род. падеж potentis — сильный, способный) — группа G, обладающая *нормальным рядом*

$$G=G_0\supset G_1\supset G_2\supset\ldots\supset G_n=E$$

таким, что каждый его фактор G_{i-1}/G_i лежит в центре факторгруппы G/G_i (такой ряд наз. центральным рядом группы G). Класс Н. г. содержится в классе *разрешимых групп.* Примерами Н. г. служат группы целочисленных треугольных матриц (фиксированного порядка) с единицами на главной диагонали.

НИЛЬПОТЕ́НТНЫЙ ИДЕА́Л — идеал, произведение любых n элементов которого равно 0 для некоторого фиксированного целого числа n.

НИЛЬПОТЕ́НТНЫЙ ЭЛЕМЕ́НТ — см. *Делитель нуля.*

НОМОГРА́ММА (от греч. νόμος — закон и γράμμα — черта, буква, изображение) — чертёж для изображения функциональной зависимости (формула, уравнение, система уравнений), позволяющий найти ответ или ответы по заданным значениям переменных без вычислений и исследовать функциональную зависимость (см. *Номография*).

НОМОГРА́ФИЯ (от греч. νόμος — закон и γράφω — пишу) — раздел математики, в котором изучаются способы графического представления функциональных зависимостей. Получающиеся при этом чертежи наз. номограммами. Каждая номограмма строится для определённой функциональной зависимости в заданных пределах изменения переменных. На номограммах вычислительная работа заменяется выполнением простейших геометрич. операций, указанных в ключе пользования номограммой, и считыванием ответов.

Точность получения ответов по номограммам зависит от вида номографированной зависимости, пределов изменения переменных, размеров чертежа и избранного типа номограммы. В среднем номограммы могут обеспечить получение ответов с 2—3 верными значащими цифрами. Когда точность номограмм недостаточна, их можно использовать для прикидочных расчётов, для нахождения нулевых приближений, для контроля вычислений с целью обнаружения грубых ошибок.

Номограммы можно применять и для исследования функциональных зависимостей, положенных в их основу. Часто такое исследование выполняется на номограммах значительно проще и нагляднее, чем иными способами. С помощью номограмм можно исследовать влияние различных переменных на искомую переменную, дать наглядную геометрич. интерпретацию каким-либо ранее известным свойствам данной зависимости, установить ранее неизвестные её особенности. Номографич. методы исследования можно, напр., применять в задачах на подбор параметров эмпирич. формул по результатам наблюдений, на аппроксимацию одной функции другой, на нахождение экстремальных значений функции.

Значения переменных изображаются на номограммах помеченными точками и помеченными линиями. Множество помеченных точек, зависящее от одной переменной, наз.

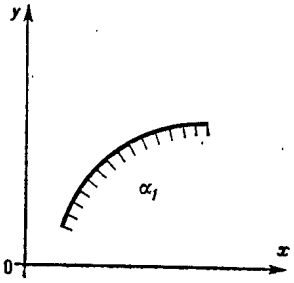


Рис. 1.

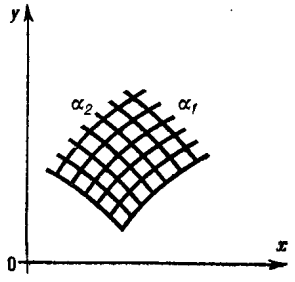


Рис. 2.

шкалой. Уравнения шкалы переменной α_1 в прямоугольной системе координат xOy записываются в виде

$$x=f_1(\alpha_1),\quad y=g_1(\alpha_1).$$

Схема шкалы α_1 приведена на рис. 1.

Множество помеченных точек, зависящее от двух переменных, наз. бинарным полем. Бинарное поле обычно оформляется в виде сетки, состоящей из двух семейств помеченных линий. Точка в бинарном поле определяется как точка пересечения линий с заданными пометками. В системе прямоугольных координат xOy бинарное поле переменных α_1 и α_2 задаётся уравнениями

$$x=f_{12}(\alpha_1, \alpha_2),\quad y=g_{12}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Предполагается, что функции f_{12} и g_{12} таковы, что в заданной области изменения переменных каждой паре значений α_1 и α_2 отвечает только одна пара значений x и y. Схема бинарного поля приведена на рис. 2.

Шкалы, семейства помеченных линий и бинарные поля в номограммах оформляются так, чтобы было удобно находить точки и линии с заданными пометками и определять пометки ответных точек и линий.

Элементарными номограммами наз. номограммы, в к-рых ответ или ответы находятся в результате выполнения одной геометрич. операции (определение точки на шкале или в бинарном поле; проведение прямой через две точки; построение окружности по известному центру и радиусу; откладывание отрезка, длина к-рого

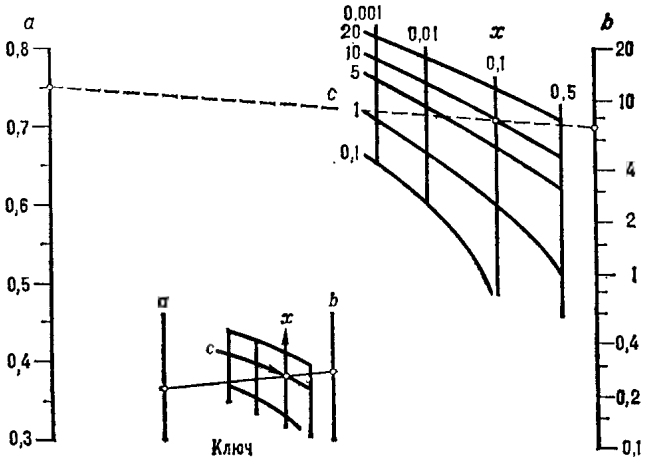


Рис. 3.

равна длине данного отрезка; деление отрезка в заданном отношении; построение параллелограмма по трём его известным вершинам; наложение одной плоскости на другую). К элементарным номограммам относятся: график функции, сдвоенная шкала, сетчатая, из выравненных точек, из равноудалённых точек, циркульная, барицентрическая, ромбоидальная, с ориентированным транспарантом и с транспарантом общего вида.

На рис. 3 приведена элементарная номограмма из выравненных точек для определения величины x из уравнения

$$x^{a-1} = b\,\frac{\ln(c-x)}{c-x-1}\,.$$

Переменные a и b представлены на номограмме шкалами; переменные c и x — бинарным полем. На номограмме показано решение числового примера (дано: $a=0{,}75$; $b=7$; $c=10$; ответ: $x=0{,}1$).

Элементарные номограммы имеют простое геометрич. обоснование: номографич. интерпретация условия расположения трёх точек на одной прямой приводит к номограмме из выравненных точек; формулы расстояния между двумя точками — к номограмме из равноудалённых точек и к циркульной; формулы для координат точки, делящей отрезок в заданном отношении,— к барицентрич. номограмме; формулы для определения координат вершины параллелограмма — к ромбоидальной номограмме; формулы преобразования прямоугольных координат без поворота и с поворотом осей — к номограммам с ориентированным транспарантом и с транспарантом общего вида.

Каждому виду элементарной номограммы соответствует своя канонич. форма зависимости, к-рую можно изобразить номограммой. Нек-рые канонич. формы допускают построение элементарных номограмм различного типа.

Наиболее общая канонич. форма, представимая элементарной номограммой из выравненных точек, имеет вид

$$\frac{f_{34}-f_{12}}{g_{34}-g_{12}} = \frac{f_{56}-f_{12}}{g_{56}-g_{12}}\,.$$

Соответствующая номограмма состоит из трёх бинарных полей (α_1, α_2), (α_3, α_4) и (α_5, α_6), связанных одним выравниванием.

Составными номограммами наз. номограммы, состоящие из элементарных номограмм одного или разных типов.

Всегда номографируемы зависимости с тремя переменными. Зависимости с четырьмя и бо́льшим числом переменных допускают построение номограмм лишь в частных случаях.

Для расширения круга номографируемых зависимостей применяют приближённое номографирование. Оно основано на замене с нек-рой допустимой погрешностью данной зависимости номографируемой.

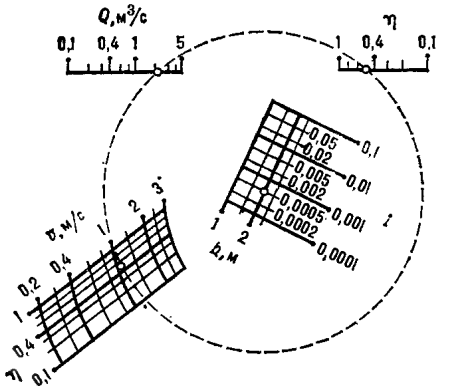


Рис. 4.

На рис. 4 приведена приближённая номограмма из равноудалённых точек для определения величин η и v (или Q и v) из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} Q &= \left(76{,}9+17{,}72\lg\frac{b\eta}{1+2\eta}\right)\frac{b^{2,5}\,\eta^{1,5}\,i^{0,5}}{(1+2\eta)^{0,5}}\,,\\ v &= \left(76{,}9+17{,}72\lg\frac{b\eta}{1+2\eta}\right)\frac{b^{0,5}\,\eta^{0,5}\,i^{0,5}}{(1+2\eta)^{0,5}}\,, \end{aligned}\right\}$$

применяющейся в гидравлике. Эта система для возможности номографирования была заменена системой

$$Q = \frac{76\,b^{2,616}\,\eta^{1,616}\,i^{0,5}}{(1+2\eta)^{0,616}}\,,\qquad v = \frac{76\,b^{0,616}\,\eta^{0,616}\,i^{0,5}}{(1+2\eta)^{0,616}}$$

с относительной погрешностью в величинах Q и v, не превышающей 2,5%. Штриховая окружность на номограмме соответствует решению числового примера (дано: $i=0{,}0005$; $b=2$ м; $Q=2{,}2$ м³/с; ответы: $\eta=0{,}5$ и $v=1{,}1$ м/с).

В нек-рых случаях методы приближённого номографирования дают возможность представить номограммами таблицы с несколькими входами. На рис. 5 приведена номограмма из выравненных точек для табличной ячейки с тремя входами, в к-рой допустима линейная интерполяция по каждой переменной. На номограмме показано решение числового примера (дано: $x=730$; $y=9{,}7$; $z=0{,}204$; ответ: $u=1760$).

z	0,20		0,21	
y \ x	700	800	700	800
Значения u				
9	1729	1714	1707	1761
10	1765	1808	1744	1796

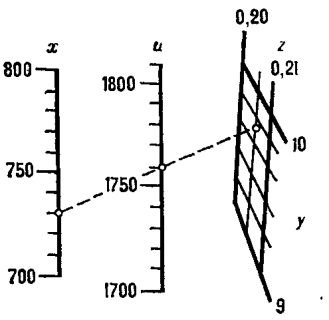


Рис. 5.

Для номографирования данной зависимости её приводят точно или приближённо к номографируемому виду и записывают уравнения элементов номограммы в прямоугольной системе координат. Входящие в эти уравнения параметры преобразования (а иногда и произвольные функции) подбирают так, чтобы придать номограмме удобный

для пользования вид. Далее рассчитывают таблицы координат отдельных элементов номограммы, а затем вычерчивают номограмму.

Получила развитие машинная номография, разработаны системы процедур и стандартных программ для автоматич. расчёта и построения элементов номограмм с помощью ЭВМ и графопостроителя, а также стандартные программы для автоматич. конструирования, расчёта и вычерчивания номограмм различных типов.

Основными проблемами теоретич. Н. являются проблемы представимости и единственности. Суть первой проблемы состоит в том, чтобы выяснить, можно ли заданное уравнение или систему уравнений привести к той или иной канонич. форме, и если возможно, то указать алгоритм такого приведения. Получены решения этой проблемы для нек-рых канонич. форм. Они сложны и на практике не применяются. Суть второй проблемы заключается в том, чтобы выяснить, единственным ли способом приводится данная зависимость к канонич. форме, и если не единственным, то указать все возможные способы и установить возможности преобразования номограмм в каждом из них.

● Пентковский М. В., Номография, М.— Л., 1949; Невский Б. А., Справочная книга по номографии, М.— Л., 1951; Хованский Г. С., Основы номографии, М., 1976.

Г. С. Хованский.

НОННИЛЛИО́Н (франц. nonnillion) — число, изображаемое единицей с 30 нулями, т. е. число 10^{30}. В нек-рых странах Н. наз. число 10^{54}.

НО́РМА (от лат. norma — руководящее начало, правило, образец) — обобщение понятия абсолютной величины числа. Напр., Н. трёхмерного вектора x наз. его длину $||x||$, Н. матрицы A — число $\sup \frac{||Ax||}{||x||}$.

Нормой $||x||$ элемента x векторного пространства X наз. отображение $x \to ||x||$ векторного пространства X над полем действительных или комплексных чисел в совокупность действительных чисел, подчинённое условиям:
$||x|| \geqslant 0$, причём $||x||=0$ только при $x=0$;
$||\lambda x||=|\lambda| \cdot ||x||$ для каждого скаляра λ;
$||x+y|| \leqslant ||x||+||y||$ для всех $x, y \in X$ (аксиома треугольника).

Векторное пространство с Н. наз. *нормированным пространством*. С помощью Н. в нормированном векторном пространстве можно определить Н. для линейных функционалов $f(x)$ по формуле

$$\|f\| = \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

и для линейных операторов A по формуле

$$\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Знак $||\ ||$ для обозначения Н. ввёл Э. Шмидт (1908).

НОРМАЛИЗА́ЦИИ ПРИ́НЦИП — см. *Нормальный алгорифм.*

НОРМА́ЛЬ (франц. normal, от лат. normalis — прямой) к кривой (к поверхности) в данной её точке — прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная к касательной прямой (касательной плоскости) в этой же точке кривой (поверхности). Плоская кривая имеет в каждой точке (кроме нек-рого числа «особых») Н., расположенную в плоскости кривой. Если кривая на плоскости в прямоугольных координатах определяется уравнением $y=f(x)$ и $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то уравнение Н. в точке (x_0, y_0) имеет вид:

$$(x-x_0)+(y-y_0)f'(x_0)=0.$$

Пространственная кривая имеет в каждой своей точке бесчисленное множество Н., заполняющих нек-рую плоскость (нормальную плоскость). Н., лежащая в соприкасающейся плоскости, наз. главной нормалью. Н., перпендикулярную к соприкасающейся плоскости, наз. бинормалью. Касательная, главная Н. и бинормаль образуют подвижный триэдр кривой.

Понятие Н. играет существенную роль не только в дифференциальной геометрии, но и в различных её приложениях: в геометрич. оптике (напр., в формулировке основных законов преломления и отражения световых лучей), в механике (материальная точка или тело при перемещениях по гладким линиям или поверхностям испытывают реакцию, направленную по Н., в консервативном поле силовые линии в каждой точке имеют направление Н. к изопотенциальной поверхности, проходящей через эту точку, и т. д.).

НОРМА́ЛЬНАЯ АКСОНОМЕ́ТРИЯ — см. *Аксонометрия.*

НОРМА́ЛЬНАЯ КРИВИЗНА́ — кривизна *нормального сечения* поверхности.

НОРМА́ЛЬНАЯ МА́ТРИЦА — квадратная матрица A над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, для которой $AA^*=A^*A$, где A^* — сопряжённая матрица. Таким образом, действительная матрица является нормальной, если она перестановочна со своей транспонированной. Унитарные, эрмитовы и косоэрмитовы матрицы нормальны. Н. м. эрмитова (косоэрмитова, унитарна) тогда и только тогда, когда все её собственные значения действительны (чисто мнимы, равны по модулю единице соответственно). Если A и B — Н. м. и $AB=BA$, то AB — Н. м. Н. м. соответствуют *нормальным линейным преобразованиям* унитарного пространства в ортонормированном базисе.

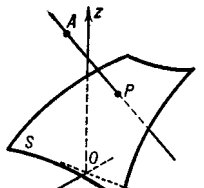
НОРМА́ЛЬНАЯ ПЛО́СКОСТЬ пространственной кривой в данной её точке M — плоскость, проходящая через M перпендикулярно к касательной прямой в той же точке. Н. п. содержит все нормали к кривой, проходящие через данную точку. Если кривая задана в прямоугольных координатах уравнениями $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$, то уравнение Н. п. в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, соответствующей значению t_0 параметра t, может быть написано в виде

$$(x-x_0)\frac{df(t_0)}{dt}+(y-y_0)\frac{dg(t_0)}{dt}+(z-z_0)\frac{dh(t_0)}{dt}=0.$$

НОРМА́ЛЬНАЯ ПОДГРУ́ППА, нормальный делитель, инвариантная подгруппа,— такая подгруппа H группы G, которая вместе со всяким своим элементом содержит и все элементы, сопряжённые с ним в G (см. *Сопряжённый элемент*), что может быть выражено теоретико-множественным включением: $gHg^{-1} \subset H$ для любого $g \in G$.

Данное выше определение наиболее удобно для практич. проверки того, является ли данная подгруппа группы нормальной. Н. п. может быть определена и многими другими эквивалентными способами. Напр., Н. п.— это подгруппы, по к-рым левостороннее и правостороннее разложения на смежные классы совпадают. Н. п.— это подгруппы инвариантные (отображающиеся в себя) относительно всех внутренних автоморфизмов группы. Н. п. и только они служат ядрами гомоморфизмов группы (ядро гомоморфизма φ: $G \to G'$ — множество элементов из G отображающихся в единицу группы G').

По Н. п. может быть построена факторгруппа. Группы без нетривиальных нормальных подгрупп наз. простыми. Все подгруппы абелевой группы нормальны. Пересечение любого множества Н. п., а также подгруппа, порождённая любой системой Н. п. группы G, нормальны в G. Центр группы является её Н. п.



НОРМА́ЛЬНАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция.*

НОРМА́ЛЬНАЯ ПРОИЗВО́ДНАЯ — производная от функции, заданной в пространстве (или на плоскости), взятая по нормали к нек-рой поверхности (соответственно линии, лежащей в той же плоскости). Пусть S — поверхность, P — точка поверхности S, а функция f задана в нек-рой окрестности точки P. Тогда Н. п. от f в точке P равна пределу отношения разности $f(A)-f(P)$ (где A — точка нормали к поверхности S в точке P, стремящаяся к P с одной стороны S) к расстоянию от A до P (рис.). Смотря по тому,

с какой стороны A приближается к P, различают производную от f по внешней и по внутренней нормали к S. Рассмотрение Н. п. особенно важно в теории краевых задач.

НОРМА́ЛЬНАЯ ФО́РМА МА́ТРИЦЫ — матрица N заранее определённого специального вида, получаемая из данной матрицы A с помощью преобразований определённого типа. Часто вместо термина «Н. ф. м.» употребляют термины «каноническая форма» или «канонический вид матрицы». В зависимости от рассматриваемого типа преобразований, от области, к которой принадлежат элементы матрицы A, от вида матрицы A, от специфики рассматриваемой задачи рассматриваются различные Н. ф. м. Наиболее распространённой, классической Н. ф. м. является жорданова нормальная форма (см. *Жорданова матрица*).

НОРМА́ЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕ́НИЯ ФУ́НКЦИЯ, Гаусса интеграл вероятности,— см. *Интеграл вероятности*.

НОРМА́ЛЬНОЕ ЛИНЕ́ЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — линейное преобразование $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства, перестановочное со своим сопряжённым преобразованием $\mathcal{A}^*$, т. е. удовлетворяющее условию

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

В любом ортонормированном базисе Н. л. п. соответствует нормальная матрица, и обратно, из нормальности матрицы нек-рого линейного преобразования $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе следует, что $\mathcal{A}$ — Н. л. п. Линейное преобразование $\mathcal{A}$ конечномерного унитарного пространства L нормально тогда и только тогда, когда в L существует ортонормированный базис из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$, т. е. ортонормированный базис, в к-ром $\mathcal{A}$ записывается диагональной матрицей. Специальными классами Н. л. п. являются: ортогональные (унитарные) линейные преобразования ($\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$), самосопряжённые линейные преобразования ($\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$), кососимметрические (косоэрмитовы) линейные преобразования ($\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$).

НОРМА́ЛЬНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — топологическое пространство, удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_4 (см. *Отделимости аксиомы*), т. е. пространство, в котором одноточечные множества замкнуты и любые два дизъюнктные замкнутые множества содержатся в дизъюнктных открытых множествах. Н. п. образуют частный случай вполне регулярных пространств. Всякое замкнутое (но не всякое) подпространство нормально. Пространство, все подпространства к-рого нормальны, наз. наследственно нормальным. Произведение двух Н. п. не обязано быть Н. п., и даже произведение Н. п. на отрезок может не быть нормальным.

НОРМА́ЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — одно из важнейших распределений вероятностей. Термин «Н. р.» применяют как по отношению к распределениям вероятностей случайных величин, так и по отношению к совместным распределениям вероятностей нескольких случайных величин (т. е. к распределениям конечномерных случайных векторов). Общее определение Н. р. сводится к одномерному случаю.

Распределение вероятностей случайной величины X наз. нормальным, если оно имеет плотность вероятности

$$p(x;\ a,\ \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}. \qquad (*)$$

Семейство Н. р. (*) зависит, таким образом, от двух параметров a и $\sigma>0$. При этом математич. ожидание X равно a, дисперсия X равна σ^2, а характеристич. функция имеет вид

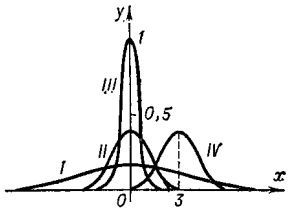
$$f(t) = \mathsf{E}e^{itX} = e^{iat-\sigma^2t^2/2}.$$

Кривая (рис.) Н. р. $y=p(x;\ a,\ \sigma)$ симметрична относительно ординаты, проходящей через точку $x=a$, и имеет в этой точке единственный максимум, равный $1/\sqrt{2\pi}\sigma$. С уменьшением σ кривая Н. р. становится всё более островершинной. Изменение a при постоянном σ не меняет форму кривой, а вызывает лишь её смещение по оси абсцисс. Площадь, заключённая под кривой Н. р., всегда равна единице. При $a=0$, $\sigma=1$ соответствующая функция распределения равна

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du.$$

В общем случае функция распределения Н. р. $F(x;\ a,\ \sigma)$ может быть вычислена по формуле $F(x;\ a,\ \sigma)=\Phi(t)$, где $t=(x-a)/\sigma$. Для функции $\Phi(t)$ (и нескольких её производных) составлены обширные таблицы. Для Н. р. вероятность неравенства $|X-a|>k\sigma$, равная $1-\Phi(k)+\Phi(-k)$, убывает весьма быстро с ростом k (см. табл.).

k	Вероятность
1	0,31731
2	$0{,}45500\cdot10^{-1}$
3	$0{,}26998\cdot10^{-2}$
4	$0{,}63342\cdot10^{-4}$



Кривые плотности нормального распределения для различных значений параметров a и σ: I. $a=0$, $\sigma=2{,}5$; II. $a=0$, $\sigma=1$; III. $a=0$, $\sigma=0{,}4$; IV. $a=3$, $\sigma=1$.

Во многих практич. вопросах при рассмотрении Н. р. пренебрегают возможностью отклонений от a, превышающих 3σ, — т. н. правило трёх сигма (соответствующая вероятность, как видно из табл., меньше 0,003). Вероятное отклонение для Н. р. равно $0{,}67449\sigma$.

Сумма независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, имеющих Н. р. с параметрами $\mathsf{E}X_i=a_i$, $\mathsf{D}X_i=\sigma_i^2$, $i=1, \ldots, n$, подчиняется Н. р. с параметрами $a=a_1+a_2+\ldots+a_n$ и $\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2$.

Н. р. встречается в большом числе приложений. Теоретич. обоснование исключительной роли Н. р. дают *предельные теоремы* теории вероятностей (см. *Лапласа теорема, Ляпунова теорема*). Качественно соответствующий результат может быть объяснён следующим образом: Н. р. служит хорошим приближением каждый раз, когда рассматриваемая случайная величина представляет собой сумму большого числа независимых случайных величин, максимальная из к-рых мала по сравнению со всей суммой.

Н. р. может появляться также как точное решение нек-рых задач (в рамках принятой математич. модели явления). Так обстоит дело в теории случайных процессов (в одной из основных моделей броуновского движения). Классич. примеры возникновения Н. р. как точного принадлежат К. Гауссу (закон распределения ошибок наблюдения) и Дж. Максвеллу (закон распределения скоростей молекул).

Совместное распределение нескольких случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_s$ называется многомерным нормальным, если при любых действительных $t_1, t_2, \ldots, t_s$ случайная величина $X_1t_1+X_2t_2+\ldots+X_st_s$ имеет Н. р. или равна постоянной. Если она ни при каких $t_1, t_2, \ldots, t_s$ не равна постоянной, то совместное распределение $X_1, X_2, \ldots, X_s$ имеет плотность вида

$$p(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = Ce^{-Q(x_1-a_1,\ x_2-a_2,\ \ldots,\ x_s-a_s)},$$

где

$$Q(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_s) = \sum_{k,\ l=1}^{s} q_{kl}x_kx_l,$$

— положительно определённая квадратичная форма $a_1, a_2, \ldots, a_s$ равны математич. ожиданиям $X_1, X_2, \ldots, X_s$ соответственно, а коэффициенты C и $q_{kl}=q_{lk}$ могут быть выражены через дисперсии $\sigma_1^2=\mathsf{D}X_1, \ldots, \sigma_2^2=\mathsf{D}X_2, \ldots, \sigma_s^2=\mathsf{D}X_s$ и коэффициенты корреляции ρ_{kl} между X_k и X_l. Напр., двумерное Н. р. имеет плотность

$$p(x,\ y) = Ce^{-Q(x-a_1,\ y-a_2)},$$

где

$$Q(x-a_1, y-a_2)=\frac{1}{2(1-R^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2R(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right],$$

$$C=\left[2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R^2}\right]^{-1},$$

где a_1, a_2 и σ_1^2, σ_2^2 — математич. ожидания и дисперсии величин X и Y, а R — коэффициент корреляции X и Y:

$$R=\frac{\mathsf{E}[(X-a_1)(Y-a_2)]}{\sigma_1\sigma_2}.$$

Общее количество параметров, задающих Н. р., равно $\frac{(s+1)(s+2)}{2}-1$ и быстро растёт с ростом s (равно 2 при $s=1$, 20 при $s=5$ и 65 при $s=10$). Многомерное Н. р. служит основной моделью многомерного статистического анализа. Оно используется также в теории случайных процессов (где рассматривают также Н. р. в бесконечномерных пространствах).

О вопросах, связанных с оценкой параметров Н. р. по результатам наблюдений, см. *Несмещённая оценка*, *Статистическая оценка*. О проверке гипотезы нормальности см. *Непараметрические методы* (в математической статистике). Об истории Н. р. в теории вероятностей см. в ст. *Гаусса закон*, *Гаусса — Лапласа распределение*. Термин «нормальное распределение» принадлежит К. Пирсону.

● Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983; Таблицы нормального интеграла вероятностей, нормальной плотности и ее нормированных производных, М., 1960; Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969; Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975. *Ю. В. Прохоров.*

НОРМА́ЛЬНОЕ СЕЧЕ́НИЕ поверхности S в данной её точке M — линия пересечения S с плоскостью, проведённой через нормаль в точке M. С помощью Н. с. изучается искривление поверхности S в различных (касательных) направлениях, выходящих из точки M. Среди этих направлений имеются два (взаимно перпендикулярных) т. н. главных направления, для к-рых нормальная кривизна (т. е. кривизна соответствующего Н. с.) достигает наибольшего и наименьшего значений k_1 и k_2 (т. н. главные кривизны в данной точке); при этом кривизны Н. с. берутся со знаком + (или —), если направление вогнутости сечения совпадает (противоположно) с положительным направлением нормали к поверхности. Нормальные кривизны поверхности в произвольных направлениях весьма просто выражаются через главные кривизны. Именно, кривизна k_n Н. с., проведённого в направлении, составляющем угол φ с первым из указанных выше главных направлений, связана с k_1 и k_2 формулой Эйлера:

$$k_n=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi.$$

С помощью кривизн Н. с. изучаются также кривизны наклонных сечений поверхности. Именно, кривизна наклонного сечения плоскостью π, проходящей через данную касательную прямую, выражается формулой Мёнье:

$$k=k_n/\cos\theta,$$

где θ — угол между плоскостью π и нормалью к поверхности, k_n — нормальная кривизна поверхности в направлении данной касательной.

НОРМА́ЛЬНОЕ УРАВНЕ́НИЕ плоскости, прямой — см. *Плоскость*, *Прямая линия*.

НОРМА́ЛЬНЫЕ УРАВНЕ́НИЯ — см. *Наименьших квадратов метод*.

НОРМА́ЛЬНЫЙ АЛГОРИ́ФМ — название, закрепившееся за *алгоритмами* некоторого точно охарактеризованного типа. Наряду с *рекурсивными функциями* и *Тьюринга машинами* Н. а. получили известность в качестве одного из наиболее удобных уточнений общего интуитивного представления об алгоритме. Понятие Н. а. было выработано в 1947 А. А. Марковым в ходе его исследований по проблеме тождества для ассоциативных систем (проблем Туэ).

Всякий Н. а. $\mathfrak{A}$, являясь алгоритмом в нек-ром алфавите A, порождает в нём детерминированный процесс переработки слов. Указание этого алфавита входит в определение Н. а. $\mathfrak{A}$ в качестве обязательной составной части, и в рассматриваемой ситуации про Н. а. $\mathfrak{A}$ говорят, что он является Н. а. в алфавите A. Любой Н. а. в фиксированном алфавите A вполне определяется указанием его схемы — упорядоченного конечного списка формул подстановки в A. Каждая такая формула по существу представляет собой упорядоченную пару (U, V) слов в A. Слово U наз. левой частью этой формулы, а V — её правой частью. Среди вхождений формул в данную схему нек-рые выделяются специально и объявляются заключительными. Обычно в схеме Н. а. заключительная формула записывается в виде $U\to\cdot V$, а незаключительная — в виде $U\to V$.

Н. а. $\mathfrak{A}$ в алфавите A есть предписание строить, исходя из произвольного слова P в A, последовательность слов P_i согласно следующему правилу. Слово P берётся в качестве начального члена P_0 этой последовательности, и процесс её построения продолжается далее. Пусть для нек-рого $i\geqslant 0$ слово P_i построено и процесс построения рассматриваемой последовательности ещё не завершился. Если в схеме Н. а. $\mathfrak{A}$ нет формул, левые части к-рых входили бы в P_i, то P_{i+1} полагают равным P_i, и процесс построения последовательности на этом считается закончившимся. Если же в схеме $\mathfrak{A}$ имеются формулы с левыми частями, входящими в P_i, то в качестве P_{i+1} берётся результат подстановки правой части первой из таких формул вместо первого вхождения её левой части в слово P_i; при этом процесс построения последовательности считается завершившимся, если применённая на этом шаге формула подстановки была заключительной, и продолжающимся в противном случае. Если процесс построения упомянутой последовательности обрывается, то говорят, что рассматриваемый Н. а. $\mathfrak{A}$ применим к слову P. Последний член Q этой последовательности считается результатом применения Н. а. $\mathfrak{A}$ к слову P и обозначается символом $\mathfrak{A}(P)$. При этом говорят, что $\mathfrak{A}$ перерабатывает P в Q, и пишут $\mathfrak{A}(P)=Q$. Н. а. в каком-либо расширении алфавита A наз. Н. а. над этим алфавитом.

Имеются веские основания считать, что уточнение общего представления об алгоритме в алфавите, произведённое с помощью понятия Н. а., является адекватным. Именно, считается, что для всякого алгоритма $\mathfrak{A}$ в к.-л. алфавите A может быть построен Н. а. $\mathfrak{B}$ над этим алфавитом, перерабатывающий произвольное слово P в A в тот же самый результат, в к-рый перерабатывает его исходный алгоритм $\mathfrak{A}$. Это соглашение известно в теории алгоритмов под названием принципа нормализации. Уточнение понятия алгоритма, осуществлённое на основе понятия Н. а., оказывается эквивалентным другим известным уточнениям. Вследствие этого принцип нормализации равносилен тезису Чёрча, предлагающему считать понятие частично рекурсивной функции адекватным уточнением понятия вычислимой арифметич. функции.

Возникшие первоначально в связи с алгебраич. проблематикой Н. а. оказались удобным рабочим аппаратом во многих исследованиях, требующих точного понятия алгоритма, — особенно тогда, когда основные объекты рассмотрения допускают удобное представление в виде слов в нек-рых алфавитах (такова, напр., ситуация в *конструктивном анализе*).

● Марков А. А., Теория алгорифмов, М.— Л., 1954; Марков А. А., Нагорный Н. М., Теория алгорифмов, М., 1984; Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., 3 изд., М., 1984. *Н. М. Нагорный.*

НОРМА́ЛЬНЫЙ ВЕ́КТОР плоскости — см. *Плоскость*.

НОРМА́ЛЬНЫЙ ДЕЛИ́ТЕЛЬ — то же, что *нормальная подгруппа*.

НОРМА́ЛЬНЫЙ ОПЕРА́ТОР — замкнутый линейный оператор A, определённый на плотном в гильбертовом про-

странстве H линейном многообразии D_A, такой, что $AA^*=A^*A$, где A^* — оператор, сопряжённый с A. Если A — Н. о., то $D_A=D_{A^*}$ и $||A||=||A^*||$. Обратно, выполнение этих условий обеспечивает нормальность A. Если A есть Н. о., то A^* также нормален.

НОРМА́ЛЬНЫЙ РЯД группы — ряд подгрупп

$$G=G_1\supseteq G_2\supseteq\ldots\supseteq G_k=E$$

группы G, где G_i — нормальная подгруппа в G_{i-1}. Наряду с конечными, рассматриваются также бесконечные возрастающие или убывающие (по включению) Н. р. Их члены нумеруются порядковыми числами (трансфинитами). Фактором ряда наз. факторгруппа нек-рого члена ряда по следующему (или предыдущему, если рассматриваемый ряд записан в порядке возрастания членов). Длиной ряда наз. количество его факторов, отличных от единицы. Два Н. р. наз. изоморфными, если между их факторами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что соответствующие друг другу факторы изоморфны.

НОРМИ́РОВАНИЕ — отображение φ поля K в множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, удовлетворяющее условиям: 1) $\varphi(x)\geqslant 0$ и $\varphi(x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$; 2) $\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$; 3) $\varphi(x+y)\leqslant\varphi(x)+\varphi(y)$. Такое отображение наз. также нормой или вещественным абсолютным значением. Аналогично определяется Н. для тела. Вместо $\varphi(x)$ часто пишут $|x|$.

Примеры Н. Если $K=\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, то абсолютная величина числа $|x|=\max\{x, -x\}$ является Н. поля $\mathbb{R}$. Аналогично, если K — поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел или тело $\mathbb{H}$ кватернионов, то $|x|=\sqrt{x\cdot\bar{x}}$ есть Н. Любое тело имеет тривиальное Н.: $\varphi(x)=0$ при $x=0$ и $\varphi(x)=1$ при $x\neq 0$.

Н. наз. неархимедовым, если оно удовлетворяет условию: 4) $\varphi(x+y)=\max\{\varphi(x), \varphi(y)\}$, и архимедовым, если это условие не выполняется. Все архимедовы нормирования тел описываются следующей теоремой: если K — тело с архимедовой нормой, то оно изоморфно нек-рому всюду плотному подполю поля действительных или комплексных чисел или подтелу тела кватернионов с индуцированным оттуда Н. Любое нетривиальное Н. поля рациональных чисел совпадает либо с обычной абсолютной величиной, либо с p-адическим Н. (см. *p-адическое число*).

НОРМИ́РОВАННАЯ А́ЛГЕБРА — алгебра A над полем действительных или комплексных чисел, являющаяся одновременно нормированным пространством, умножение в которой непрерывно; распространённое условие этого — выполнение неравенства

$$\|xy\|\leqslant\|x\|\,\|y\|$$

для всех x, y из A.

НОРМИ́РОВАННОЕ ПРОСТРА́НСТВО — векторное пространство X, наделённое *нормой* $\|x\|$, $x\in X$. Норма индуцирует на X метрику $\rho(x, y)=\|x-y\|$ и, следовательно, топологию, совместимую с этой метрикой. Полные относительно указанной метрики пространства наз. банаховыми пространствами. Н. п. тогда и только тогда является гильбертовым, когда

$$\|x+y\|+\|x-y\|=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

для x, $y\in X$.

Отделимое топологическое векторное пространство нормируемо, если его топология совместима с нек-рой нормой. Нормируемость равносильна существованию выпуклой ограниченной окрестности нуля (теорема Колмогорова).

НОРМИ́РОВАННОЕ УРАВНЕ́НИЕ плоскости, прямой — см. *Плоскость*, *Прямая линия*.

НОСИ́ТЕЛЬ — 1) Н. алгебраической системы — см. *Алгебраическая система*.

2) Н. краевых условий — см. *Краевая задача*.

3) Н. пучка — см. *Пучок*.

НУЛЕВА́Я МА́ТРИЦА — матрица, все элементы к-рой нули.

НУЛЕВО́Й ВЕ́КТОР — см. *Вектор*.

НУЛЕВО́Й МЕРИДИА́Н — см. *Сферическая геометрия*.

НУЛЕВО́Й ОПЕРА́ТОР — см. *Оператор*.

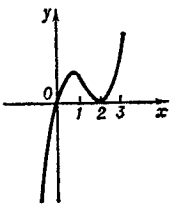
НУЛЬ (от лат. nullus — никакой) — число, обладающее тем свойством, что любое число при сложении с ним не меняется. Н. обозначается символом 0. Произведение любого числа на Н. равно Н.:

$$a\cdot 0=0\cdot a=0.$$

Если произведение двух действительных или комплексных чисел равно Н., то один из сомножителей должен быть равен Н.: из $ab=0$ следует, что или $a=0$, или $b=0$. Деление на Н. невозможно.

В коммутативной аддитивно записываемой группе Н. наз. элемент 0, для к-рого $a+0=0+a=a$, где a — любой элемент группы. В кольце Н. определяется так же; там для Н. всегда выполняется равенство $a\cdot 0=0\cdot a=0$. Однако если произведение двух элементов кольца равно Н., то из этого не следует, что один из сомножителей равен Н., если $ab=0$, причём $a\neq 0$ и $b\neq 0$, то элементы a и b наз. делителями нуля.

НУЛЬ функции — точка x_0, в к-рой заданная функция $f(x)$ обращается в нуль, т. е. $f(x_0)=0$. Напр., для функции $3x-2$ точка $x_0=2/3$ является Н. Нек-рые функции не имеют Н., напр. e^x, у других, напр. у тригонометрич. функций, число Н. бесконечно. Н. функции $f(x)$ — то же самое, что и корни соответствующего уравнения $f(x)=0$. Действительное число наз. m-кратным нулём (нулём порядка m) многочлена P, если x_0 — m-кратный корень уравнения $f(x_0)=0$. Н. функции одного переменного $f(x)$ соответствуют точкам пересечения графика $y=f(x)$ с осью Ox или точками касания оси Ox. Например, функция $y=x^3-4x^2+4x$ имеет два Н.— простой (в точке $x_1=0$) и двукратный (в точке $x_2=2$) (рис.); функция $y=\sin x$ имеет бесконечное число простых Н.— в точках 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ...



Н. аналитич. функции $f(z)$ одного комплексного переменного z являются изолированными точками. Для каждого Н. z_0 существует натуральное число m — порядок нуля — такое, что $f(z_0)=0$, $f'(z_0)=0$, ..., $f^{(m-1)}(z_0)=0$, но $f^{(m)}(z_0)\neq 0$, $m\geqslant 1$; напр., для нулей функции $1-\cos z$ порядок $m=2$. Если $m=1$, Н. наз. простым, если $m>1$ — кратным. Напротив, аналитич. функции многих комплексных переменных $f(z_1, \ldots, z_n)$, $n>1$, не могут иметь изолированных Н.

НУЛЬА́РНАЯ ОПЕРА́ЦИЯ — см. *Алгебраическая операция*.

НУЛЬ — ЕДИНИ́ЦА ЗАКО́Н — утверждение в теории вероятностей о том, что всякое событие (т. н. остаточное событие), наступление к-рого определяется лишь сколь угодно удалёнными элементами последовательности независимых случайных событий или случайных величин, имеет вероятность нуль или единица.

Для отдельных остаточных событий равенство их вероятностей нулю или единице было установлено в нач. 20 в. Так, если A_1, A_2, ..., A_n, ...— нек-рая последовательность независимых событий, то для остаточного события A, состоящего в том, что наступает бесконечно много событий A_k:

$$A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,$$

обязательность одного из равенств

$$P(A)=0 \quad\text{или}\quad P(A)=1$$

была отмечена Э. Борелем (1909).

Далее, если X_1, X_2, ..., X_n, ...— последовательность независимых случайных величин, то вероятность сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}X_k$ может быть равна только нулю или единице; этот факт (одновременно с критерием, позволяющим различать эти два случая) был установлен А. Н. Колмогоровым (1928).

НУЛЬМЕ́РНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — топологическое пространство, обладающее базой, состоящей из множеств одновременно открытых и замкнутых в нём.

НУЛЬ-ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ — *фундаментальная последовательность*, предел к-рой равен нулю.

НУМЕРА́ЦИЯ (от лат. numero — считаю), с ч и с л е н и е, — совокупность приёмов наименования и обозначения чисел. См. *Счисление*, *Цифры*.

НУМЕРА́ЦИЯ в м а т е м а т и ч е с к о й л о г и к е — см. *Арифметизация*.

НЬЮТО́НА БИНО́М — название формулы, выражающей любую целую положительную степень суммы двух слагаемых (бинома) через степени этих слагаемых, а именно:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}a^{n-k}b^k + \ldots + b^n, \qquad (1)$$

где n — целое положительное число, a и b — какие угодно числа.

Частными случаями Н. б. при $n=2$ и $n=3$ являются известные формулы для квадрата и куба суммы a и b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

при $n=4$ получают

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

и т. д.

Коэффициенты формулы (или разложения) Н. б. наз. б и н о м и а л ь н ы м и к о э ф ф и ц и е н т а м и; коэффициент при $a^{n-k}b^k$ обозначается C_n^k или $\binom{n}{k}$. Биномиальные коэффициенты обладают многими замечательными свойствами: все они целые положительные числа; крайние коэффициенты равны единице; коэффициенты членов, равноотстоящих от концов, одинаковы; коэффициенты возрастают от краёв к середине; сумма всех коэффициентов равна 2^n. Особенно важное значение имеет следующее свойство: сумма двух соседних коэффициентов в разложении $(a+b)^n$ равна определённому коэффициенту в разложении $(a+b)^{n+1}$; напр., суммы $1+3$, $3+3$, $3+1$ соседних коэффициентов в формуле для $(a+b)^3$ дают коэффициенты 4, 6 и 4 в формуле для $(a+b)^4$. Вообще:

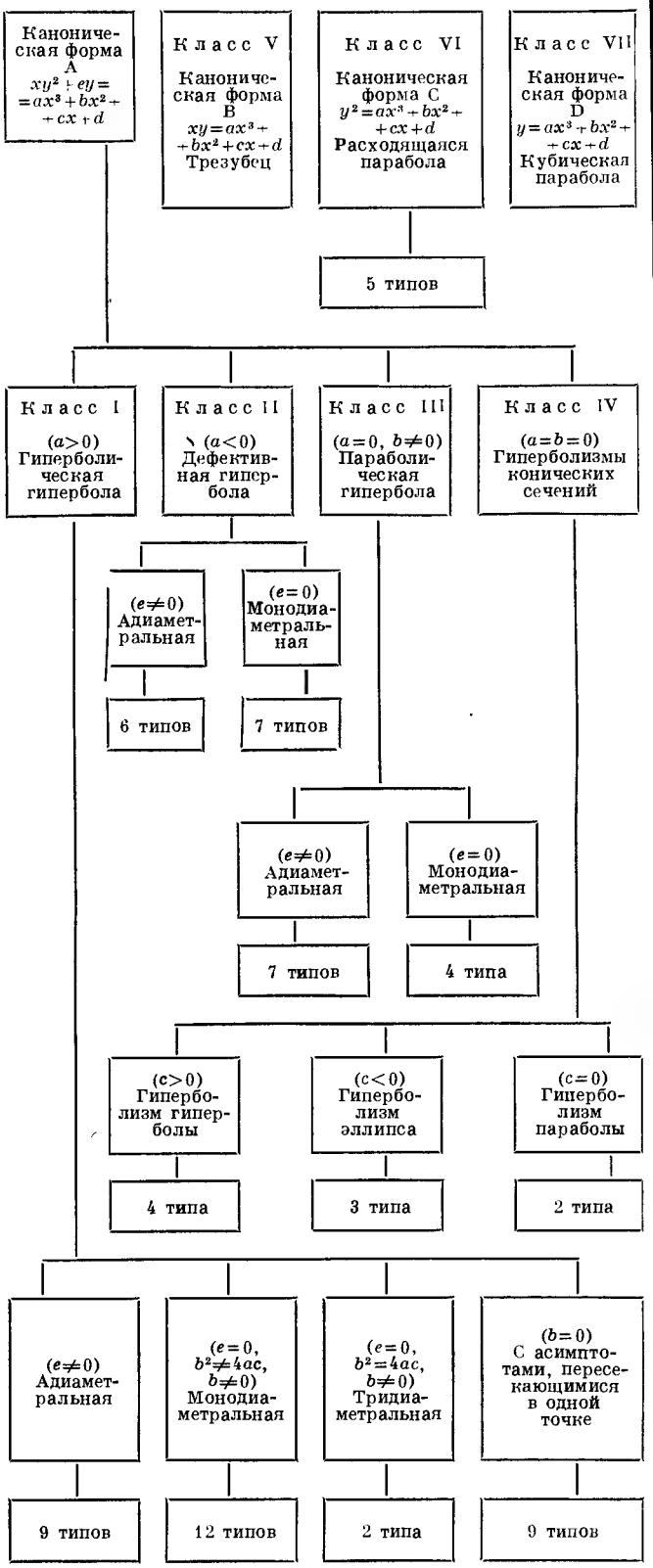
$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}. \qquad (2)$$

Пользуясь этим свойством, можно, отправляясь от известных коэффициентов для $(a+b)^1$, получить путём сложения биномиальные коэффициенты для любого n (см. *Паскаля треугольник*).

Формула Н. б. для целых положительных показателей была известна задолго до И. Ньютона; но им была указана (1664—65) возможность распространения этого разложения и на случай дробного или отрицательного показателя (хотя строгое обоснование этого было дано лишь Н. Абелем, 1826). В этом более общем случае формула Н. б. начинается так же, как формула (1); коэффициентом при $a^{n-k}b^k$ служит выражение $\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}$, к-рое, в случае целого положительного n, обращается в нуль при всяком $k>n$, вследствие чего формула (1) содержит лишь конечное число членов. В случае же дробного или отрицательного n все биномиальные коэффициенты отличны от нуля, и правая часть формулы содержит бесконечный ряд членов (б и н о м и а л ь н ы й р я д). Если $|b|<|a|$, то этот ряд сходится, то есть, взяв достаточно большое число его членов, можно получить величину, сколь угодно близкую к $(a+b)^n$.

НЬЮТО́НА ИНТЕРПОЛЯЦИО́ННАЯ ФО́РМУЛА — форма записи интерполяционной формулы Лагранжа, исполь-

КЛАССИФИКАЦИЯ НЬЮТОНА КРИВЫХ 3-ГО ПОРЯДКА



зующая разделённые разности:

$$L_n(x) = f(x_0) + (x-x_0) f(x_0; x_1) + (x-x_0)(x-x_1) f(x_0; x_1; x_2) + \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_n), \quad (*)$$

где $f(x_0; x_1; \ldots; x_k)$ — разделённые разности k-го порядка. Формула (*) наз. Н. и. ф. для неравных промежутков. В случае равноотстоящих узлов, введя обозначение $(x-x_0)/h=t$ и выразив разделённые разности через конечные, получают запись многочлена $L_n(x)$ в форме

$$L_n(x) - L_n(x_0+th) = f_0 + tf^1_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2!} f_1^2 + \ldots + \frac{t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n+1)}{n!} f^n_{n/2},$$

к-рая наз. Н. и. ф. для интерполирования вперёд. Если такая замена переменных производится в интерполяционном многочлене $L_n(x)$, записанном по узлам $x_0, x_{-1}, \ldots, x_{-n}$, где $x_{-k}=x_0-kh$, то получается Н. и. ф. для интерполирования назад:

$$L_n(x) - L_n(x_0+th) = f_0 + tf^1_{-1/2} + \frac{t(t+1)}{2!} f^2_{-1} + \ldots + \frac{t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t+n-1)}{n!} f^n_{-n/2}.$$

НЬЮТОНА КЛАССИФИКА́ЦИЯ — классификация плоских действительных алгебраических кривых 3-го порядка, предложенная И. Ньютоном в 1704. В основе её лежит подразделение кривых 3-го порядка на классы в зависимости от количества и характера бесконечных ветвей. Уравнение кривой надлежащим выбором координатной системы приводится к одной из четырёх канонич. форм A, B, C, D, к-рые затем разделяются на классы, подклассы и типы (см. схему на стр. 420).

НЬЮТОНА МЕ́ТОД, м е т о д к а с а т е л ь н ы х,— метод приближённого нахождения корней действительного уравнения

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где f — дифференцируемая функция. Последовательные приближения Н. м. вычисляются по формулам

$$x^{k+1} = x^k - [f'(x^k)]^{-1} f(x^k), \quad k=0, 1, 2, \ldots \quad (2)$$

Если функция f дважды непрерывно дифференцируема, x^* — простой корень уравнения (1) и начальное приближение x^0 лежит достаточно близко к x^*, то Н. м. обладает квадратичной сходимостью, т. е.

$$|x^{k+1} - x^*| \leqslant c\,|x^k - x^*|^2,$$

где c — константа, зависящая только от функции f и начального приближения x^0.

Часто вместо (2) для решения задачи (1) применяется т. н. м о д и ф и ц и р о в а н н ы й м е т о д Н ь ю т о н а:

$$x^{k+1} = x^k - [f'(x_0)]^{-1} f(x^k). \quad (3)$$

При тех же предложениях, при к-рых Н. м. имеет квадратичную сходимость, метод (3) имеет линейную сходимость, т. е. сходится со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем, меньшим единицы.

Применительно к решению нелинейного операторного уравнения $A(u)=0$ с оператором $A: B_1 \to B_2$, где B_1 и B_2 — нек-рые банаховы пространства, обобщение (2) наз. м е т о д о м Н ь ю т о н а — К а н т о р о в и ч а. Формулы этого метода имеют вид

$$u^{k+1} = u^k - [A'(u^k)]^{-1} A(u^k), \quad k=0, 1, \ldots,$$

где $A'(u^k)$ — производная Фреше оператора A в точке u^k, являющаяся обратимым оператором, действующим из B_1 в B_2. При специальных предложениях метод Ньютона — Канторовича обладает квадратичной сходимостью, а соответствующий модифицированный метод — линейной сходимостью. См. также *Интерполирование*, *Канторовича процесс*.

Метод разработан И. Ньютоном (1669).

НЬЮТОНА МЕ́ТОД с д р о б л е н и е м ш а г а — см. *Вариационное исчисление*; численные методы.

НЬЮТОНА ФО́РМУЛЫ — рекуррентные соотношения для степенных сумм $S_m=\sum_{k=1}^n x_k^m$ корней алгебраического уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$:

$$S_m + a_1 S_{m-1} + a_2 S_{m-2} + \ldots + ma_m = 0, \quad m \geqslant 1.$$

Найдены И. Ньютоном (1707). Эти же формулы дают связь между элементарными *симметрическими многочленами* и степенными суммами.

НЬЮТОНА—КАНТОРО́ВИЧА МЕ́ТОД — обобщение *Ньютона метода*, предложенное Л. В. Канторовичем (1948). См. также *Канторовича процесс*.

НЬЮТОНА—КО́ТЕСА КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — интерполяционная квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^{(n)} f\left(x_k^{(n)}\right),$$

где $[a, b]$ конечен, узлы $x_k^{(n)}=a+kh$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$,— равноотстоящие, $h=(b-a)/n$, число узлов $n+1$. При $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$ все коэффициенты $B_k^{(n)}$ положительны, при $n=8$ и $n\geqslant 10$ среди них имеются как положительные, так и отрицательные. По этой причине Н.— К. к. ф. не рекомендуется применять при больших n. Формула точна для многочленов степени n при n нечётном и равна $n+1$ при n чётном. Простейшие частные случаи Н.— К. к. ф.: *трапеций формула* ($n=1$), *Симпсона формула* ($n=2$).

Н.— К. к. ф. впервые появилась в письме И. Ньютона к Г. Лейбницу в 1676, а затем в книге Р. Котеса (1722), где указаны коэффициенты формул при $n=2, 3, \ldots, 10$.

НЬЮТОНА—ЛЕ́ЙБНИЦА ФО́РМУЛА — см. *Интегральное исчисление*. Правило, выражаемое Н.—Л. ф., было известно И. Ньютону и Г. Лейбницу, чем и объясняется название.

НЬЮТОНОВ ПОТЕНЦИА́Л — см. *Потенциал*.

О

О́БЛАСТЬ — связное открытое множество в евклидовом пространстве, т. е. множество, удовлетворяющее следующим условиям: при любом разбиении его на две части хотя бы одна из них содержит предельную точку другой, и каждая точка входит в него вместе с нек-рой своей окрестностью. Так, на плоскости внутренность круга есть О., а совокупность внутренних точек двух касающихся извне кругов, будучи открытым множеством, не является О. Иногда О. наз. всякое открытое множество; тогда О. в смысле данного выше определения наз. с в я з н о й о б л а с т ь ю. О. на прямой представляет собой открытый интервал, конечный или бесконечный (см. *Интервал и сегмент*). О. на плоскости бесконечно разнообразней. Понятие «О.» может быть без изменений определено в любом топологич. пространстве. См. также *Многосвязная область*, *Односвязная область*.

О́БЛАСТЬ ЗНАЧЕ́НИЙ ф у н к ц и и, м н о ж е с т в о з н а ч е н и й ф у н к ц и и,— множество всех элементов, которые заданной функцией поставлены в соответствие элементам из её области определения, т. е. если $f: X \to Y$, то множеством значений функции f наз. множество Y_f всех таких элементов $y \in Y$, для каждого из которых существует такой элемент $x \in X$, что $f(x)=y$. Таким образом,

О. з. функции является образом её области определения.

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕ́НИЯ функции — множество, на котором задана рассматриваемая функция, т. е. совокупность X всех тех элементов x, каждому из которых данная функция f ставит в соответствие элемент y из некоторого множества Y; таким образом, если $f\colon X \to Y$, то X наз. О. о. функции.

ОБЛАСТЬ СХОДИ́МОСТИ — множество точек сходимости функционального ряда, т. е. множество значений переменного x, для которых ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

сходится.

Простую форму О. с. имеют степенные ряды. Для действительных значений аргумента x О. с. состоит либо из одной точки, либо является нек-рым интервалом (*интервалом сходимости*), либо совпадает со всей осью x. Если рассматривать и комплексные значения аргумента x, то О. с. степенного ряда состоит либо из одной точки, либо из внутренности нек-рого круга (*круга сходимости*), либо из всей плоскости комплексного аргумента. Ряды других видов могут иметь более сложные О. с., напр., для рядов по многочленам Лежандра в комплексной области О. с. есть внутренность эллипса с фокусами в точках -1 и 1.

О. с. определяется также и для других видов предельных процессов. Так, под О. с. несобственного интеграла, зависящего от параметра, понимают множество значений этого параметра, при к-рых данный несобственный интеграл сходится.

ОБЛАСТЬ ЦЕ́ЛОСТНОСТИ, целостное кольцо,— коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля. Примерами О. ц. служат поля, а также любые кольца с единицей, содержащиеся в нек-ром поле (первоначально О. ц. называли совокупность целых алгебраич. чисел, принадлежащих нек-рому полю алгебраич. чисел). Кольцо многочленов с коэффициентами из О. ц. является О. ц. Любая О. ц. может быть вложена в нек-рое поле, т. е. изоморфна нек-рому подкольцу этого поля.

Иногда в определении О. ц. не требуют коммутативности кольца. Некоммутативными О. ц. являются тела и любые их подкольца с единицей. Однако не любую некоммутативную О. ц. можно вложить в тело.

ОБОБЩЁННАЯ ПРОИЗВО́ДНАЯ — распространение понятия производной на некоторые классы недифференцируемых функций. Первое определение принадлежит С. Л. Соболеву (1936), к-рый подошёл к определению О. п. с точки зрения введённого им понятия обобщённой функции. Пусть f и φ — функции, интегрируемые по Лебегу на любом замкнутом ограниченном множестве Ω в $\mathbb{R}^n$. Тогда φ есть О. п. от f по x_j на Ω:

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

если для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции ψ в Ω имеет место равенство

$$\int_\Omega f \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega \varphi\psi\, dx.$$

ОБОБЩЁННАЯ СУ́ММА РЯДА — см. *Суммирование*.

ОБОБЩЁННАЯ ФУ́НКЦИЯ — математическое понятие, обобщающее классическое понятие функции. Потребность в таком обобщении возникает во многих физич. и математич. задачах. Понятие О. ф., с одной стороны, даёт возможность выразить в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как плотность материальной точки, (пространственная) плотность простого или двойного слоя, интенсивность мгновенного источника и т. д. С другой стороны, в понятии О. ф. находит отражение тот факт, что реально нельзя измерить значение физич. величины в точке, а можно измерять лишь её средние значения в достаточно малых окрестностях данной точки. Таким образом, О. ф. служат адекватным аппаратом для описания распределений различных физич. величин. Поэтому О. ф. иногда называют распределениями.

О. ф. были введены впервые в кон. 20-х гг. 20 в. П. Дираком в его исследованиях по квантовой механике, где он систематически использует понятие дельта-функции и её производных. Основы математич. теории О. ф. были заложены С. Л. Соболевым (1936) и применены им для решения задачи Коши для гиперболич. уравнений, а в послевоенные годы Л. Шварц дал систематич. изложение теории О. ф. В дальнейшем теорию О. ф. интенсивно развивали многие математики, гл. обр. в связи с потребностями математич. физики и теории дифференциальных уравнений. Теория О. ф. имеет многочисленные применения и всё шире входит в обиход физика, математика и инженера.

Формально О. ф. определяются как линейные непрерывные функционалы над тем или иным векторным пространством основных функций $\{\varphi(x)\}$. Основным пространством функций является, напр., совокупность бесконечно дифференцируемых финитных функций, снабжённая надлежащей сходимостью (или, точнее, топологией). При этом обычные локально суммируемые функции $f(x)$ отождествляются с функционалами (регулярными О. ф.) вида

$$(f,\ \varphi) = \int f(x)\,\varphi(x)\,dx. \qquad (1)$$

Производная О. ф. f определяется как функционал f', задаваемый равенством

$$(f',\ \varphi) = -(f,\ \varphi'). \qquad (2)$$

При таком соглашении каждая О. ф. бесконечно дифференцируема (в обобщённом смысле). Равенство (2) в силу (1) есть не что иное, как обобщение формулы интегрирования по частям для дифференцируемых в обычном смысле функций $f(x)$, так что в этом случае оба понятия производной совпадают.

Сходимость на (линейном) множестве О. ф. вводится как слабая сходимость функционалов. Оказывается, что операция дифференцирования О. ф. непрерывна, а сходящаяся последовательность О. ф. допускает почленное дифференцирование бесконечное число раз.

Вводятся и другие операции над О. ф., напр. *свёртка функций*, *Фурье преобразование*, *Лапласа преобразование*. Теория этих операций приобретает наиболее простую и законченную форму в рамках понятия О. ф., расширяющих возможности классич. математич. анализа. Поэтому использование О. ф. существенно расширяет круг рассматриваемых задач и к тому же приводит к значительным упрощениям, автоматизируя элементарные операции.

Примеры. 1) δ-функция Дирака

$$(\delta,\ \varphi) = \varphi(0)$$

описывает плотность массы (заряда) 1, сосредоточенной в точке $x=0$, единичный импульс.

2) $\theta(x)$ — функция Хевисайда:

$$\theta(x) = 0, \quad x \leqslant 0; \quad \theta(x) = 1, \quad x > 0, \quad \theta' = \delta;$$

производная от неё равна единичному импульсу.

3) $-\delta'$ — плотность диполя момента 1 в точке $x=0$, ориентированного вдоль оси x.

4) $\mu\delta_S$ — плотность простого слоя на поверхности S с поверхностной плотностью μ:

$$(\mu\delta_S,\ \varphi) = \int_S \mu(x)\,\varphi(x)\,dS.$$

5) $-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$ — плотность двойного слоя на двусторонней поверхности S с поверхностной плотностью момента ν диполей, ориентированных вдоль направления нормали n:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S),\ \varphi\right) = \int_S \nu(x)\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n}\,dS.$$

6) Свёртка

$$V = f * \frac{1}{|x|}$$

— ньютонов потенциал с плотностью f, где f — любая О. ф. [напр., из 1), 3), 4) или 5)],— удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V = -4\pi f.$$

7) Общее решение уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

выражается обобщённой формулой Д'Аламбера

$$u(x, t) = f(x+at) + g(xt - at),$$

где f и g — любые О. ф.

● Владимиров В. С., Обобщённые функции в математической физике, 2 изд., М., 1979. *В. С. Владимиров.*

ОБРАЗ элемента $a \in A$ при отображении φ множества A в множество B — тот элемент $b \in B$, в который отображается элемент a; при этом элемент a наз. прообразом элемента b.

ОБРАЗУЮЩАЯ — см. *Линейчатая поверхность*, *Конус*, *Цилиндр*.

ОБРАЗУЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ — то же, что *порождающие элементы*.

ОБРАТНАЯ ГОМОТЕТИЯ — см. *Гомотетия*.

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА для квадратной матрицы A порядка n — квадратная матрица B того же порядка такая, что $AB=BA=E$, где E — единичная матрица порядка n. О. м. обозначается A^{-1}. Матрица, обладающая О. м., наз. обратимой. В случае матриц над полем О. м. для матрицы $A = \|a_{ij}\|_1^n$ существует тогда и только тогда, когда A невырождена, т. е. определитель $|A| \neq 0$; в этом случае О. м. единственна и её элементы b_{ij} находятся по формуле

$$b_{ij} = A_{ji}/|A|,$$

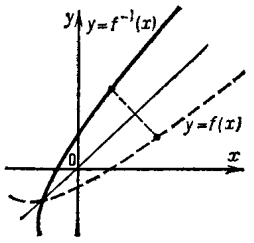
где A_{ji} — алгебраич. дополнение элемента a_{ji} матрицы A.

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА — теорема, условием которой служат заключение исходной (прямой) теоремы, а заключением — условие. Обратной к О. т. будет исходная (прямая) теорема. Таким образом, прямая и О. т. взаимно обратны. Напр., теоремы: «если два угла треугольника равны, то их биссектрисы равны» и «если две биссектрисы треугольника равны, то соответствующие им углы равны» — являются обратными друг другу. Из справедливости к.-н. теоремы, вообще говоря, не следует справедливость обратной к ней теоремы. Напр., теорема: «если число делится на 6, то оно делится на 3» — верна, а О. т.: «если число делится на 3, то оно делится на 6» — неверна. Даже если О. т. верна, для её доказательства могут оказаться недостаточными средства, используемые при доказательстве прямой теоремы. Напр., в евклидовой геометрии верны как теорема: «две прямые на плоскости, имеющие общий перпендикуляр, не пересекаются», так и обратная к ней теорема: «две непересекающиеся прямые на плоскости имеют общий перпендикуляр». Однако вторая (обратная) теорема основывается на евклидовой аксиоме параллельных, тогда как для доказательства первой эта аксиома не нужна. В геометрии Лобачевского вторая просто неверна, тогда как первая остаётся в силе. О. т. равносильна теореме, противоположной к прямой, т. е. теореме, в к-рой условие и заключение прямой теоремы заменены их отрицаниями. Поэтому прямая теорема равносильна теореме, противоположной к обратной, т. е. теореме, утверждающей, что если неверно заключение прямой теоремы, то неверно и её условие. Известный способ «доказательства от противного» как раз представляет собой замену доказательства прямой теоремы доказательством теоремы, противоположной к обратной. Справедливость обеих взаимно обратных теорем означает, что выполнение условия любой из них не только достаточно, но и необходимо для справедливости заключения (см. *Необходимые и достаточные условия*).

ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ — функция $x=h(y)$, которая получается из данной функции $y=f(x)$, если из соотношения $f(x)=y$ выразить x через y. Более подробно это означает следующее. Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве E, и E' — множество её значений. Обратной по отношению к $y=f(x)$ наз. такая функция $x=h(y)$, к-рая определена на множестве E' и каждому $y \in E'$ ставит в соответствие такое $x \in E$, что $f(x)=y$. Таким образом, для нахождения функции $x=h(y)$, обратной к функции $y=f(x)$, нужно решить уравнение $f(x)=y$ относительно x. Напр., О. ф. к $y=3x$ является $x=y/3$; О. ф. к $y=1+1/x$ является $x=1/(y-1)$; О. ф. к $y=10^x$ является $x=\lg y$.

Отображение, задаваемое функцией $x=h(y)$, обратной к $y=f(x)$, является (левым) обратным к отображению, задаваемому функцией $y=f(x)$. При этом имеет место тождество $f(h(y)) \equiv y$ для всех y из множества E'.

Для функции $y=f(x)$ О. ф. $x=h(y)$ может быть многозначной. Напр., О. ф. к $y=x^2$ является $x=\pm\sqrt{y}$; О. ф. к $y=\operatorname{tg} x$ является $x=\operatorname{Arctg} y=\operatorname{arctg} y+k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Для однозначности О. ф. необходимо и достаточно, чтобы данная функция $y=f(x)$ принимала различные значения при различных значениях аргумента, т. е. чтобы $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$. В теории функций комплексного переменного такая функция наз. *однолистной функцией*. Отображение, задаваемое однолистной функцией, является взаимно однозначным.



Для однозначности О. ф. $x=h(y)$ к функции $y=f(x)$ достаточно, чтобы $y=f(x)$ была строго монотонной функцией. Это условие является и необходимым, если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на числовом промежутке. Тогда О. ф. $x=h(y)$ также определена, строго монотонна и непрерывна на числовом промежутке. При этом, если функция $f(x)$ имеет производную и $f'(x) \neq 0$, то О. ф. $h(y)$ также имеет производную и $h'(y) = \dfrac{1}{f'(h(y))}$.

В случае когда О. ф. к функции $y=f(x)$ многозначна, рассматривается такой числовой промежуток, на к-ром функция $y=f(x)$ строго монотонна, тогда для функции $y=f(x)$, определённой на этом промежутке, О. ф. однозначна. Напр., для $y=x^2$, $x \geqslant 0$, О. ф. $x=\sqrt{y}$; для $y=x^2$, $x \leqslant 0$, О. ф. $x=-\sqrt{y}$; для $y=\sin x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ О. ф. $x=\arcsin y$.

Иногда О. ф. к функции $y=f(x)$ обозначается $x=f^{-1}(y)$ или $y=f^{-1}(x)$. Если О. ф. однозначна, то $f^{-1}(f(x)) \equiv x$ при всех x из области определения функции $f(x)$ и $f(f^{-1}(x)) \equiv x$ при всех x из области определения функции $f^{-1}(x)$. Графики (рис.) функций $y=f(x)$ и $y=f^{-1}(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

ОБРАТНО ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ — две величины, связанные между собой так, что с увеличением (уменьшением) одной величины в несколько раз другая уменьшается (увеличивается) во столько же раз. О. п. в. x и y связаны соотношением $xy=k$ (то есть $x=k/y$ и $y=k/x$), где k постоянно.

ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ареафункции,— функции, обратные *гиперболическим функциям*. О. г. ф. наз. ареасинус гиперболический, ареакосинус гиперболический, ареатангенс гиперболический, ареакотангенс гиперболический, обозначаются соответственно $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arch} x$, $\operatorname{Arth} x$, $\operatorname{Arcth} x$. Эти названия происходят от лат. area — площадь. Другие обозначения: $\operatorname{arsh} x$, $\operatorname{sh}^{-1} x$; $\operatorname{arch} x$, $\operatorname{ch}^{-1} x$; $\operatorname{arth} x$, $\operatorname{th}^{-1} x$; $\operatorname{arcth} x$, $\operatorname{cth}^{-1} x$.

Впервые О. г. ф. изучал Г. Ж. Уэль (1878).

Обратные гиперболические функции действительного переменного x определяются формулами

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\operatorname{Arch} x = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geqslant 1,$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

$$\operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1.$$

О. г. ф. однозначны и непрерывны в каждой точке своей области определения, за исключением О. г. ф. Arch x, к-рая двузначна. При изучении свойств О. г. ф. для Arch x выбирается одна из её непрерывных ветвей, т. е. в формуле для Arch x выбирается только один знак: плюс или минус. Свойства О. г. ф. вытекают из свойств гиперболич. функций или непосредственно из формул для О. г. ф., т. е. из свойств *логарифмической функции*. Графики О. г. ф. получаются из графиков гиперболич. функций зеркальным отражением относительно прямой $y=x$.

Производные О. г. ф. находятся по формулам

$$(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$(\operatorname{Arch} x)' = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$(\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1-x^2},$$

$$(\operatorname{Arcth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

О. г. ф. связаны между собой рядом соотношений. Напр.,

$$\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arth}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\operatorname{Arth} x = \operatorname{Arcth}\frac{1}{x} = \operatorname{Arsh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Обратные гиперболические функции комплексного переменного $z=x+iy$ определяются по формулам

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right),$$

$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z},$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1},$$

где $\operatorname{Ln} z$ — многозначная логарифмич. функция.

О. г. ф. комплексного переменного являются аналитич. продолжениями соответствующих О. г. ф. действительного переменного в комплексную плоскость.

О. г. ф. выражаются через *обратные тригонометрические функции* по формулам

$$\operatorname{Arsh} z = -i\arcsin iz,$$

$$\operatorname{Arch} z = i\arccos z,$$

$$\operatorname{Arth} z = -i\operatorname{arctg} iz,$$

$$\operatorname{Arcth} z = i\operatorname{arcctg} iz.$$

Обычно О. г. ф. выражают через логарифмич. функцию, а иногда через обратные тригонометрич. функции.

Ю. В. Сидоров.

ОБРА́ТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИ́ЧЕСКИЕ ФУ́НКЦИИ, а р к ф у н к ц и и, к р у г о в ы е ф у н к ц и и,— функции, обратные *тригонометрическим функциям*. О. т. ф. являются решением следующей задачи: найти число по заданному значению его тригонометрич. функции. Шести основным тригонометрич. функциям соответствуют шесть О. т. ф.: а р к с и н у с, а р к к о с и н у с, а р к т а н г е н с, а р к к о т а н г е н с, а р к с е к а н с, а р к к о с е к а н с (названия происходят от лат. arc — дуга), обозначаются соответственно Arcsin x, Arccos x, Arctg x, Arcctg x, Arcsec x, Arccosec x (две последние О. т. ф. мало употребительны и детально не изучаются). Согласно этим определениям, напр., $x=\operatorname{Arcsin} a$ есть любое решение уравнения $\sin x=a$; таким образом, $\sin \operatorname{Arcsin} a=a$. Так как тригонометрич. функции периодические, обратные к ним функции являются многозначными функциями. Определённые однозначные ветви (г л а в н ы е в е т в и) О. т. ф. обозначаются $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$. Другие обозначения: $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\operatorname{tg}^{-1}x$, $\operatorname{ctg}^{-1}x$.

Впервые специальные символы для О. т. ф. использовал Д. Бернулли (1729, 1736), современные обозначения ввели в 1772 К. Шерфер и Ж. Лагранж.

Обратные тригонометрические функции действительного переменного $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ определяются как обратные к функциям $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, заданным соответственно на промежутках $[-\pi/2, \pi/2]$, $[0, \pi]$, $(-\pi/2, \pi/2)$, $(0, \pi)$.

Таким образом, равенство

$$y = \arcsin x$$

означает, что $\sin y=x$ и $-\pi/2\leqslant y\leqslant\pi/2$:

$$\{y=\arcsin x\} \Leftrightarrow \{\sin y=x,\ -\pi/2\leqslant y\leqslant\pi/2\}.$$

Аналогично:

$$\{y=\arccos x\} \Leftrightarrow \{\cos y=x,\ 0\leqslant y\leqslant\pi\},$$

$$\{y=\operatorname{arctg} x\} \Leftrightarrow \{\operatorname{tg} y=x,\ -\pi/2 < y < \pi/2\},$$

$$\{y=\operatorname{arcctg} x\} \Leftrightarrow \{\operatorname{ctg} y=x,\ 0 < y < \pi\}.$$

Эти О. т. ф. однозначны, непрерывны и их свойства вытекают из свойств тригонометрич. функций (табл. 1).

Табл. 1. — СВОЙСТВА ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Функция	Область определения	Множество значений	Участки монотонности
$\arcsin x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	возрастает
$\arccos x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$[0, \pi]$	убывает
$\operatorname{arctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	возрастает
$\operatorname{arcctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$(0, \pi)$	убывает

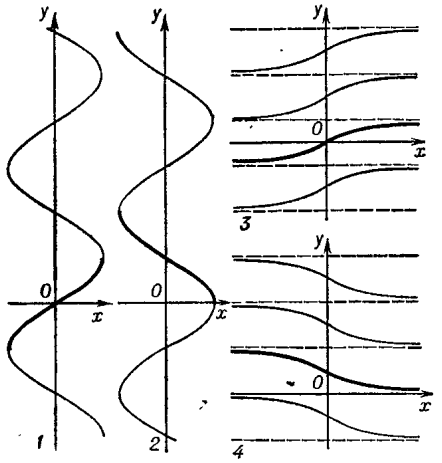
Значения О. т. ф. для нек-рых значений аргумента приведены в табл. 2 и 3. Графики О. т. ф. см. на рисунке. О. т. ф. связаны соотношениями

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2,\ -1\leqslant x\leqslant 1,$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2,\ -\infty < x < +\infty.$$

Поэтому функции $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$ в табл. 4 не фигурируют.

О. т. ф. бесконечно дифференцируемы и в окрестности каждой внутренней точки своей области определения



Графики обратных тригонометрич. функций (главные ветви — жирная линия): *1* — арксинус; *2* — арккосинус; *3* — арктангенс; *4* — арккотангенс.

могут быть разложены в ряды Тейлора. Производные, интегралы и разложения в ряды О. т. ф. приведены в табл. 4.

Табл. 2. — ЗНАЧЕНИЯ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ АРКСИНУС И АРККОСИНУС

Аргумент	Функция	
	$\arcsin x$	$\arccos x$
-1	$-\frac{\pi}{2}$	π
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{2}$	0

Табл. 3. — ЗНАЧЕНИЯ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ АРКТАНГЕНС И АРККОТАНГЕНС

Аргумент	Функция	
	$\arctg x$	$\operatorname{arcctg} x$
$-\infty$	$-\frac{\pi}{2}$	π
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
-1	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$+\infty$	$\frac{\pi}{2}$	0

Многозначные О. т. ф. обозначаются символами $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$, $\operatorname{Arctg} x$, $\operatorname{Arcctg} x$.

Тогда

$$\operatorname{Arcsin} x = (-1)^n \arcsin x + \pi n,$$
$$\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2\pi n,$$
$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + \pi n,$$
$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + \pi n,$$

где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Табл. 4. — ПРОИЗВОДНЫЕ, ИНТЕГРАЛЫ И РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln (1+x^2) + C,$$

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1,$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

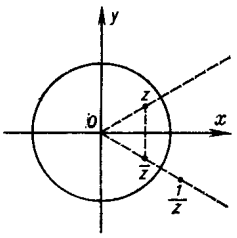
Обратные тригонометрические функции комплексного переменного $z=x+iy$ определяются как аналитич. продолжения соответствующих О. т. ф. действительного переменного в комплексную плоскость.

О. т. ф. могут быть выражены через логарифмич. функцию $\operatorname{Ln} z$:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} (iz + \sqrt{1-z^2}),$$
$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2-1}),$$
$$\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1-iz}{1+iz}, \quad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z-i}{z+i}.$$

Ю. В. Сидоров.

ОБРА́ТНЫЕ ЧИ́СЛА, взаимно обратные числа,— два числа, произведение которых равно 1. Примеры О. ч.: 4 и $\frac{1}{4}$, $\sqrt{3}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $1+i$ и $\frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$. Нуль — единственное число, для к-рого нет О. ч. На комплексной плоскости О. ч. z и $\frac{1}{z}$ изображаются точками (рис.), к-рые могут быть построены одна из другой двойной симметрией: относительно действительной оси и относительно единичной окружности (в любом порядке).



ОБРА́ТНЫЙ АНА́ЛИЗ — см. *Накопление погрешности.*

ОБРА́ТНЫЙ ОПЕРА́ТОР — оператор, обратный к оператору $A : X \to Y$, то есть отображение $B : Y \to X$ такое, что:

$$BAx = x \text{ для любого } x \in X, \quad (1)$$
$$ABy = y \text{ для любого } y \in A(X) \subset Y. \quad (2)$$

Обозначение: $B = A^{-1}$. Если B удовлетворяет лишь условию (1), то он наз. правым обратным к A (A_r^{-1}), если лишь условию (2) — левым обратным к A (A_l^{-1}).

О. о. A^{-1} существует тогда и только тогда, когда для любого $y \in A(X)$ полный прообраз $A^{-1}y$ состоит из единственного элемента. Если оператор A имеет О. о. A^{-1}, то уравнение

$$Ax = y \quad (3)$$

однозначно разрешимо при любом $y \in A(X)$. Если существует только правый обратный оператор A_r^{-1}, то существует и решение уравнения (3), но вопрос об однозначности решения остаётся открытым. Наличие же левого обратного A_l^{-1} обеспечивает единственное решение (в предположении, что оно существует).

Если A — линейный оператор из X в Y, то A^{-1}, если он существует, тоже линеен. Вообще, в случае наделения X и Y той или иной структурой, случается, что нек-рые свойства оператора A сохраняются и при переходе к A^{-1} в предположении его существования.

ОБРА́ТНЫЙ ХОД ПРОГО́НКИ — см. *Ортогональной прогонки метод, Прогонки метод.*

ОБРАЩЕ́НИЕ МА́ТРИЦЫ — алгоритм, применяемый при численном нахождении обратной матрицы. Как и в задаче решения линейных систем, методы численного обращения подразделяются на прямые и итерационные; однако итерационные методы вследствие их трудоёмкости играют здесь существенно меньшую роль. Большинство прямых методов О. м. основано на идее разложения заданной матрицы в произведение легко обращаемых сомножителей.

Типичным (и одним из наиболее употребительных) прямых методов О. м. является метод Жордана. Пусть A — невырожденная матрица порядка n. Построение обратной матрицы A^{-1} происходит в n шагов; результатом k-го шага будет матрица A_k, первые k столбцов к-рой совпадают с одноимёнными столбцами единичной матрицы. Переход от A_k (пусть $A = A_0$) к A_{k+1} с матричной точки зрения эквивалентен умножению A_k слева на матрицу L_{k+1}, к-рая отличается от единичной лишь $(k+1)$-м столбцом. Элементы этого столбца выбираются так, чтобы привести $(k+1)$-й столбец A_k к единичному, и имеют вид

$$-\frac{a^{(k)}_{1,\,k+1}}{a^{(k)}_{k+1,\,k+1}}, \quad \ldots, \quad -\frac{a^{(k)}_{k,\,k+1}}{a^{(k)}_{k+1,\,k+1}}, \quad \frac{1}{a^{(k)}_{k+1,\,k+1}}, \quad \ldots, \quad -\frac{a^{(k)}_{n,\,k+1}}{a^{(k)}_{k+1,\,k+1}}.$$

Из соотношений

$$A_{k+1} = L_{k+1} A_k, \quad A_n = E$$

вытекает

$$L_nL_{n-1}\ldots L_1A=E$$

и

$$A^{-1}=L_nL_{n-1}\ldots L_1. \qquad (*)$$

Получение факторизованного представления (*) для обратной матрицы A^{-1} требует примерно $n^3/2$ операций умножения и примерно $n^3/2$ операций сложения. Приблизительно такое же число дополнительных операций необходимо для того, чтобы перемножить матрицы в (*) и получить явный вид A^{-1}. Во многих задачах использование факторизованной формы (*) столь же удобно, что и использование явного вида. Напр., вычисление произведения $A^{-1}b$, где b — вектор-столбец, требует одинаковой арифметич. работы в обоих случаях. Одинаковы и требования к памяти при реализации на ЭВМ.

В приведённом описании метода Жордана предполагалось для простоты, что все элементы $a^{(k)}_{k+1,\,k+1}$ (наз. ведущими элементами) отличны от нуля.

Невязкой, соответствующей приближённой обратной матрице X для A, наз. матрица $R=E-AX$. Имеет место оценка

$$\frac{\|A^{-1}-X\|}{\|A^{-1}\|}\leqslant\|R\|.$$

Таким образом, норма невязки является оценкой относительной точности приближённой обратной матрицы. В этом состоит отличие задачи численного О. м. от задачи решения линейных систем, где невязка обычно мала, а качество полученного решения зависит от обусловленности системы. Для уточнения приближения к обратной матрице иногда используется итерационный процесс: $X_{k+1}=X_k(2E-AX_k)$.

Обращение ряда классов матриц может быть достигнуто значительно более экономичными, чем в общем случае, методами.

● Воеводин В. В., Численные методы алгебры, М., 1966.

Х. Д. Икрамов.

ОБРАЩЕ́НИЯ ФО́РМУЛЫ интегрального преобразования — см. *Интегральное преобразование, Лапласа преобразование.*

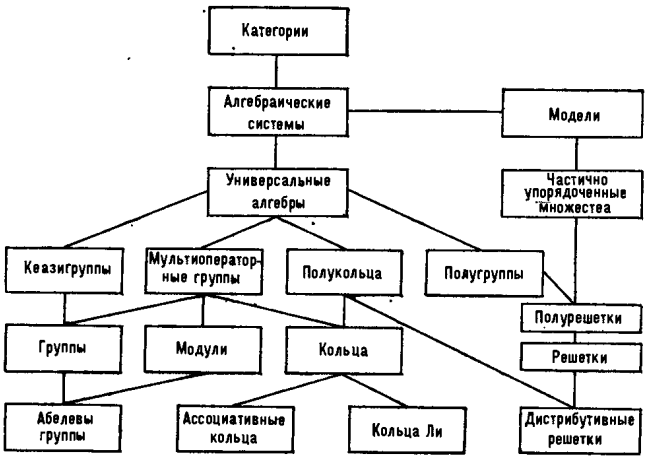
ОБУСЛО́ВЛЕННОСТИ ЧИСЛО́ матрицы A — число $\nu(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$; О. ч. системы уравнений $Ax=b$ — число $r=\|A^{-1}\|\cdot\|b\|/\|X\|$. О. ч. характеризует чувствительность решения задачи к погрешности входных данных.

О́БЩАЯ А́ЛГЕБРА, абстрактная алгебра,— часть алгебры, занимающаяся изучением тех или иных алгебраических систем, включающая в себя теории *групп, колец, модулей, полугрупп, решёток* и т. п. Вне рамок О. а. остаются такие направления, как изучение матриц и линейных уравнений, алгебраич. геометрия и алгебраич. теория чисел и т. п. Выделение О. а. как части алгебры довольно условно, и границы её расплывчаты. Напр., нет единого мнения о том, относятся ли к О. а. теория полей, конечных групп или конечномерных алгебр Ли.

Если *универсальная алгебра* снабжена порядком или топологией, согласованными с операциями, то возникает упорядоченная или топологич. алгебра соответственно. Исследование этих объектов также относят к О. а. Наиболее развиты теории упорядоченных и топологич. групп и колец.

Начало развития О. а. относится к 19 в., когда были исследованы нек-рые конечные группы и конечномерные алгебры. Однако современная О. а. связана с проникновением в алгебру теоретико-множественного мышления и является продуктом 20 в. Так, первая монография (О. Ю. Шмидта), где группа не предполагалась конечной, появилась лишь в 1916. В первую очередь эта перестройка коснулась теории групп, а затем теории колец. Результаты этой перестройки отражены в монографии Б. Л. Ван дер Вардена, вышедшей в 1930—31.

Выявление общих моментов, содержащихся в теориях групп и колец, привело к рассмотрению решёток, универсальных алгебр и категорий. Появление алгебраич. систем связано с вскрытием связей алгебры и математич. логики. Желание выяснить, в какой мере те или иные факты теории групп зависят от наличия обратных элементов и ассоциативности, породило полугруппы и квазигруппы. Все эти вновь появившиеся разделы О. а. через нек-рое время обрели собственную проблематику, нашли собственные пути развития и собственные области приложения (напр., полугруппы оказались чрезвычайно важными для алгебраич. теории автоматов). Более того, эти направления, в свою очередь, начали оказывать влияние на породившие их



классич. разделы О. а. Так, напр., понятие многообразия алгебр, выкристаллизовавшееся в теории универсальных алгебр, играет важную роль в современной теории групп и колец. В качестве другого примера можно назвать изучение классов групп и колец, определяемых свойствами решёток их подгрупп и нормальных подгрупп, идеалов и подколец.

● Шмидт О. Ю., Абстрактная теория групп, 2 изд., М.— Л., 1933; Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979; Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; его же, Общая алгебра. Лекции 1969/1970 учебного года, М., 1974; Скорняков Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983; Фрид Э., Элементарное введение в абстрактную алгебру, пер. с венг., М., 1979; Калужнин Л. А., Введение в общую алгебру, М., 1973.

Л. А. Скорняков.

О́БЩАЯ МЕ́РА двух или нескольких однородных величин — величина того же рода, содержащаяся целое число раз во всех заданных величинах. Две величины, не имеющие О. м., наз. несоизмеримыми. См. *Соизмеримые и несоизмеримые величины.*

О́БЩАЯ ТОПОЛО́ГИЯ — ветвь геометрии, посвящённая исследованию непрерывности и предельного перехода на том естественном уровне общности, к-рый определяется природой этих понятий. Исходными понятиями О. т. являются понятия *топологического пространства* и *непрерывного отображения,* выделенные в 1914 Ф. Хаусдорфом. Частным случаем непрерывных отображений являются *гомеоморфизмы* — непрерывные в обе стороны взаимно однозначные отображения топологич. пространств. Пространства, к-рые можно отобразить друг на друга посредством гомеоморфизма (т. е. гомеоморфные пространства), считаются в О. т. одинаковыми. Одной из основных задач О. т. является выделение и исследование естественных топологических инвариантов — свойств пространств, сохраняющихся при гомеоморфизмах. Разумеется, каждое свойство пространства, к-рое формулируется исключительно в терминах его топологии, автоматически является топологич. инвариантом. Доказательство топологич. инвариантности свойства пространства требуется лишь тогда, когда оно формулируется с привлечением к.-л. дополнительных структур, определённых на множестве точек пространства и так или иначе связанных с его топологией.

В связи с системой топологич. инвариантов возникают классы топологич. пространств. Наиболее важны классы *метризуемых пространств*, *компактных пространств*, *тихоновских пространств*, *паракомпактных пространств*.

Основные «внутренние» задачи О. т. таковы: 1) выделение новых важных классов топологич. пространств; 2) сравнение различных классов топологич. пространств; 3) изучение пространств в пределах того или иного класса. Центральной в этой группе, безусловно, является задача 2), направленная на обеспечение внутреннего единства О. т.

Определение новых важных классов топологич. пространств (т. е. новых топологич. инвариантов) часто связано с рассмотрением дополнительных структур на пространстве (числовых, алгебраических, порядковых), естественно согласованных с его топологией. Так, выделяются метризуемые пространства, упорядоченные пространства и др. Важную роль при решении задач 1), 2), 3) играет метод *покрытий*. На языке покрытий и соотношений между покрытиями выделяются фундаментальные классы бикомпактных и паракомпактных пространств, формулируются топологич. свойства типа *компактности*. Метод покрытий играет важную роль в *размерности теории*.

Для решения центральной задачи 2) особенно важен метод взаимной классификации пространств и отображений. Он направлен на установление связей между различными классами топологич. пространств посредством непрерывных отображений, подчинённых тем или иным простым ограничениям. Пространства весьма общей природы удаётся при этом описать как образы более простых пространств при «хороших» отображениях. Связи такого рода составляют эффективную систему ориентиров при рассмотрении классов топологич. пространств.

Наконец, в решении задачи 2) существенно участвует метод кардинальнозначных топологич. инвариантов, или *мощностных характеристик*. Инварианты такого рода наиболее созвучны теоретико-множественной природе О. т.

О. т. важна и в методич. отношении при обучении математике. Только в рамках её понятий и конструкций вполне выясняются и становятся прозрачными фундаментальные концепции непрерывности, сходимости, предельного перехода. Трудно назвать области математики, в к-рых понятия, язык и конструкции О. т. не использовались бы. В этом, в частности, проявляется её объединяющая роль в математике. Положение О. т. в математике определяется и тем, что целый ряд принципов и теорем, имеющих общематематич. значение, получает свою естественную (т. е. отвечающую природе этих принципов, теорем) формулировку только в рамках О. т.

● Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; Келли Дж., Общая топология, пер. с англ., 2 изд., М., 1981; Энгелькинг К., Общая топология, пер. с англ., М., 1986.

А. В. Архангельский.

ОБЩЕЕ РЕШЕ́НИЕ — см. *Интеграл дифференциального уравнения*.

ОБЩЕЗНА́ЧИМАЯ ФО́РМУЛА — то же, что *тавтология*.

ОБЩЕРЕКУРСИ́ВНАЯ ФУ́НКЦИЯ — всюду определённая *рекурсивная функция*.

О́БЩИЙ ИНТЕГРА́Л — см. *Интеграл дифференциального уравнения*.

О́БЩИЙ МАСШТА́Б — см. *Картографическая проекция*.

ОБЪЕДИНЕ́НИЕ (сумма) множеств — одна из основных операций над множествами. Пусть имеется некрая (конечная или бесконечная) совокупность множеств A_α (индексы α служат для различения элементов данной совокупности). Тогда множество тех элементов, к-рые принадлежат хотя бы одному из множеств, входящих в эту совокупность, наз. объединением множеств, образующих данную совокупность. О. множеств A_α обозначается $\bigcup A_\alpha$, иногда $\sum A_\alpha$.

ОБЪЕДИНЕ́НИЕ СОБЫТИЙ — см. *Вероятностей теория*.

ОБЪЁКТ категории (от лат. objectum — предмет) — термин, используемый для обозначения элементов произвольной *категории*, играющих роль множеств, групп, топологич. пространств и т. п. О. категории — неопределяемое понятие. Каждая категория состоит из двух классов — класса объектов и класса морфизмов. Любому О. A категории однозначно соответствует единичный морфизм 1_A, причём разным О. отвечают разные единичные морфизмы. Поэтому формально можно определять категорию только с помощью морфизмов. Однако термин «объект категории» является удобным и практически всегда используется.

ОБЪЁКТНАЯ ПЕРЕМЕ́ННАЯ — то же, что *предметная переменная*.

ОБЪЁМ — одна из основных величин, связанных с геометрическими телами. В простейших случаях измеряется числом умещающихся в теле единичных кубов, т. е. кубов с ребром, равным единице длины.

Задача вычисления О. простейших тел, идущая от практич. потребностей, была одним из стимулов развития геометрии. Математика Др. Востока (Вавилония, Египет) располагала рядом правил (б. ч. эмпирических) для вычисления О. тел, с к-рыми чаще всего приходилось встречаться на практике (напр., призматич. брусьев, пирамид полных и усечённых, цилиндров). Среди формул О. были и неточные, дававшие не слишком заметную процентную ошибку лишь в пределах употребительных линейных размеров тела. Греч. математика последних столетий до нашей эры освободила теорию вычисления О. от приближённых эмпирич. правил. В «Началах» Евклида и в сочинениях Архимеда имеются только точные правила для вычисления О. многогранников и нек-рых круглых тел (цилиндра, конуса, шара и их частей). При этом уже в учении об О. многогранников греч. математики должны были преодолеть значительные трудности, существенно отличающие этот отдел геометрии от родственного ему отдела о площадях многоугольников. Источник различия, как выяснилось лишь в нач. 20 в., состоит в следующем: в то время как всякий многоугольник можно посредством надлежащих прямолинейных разрезов и перекладывания полученных частей «перекроить» в квадрат, аналогичное преобразование (посредством плоских разрезов) произвольного многогранника в куб оказывается, вообще говоря, невозможным (теорема Дена, 1901). Отсюда становится ясным, почему Евклид уже в случае треугольной пирамиды был вынужден прибегнуть к бесконечному процессу последовательных приближений, пользуясь при доказательстве исчерпывания методом. Бесконечный процесс лежит и в основе современной трактовки измерения О., сводящейся к следующему. Рассматриваются всевозможные многогранники, вписанные в тело K, и всевозможные многогранники, описанные вокруг тела K. Вычисление О. многогранника сводится к вычислению О. составляющих его тетраэдров (треугольных пирамид). Пусть $\{V_i\}$ — числовое множество О., вписанных в тело многогранников, а $\{V_d\}$ — числовое множество описанных вокруг тела K многогранников. Множество $\{V_i\}$ ограничено сверху (О. любого описанного многогранника), а множество $\{V_d\}$ ограничено снизу (напр., числом нуль). Наименьшее из чисел, ограничивающее сверху множество $\{V_i\}$, наз. нижним объёмом $\underline{V}$ тела K, а наибольшее из чисел, ограничивающее снизу множество $\{V_d\}$, наз. верхним объёмом $\overline{V}$ тела K. Если верхний объём $\overline{V}$ тела K совпадает с его нижним объёмом $\underline{V}$, то число $V=\overline{V}=\underline{V}$ наз. объёмом тела K, а само тело — кубируемым телом. Для того чтобы тело было кубируемым, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε можно было указать такой описанный вокруг тела многогранник и такой вписанный в тело многогранник, разность V_d-V_i объёмов к-рых была бы меньше ε.

Аналитически О. может быть выражен с помощью кратных интегралов. Пусть тело K (рис. 1) ограничено цилиндрич. поверхностью с параллельными оси Oz образующими, квадрируемой областью M плоскости Oxy и поверхностью $z=f(x, y)$, к-рую любая параллель к образующей цилиндра пересекает в одной и только в одной точке. О.

такого тела может быть вычислен с помощью двойного интеграла

$$V=\iint_M f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

О. тела, ограниченного замкнутой поверхностью, к-рая встречается с параллелью к оси Oz не более чем в двух точках, может быть вычислен как разность О. двух тел, подобных предшествующему. О. тела может быть выражен в виде тройного интеграла

$$V=\iiint dx\,dy\,dz,$$

где интегрирование распространяется на часть пространства, занятую телом. Иногда удобно вычислять О. тел через его поперечные сечения. Пусть тело (рис. 2), содержащееся между плоскостями $z=a$ и $z=b\ (b>a)$, рассекается плоскостями, перпендикулярными

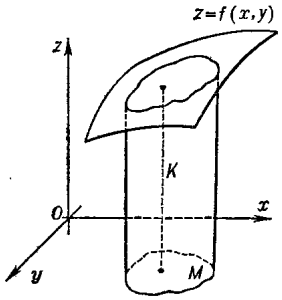


Рис. 1.

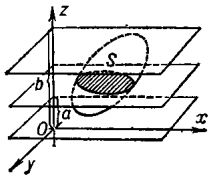


Рис. 2.

оси Oz. Если все сечения тела квадрируемы и площадь сечения S — непрерывная функция от z, то О. тела может быть выражен простым интегралом

$$V=\int_a^b S(z)\,dz.$$

Исторически происходило так, что задолго до создания интегрального исчисления операция интегрирования фактически применялась (в различных геометрич. формах) к вычислению О. простейших тел (пирамиды, шара, нек-рых тел вращения), чем и была подготовлена почва для оформления этого исчисления в 17—18 вв.

Об обобщениях понятия «О.» см. *Мера* множества.

● Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1981.

Я. С. Дубнов.

ОБЪЁМНОСТИ АКСИО́МА — см. *Аксиоматическая теория множеств.*

ОБЫКНОВЕ́ННОЕ ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — см. *Дифференциальное уравнение.*

ОВА́Л (франц. ovale, от лат. ovum — яйцо) — замкнутая выпуклая плоская кривая. При этом под выпуклостью понимают свойство кривой иметь с любой прямой не более двух (действительных) общих точек. Примером О. может служить эллипс (в частности, окружность). Если О. имеет в каждой своей точке определённую касательную, то любому направлению на плоскости соответствуют две и только две касательные, параллельные этому направлению. На каждом О. имеется не менее четырёх точек, в к-рых кривизна его достигает максимума или минимума (теорема о четырёх вершинах; в случае эллипса таких точек ровно четыре — концы большой и малой осей).

В алгебраич. геометрии О. наз. также просто замкнутые (не обязательно выпуклые) связные компоненты плоских алгебраич. кривых.

ОВАЛО́ИД (от *овал* и греч. εἶδος — вид) — замкнутая выпуклая поверхность. Часто под О. понимают регулярные замкнутые выпуклые поверхности с непрерывной кривизной.

ОВРА́ЖНЫХ ФУ́НКЦИЙ МЕ́ТОДЫ МИНИМИЗА́ЦИИ — численные методы отыскания минимумов ограниченных снизу функций многих переменных

$$J(x)=J(x_1,\ \ldots,\ x_m)\in C^2(D),\ D\subset\mathbb{R}^m,$$

обладающих той особенностью, что в исследуемой области собственные значения матрицы Гессе

$$J''(x)\to\left\|\frac{\partial^2 J(x)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right\|,\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

упорядоченные в любой точке $x\in D$, удовлетворяют неравенствам

$$0<|\min_i\lambda_i(x)|\ll\lambda_1(x).\qquad(*)$$

В этом случае поверхности уровня минимизируемой функции $J(x)=\text{const}$ имеют структуру, сильно отличающуюся от сферической. Такие функции $J(x)$ наз. о в р а ж н ы м и. Степень овражности характеризуется числом

$$s=\lambda_1(x)/|\min_{\lambda_i(x)\neq 0}\lambda_i(x)|.$$

Если собственные значения $J''(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_m(x)|\leqslant\ldots\leqslant|\lambda_{m-r+1}(x)|\ll\lambda_{m-r}(x)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_1(x),$$

а отношение $|\lambda_{m-r+1}(x)|/|\alpha_m(x)|$ невелико, то число r наз. размерностью оврага $J(x)$. В трёхмерном пространстве, напр., возможны двумерные и одномерные овраги. Чем выше размерность оврага, тем труднее найти точку минимума. Для минимизации овражных функций необходимо применять специально ориентированные методы, учитывающие особенность (*). Стандартные методы позволяют попасть лишь в одну из точек на дне оврага, где норма вектора градиента $J'(x)$ может быть существенно меньше, чем в других точках области D. Однако полученная точка, как правило, расположена очень далеко от истинной точки минимума, значение овражной функции в к-рой во много раз меньше, чем почти всюду на дне оврага.

ОГИБА́ЮЩАЯ с е м е й с т в а л и н и й н а п л о с к о с т и (п о в е р х н о с т е й в п р о с т р а н с т в е) — линия (поверхность), которая в каждой своей точке касается одной линии (поверхности) семейства. Уравнение О. семейства линий на плоскости, определяемого уравнением $f(x,\ y,\ C)=0$, содержащим параметр C, можно получить [в предположении, что $f(x,\ y,\ C)$ имеет непрерывные частные производные 1-го порядка по всем трём аргументам], исключив параметр C из системы:

$$f(x,\ y,\ C)=0,\ f'_C(x,\ y,\ C)=0.$$

Это исключение, вообще говоря, даёт не только О., но и множество особых точек линий семейства, т. е. точки, для к-рых одновременно $f'_x=0$, $f'_y=0$.

П р и м е р ы (на плоскости): а) семейство окружностей радиуса R, центры к-рых лежат на одной прямой, имеет в качестве О. пару прямых, параллельных линии центров и отстоящих от неё в ту и другую сторону на расстояние R (рис. 1); б) всякая кривая служит О. для семейства своих касательных и семейства своих кругов кривизны; в) если в каждой точке кривой построить к ней нормаль, то для полученного семейства

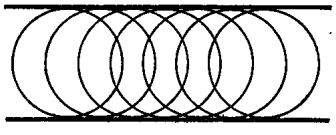


Рис. 1.

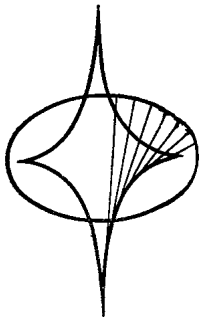


Рис. 2.

прямых О. будет эволюта данной кривой (на рис. 2 изображена эволюта эллипса).

В пространстве для семейства поверхностей могут существовать О., касающиеся поверхностей семейства в точках или же вдоль нек-рых линий.

П р и м е р ы: а) семейство сфер радиуса R с центрами, расположенными на одной прямой, имеет своей О. круглый цилиндр радиуса R, ось к-рого есть линия центров (касание цилиндра с каждой сферой — по окружности); б) семейство сфер радиуса R, центры к-рых лежат в одной плоскости, имеет О. пару плоскостей, параллельных пло-

скости центров и отстоящих от неё в ту и другую сторону на расстоянии R (касание плоскостей с каждой сферой — в точке).

Понятие «О.» используется не только в геометрии, но и в нек-рых вопросах математич. анализа (особые решения в теории дифференциальных уравнений), теоретич. физики (в оптике — каустика́, фронт волны).

Термин «О.» стал общепринятым после лекций Г. Монжа (1795—1806).

ОГРАНИ́ЧЕННАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция, множество значений к-рой ограничено. Напр., $\sin x$, $\cos x$, $1/(1+x^2)$ — О. ф.; x^2, $1/x$, $\operatorname{tg} x$ не являются О. ф. (см. *Неограниченная функция*). Функция $f(x)$ наз. ограниченной (ограниченной сверху, соответственно снизу) на множестве E, если существует такое число M, что для каждого $x\in E$ выполняется неравенство $|f(x)|<M$ ($f(x)<M$, соответственно $f(x)>M$). Напр., функция x^2 ограничена на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$, функция $1/x$ ограничена на луче $x\geqslant 1$.

ОГРАНИ́ЧЕННАЯ ЧИСЛОВА́Я ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ — см. *Числовая последовательность*.

ОГРАНИ́ЧЕННОЕ МНО́ЖЕСТВО — множество в метрическом пространстве X, имеющее конечный диаметр. Другими словами, A есть О. м., если для любой точки $x_0\in X$ множество A содержится в шаре с центром в x_0. Подмножество и объединение конечного числа О. м. суть О. м.

ОГРАНИ́ЧЕННОЙ ВАРИА́ЦИИ ФУ́НКЦИЯ — см. *Вариация* функции.

ОГРАНИ́ЧЕННЫЙ КВА́НТОР — см. *Квантор*.

ОГРАНИ́ЧЕННЫЙ ОПЕРА́ТОР — оператор $A: X\to Y$, отображающий любое ограниченное множество топологического векторного пространства X в ограниченное множество из Y. При этом множество M в X наз. ограниченным, если для каждой окрестности нуля U в X существует такое число $\alpha>0$, что $M\subset\alpha U$.

Всякий непрерывный оператор ограничен. Если X, Y — нормированные пространства и A — линейный оператор, то ограниченность его означает существование константы C такой, что $\|Ax\|\leqslant C\|x\|$ для всех $x\in X$. Наименьшая из таких констант наз. нормой оператора A. Для таких операторов ограниченность равносильна непрерывности.

Если $X=H$ — гильбертово пространство и A — симметрич. оператор, то квадратичная форма (Ax, x) ограничена на единичном шаре $\|x\|\leqslant 1$; её верхняя и нижняя грани принадлежат спектру оператора A, и весь спектр лежит между ними.

ОДНОВЕРШИ́ННОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ, унимодальное распределение,— распределение вероятностей с одной *модой*.

ОДНОЗНА́ЧНАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция, принимающая только одно значение для каждого значения аргумента из области определения этой функции. Напр., x^2, 2^x, $\cos x$ — О. ф., $\pm\sqrt{x}$ не является О. ф. (см. *Многозначная функция*). Обычно вместо термина «О. ф.» употребляют одно слово «функция».

ОДНОЛИ́СТНАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция комплексного переменного z, аналитическая в области D и принимающая в различных точках z этой области различные значения, т. е. $f(z_1)\neq f(z_2)$, если $z_1\neq z_2$. Дробно-линейная функция — пример функции, однолистной во всей плоскости. Все другие аналитич. функции могут быть О. ф. только в областях, отличных от всей плоскости; они, во всяком случае, являются О. ф. в окрестности точки $z=z_0$, в к-рой $f'(z_0)\neq 0$. Изучение функции, однолистной в нек-рой односвязной области, может быть сведено к изучению двух функций, однолистных внутри круга $|z|\leqslant 1$. Однолистную в круге $|z|<1$ функцию наз. нормированной, если $f(0)=0$ и $f'(0)=1$. Семейство S нормированных функций, однолистных в круге $|z|<1$, достаточно хорошо изучено. Можно дать оценки нек-рых величин, связанных с О. ф., справедливые для любой функции из S. Напр., если разложить функцию $f(z)$ из семейства S в ряд Тейлора

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\dots,$$

то будут выполняться неравенства: $|a_2|\leqslant 2$, $|a_3|\leqslant 3$. Известная проблема коэффициентов из теории О. ф. ставится так: найти необходимые и достаточные условия, к-рые нужно наложить на комплексные числа $a_2, a_3, a_4, \dots$ для того, чтобы ряд $z+a_2z^2+a_3z^3+\dots$ был рядом Тейлора нек-рой О. ф. В настоящее время (1987) проблема коэффициентов не решена.

ОДНОПО́ЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛО́ИД — незамкнутая центральная поверхность второго порядка; *гиперболоид*, состоящий из одной полости.

ОДНОРО́ДНАЯ СИСТЕ́МА линейных уравнений — см. *Линейное уравнение*.

ОДНОРО́ДНАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющая условию: существует такое действительное число α — показатель однородности, что при любом λ имеет место равенство

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)=\lambda^\alpha f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Напр., $x_1^2+x_2^2$, $(x_1+x_2)/(x_1^2+x_2^2)$, $\sqrt{x_1+x_2}$ — О. ф. с показателями однородности, равными соответственно 2, -1, $\frac{1}{2}$.

ОДНОРО́ДНАЯ ЦЕПЬ МА́РКОВА, см. *Маркова цепь*.

ОДНОРО́ДНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение, не меняющее своего вида при одновременном умножении всех (или только нек-рых) неизвестных на одно и то же число, отличное от нуля. Во втором случае уравнение наз. однородным по отношению к соответствующим неизвестным. Так, $xy+yz+zx=0$ есть О. у. по отношению ко всем неизвестным, уравнение $y+\ln\frac{x}{z}+5=0$ однородно по отношению к x и z. Уравнение

$$a_0(x)\,y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)\,y=0,$$

наз. линейным однородным дифференциальным уравнением, однородно по отношению к $y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$. Уравнение $y'=f(x, y)$, где $f(x, y)=f(\lambda x, \lambda y)$ при любом λ [$f(x, y)$ — однородная функция со степенью однородности 0], наз. дифференциальным уравнением, однородным по отношению к переменным x и y. Пример: $y'=\frac{xy}{x^2+y^2}$.

ОДНОРО́ДНЫЕ КООРДИНА́ТЫ точки, прямой и т. д. — координаты, обладающие тем свойством, что определяемый ими объект не меняется, когда все координаты умножаются на одно и то же число. Напр., О. к. точки M на плоскости могут служить три числа: X, Y, Z, связанные соотношением $X:Y:Z=x:y:1$, где x и y — декартовы координаты точки M. Введение О. к. позволяет добавить к точкам евклидовой плоскости точки с третьей О. к., равной нулю (т. е. бесконечно удалённые точки), что важно для проективной геометрии.

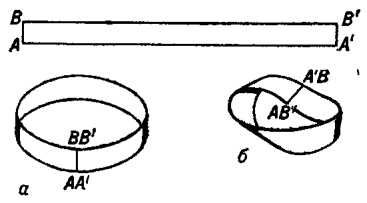
ОДНОРО́ДНЫЙ МНОГОЧЛЕ́Н — то же, что *форма*. См. также *Многочлен*.

ОДНОСВЯ́ЗНАЯ О́БЛАСТЬ — область G, в которой любой замкнутый путь (контур) гомотопен нулю, т. е. может быть непрерывно деформирован (стянут) в точку, оставаясь всё время в G. Граница О. о., вообще говоря, может состоять из любого (даже бесконечного) числа компонент. Граница конечной плоской О. о. состоит из одной компоненты, и все такие области гомеоморфны.

ОДНОСТОРО́ННИЕ И ДВУСТОРО́ННИЕ ПОВЕ́РХНОСТИ — два типа поверхностей, различающихся по способу их расположения в объемлющем пространстве (односторонее и двустороннее расположения). Наглядное представление об этих понятиях можно получить из рассмотрения следующих примеров.

Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ прямоугольная полоса $ABB'A'$ (рис.) изгибается и склеивается двумя различными способами: 1) стороны AB и $B'A'$ отождествляются так, чтобы A совпадала с A', а B—с B'; 2) полоса перекручивается так, чтобы отрезок AB оставался на месте, а отрезок $B'A'$ перевернулся на 180°, затем стороны AB и $B'A'$ отождествляются так, чтобы A совпала с B', а B — с A'. В результате получаются два типа поверхностей с

краем; цилиндр (рис. *а*) и *Мёбиуса лист* (рис. *б*). Цилиндр представляет собой двустороннюю поверхность (д. п.), а лист Мёбиуса — одностороннюю поверхность (о. п.). Если раскрашивать эти поверхности, двигаясь вправо от отрезка AB до встречи снова с этим же отрезком, то в случае цилиндра окрашенным окажется не весь цилиндр, а только его внешняя сторона — внутренняя сторона может быть выкрашена в другой цвет; в противоположность этому лист Мёбиуса оказывается выкрашен целиком, т. е. он не имеет двух разделённых сторон, почему и наз. односторонней поверхностью. Другое характерное различие этих двух поверхностей — граница цилиндра состоит из двух кривых, а граница листа Мёбиуса — из одной кривой.



Примерами замкнутой д. п. могут служить сфера и тор в $\mathbb{R}^3$, а примерами о. п.— *Клейна поверхность*, к-рая получается при склеивании двух листов Мёбиуса краями, и проективная плоскость, к-рая топологически эквивалентна склеенным листу Мёбиуса и диску.

Двусторонность и односторонность связаны с ориентируемостью и неориентируемостью (см. *Ориентация*), но в отличие от последних не являются внутренними свойствами поверхности и зависят от объемлющего многообразия; именно они характеризуют лишь вложение или погружение многообразия в многообразие на единицу большей размерности.

● Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 3 изд., М., 1981.

ОДНОСТОРО́ННИЙ ПРЕДЕ́Л — *предел функции* в некоторой точке справа или слева от неё.

ОДНОЧЛЕ́Н — алгебраическое выражение простейшего вида, рассматриваемое в элементарной алгебре; частный случай многочлена. О. наз. произведение чисел, переменных, степеней переменных. Сами числа, переменные и степени переменных также наз. О. Стандартный вид О. есть произведение, в к-ром на первом месте стоит числовой (постоянный) множитель, наз. коэффициентом, а каждое произведение одинаковых переменных представлено их степенью. Коэффициент $+1$ при этом опускается. Примеры О. в канонич. виде: $-5ax^3$; a^3c^3xy; -7; x^3; $-a$.

ОКАЙМЛЕ́НИЯ МЕ́ТОД — метод решения системы линейных алгебраических уравнений $Ax=b$ с невырожденной матрицей, обращения матрицы и вычисления определителя. Он основан на рекуррентном переходе от матрицы

$$A_{k-1}=\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots a_{1,\,k-1} \\ \dots & \dots \\ a_{k-1,\,1}\dots a_{k-1,\,k-1} \end{Vmatrix}$$

к матрице

$$A_k=\begin{Vmatrix} A_{k-1} & u_k \\ v_k & a_{kk} \end{Vmatrix},$$

$u_k=(a_{1k},\ a_{2k},\ \dots,\ a_{k-1,\,k})^{\top}$, $v_k=(a_{k1},\ a_{k2},\ \dots,\ a_{k,\,k-1})$, рассматриваемой как результат окаймления A_{k-1}.

В О. м. обращение матрицы $A=\|a_{ij}\|$ n-го порядка осуществляется последовательным обращением матриц A_1, $A_2,\dots,A_n$ по схеме

$$A_k^{-1}=\begin{Vmatrix} A_{k-1}^{-1}+\dfrac{A_{k-1}^{-1}u_k\,v_kA_{k-1}^{-1}}{\alpha_k} & -\dfrac{A_{k-1}^{-1}u_k}{\alpha_k} \\ -\dfrac{v_kA_{k-1}^{-1}}{\alpha_k} & \dfrac{1}{\alpha_k} \end{Vmatrix},$$

$\alpha_k=a_{kk}-v_kA_{k-1}^{-1}u_k$. При этом $A^{-1}=A_n^{-1}$.

Вычислительная схема О. м. для решения системы $Ax=b$ состоит в следующем. Пусть $b^{(kp)}=(a_{1p},\ a_{2p},\ \dots,\ a_{kp})^{\top}$, $k=1,\ 2,\dots,\ n$; $b^{(n,\,m+1)}=-b$. Если $x^{(k-1,\,p)}$ — решение системы

$$A_{k-1}x^{(k-1,\,p)}+b^{(k-1,\,p)}=0,$$

$$A_k=\begin{Vmatrix} A_{k-1} & b^{(k-1,\,k)} \\ v_k & a_{kk} \end{Vmatrix},\quad b^{(kp)}=\begin{Vmatrix} b^{(k-1,\,p)} \\ a_{kp} \end{Vmatrix},$$

то решение x^{kp} системы

$$Ax^{(kp)}+b^{(kp)}=0$$

вычисляется по формуле

$$x^{(k,\,p)}=\begin{Vmatrix} x^{(k-1,\,p)} \\ 0 \end{Vmatrix}-\frac{v_kx^{(k-1,\,p)}+a_{kp}}{a_{kk}+v_kx^{(k-1,\,k)}}\begin{Vmatrix} x^{(k-1,\,k)} \\ 1 \end{Vmatrix}. \qquad (*)$$

При этом решение исходной системы $x^{(n,\,n+1)}$ находится последовательным вычислением по схеме (*) векторов $x^{(k,\,p)}$, $k=1,2,\dots,\ n,\ p>k$, т. е.:

$$\begin{gathered} x^{(1,\,2)},\ x^{(1,\,3)},\ \dots,\ x^{(1,\,n)},\ x^{(1,\,n+1)}, \\ x^{(2,\,3)},\ \dots,\ x^{(2,\,n)},\ x^{(2,\,n+1)}, \\ \dots\dots,\quad \dots\dots, \\ x^{(n-1,\,n)},\ x^{(n-1,\,n+1)}, \\ x^{(n,\,n+1)}. \end{gathered}$$

Описанная схема О. м. пригодна лишь для матриц A с ненулевыми главными минорами. В общем случае используется схема О. м. с выбором главного элемента: в качестве окаймляющих строки и столбца берутся те, для к-рых $\alpha_k=a_{kk}-v_kA_{k-1}^{-1}u_k$ будет максимальным по модулю.

ОКРЕ́СТНОСТЬ точки x в топологическом пространстве X — множество $U\subset X$, для которого x — внутренняя точка. Другими словами, О.— множество, к-рое содержит открытое множество, содержащее x (таким образом, О. могут быть замкнутыми, связными, компактными и т. д.); аналогично определяется О. множества. Напр., О. точки на прямой есть любой интервал, содержащий эту точку. ε-окрестность точки a — симметричный интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, или, что то же самое, множество действительных x, удовлетворяющих при некром $\varepsilon>0$ условию $|x-a|<\varepsilon$. О. «точки плюс бесконечность» — интервал $(M,\ +\infty)$, т.е. множество действительных x, удовлетворяющих условию $x>M$. О. «точки минус бесконечность» — интервал $(-\infty,\ M)$, т. е. множество действительных x, удовлетворяющих неравенству $x<M$. На числовой плоскости ε-окрестность точки a есть внутреиность круга («открытый круг») с центром в точке a и радиусом, равным ε. О. бесконечно удалённой точки есть внешность любого круга. В метрическом пространстве X ε-окрестность точки (элемента) a есть множество всех $x\in X$, расстояние к-рых до точки a меньше нек-рого $\varepsilon>0$.

Совокупность σ_x всех О. точки x обладает следующими свойствами:

1) $x\in U$ для любого $U\in\sigma_x$;
2) если $U\in\sigma_x$ и $V\supset U$, то $V\in\sigma_x$;
3) пересечение конечного числа О. из σ_x принадлежит σ_x;
4) для каждого $U\in\sigma_x$ существует $V\in\sigma_x$ такое, что $V\subset U$ и $V\in\sigma_y$ для всех $y\in V$.

Более простая и более важная конструкция — совокупность только открытых О.:

1) $x\in U$ для любого $U\in\sigma_x$;
2) если $U,\ V\in\sigma_x$, то существует $W\subset U\cap V\in\sigma_x$;
3) если $U\in\sigma_x$ и $y\in U$, то существует $V\in\sigma_y$, $V\in U$.

ОКРУГЛЕ́НИЕ числа — приближённое представление числа в некоторой системе счисления с помощью конечного количества разрядов. Возникающую при этом погрешность называют погрешностью округления или ошибкой округления.

Применяются различные способы О. числа. Простейший из них состоит в отбрасывании младших разрядов числа, выходящих за допустимые t разрядов. Абсолютная ошибка О. при этом не превосходит единицы t-го разряда округляемого числа. Способ О., обычно применяемый в ручных вы-

числениях, состоит в О. числа до ближайшего t-разрядного числа. Абсолютная ошибка О. при этом не превосходит половины t-го разряда округляемого числа.

Способы округления, реализуемые на ЭВМ, определяются особенностями машинной арифметики. На ЭВМ, работающих в режиме с плавающей запятой, результат О. числа имеет определённое количество значащих цифр; в режиме с фиксированной запятой — определённое количество цифр после запятой. В первом случае принято говорить об О. до t разрядов, во втором — об О. до t разрядов после запятой.

ОКРУГЛЕ́НИЯ ТО́ЧКА, омбилическая точка, — точка поверхности, в которой все нормальные сечения имеют одну и ту же кривизну. На трёхосном эллипсоиде существуют четыре О. т.— точки соприкосновения эллипсоида с плоскостями, к-рые параллельны плоскостям круговых сечений. Единственной поверхностью, у к-рой все точки суть О. т., является сфера.

ОКРУ́ЖНОСТЬ — замкнутая плоская кривая, все точки к-рой одинаково удалены от данной точки (центра О.), лежащей в той же плоскости, что и кривая. Отрезок R, соединяющий центр окружности с к.-л. её точкой (а также длина этого отрезка), наз. радиусом О. (рис. 1).

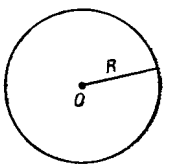


Рис. 1.

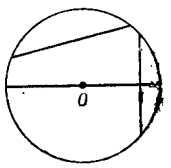


Рис. 2.

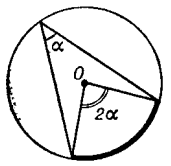


Рис. 3.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, наз. хордой (рис. 2). Хорда, проходящая через центр О., наз. диаметром. Диаметр — наибольшая из хорд. Диаметр, к-рый проходит через середину хорды, перпендикулярен к ней.

Вписанным углом наз. угол, образованный двумя хордами, имеющими общий конец (рис. 3). Центральным углом наз. угол, образованный двумя радиусами. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на к-рую он опирается, и равен половине центрального угла, заключающего ту же дугу. Угол, образованный двумя секущими, измеряется полуразностью дуг, заключённых между двумя его сторонами (рис. 4).

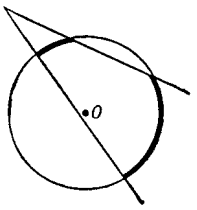


Рис. 4.

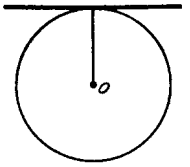


Рис. 5.

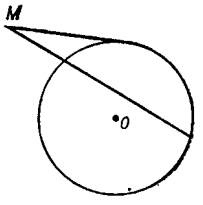


Рис. 6.

Через точку на О. можно провести одну касательную, причём она перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку (рис. 5). Если из точки M вне О. проведена секущая к ней, то произведение расстояний от точки M до точек пересечения с О. равно квадрату длины отрезка касательной из точки M к О. (рис. 6).

Отношение длины О. к её диаметру одинаково для всех О.; это отношение есть трансцендентное число, обозначаемое греч. буквой $\pi=3{,}14159\ldots$ (см. *Пи*). Длина О. определяется формулой $l=2\pi R$. Часть плоскости, ограниченная О. и содержащая её центр, наз. *кругом*. С точки зрения аналитич. геометрии О. является центральной линией второго порядка, уравнение к-рой в прямоугольной системе координат имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

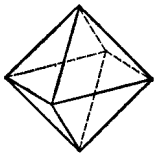
здесь a, b — координаты центра О.

ОКРУ́ЖНОСТЬ КРИВИЗНЫ — см. *Круг кривизны*.

ОКТА́ВА (от лат. octava — восьмая) — то же, что *Кэли число*.

ОКТА́НТ (лат. octans, род. падеж octantis, от octo — восемь) — телесный угол, заключающий $^1/_8$ часть пространства.

ОКТА́ЭДР (греч. ὀκτάεδρον, от ὀκτώ — восемь и ἕδρα — грань) — один из пяти правильных многогранников (рис.). О. имеет 8 граней (треугольных), 12 рёбер, 6 вершин (в каждой вершине сходятся 4 ребра). Если a — длина ребра О., то его объём $v=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}\approx 0{,}4714\ a^3$. Название «О.» дано Теэтетом (4 в. до н. э.).



ОКТИЛЛИО́Н (франц. octillion) — число, изображаемое единицей с 27 нулями, т. е. число 10^{27}. В нек-рых странах О. наз. число 10^{48}.

ОМБИЛИ́ЧЕСКАЯ ТО́ЧКА (франц. ombilic, от лат. umbilicus, букв.— пуп) — то же, что *округления точка*.

ОПЕРА́НД (от лат. operor — работаю, действую) — аргумент операции; грамматическая конструкция, обозначающая выражение, задающее значение аргумента операции; иногда О. наз. место, позиция в тексте, где должен стоять аргумент операции.

ОПЕРА́ТОР (позднелат. operator — работник, исполнитель, от operor — работаю, действую) — то же, что *отображение*. Термин часто употребляется в функциональном анализе и линейной алгебре, в особенности для отображений векторных пространств. О. A из множества X в множество Y может быть не всюду определён; тогда говорят о его области определения $D_A=D(A)$. Для $x\in X$ результат применения О. A к x обозначают $A(x)$ или Ax.

Если X и Y — векторные пространства, то в множестве всех О. из X в Y можно выделить класс *линейных операторов*; остальные О. из X в Y наз. нелинейными. Если X и Y — топологические векторные пространства, то в множестве О. из X в Y естественно выделяется класс *непрерывных операторов*, а также класс линейных *ограниченных операторов* и класс линейных *компактных операторов* (наз. также вполне непрерывными). Изучение линейных О. в топологич. векторных пространствах составляет важный раздел функционального анализа.

Примеры. 1) О. дифференцирования

$$D[f(t)]=f'(t)$$

сопоставляет каждой дифференцируемой функции $f(t)$ её производную $f'(t)$. Вообще, левую часть линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_n(t)=\varphi(t)$$

можно рассматривать как результат применения нек-рого О., ставящего в соответствие функции $x(t)$ функцию $\varphi(t)$. Такой О. носит название линейного *дифференциального оператора*.

2) О. определённого интегрирования

$$I=\int_a^b f(t)\,dt$$

сопоставляет каждой интегрируемой функции f действительное число I.

3) Сопоставив каждой функции $f(t)$ её произведение $\varphi(t)f(t)$ на фиксированную функцию $\varphi(t)$, получают О. умножения на функцию $\varphi(t)$.

4) Пусть $K(s,\ t)$ — непрерывная функция двух переменных, заданная в квадрате $a\leqslant s\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant b$. Формула

$$f(s)=\int_a^b K(s,\ t)\,g(t)\,dt,$$

сопоставляющая непрерывной функции $g(t)$ непрерывную функцию $f(s)$, определяет линейный интегральный О. В то же время формула

$$h(s)=\int_a^b F[s,\ g(t)]\,dt,$$

где F — нек-рая ограниченная непрерывная функция, определяет, вообще говоря, нелинейный интегральный О.

ОПЕРА́ТОР, к о м а н д а,— предписание выполнить некоторое законченное действие в программе. См. *Программирования язык, Программы схема.*

ОПЕРА́ТОРНАЯ СХЕ́МА — один из видов *программы схемы.*

ОПЕРА́ТОРНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — см. *Функциональное уравнение.*

ОПЕРАЦИО́ННАЯ СИСТЕ́МА — комплекс программ, связывающих устройство ЭВМ в единое целое и обеспечивающих фундаментальные процессы, лежащие в основе исполнения любой программы. См. *Программное обеспечение.*

ОПЕРАЦИО́ННОЕ ИСЧИСЛЕ́НИЕ — один из методов математического анализа, позволяющий в ряде случаев посредством простых правил решать сложные математические задачи. О. и. имеет особенно важное значение в механике, автоматике, электротехнике и др. В основе метода О. и. лежит идея замены изучаемых функций (о р и г и н а л о в) нек-рыми другими функциями (и з о б р а ж е н и я м и), получаемыми из первых по определённым правилам (обычно изображение — функция, получаемая из данной *Лапласа преобразованием*). При такой замене оператор дифференцирования $p=\frac{d}{dt}$ интерпретируется как алгебраич. величина, вследствие чего интегрирование нек-рых классов линейных дифференциальных уравнений и решение ряда других задач математич. анализа сводятся к решению более простых алгебраич. задач. Так, решение линейного дифференциального уравнения сводится к более простой, вообще говоря, задаче решения алгебраич. уравнения: из алгебраич. уравнения находят изображение решения данного уравнения, после чего по изображению восстанавливают само решение. Операции нахождения изображения по оригиналу (и наоборот) облегчаются наличием обширных таблиц «оригинал — изображение».

Для развития О. и. большое значение имели работы О. Хевисайда. Он предложил формальные правила обращения с оператором $p=\frac{d}{dt}$ и нек-рыми функциями от этого оператора. Пользуясь О. и., О. Хевисайд решил ряд важнейших задач электродинамики. Однако О. и. не получило в трудах О. Хевисайда математич. обоснования, многие его результаты оставались недоказанными. Строгое обоснование О. и. было дано с помощью интегрального преобразования Лапласа. Если при этом преобразовании функция $f(t)$, $0\leqslant t<+\infty$, переходит в функцию $F(z)$, $z=x+iy$:

$$f(t)\to F(z),$$

то производная

$$f'(t)\to zF(z)-f(0) \qquad (*)$$

и интеграл

$$\int_0^t f(u)\,du\to\frac{F(z)}{z}.$$

Следовательно, оператор дифференцирования p переходит в оператор умножения на переменную z, а интегрирование сводится к делению на z. В следующей краткой таблице даны (при $t\geqslant 0$) примеры соответствия:

о р и г и н а л	и з о б р а ж е н и е
$f(t)$	$F(z)$
1	$1/z$
t^n	$n!/z^{n+1}$ ($n>0$ — целое)
$e^{\lambda t}$	$1/(z-\lambda)$
$\cos\omega t$	$z/(z^2+\omega^2)$
$\sin\omega t$	$\omega/(z^2+\omega^2)$.

П р и м е р. Найти методом О. и. решение $y=f(t)$ линейного дифференциального уравнения

$$y''-y'-6y=2e^{4t}$$

при начальных условиях

$$y_0=f(0)=0 \text{ и } y_0'=f'(0)=0.$$

Переходя от искомой функции $f(t)$ и данной функции $2e^{4t}$ к их изображениям $F(z)$ и $2/(z-4)$ (табл.) и применяя формулу (*) для изображения производных, получают

$$z^2F(z)-zF(z)-6F(z)=\frac{2}{z-4}$$

или

$$F(z)=\frac{2}{(z+2)(z-3)(z-4)}=\frac{1}{15}\frac{1}{z+2}-\frac{2}{5}\frac{1}{z-3}+\frac{1}{3}\frac{1}{z-4}.$$

Откуда (опять по табл.)

$$y=f(t)=\frac{1}{15}e^{-2t}-\frac{2}{5}e^{3t}+\frac{1}{3}e^{4t}.$$

Имеются различные обобщения О. и. Существует многомерное О. и., основанное на теории кратных интегралов. Созданы О. и. дифференциальных операторов, отличных от оператора $p=\frac{d}{dt}$, напр. $B=\frac{d}{dt}\,t\,\frac{d}{dt}$.

● Д и т к и н В. А., П р у д н и к о в А. П., Справочник по операционному исчислению, М., 1965; и х ж е, Интегральные преобразования и операционное исчисление, 2 изд., М., 1974; М и к у с и н с к и й Я., Операторное исчисление, пер. с польск., М., 1956.

ОПИ́САННАЯ ФИГУ́РА — см. *Вписанная фигура.*

ОПО́РНАЯ ПЛО́СКОСТЬ к м н о ж е с т в у M (в пространстве) в его точке A — плоскость, проходящая через точку A так, что множество M целиком лежит по одну сторону от этой плоскости, т. е., более точно, в одном из определяемых плоскостью замкнутых полупространств. О. п. имеет большое значение в изучении свойств выпуклых тел.

ОПО́РНАЯ ПРЯМА́Я к м н о ж е с т в у M (на плоскости) в его точке A — прямая, проходящая через точку A так, что множество M целиком лежит по одну сторону от этой прямой, т. е., более точно, в одной из определяемых прямой замкнутых полуплоскостей. О. п. имеет большое значение в изучении свойств плоских выпуклых областей.

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРА́Л — предел сумм особого вида (интегральных сумм), соответствующих функции $f(x)$ и отрезку $[a, b]$; обозначается:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Геометрически О. и. выражает площадь «трапеции», ограниченной отрезком $[a, b]$ оси Ox, графиком функции $f(x)$ и ординатами точек графика, имеющих абсциссы a и b. См. *Интегральное исчисление.*

ОПРЕДЕЛИ́ТЕЛЬ, д е т е р м и н а н т, к в а д р а т н о й м а т р и ц ы A п о р я д к а n — многочлен от элементов матрицы $A=\|a_{ij}\|$, каждый член к-рого является произведением n элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, и снабжён определённым знаком, т. е. многочлен вида

$$\sum\pm a_{1\alpha}a_{2\beta}\ldots a_{n\gamma}. \qquad (*)$$

В этой формуле суммирование производится по всем перестановкам $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ чисел $1, 2, \ldots, n$ и перед членом берётся знак $+$, если перестановка $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ чётна, и знак $-$, если эта перестановка нечётна. Таким образом, О. содержит $n!$ членов, из к-рых $n!/2$ берётся со знаком $+$ (плюс) и $n!/2$ — со знаком $-$ (минус). Число n наз. п о р я д к о м О.

Для О. матрицы

$$A=\|a_{ij}\|=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{Vmatrix}$$

приняты обозначения: $\det A$, $\det\|a_{ij}\|$, $|a_{ij}|$ или, более подробно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Для О. 2-го и 3-го порядков формула (*) принимает вид:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

О. обладают рядом важных свойств, к-рые, в частности, облегчают их вычисление. Простейшие из этих свойств следующие.

1) О. не изменится, если в нём строки и столбцы поменять местами (т. е. О. квадратной матрицы A равен О. транспонированной матрицы $A^{\top}$):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2) О. меняет знак, если поменять местами любые две строки (или два столбца) матрицы.

3) О. равен нулю, если элементы двух строк (или двух столбцов) матрицы соответственно пропорциональны.

4) Общий множитель всех элементов любой строки (или столбца) можно вынести за знак О.

5) Если каждый элемент к.-л. строки (столбца) есть сумма двух слагаемых, то О. равен сумме двух О., причём в одном из них соответствующая строка (столбец) состоит из первых слагаемых, а в другом — из вторых слагаемых, остальные же строки (столбцы) — те же, что и в данной матрице.

6) О. не изменяется, если к элементам одной строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на произвольный множитель.

7) О. треугольной матрицы равен произведению элементов её главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

Если элементы a_{ij} матрицы A принадлежат нек-рому полю (или нек-рому коммутативно-ассоциативному кольцу), то $\det A$ есть элемент того же поля (кольца). Таким образом, О. можно рассматривать как функцию, определённую на множестве всех квадратных матриц порядка n над полем K со значениями в K. Оказывается, что существует лишь одна такая функция, обладающая свойствами 3), 4), 5), 7). Это может быть положено в основу аксиоматич. построения теории О.

Перечисленные свойства используются также при вычислении О. матрицы над полем. Напр., сначала матрица приводится к треугольному виду при помощи элементарных преобразований её строк или столбцов и используются свойства 2), 4), 6), а затем применяется свойство 7). Другой метод вычисления О. (при к-ром понижается порядок О.) основан на следующей теореме о разложении по произвольной строке (столбцу):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

(аналогичная формула — для разложения по j-му столбцу). Коэффициент A_{ik}, стоящий при элементе a_{ik} в этом разложении, есть алгебраич. дополнение элемента a_{ik}. Более общее разложение О. по нескольким строкам (столбцам) даётся *Лапласа теоремой*. Разложение по строке может быть положено в основу индуктивного построения теории О.

Теория О. возникла в связи с задачей решения систем линейных уравнений и связанными с ней вопросами аналитич. геометрии. О. 2-го и 3-го порядков над полем действительных чисел допускают простое геометрич. истолкование: модуль О. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $a_1=(x_1, y_1)$ и $a_2=(x_2, y_2)$ евклидовой плоскости, а модуль О. $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах $a_1=(x_1, y_1, z_1)$, $a_2(x_2, y_2, z_2)$ и $a_3(x_3, y_3, z_3)$ 3-мерного евклидова пространства (системы координат предполагаются прямоугольными). Многие формулы аналитич. геометрии удобно записывать при помощи О.; напр., уравнение плоскости, проходящей через точки с координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

В математич. анализе рассматриваются функциональные О. (т. е. О. матриц над кольцом функций), наибольший интерес из к-рых представляет определитель Якоби, или *якобиан*.

Термин «О.» в современном его значении ввёл О. Коши (1815), хотя ранее (1801) «детерминантом» К. Гаусс назвал дискриминант квадратичной формы. Идея «О.» восходит к Г. Лейбницу, к-рый пришёл к О. (1693) при решении систем линейных уравнений. В 1750 метод О. был вновь разработан Г. Крамером. А. Вандермонд (1772) опубликовал первое обширное исследование, посвящённое О. Первые полные изложения теории О. даны в 1812 Ж. Бине и О. Коши. Обозначение — вертикальные линии — ввёл А. Кэли (1841).

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕ́НИЯ универсальной алгебры G относительно системы её порождающих элементов — соотношения $u_j=v_j$, $j\in J$ (где u_j и v_j — выражения от порождающих элементов, имеющие смысл в сигнатуре рассматриваемой алгебры), такие, что все остальные соотношения в этой алгебре являются следствиями данных и тождеств многообразия, в к-ром рассматривается алгебра G. Алгебра G изоморфна факторалгебре свободной алгебры многообразия с теми же порождающими по конгруэнции, определяемой всеми парами (u_j, v_j), $j\in J$.

О. с. выбираются неоднозначно даже при одной и той же системе порождающих. Если алгебра конечно порождена, то из любой системы её порождающих можно выбрать конечную подсистему порождающих, а если алгебра в нек-рой конечной системе порождающих задаётся конечным числом О. с., то в любой другой конечной системе порождающих из любой системы О. с. можно выбрать конечную подсистему О. с. Универсальная алгебра наз. конечно определённой, если она может быть задана конечной системой порождающих и конечной системой О. с. Изучение конечно определённых алгебр породило ряд проблем алгоритмич. характера (см. *Алгоритмическая проблема*).

ОПТИМА́ЛЬНАЯ КВАДРАТУ́РА (от лат. optimus — наилучший) — квадратурная формула, дающая наилучшее приближение интегралу

$$I(f) = \int_{\Omega} f(P)\,\omega(P)\,dP$$

на классе F подинтегральных функций. Если

$$S_N(f) = \sum_{k=1}^{N} c_k f(P_k),$$

то

$$R_N(f) = S_N(f) - I(f)$$

наз. погрешностью квадратуры при вычис-

лении интеграла от данной функции, а

$$r_N(F)=\sup_{f\in F}|R_N(f)|$$

наз. погрешностью квадратуры на классе F. Если существует такая квадратура, что для соответствующей ей $r_N(F)$ выполняется равенство

$$r_N(F)=\inf_{c_k,\,p_k} r_N(F),$$

то эту квадратуру называют оптимальной на этом классе.

О. к. построены лишь для нек-рых классов функций, в основном одного переменного. О. к. наз. также наилучшими квадратурными формулами или экстремальными квадратурными формулами.

ОПТИМА́ЛЬНАЯ СИТУА́ЦИЯ — см. *Игр теория*.

ОПТИМА́ЛЬНАЯ СТРАТЕ́ГИЯ — см. *Антагонистическая игра, Матричная игра, Минимакса принцип*.

ОПТИМА́ЛЬНОГО РЕЗЕРВИ́РОВАНИЯ ЗАДА́ЧА — см. *Надёжности теория*.

ОПТИМА́ЛЬНОЕ РЕШЕ́НИЕ — см. *Линейное программирование, Математическое программирование, Нелинейное программирование*.

ОПТИМА́ЛЬНОЕ УПРАВЛЕ́НИЕ — раздел математики, изучающий неклассические вариационные задачи.

Объекты, с к-рыми имеет дело техника, обычно снабжены «рулями» — с их помощью человек управляет движением. Математически поведение такого объекта описывается нек-рыми уравнениями, куда входят и управляющие параметры, характеризующие положение «рулей». Естественно, возникает вопрос об отыскании наилучшего (оптимального) в том или ином смысле управления движением. Напр., речь может идти о достижении цели движения за минимальное время. Этот вопрос является задачей вариационного исчисления. В отличие от классич. вариационных задач, где управляющие параметры меняются в нек-рой открытой области (без границы), теория О. у. охватывает и тот случай, когда управляющие параметры могут принимать и граничные значения. Последнее обстоятельство особенно существенно с прикладной точки зрения, поскольку при управлении технич. объектом именно положение «руля» «на упоре» часто обеспечивает О. у.

Центральным результатом теории О. у. является принцип максимума Понтрягина, дающий общее необходимое условие оптимальности управления. Этот результат и связанные с ним исследования, проведённые с начала 50-х гг. 20 в. Л. С. Понтрягиным и его сотрудниками, послужили исходным пунктом разработки теоретических, вычислительных и прикладных аспектов теории О. у. При решении ряда задач О. у. с успехом используются идеи метода динамич. программирования, основы к-рого разработаны Р. Беллманом и его сотрудниками.

В общих чертах задача О. у. состоит в следующем. Рассматривают управляемый объект (под к-рым понимается нек-рая машина, прибор или процесс), снабжённый «рулями». Манипулируя «рулями» (в пределах имеющихся ресурсов управления), тем самым определяют движение объекта, управляют им. Напр., технологич. процесс осуществления химич. реакции можно считать управляемым объектом, «рулями» к-рого являются концентрации ингредиентов, количество катализатора, поддерживаемая температура и другие факторы, влияющие на течение реакции. Для того чтобы знать, как именно ведёт себя объект при том или ином управлении, необходимо иметь закон движения, описывающий динамич. свойства рассматриваемого объекта и устанавливающий для каждого избираемого правила манипулирования «рулями» эволюцию состояния объекта. Возможность управлять объектом лимитируется не только ресурсами управления, но и тем, что в процессе движения объект не должен попадать в состояния, физически недоступные или недопустимые с точки зрения конкретных условий его эксплуатации. Так, осуществляя манёвр судном, необходимо учитывать не только технич. возможности самого судна, но и границу фарватера.

Имея дело с управляемым объектом, всегда стремятся так манипулировать «рулями», чтобы, исходя из определённого начального состояния, в итоге достичь нек-рого желаемого состояния. Напр., для запуска искусственного спутника Земли необходимо рассчитать такой режим управления работой двигателей ракеты-носителя, к-рый обеспечит доставку спутника на желаемую орбиту. Как правило, существует бесконечно много способов управлять объектом так, чтобы реализовать цель управления. В связи с этим возникает задача найти такой способ управления, к-рый позволяет достичь желаемого результата наилучшим, оптимальным образом в смысле определённого критерия качества. В конкретных задачах часто требуется реализовать цель управления за наименьшее возможное время, или с минимальным расходом горючего, или с максимальным экономич. эффектом и т. п.

В качестве типичного можно привести управляемый объект, закон движения к-рого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx^i}{dt}=f^i(x^1,\ \ldots,\ x^n,\ u^1,\ \ldots,\ u^r),\ i=1,\ \ldots,\ n, \qquad (1)$$

где $x^1,\ \ldots,\ x^n$ — фазовые координаты, характеризующие состояние объекта в момент времени t, а $u^1,\ \ldots,\ u^r$ — управляющие параметры. Управление объектом означает выбор управляющих параметров как функций времени:

$$u^j=u^j(t),\ j=1,\ \ldots,\ r, \qquad (2)$$

являющихся допустимыми с точки зрения имеющихся возможностей управления объектом. Напр., в прикладных задачах часто требуется, чтобы в каждый момент времени точка $(u^1,\ \ldots,\ u^r)$ принадлежала заданному замкнутому множеству U. Это последнее обстоятельство делает рассматриваемую вариационную задачу неклассической. Пусть заданы начальное $(x_0^1,\ \ldots,\ x_0^n)$ и конечное $(x_1^1,\ \ldots,\ x_1^n)$ состояния объекта (1). Об управлении (2) говорят, что оно реализует цель управления, если найдётся такой момент времени $t_1>t_0$, что решение $(x^1(t),\ \ldots,\ x^n(t))$ задачи

$$\frac{dx^i}{dt}=f^i(x^1,\ \ldots,\ x^n,\ u^1(t),\ \ldots,\ u^r(t)),\ x^i(t_0)=x_0^i, \qquad (3)$$
$$i=1,\ \ldots,\ n,$$

удовлетворяет условию $x^i(t_1)=x_1^i$, $i=1,\ \ldots,\ n$. Качество этого управления оценивают значением функционала

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x^1(t),\ \ldots,\ x^n(t),\ u^1(t),\ \ldots,\ u^r(t))\,dt, \qquad (4)$$

где $f^0(x^1,\ \ldots,\ x^n,\ u^1,\ \ldots,\ u^r)$ — заданная функция. Задача О. у. состоит в отыскании такого реализующего цель управления, для к-рого функционал (4) принимает наименьшее возможное значение. Таким образом, математич. теория О. у.— это раздел математики, рассматривающий неклассич. вариационные задачи отыскания экстремумов функционалов на решениях уравнений, описывающих управляемые объекты, и управлений, на к-рых реализуется экстремум.

Для поставленной задачи формулируется следующее необходимое условие оптимальности управления.

Принцип максимума Понтрягина. Пусть вектор-функция

$$u=u(t)=(u^1(t),\ \ldots,\ u^r(t)),\ t_0\leqslant t\leqslant t_1, \qquad (5)$$

— оптимальное управление, а вектор-функция

$$x=x(t)=(x^1(t),\ \ldots,\ x^n(t)),\ t_0\leqslant t\leqslant t_1,$$

— соответствующее ему решение задачи (3). Рассматривают вспомогательную линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\psi_k}{dt}=-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\partial f^\nu(x(t),\ u(t))}{\partial x^k}\psi_\nu, \qquad (6)$$
$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

и функцию

$$H(\psi, x, u) = \sum_{\nu=0}^{n} \psi_\nu f^\nu(x, u),$$

зависящую, помимо x и u, от вектора $\psi=(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$. Тогда у линейной системы (6) существует такое нетривиальное решение

$$\psi = \psi(t) = (\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

что для всех значений t из отрезка $[t_0, t_1]$, в к-рых функция (5) непрерывна, выполнено соотношение

$$\max_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u) = H(\psi(t), x(t), u(t)) = 0,$$

причём $\psi_0(t) \equiv \text{const} \leqslant 0$.

К виду (1) обычно приводятся уравнения движения в случае управляемых механич. объектов с конечным числом степеней свободы. В многочисленных реальных ситуациях возникают и иные постановки задач О. у., отличающиеся от приведённой выше: задачи с фиксированным временем, когда продолжительность процесса заранее задана, задачи со скользящими концами, когда про начальное и конечное состояния известно лишь, что они принадлежат нек-рым множествам, задачи с фазовыми ограничениями, когда решение задачи (3) в каждый момент времени должно принадлежать фиксированному замкнутому множеству, и др. В задачах механики сплошных сред характеризующая состояние управляемого объекта величина x является функцией уже не только времени, но и пространственных координат (напр., величина x может описывать распределение температуры в теле с течением времени), а закон движения будет дифференциальным уравнением с частными производными или интегро-дифференциальным уравнением. Часто приходится рассматривать управляемые объекты, когда независимая переменная принимает дискретные значения, а закон движения представляет собой систему конечноразностных уравнений. Наконец, отдельную теорию составляет О. у. стохастич. объектами.

● Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, 4 изд., М., 1983; Красовский Н. Н., Теория управления движением, М., 1968; Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В., Оптимальное управление, М., 1979.

Н. Х. Розов.

ОПТИМА́ЛЬНОСТИ КРИТЕ́РИЙ — см. *Исследование операций*, *Линейное программирование*.

ОПТИМА́ЛЬНОСТИ ПРИ́НЦИП — формальное описание различных представлений об оптимальном, отражающее те или иные черты интуитивного понимания разумности, выгодности, справедливости, устойчивости и т. п. Существенно, что одновременная реализация всех (или хотя бы достаточно большого числа) черт оптимальности часто оказывается невозможной ввиду их формальной несовместимости. Проблемы выработки О. п. возникают в задачах принятия решений, в к-рых результат выбранного решения (исход) не полностью известен лицу, принимающему решение, либо не может быть оценён одним числом, напр. в задачах теории игр и многокритериальной оптимизации. Формально О. п. может быть описан следующим образом.

Пусть $\mathfrak{P}$ — нек-рый класс задач принятия решений. Каждая такая задача есть упорядоченная четвёрка $P=\langle G, D, f, \succ\rangle$, в к-рой G — множество допустимых решений (альтернатив), D — множество исходов, $f: G \to 2^D$ — отображение, ставящее в соответствие каждой альтернативе множество исходов, реализуемых при её выборе, $\succ$ — бинарное отношение предпочтения на множестве D. О. п. в задачах класса $\mathfrak{P}$ наз. отображение φ, ставящее в соответствие каждой задаче $P \in \mathfrak{P}$ нек-рое подмножество её альтернатив. Отображение φ определяют аксиоматически, формализуя интуитивно очевидные содержательные его свойства для данного класса $\mathfrak{P}$. В задачах принятия решений, в к-рых нет неопределённости ($G=D$, f — тождественное отображение), а $\succ$ представимо функцией полезности u на G (см. *Полезности теория*), О. п. состоит в максимизации функции полезности u на множестве альтернатив. Примером О. п. является *минимакса принцип*.

О. п. также наз. правило сведения исходной задачи оптимизации к нек-рым более простым задачам (напр., принцип Беллмана в динамич. программировании, принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении).

См. также *Исследование операций*.

ОПТИМА́ЛЬНЫЙ АЛГОРИ́ТМ — см. *Алгоритмов анализ*.

ОПТИМИЗАЦИО́ННАЯ ЗАДА́ЧА — см. *Исследование операций*.

ОПТИМИЗА́ЦИЯ ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНЫХ АЛГОРИ́ТМОВ — выбор оптимального вычислительного алгоритма при теоретическом исследовании, решении прикладных задач или при разработке систем стандартных программ. При решении конкретной задачи оптимальная тактика поведения может состоять в том, чтобы не оптимизировать метод решения, а подключиться к стандартной программе или воспользоваться простейшим методом, составление программы для к-рого не потребует много усилий.

Теоретич. постановка вопроса об О. в. а. имеет следующее основание. При выборе метода решения задачи исследователь ориентируется на нек-рые её свойства и выбирает алгоритм решения в зависимости от них, причём алгоритм будет применимым и при решении других задач, обладающих этими свойствами. Поэтому вводят в рассмотрение нек-рый класс задач P, обладающих определёнными свойствами. При выборе метода решения исследователь располагает нек-рым множеством M методов решения. Напр., множество M может состоять из всех методов, реализуемых за число машинных операций, к-рое не больше заданного числа Q. При применении метода m к решению задачи p решение будет получено с нек-рой погрешностью $E(p, m)$. Величина

$$E(P, m) = \sup_{p \in P} |E(p, m)|$$

наз. погрешностью метода m на классе задач P, а

$$E(P, M) = \inf_{m \in M} E(P, m)$$

— оптимальной на классе P оценкой погрешности методов из множества M. Если существует метод m_0 такой, что

$$E(P, m_0) = E(P, M),$$

то этот метод наз. оптимальным. Оптимальные в описанном выше смысле алгоритмы удаётся построить довольно редко. Однако для большого числа вычислительных задач построены методы, по своим асимптотич. характеристикам близкие к оптимальным.

Если исследование проблемы О. в. а. имеет целью решение задач на ЭВМ, проблема О. в. а. приобретает дополнительные оттенки, связанные с устойчивостью алгоритма к вычислительной погрешности, с ограничением на объём разных видов используемой памяти (см. *Вычислительный алгоритм*). Выше задача О. в. а. рассматривалась как задача О. в. а. на классах задач. Существенный интерес для практики представляет задача О. в. а. на конкретной задаче. Напр., такая постановка проблемы оптимизации может состоять в следующем: дифференциальное уравнение интегрируется методом Рунге — Кутты с переменным шагом, производится оценка главного члена оценки погрешности; затем эта оценка оптимизируется за счёт выбора распределения узлов интегрирования (при общем заданном числе узлов).

Н. С. Бахвалов.

ОРБИ́ТА группы преобразований — совокупность всех элементов множества, получающихся из некоторого фиксированного элемента под действием этой группы. Точнее, если (G, X) — группа преобразований, то О. точки $x \in X$ имеет вид $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$. Множество X распадается в объединение попарно непересекающихся О.; они являются классами эквивалентности по следующему отношению: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $y = gx$ для нек-рого $g \in G$. Группа преобразований, имеющая только одну О., наз. транзитивной.

Примеры. 1. Орбитами группы вращений евклидова пространства вокруг нек-рой точки O являются всевозможные сферы с центром в O и сама эта точка.

2. Группа симметрий правильного n-угольника, действующая на множестве его вершин, имеет одну О., т. е. транзитивна.

Элементы О. $G(x)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с левыми смежными классами группы G по подгруппе $G_x=\{h\in G|hx=x\}$. В частности, если G конечна, то число элементов О. $G(x)$ равно $\frac{|G|}{|G_x|}$ (где $|\ |$ — порядок группы), а число μ орбит даёт следующая формула:

$$\mu=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g),$$

где $f(g)$ — число точек множества X, неподвижных относительно g.

ОРДИНА́ЛЬНОЕ ЧИСЛО́ (от позднелат. ordinalis — порядковый) — то же, что *порядковое число*; см. также *Множеств теория*.

ОРДИНА́ТА (от лат. ordinatus — расположенный в порядке) — одна из декартовых координат точки, обычно вторая, обозначаемая буквой y.

ОРИГИНА́Л (от лат. originalis — первоначальный) — см. *Лапласа преобразование*, *Операционное исчисление*.

ОРИЕНТА́ЦИЯ (франц. orientation, букв.— направление на восток) — обобщение понятия направления на прямой на геометрич. фигуры более сложной структуры.

Ориентация на прямой. Точка может двигаться по прямой в двух противоположных направлениях. Напр., на горизонтальной прямой AB (рис. 1) возможно или движение справа налево, или движение слева направо. Прямая вместе с указанием определённого направления на ней наз. ориентированной прямой.

Ориентация на кривой. Аналогично ориентации на прямой каждую замкнутую кривую можно ориентировать или против часовой стрелки (рис. 2), или по часовой стрелке (рис. 3).

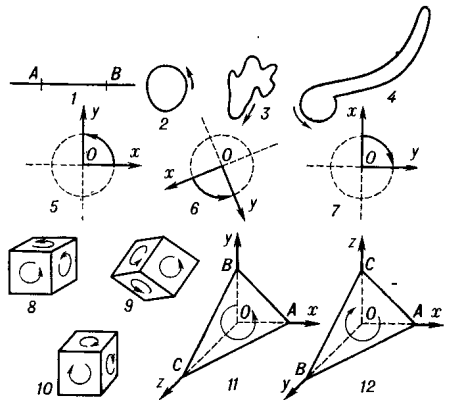


Рис. 1—12.

Ориентация на плоскости. Пусть к.-л. кусок плоскости ограничен простой замкнутой кривой (т. е. замкнутой кривой без кратных точек). Эту кривую можно ориентировать двумя разными способами. При ориентации кривой ориентируется и ограниченный ею кусок плоскости. Две простые замкнутые кривые на плоскости считаются ориентированными одинаково, если при обходе этих кривых по указанному направлению ограниченные ими куски плоскости остаются с одной и той же стороны (в обоих случаях или справа, или слева). Напр., на рис. 2 и 4 кривые ориентированы одинаково, а кривая на рис. 3 — противоположно первым двум. На плоскости достаточно выбрать О. одной простой замкнутой кривой, чтобы тем самым определилась соответствующая О. всех остальных таких кривых, лежащих на той же плоскости. Плоскость вместе с определённым выбором О. лежащих на ней замкнутых кривых наз. ориентированной плоскостью. Каждая плоскость может быть ориентирована двумя способами. О. плоскости может быть также задана при помощи выбора систем декартовых координат. Если на плоскости выбраны оси координат Ox и Oy с определёнными положительными направлениями на них, то этому выбору соответствует О. плоскости, при к-рой окружность с центром в начале координат ориентирована в направлении от положительного направления оси Ox к положительному направлению оси Oy. Напр., системы координат на рис. 5 и 6 определяют одну и ту же О. плоскости. Система же координат на рис. 7 ориентирована противоположным образом.

Координаты (x, y) и (x', y') в двух прямолинейных системах координат на плоскости связаны соотношениями

$$x'=a_{11}x+a_{12}y+b_1,$$
$$y'=a_{21}x+a_{22}y+b_2,$$

где определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Системы координат (x, y) и (x', y') ориентированы одинаково, если $\Delta>0$, и противоположно, если $\Delta<0$. Это обстоятельство можно использовать для строгой аналитич. теории О. на плоскости. Легко видеть, что множество S всех прямолинейных систем координат распадается на два подмножества S' и S'' так, что в пределах S' (и в пределах S'') все системы координат связаны преобразованиями с $\Delta>0$, а любая система координат из S' связана системой координат из S'' преобразованием с $\Delta<0$. Выбрать О. плоскости — это и значит выбрать одно из множеств S' или S''. Выбор О. на плоскости определяет знак расположенных на плоскости углов и площадей, ограниченных ориентированными замкнутыми кривыми. Напр., формула

$$S=\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx$$

площади S, ограниченной замкнутой кривой C, ориентированной в направлении, указанном стрелкой, в случае правой системы координат (рис. 5 и 6) приведёт к положительной площади для фигур на рис. 2 и 4 и к отрицательной для фигуры на рис. 3. Наоборот, в левой системе координат (рис. 7) вычисленные по формуле площадь S фигуры на рис. 3 будет положительна, а площади же фигур на рис. 2 и 4 — отрицательны.

Ориентация поверхности. Подобно тому, как была выше определена О. плоскости, может быть определена О. любой поверхности, делящей пространство на две части (напр., сферы). Для этого рассматриваются куски поверхности, ограниченные простыми замкнутыми линиями. Ориентировать такой кусок поверхности — это значит выбрать определённую О. ограничивающей его кривой. Два куска поверхности наз. ориентированными одинаково, если при обходе ограничивающих эти куски поверхности кривых в указанном направлении сами куски поверхности остаются с одной и той же стороны. Напр., поверхности на рис. 8 и 9 двух кубов ориентированы одинаково, а поверхность третьего (рис. 10) — противоположным образом. Поверхность вместе с определённой О. кусков, ограниченных простыми замкнутыми кривыми, и называют ориентированной поверхностью. Не всякая поверхность может быть ориентирована. Однако поверхности, ограничивающие часть пространства, всегда принадлежат к числу ориентируемых.

Ориентация пространства. Пусть замкнутая поверхность ограничивает определённый кусок пространства. Говорят, что такая поверхность ориентирована правым образом, если куски этой поверхности, наблюдаемые снаружи, представляются ориентированными против часовой стрелки, подобно кубам на рис. 8 и 9. Наоборот, О. замкнутой поверхности, ограничивающей кусок пространства, считается левой, если её куски ориентированы при наблюдении снаружи по часовой стрелке, по-

добно кубу на рис. 10. Выбор определённой О. замкнутых поверхностей без самопересечений наз. О. самого трёхмерного пространства. Таким образом, существуют две О. трёхмерного пространства: правая и левая. О. пространства можно установить также при помощи выбора системы декартовых координат. Если выбраны оси координат Ox, Oy и Oz с определёнными положительными направлениями на них, то соответствующая О. пространства определяется следующим условием: рассматривается тетраэдр $OABC$ с вершиной O в начале и вершинами A, B, C соответственно на положительных лучах осей Ox, Oy и Oz (рис. 11, 12), треугольник ABC, лежащий на поверхности этого тетраэдра, ориентируется в порядке ABC (т. е. от оси Ox к оси Oy и затем к оси Oz); этим определяется О. поверхности тетраэдра, а следовательно и всего пространства. Выбор осей на рис. 11 соответствует правой О. пространства, выбор же осей на рис. 12 — левой О. пространства. По указанному принципу сами системы координат в пространстве разделяются на правые и левые. От выбора О. пространства зависит знак объёмов, ограниченных ориентированными поверхностями, смысл векторного произведения двух векторов и т. п.

Понятие «О.» распространяется также и на многомерные пространства. *А. Н. Колмогоров.*

ОРИЕНТИ́РОВАННАЯ ПЛО́СКОСТЬ — см. *Ориентация.*

ОРИЕНТИ́РОВАННАЯ ПОВЕ́РХНОСТЬ — см. *Ориентация.*

ОРИЕНТИ́РОВАННАЯ ПРЯМА́Я — см. *Ориентация.*

ОРИЕНТИ́РОВАННЫЙ ГРАФ — граф, каждому ребру которого приписана ориентация. О. г. G задаётся множеством вершин V и набором E упорядоченных пар вершин, наз. д у г а м и. Говорят, что дуга (u, v) исходит из вершины u и входит в вершину v. Число дуг, исходящих из v, наз. п о л у с т е п е н ь ю и с х о д а вершины v, а число дуг, входящих в v, наз. п о л у с т е п е н ь ю з а х о д а вершины v. Чередующаяся последовательность вершин и дуг v_0, e_1, v_1, e_2, . . ., e_n, v_n, в к-рой $e_i=(v_{i-1}, v_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$, наз. м а р ш р у т о м (ориентированным). Маршрут наз. з а м к н у т ы м, если его первая и последняя вершины совпадают. П у т ь — это маршрут, в к-ром все вершины различны. К о н т у р — это нетривиальный (содержащий хотя бы одну дугу) замкнутый маршрут, у к-рого все вершины различны, кроме первой и последней. Если существует путь из вершины u в вершину v, то говорят, что v достижима из u.

О. г. G с нумерованными вершинами $v_1, \ldots, v_n$ и дугами $e_1, \ldots, e_n$ можно задать м а т р и ц е й и н ц и д е н т н о с т и, т. е. матрицей $\|b_{ij}\|$ размера $n\times m$, в к-рой

$$b_{ij}=\begin{cases} +1, & \text{если дуга } e_j \text{ исходит из } v_i,\\ -1, & \text{если дуга } e_j \text{ заходит в } v_i,\\ 0, & \text{если дуга } e_j \text{ не инцидентна } v_i.\end{cases}$$

ОРИЕНТИ́РОВАННЫЙ МНОГОУГО́ЛЬНИК — см. *Многоугольник.*

ОРИЕНТИ́РУЕМАЯ ПОВЕ́РХНОСТЬ — поверхность, к-рая может быть ориентирована. См. *Ориентация.*

ОРИЕНТИ́РУЕМЫЙ МНОГОГРА́ННИК — см. *Многогранник.*

ОРИСФЕ́РА (от греч. ὅριον — граница, предел и σφαῖρα — шар), п р е д е л ь н а я с ф е р а, в п р о с т р а н с т в е Л о б а ч е в с к о г о — предел сфер бесконечно увеличивающегося радиуса. См. *Лобачевского геометрия.*

ОРИЦИ́КЛ (от греч. ὅριον — граница, предел и κύκλος — круг, окружность), п р е д е л ь н а я о к р у ж н о с т ь, н а п л о с к о с т и Л о б а ч е в с к о г о — предел окружностей бесконечно увеличивающегося радиуса. См. *Лобачевского геометрия.*

ОРТ (от греч. ὀρθός — прямой) — единичный вектор евклидова пространства, то есть вектор $\boldsymbol{e}$, модуль которого равен единице. Если дан вектор $\boldsymbol{a}$, то его О. можно выразить так: $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$, где $|\boldsymbol{a}|$ — модуль вектора $\boldsymbol{a}$. Всякий вектор $\boldsymbol{a}$ в пространстве можно разложить по трём некомпланарным векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3,$$

где x, y, z — компоненты вектора $\boldsymbol{a}$, а $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ — О. базиса. Обычно О. в прямоугольной системе координат (направленные соответственно по осям x, y, z) обозначают буквами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Термин «О.» ввёл О. Хевисайд (1892), обозначения $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — Г. Грассман (1844), $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — У. Гамильтон (1853).

ОРТОГОНАЛИЗА́ЦИИ МЕ́ТОД — метод решения системы линейных алгебраических уравнений $Ax=b$ с невырожденной матрицей A, основанный на процессе Грама—Шмидта ортогонализации системы векторов.

Если $A=\|a_{ij}\|$ — квадратная матрица n-го порядка,

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top,\ b=(b_1, b_2, \ldots, b_n)^\top,$$
$$a_i=(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}, -b_i),\ i=1, 2, \ldots, n;$$
$$y=(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1),$$

то исходная система может быть записана в виде

$$(a_i, y)=0,\ i=1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

В О. м. к системе векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$, где $a_{n+1}=(0, 0, \ldots, 0, 1)$, применяется процесс ортогонализации, состоящий в построении ортонормированной системы векторов $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ по рекуррентным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} v_1&=a_1,\ q_1=v_1/\sqrt{(v_1, v_1)},\\ v_k&=a_k-\textstyle\sum_{i=1}^{k-1}(a_k, q_i)\,q_i,\\ q_k&=v_k/\sqrt{(v_k, v_k)}.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Вектор $q_{n+1}=(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$ удовлетворяет соотношениям (1). Это означает, что

$$(z_1/z_{n+1},\ z_2/z_{n+1},\ \ldots,\ z_n/z_{n+1})^\top$$

— искомое решение системы. Соотношения (2) могут быть истолкованы как последовательные преобразования матрицы A в унитарную матрицу, что равносильно представлению матрицы в виде произведения $A=LU$, где L — треугольная, U — унитарная матрицы.

О. м., как правило, неустойчив относительно вычислительной погрешности: векторы $q_1, \ldots, q_{n+1}$ практически оказываются неортогональными. Для исправления этой ситуации применяется процесс переортогонализации.

ОРТОГОНАЛИЗА́ЦИЯ, п р о ц е с с о р т о г о н а л и з а ц и и, — алгоритм построения для данной линейно независимой системы векторов (в евклидовом или эрмитовом пространстве V) ортогональной системы векторов, порождающих то же самое подпространство в V. Наиболее известным является п р о ц е с с Г р а м а — Ш м и д т а, состоящий в следующем. Пусть задана система векторов $a_1, \ldots, a_k$. Полагают $b_1=a_1$, далее построение ведётся индуктивно. Если $b_1, \ldots, b_i$ уже построены, то за b_{i+1} можно взять

$$a_{i+1}+\textstyle\sum_{j=1}^{i}\alpha_j b_j,$$

где

$$\alpha_j=-\frac{(a_{i+1}, b_j)}{(b_j, b_j)}$$

($j=1, \ldots, i$) находятся из условия ортогональности вектора b_{i+1} векторам $b_1, \ldots, b_i$. Геометрич. смысл этого построения заключается в том, что на каждом этапе строится перпендикуляр к линейной оболочке векторов $a_1, \ldots, a_i$ до конца вектора a_{i+1}. Явное выражение векторов b_i через $a_1, \ldots, a_k$ даёт формула

$$b_i=\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \ldots & (a_1, a_{i-1}) & a_1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (a_i, a_1) & \ldots & (a_i, a_{i-1}) & a_i\end{vmatrix}.$$

Определитель в правой части формулы следует формально разложить по последнему столбцу. Нормируя полученные векторы b_i, можно получить ортонормированную систему

векторов $q_1, \ldots, q_k$. Причём

$$q_i = \frac{b_i}{\sqrt{\Gamma_{i-1}\Gamma_i}},$$

где Γ_i — определитель Грама системы $a_1, \ldots, a_i$.

Процесс Грама — Шмидта может быть истолкован как разложение невырожденной квадратной матрицы в произведение ортогональной (в эрмитовом случае — унитарной) и верхней треугольной матрицы с положительными диагональными элементами. Он может быть использован для решения системы линейных алгебраич. уравнений с невырожденной матрицей A. См. *Ортогонализации метод.*

ОРТОГОНА́ЛЬНАЯ АКСОНОМЕ́ТРИЯ — см. *Аксонометрия.*

ОРТОГОНА́ЛЬНАЯ ГРУ́ППА — см. *Классическая группа, Ортогональное преобразование.*

ОРТОГОНА́ЛЬНАЯ МА́ТРИЦА — квадратная матрица $A = \|a_{ik}\|$ порядка n с действительными элементами, столбцы которой образуют ортонормированную систему векторов, то есть

$$a_{i1}a_{k1} + a_{i2}a_{k2} + \ldots + a_{in}a_{kn} \begin{cases} = 1 \text{ при } i = k, \\ = 0 \text{ при } i \neq k. \end{cases}$$

О. м. служат матрицами перехода от одного ортонормированного базиса к другому в евклидовом пространстве, а также матрицами *ортогональных преобразований* евклидова пространства в ортонормированном базисе. Квадратная матрица A с действительными элементами ортогональна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет любому из следующих условий:

1) строки матрицы A образуют ортонормированную систему векторов

2) $A^{\top}A = E$,

3) $AA^{\top} = E$,

4) $A^{\top} = A^{-1}$

(здесь $A^{\top}$ — транспонированная к A матрица). Аналогично определяются О. м. с комплексными элементами.

Определитель О. м. равен 1 (собственная О. м.) или -1 (несобственная О. м.). Произведение двух О. м. снова является О. м., произведение двух собственных или двух несобственных О. м.— собственной О. м., произведение собственной и несобственной — несобственной О. м.

ОРТОГОНА́ЛЬНАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Проекция.*

ОРТОГОНА́ЛЬНАЯ СИСТЕ́МА — 1) О. с. векторов — множество $\{x_\alpha\}$ ненулевых векторов евклидова (гильбертова) пространства такое, что скалярные произведения $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Если при этом норма каждого вектора равна единице, то система $\{x_\alpha\}$ наз. ортонормированной. Полная О. с. наз. ортогональным базисом. Соответственно определяется и ортонормированный базис.

2) О. с. координат — система координат, в к-рой координатные линии (или поверхности) пересекаются под прямым углом. Наиболее часто используемые О. с. координат: на плоскости — декартова, полярные, эллиптические, в пространстве — декартовы, сферические, цилиндрические.

3) О. с. функций — система функций $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, ортогональных с весом $p(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, т. е. таких, что

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,p(x)\,dx = 0 \text{ при } m \neq n.$$

Примеры. Тригонометрич. система 1, $\cos nx$, $\sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$,— О. с. функций с весом 1 на отрезке $[-\pi, \pi]$, функции Бесселя $J_\nu(\mu_n^\nu x/l)$, где $n = 1, 2, \ldots$, μ_n^ν — положительные нули $J_\nu(x)$, образуют для каждого $\nu > -\frac{1}{2}$ О. с. с весом $\rho(x) = x$ на отрезке $[0, l]$.

Если каждая функция из О. с. такова, что

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2\,p(x)\,dx \equiv N_n = 1$$

(условие нормированности), то такая система функций наз. ортонормированной. Любую О. с. функций можно нормировать, умножив $\varphi_n(x)$ на число $1/\sqrt{N_n}$ — нормирующий множитель. Из любой системы линейно независимых функций $\{f_k(x)\}$, $k = 1, 2, \ldots$, для каждой из к-рых существует интеграл

$$\int_a^b |f_k(x)|^2\,p(x)\,dx,$$

можно построить нормированную О. с. Для этого достаточно рассмотреть линейные комбинации этих функций

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_{nk} f_k(x)$$

и определить коэффициенты C_{nk} из условия ортогональности $\varphi_n(k)$ ко всем функциям $f_k(x)$, $1 \leqslant k < n$ [из этого следует ортогональность $\varphi_n(x)$ ко всем $\varphi_k(x)$, $1 \leqslant k < n$] и условия нормированности (процесс ортогонализации). Напр., ортогонализуя на отрезке последовательность функций $1, x, x^2, \ldots$ с весом 1, приходят к многочленам Лежандра

$$P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отдельные классы О. с. функций изучались ещё в 18 в. Напр., Л. Эйлер и Д. Бернулли рассматривали разложения функции в ряды по тригонометрич. системе функций, по цилиндрич. функциям и т. д. Исследования по теории потенциала способствовали созданию теории сферич. функций. Однако систематич. изучение О. с. связано с введением метода решения краевых задач уравнений математич. физики. Этот метод приводит обычно к задаче о разыскании значений параметра λ, к-рым соответствуют неравные тождественно нулю решения дифференциального уравнения вида $y'' + q(x)y = \lambda y$, удовлетворяющие граничным условиям $y(a) + hy'(a) = 0$, $y(b) + Hy'(b) = 0$, где h и H — постоянные (см. *Штурма — Лиувилля задача*). Соответствующие значения λ наз. собственными значениями, а решения — собственными функциями задачи. Можно показать, что собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны с весом 1 на отрезке $[a, b]$. Чрезвычайно важный класс О. с. был открыт П. Л. Чебышевым в его исследованиях по интерполированию способом наименьших квадратов и проблеме моментов (см. *Чебышева многочлены*).

Одна из основных задач теории О. с. есть задача о разложении произвольной, удовлетворяющей нек-рым ограничениям функции $f(x)$ в ряд вида $\sum C_n\varphi_n(x)$, где $\{\varphi_n(x)\}$ — О. с. Исторически к этой задаче привёл вопрос о возможности разложения любой функции по собственным функциям, получаемым при применении метода Фурье. Если положить формально $f(x) = \sum C_n\varphi_n(x)$, где $\{\varphi_n(x)\}$ — нормированная О. с., и допустить возможность почленного интегрирования, то, умножая этот ряд на $\overline{\varphi}_n(x)p(x)$ и интегрируя от a до b, получают

$$C_n = \int_a^b f(x)\,\overline{\varphi}_n(x)\,p(x)\,dx. \qquad (*)$$

Коэффициенты C_n, наз. коэффициентами Фурье функции $f(x)$ относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$, обладают следующим экстремальным свойством: линейная форма $\sum_{k=1}^{n} C_n\varphi_k(x)$ наилучшим образом приближает в среднем эту функцию. Иными словами, средняя квадратичная ошибка с весом $p(x)$:

$$\sigma_n = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(x) \right|^2 p(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b |f(x)|^2\,p(x)\,dx - \sum_k^n |C_k|^2$$

имеет наименьшее значение по сравнению с ошибками, даваемыми при том же n другими линейными выражениями вида $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \varphi_k(x)$. Отсюда, в частности, получается т. н. неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 p(x)\,dx.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(x)$ с коэффициентами C_n, вычисленными по формуле (*), наз. р я д о м Ф у р ь е функции $f(x)$ по нормированной О. с. $\{\varphi_n(x)\}$. Для приложений первостепенную важность имеет вопрос, определяется ли однозначно функция $f(x)$ своими коэффициентами Фурье. О. с. функций, для к-рых это имеет место, наз. п о л н ы м и или з а м к н у т ы м и. Условия замкнутости О. с. функций могут быть даны в нескольких эквивалентных формах: 1) любая непрерывная функция может быть с любой степенью точности приближена в среднем линейными комбинациями функций $\varphi_k(x)$, то есть $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$ [в этом случае говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x)$ с х о д и т с я в с р е д н е м к функции $f(x)$]. 2) Для всякой функции $f(x)$, квадрат к-рой интегрируем относительно веса $p(x)$, выполняется условие замкнутости Ляпунова — Стеклова:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 p(x)\,dx.$$

3) Не существует отличной от нуля функции с интегрируемым на отрезке $[a, b]$ квадратом модуля, ортогональной ко всем функциям $\varphi_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$ Полнота тригонометрич. системы функций была доказана А. М. Ляпуновым (1896), а полнота системы собственных функций уравнения Штурма — Лиувилля установлена В. А. Стекловым в ряде исследований (1896—1919).

Из полноты системы $\{\varphi_n(x)\}$ не следует, вообще говоря, справедливость соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(x) = f(x),$$

т. е. из сходимости в среднем ряда Фурье функции $f(x)$ не следует его сходимость к $f(x)$ в каждой точке. Однако для большинства встречающихся в математич. анализе систем это соотношение справедливо для всех достаточно гладких функций.

Глубокие исследования о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x)$ провёл Д. Е. Меньшов, доказавший, что этот ряд сходится почти всюду, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^2 \ln^2 k$, причём функция $\ln^2 k$ в общем случае не может быть заменена медленнее растущей функцией (для отдельных О. с. такая замена возможна; так, для тригонометрич. системы функций можно вместо $\ln^2 k$ взять $\ln k$).

Если рассматривать функции с интегрируемым квадратом модуля как элементы гильбертова пространства, то нормированные О. с. функций будут системами координатных ортов этого пространства, а разложение функций в ряды по нормированной О. с.— разложением вектора по ортам. При таком подходе многие понятия теории нормированных О. с. приобретают наглядный геометрич. смысл. Напр., формула (*) означает, что проекция вектора на орт равна скалярному произведению вектора и орта; равенство Ляпунова — Стеклова может быть истолковано как теорема Пифагора для бесконечномерного пространства: квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекций на оси координат; замкнутость О. с. функций означает, что наименьшее замкнутое подпространство, содержащее все векторы этой системы, совпадает со всем пространством и т. д. *Н. Я. Виленкин.*

ОРТОГОНА́ЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — линейное преобразование A евклидова пространства L, сохраняющее скалярное произведение векторов, т. е. удовлетворяющее условию

$$(Ax, Ay) = (x, y)$$

для любых векторов x и y из L. О. п. сохраняет длины векторов и углы между ними. Обратно, всякое линейное преобразование евклидова пространства, сохраняющее длины векторов, является О. п. Линейное преобразование A является О. п. тогда и только тогда, когда оно переводит ортонормированный базис в ортонормированный, а также когда в ортонормированном базисе ему соответствует ортогональная матрица. Необходимым и достаточным условием ортогональности линейного преобразования A является также равенство $A^* = A^{-1}$, где A^* — сопряжённое линейное преобразование. Собственные значения О. п. равны ± 1, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Определитель О. п. равен $+1$ (с о б с т в е н н о е О. п.) или -1 (н е с о б с т в е н н о е О. п.). Для любого О. п. конечномерного евклидова пространства существует ортонормированный базис, в к-ром матрица О. п. имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & \\ & & & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \cos\varphi_k \quad -\sin\varphi_k \\ & & & & & & \sin\varphi_k \quad \cos\varphi_k \end{Vmatrix}$$

В случае евклидовой плоскости всякое собственное О. п. является поворотом и его матрица в ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix},$$

где φ — угол поворота, а всякое несобственное О. п. является отражением относительно нек-рой прямой и его матрица в подходящем ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

В 3-мерном евклидовом пространстве всякое собственное О. п. есть поворот вокруг нек-рой оси, а всякое несобственное О. п. есть произведение поворота вокруг оси и отражения в перпендикулярной плоскости; матрица О. п. в этом случае в подходящем ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix}.$$

В произвольном n-мерном евклидовом пространстве О. п. также сводятся к поворотам и отражениям.

О. п. евклидова пространства образуют группу относительно умножения преобразований — т. н. о р т о г о н а л ь н у ю г р у п п у данного евклидова пространства. Собственные О. п. образуют нормальную подгруппу этой группы, называемую с п е ц и а л ь н о й о р т о г о н а л ь н о й г р у п п о й.

ОРТОГОНА́ЛЬНОЙ ПРОГО́НКИ МЕ́ТОД — вариант метода прогонки, основанный на ортогональном преобразовании неизвестных. Пусть имеется система линейных алгебраич. уравнений:

$$y_{k+1} = A_k y_k + B_k z_k + F_k,$$
$$z_{k+1} = C_k y_k + D_k z_k + G_k,$$
$$\alpha_0 y_0 + \beta_0 z_0 = \gamma_0,$$
$$\alpha_n y_n + \beta_n z_n = \gamma_n,$$

где $A_k D_k \neq B_k C_k$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, $\alpha_0^2 + \beta_0^2 = 1$, $\alpha_n^2 + \beta_n^2 = 1$. О. п. м. состоит из трёх этапов.

1. Используя формулы

$$s_{k+1}=(C_kc_k-D_ks_k)/p_k,$$
$$c_{k+1}=(B_ks_k-A_kc_k)/p_k,$$
$$p_k=\sqrt{(C_kc_k-D_ks_k)^2+(B_ks_k-A_kc_k)^2},$$
$$u_{k+1}=(A_ks_ks_{k+1}+B_kc_ks_{k+1}+C_ks_kc_{k+1}+$$
$$+D_kc_kc_{k+1})u_k+(F_ks_{k+1}+G_kc_{k+1}),$$
$$s_0=\alpha_0,\ c_0=\beta_0,\ u_0=\gamma_0,$$

последовательно вычисляют s_{k+1}, c_{k+1}, u_{k+1} при $k=0, 1, \ldots, n-1$ (прямой ход прогонки).

2. Проверяется условие $\Delta_n=\alpha_nc_n-\beta_ns_n\neq 0$, и если оно выполняется, то вычисляют

$$v_n=[\gamma_n-(\alpha_ns_n+\beta_nc_n)u_n]/\Delta_n$$

и

$$v_k=\{v_{k+1}+[(C_ks_k+D_kc_k)s_{k+1}-(A_ks_k+B_kc_k)c_{k+1}]u_k+$$
$$+(G_ks_{k+1}-F_kc_{k+1})\}/p_k$$

при $k=n-1, n-2, \ldots, 1$ (обратный ход прогонки).

3. Значения решения исходной системы уравнений вычисляются по формулам

$$y_k=u_ks_k+v_kc_k,$$
$$z_k=u_kc_k-v_ks_k.$$

Если исходная система уравнений имеет единственное решение, устойчивое относительно малых изменений коэффициентов и свободных членов, то $\Delta_n\neq 0$ и рассмотренный О. п. м. также устойчив. В применении к разностной аппроксимации линейной краевой задачи для пары обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y'(x)=a_1(x)y(x)+b_1(x)z(x)+f_1(x),$$
$$z'(x)=a_2(x)y(x)+b_2(x)z(x)+f_2(x)$$

О. п. м. имеет регулярное замыкание.

ОРТОГОНА́ЛЬНОСТЬ (от греч. ὀρθογώνιος — прямоугольный) — обобщение (часто синоним) понятия *перпендикулярности*. Если два вектора в 3-мерном пространстве перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю. Это позволяет обобщить понятие перпендикулярности, распространив его на векторы в любом векторном пространстве, в к-ром определено скалярное произведение, обладающее обычными свойствами, назвав два вектора ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю. В частности, вводя скалярное произведение в пространство комплекснозначных функций, заданных на отрезке $[a, b]$ формулой

$$(f, \varphi)_p=\int_a^b f(x)\overline{\varphi(x)}\,p(x)\,dx,$$

где $p(x)\geqslant 0$ две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, для к-рых $(f, \varphi)_p=0$, то есть

$$\int_a^b f(x)\overline{\varphi(x)}\,p(x)\,dx=0,$$

наз. ортогональными с весом $p(x)$. Два линейных подпространства наз. ортогональными, если каждый вектор одного из них ортогонален каждому вектору другого. Это понятие обобщает понятие перпендикулярности двух прямых или прямой и плоскости в 3-мерном пространстве (но не понятие перпендикулярности двух плоскостей). Термином ортогональные кривые обозначают кривые линии, пересекающиеся под прямым углом (измеряется угол между касательными в точке пересечения). См., напр., ортогональные траектории в ст. *Изогональная траектория*.

Термин «О.» встречается у Евклида (3 в. до н. э.).

ОРТОГОНА́ЛЬНЫЕ ЛАТИ́НСКИЕ КВАДРА́ТЫ — см. *Латинский квадрат*.

ОРТОГОНА́ЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕ́НЫ — система многочленов $\{P_n(x)\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условию ортогональности:

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)h(x)\,dx=0,\ n\neq m,$$

причём степень каждого многочлена $P_n(x)$ равна индексу n, а $h(x)\geqslant 0$ — т. н. весовая функция (вес).

О. м. наз. ортонормированными и обозначаются $\{\hat{P}_n(x)\}$, если каждый многочлен имеет положительный старший коэффициент и выполняется условие нормированности:

$$\int_a^b \hat{P}_n^2(x)h(x)\,dx=1.$$

Если старший коэффициент каждого многочлена равен 1, то система О. м. обозначается $\{\tilde{P}_n(x)\}$. Наиболее важный класс О. м. составляют т. н. классические О. м.; они получаются (с точностью до постоянного множителя) при указанных ниже a, b и $h(x)$.

1) *Якоби многочлены* $\{P_n(x; \alpha, \beta)\}$ — для них $h(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$, $a=-1$, $b=1$; специальные частные случаи многочленов Якоби:

ультрасферические многочлены (иногда их наз. многочленами Гегенбауэра) $\{P_n(x, \alpha)\}$ — для них $\alpha=\beta$;

Чебышева многочлены 1-го рода $\{T_n(x)\}$ — для них $\alpha=\beta=-1/2$, $h(x)=1/\sqrt{1-x^2}$; Чебышева многочлены 2-го рода $\{U_n(x)\}$ — для них $\alpha=\beta=1/2$; $h(x)=\sqrt{1-x^2}$;

Лежандра многочлены $\{P_n(x)\}$ — для них $\alpha=\beta=0$, $h(x)\equiv 1$.

2) *Лагерра многочлены* $\{L_n(x)\}$ — для них $h(x)=e^{-x}$, $a=0$, $b=\infty$; обобщённые многочлены Лагерра $\{L_n(x, \alpha)\}$ — для к-рых $h(x)=x^\alpha e^{-x}$, $\alpha>-1$.

3) *Эрмита многочлены* $\{H_n(x)\}$ — для них $a=-\infty$, $b=+\infty$, $h(x)=e^{-x^2}$.

Весовая функция классич. О. м. удовлетворяет дифференциальному уравнению Пирсона

$$\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{p_0+p_1(x)}{q_0+q_1x+q_2x^2}=\frac{A(x)}{B(x)};\quad x\in(a, b),\qquad (*)$$

а многочлен $y=P_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$B(x)y''+[A(x)+B'(x)]y'-n[p_1+(n+1)q_2]y=0.$$

О. м. обладают многими общими свойствами. Нули О. м. в случае ортогональности по интервалу (a, b) являются действительными, различными и расположены внутри (a, b), причём между двумя соседними нулями многочлена $P_n(x)$ находится один нуль многочлена $P_{n-1}(x)$. Нули О. м. часто применяются в качестве узлов интерполяционных и квадратурных формул.

Многочлен $P_n(x)$ может быть представлен в виде т. н. формулы Родрига:

$$P_n(x)=\frac{C_n}{h(x)}\frac{d^n}{dx^n}[h(x)B^n(x)],$$

где C_n — нормировочный коэффициент (постоянное), а B — см. формулу (*). Исторически первым примером О. м. были многочлены Лежандра. Затем были введены многочлены Чебышева, общие многочлены Якоби, многочлены Эрмита и Лагерра.

● Суетин П. К., Классические ортогональные многочлены, 2 изд., М., 1979.

В. И. Битюцков.

ОРТОГОНА́ЛЬНЫЕ ТРАЕКТО́РИИ — см. *Изогональная траектория*.

ОРТОГОНА́ЛЬНЫЙ БА́ЗИС — см. *Ортогональная система*.

ОРТОДРО́МА (от греч. ὀρθός — прямой и δρόμος — бег, путь) — см. *Картографическая проекция*.

ОРТОНОРМИ́РОВАННАЯ СИСТЕ́МА — см. *Ортогональная система*.

ОРТОНОРМИ́РОВАННЫЙ БА́ЗИС — см. *Ортогональная система*.

ОРТОЦЕ́НТР (от греч. ὀρθός — прямой и лат. centrum — средоточие, центр) — точка пересечения трёх высот треугольника.

ОСЕВА́Я СИММЕТРИ́Я — см. *Симметрия*.

ОСЕВО́Й ВЕ́КТОР, псевдовектор, аксиальный вектор, — вектор в ориентированном пространст-

ве, который при изменении ориентации пространства на противоположную преобразуется в противоположный вектор. Примером О. в. может служить векторное произведение.

ОСЛАБЛЕ́НИЯ МЕ́ТОД — то же, что *релаксации метод*.

ОСНОВА́НИЯ ГЕОМЕ́ТРИИ — раздел геометрии, в котором исследуются основные понятия геометрии, соотношения между ними и связанные с ними вопросы.

Основные методы и подходы в О. г.— синтетический (напр., изучение непротиворечивости, полноты и независимости систем аксиом); групповой, к-рый включает в себя классификацию пространств и их геометрий как геометрий определённых групп преобразований; и метрический, к-рый рассматривает метрич. свойства пространства, к-рые удовлетворяют тем или иным аксиомам.

Важное место в О. г. занимает изучение логич. средств доказательств.

ОСО́БАЯ МА́ТРИЦА — то же, что *вырожденная матрица*.

ОСО́БАЯ ТО́ЧКА — 1) О. т. к р и в о й, заданной уравнением $F(x, y)=0$,— точка $M_0(x_0, y_0)$, в которой обе частные производные функции $F(x, y)$ обращаются в нуль:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0=0,\ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0=0.$$

Если при этом не все 2-е частные производные функции $F(x, y)$ в точке M_0 равны нулю, то О. т. наз. д в о й н о й. Если наряду с обращением в нуль 1-х производных в точке M_0 обращаются в нуль и все 2-е производные, но не все 3-и производные равны нулю и т. д., то О. т. наз. т р о й н о й, ..., n-к р а т н о й. При исследовании строения кривой вблизи двойной О. т. важную роль играет знак выражения

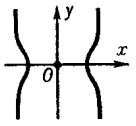


Рис. 1.

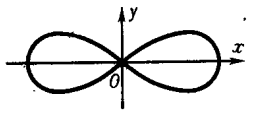


Рис. 2.

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right)_0^2.$$

Если $\Delta>0$, то О. т. наз. и з о л и р о в а н н о й; напр., у кривой $y^2-x^4+4x^2=0$ начало координат есть изолированная О. т. (рис. 1). Если $\Delta<0$, то О. т. наз. у з л о в о й или т о ч к о й с а м о п е р е с е ч е н и я; напр., у кривой $(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2-a^4=0$ начало координат есть узловая О. т. (рис. 2). Если $\Delta=0$, то О. т. кривой является либо изолированной, либо характеризуется тем, что различные ветви кривой имеют в этой точке общую касательную, напр.: а) т о ч к а в о з в р а т а (т о ч к а з а о с т р е н и я) 1-г о р о д а — различные ветви кривой расположены по разные стороны от общей касательной и образуют остриё, как у кривой $y^2-x^3=0$ (рис. 3, *а*); б) т о ч к а в о з в р а т а (т о ч к а з а о с т р е н и я) 2-г о р о д а — различные ветви кривой расположены по одну сторону от общей касательной, как у кривой $(y-x^2)^2-x^5=0$ (рис. 3, *б*); в) т о ч к а с а м о п р и к о с н о в е н и я (для кривой $y^2-x^4=0$ начало координат является точкой самоприкосновения; рис. 3, *в*). Наряду с указанными О. т. имеется много других О. т. со специальными названиями, напр., а с и м п т о т и ч е с к а я т о ч к а — вершина спирали с бесконечным числом витков (рис. 4), т о ч к а п р е к р а щ е н и я (рис. 5), у г л о в а я т о ч к а (т о ч к а и з л о м а) (рис. 6) и т. д.

Э. Г. Позняк.

2) О. т. п о в е р х н о с т и — см. *Дифференциальная геометрия*.

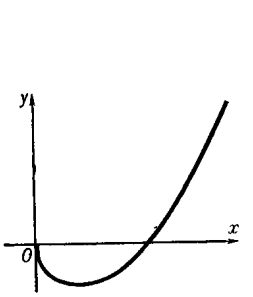


Рис. 5.

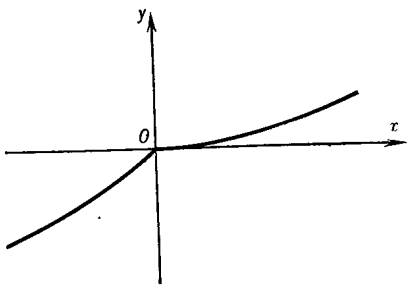


Рис. 6.

3) О. т. д и ф ф е р е н ц и а л ь н о г о у р а в н е н и я — точка, в которой одновременно обращаются в нуль и числитель и знаменатель правой части дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},\qquad (*)$$

где P и Q — непрерывно дифференцируемые функции. Предполагая О. т. расположенной в начале координат и используя формулу Тейлора, можно представить уравнение (*) в виде

$$\frac{dy}{dx}=\frac{cx+dy+P_1(x, y)}{ax+by+Q_1(x, y)},$$

где $P_1(x, y)$ и $Q_1(x, y)$ — бесконечно малые по отношению к $\sqrt{x^2+y^2}$. Характер поведения интегральных кривых около О. т. зависит от корней λ_1 и λ_2 характеристич. уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Именно, если $\lambda_1\neq\lambda_2$ и $\lambda_1\lambda_2>0$ или $\lambda_1=\lambda_2$, то О. т. есть узел; все интегральные кривые, проходящие через точки достаточно малой окрестности узла, входят в него. Если $\lambda_1\neq\lambda_2$ и $\lambda_1\lambda_2<0$, то О. т. есть седло; в окрестности седла четыре интегральные кривые (с е п а р а т р и с ы) входят в О. т., а между ними располагаются интегральные кривые типа гиперболы. Если $\lambda_{1,2}=-\alpha\pm i\beta$, $\alpha\neq0$ и $\beta\neq0$, то О. т. есть *фокус*; все интегральные кривые, проходящие через точки достаточно малой окрестности фокуса, представляют собой спирали с бесконечным числом витков в любой сколь угодно малой окрестности фокуса. Если, наконец, $\lambda_{1,2}=\pm i\beta$, $\beta\neq0$, то характер О. т. не определяется одними линейными членами в разложениях $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, как это имело место во всех перечисленных случаях; здесь О. т. может быть фокусом или *центром*, а может иметь и более сложный характер. В окрестности центра все интегральные кривые являются замкнутыми и содержат центр внутри себя. Так, напр., точка (0, 0) является узлом для уравнений $y'=2y/x$ ($\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$; рис. 1, *а*) и $y'=y/x$ ($\lambda_1=\lambda_2=1$; рис. 1, *б*), седлом для уравнения $y'=-y/x$ ($\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$; рис. 2), фокусом для уравнения $y'=(z+y)/(x-y)$ ($\lambda_1=1-i$, $\lambda_2=1+i$; рис. 3) и центром для уравнения $y'=-x/y$ ($\lambda_1=-i$, $\lambda_2=i$; рис. 4).

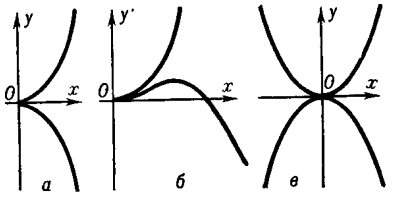


Рис. 3.

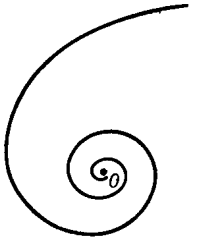


Рис. 4.

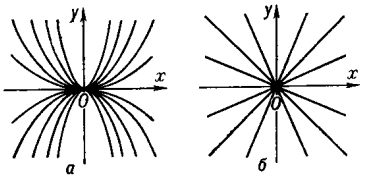


Рис. 1.

Если $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$, то О. т. наз. о с о б о й т о ч к о й в ы с ш е г о п о р я д к а. О. т. высшего порядка могут

принадлежать к указанным типам, но могут иметь и более сложный характер. В случае когда функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ аналитические, окрестность О. т. высшего порядка может распадаться на области: D_1 — заполненные интегральными кривыми, обоими концами входящими в О. т. (эллиптич. области), D_2 — заполненные интегральными кривыми, одним концом входящими в О. т. (параболич. области), и D_3 — области, ограниченные двумя интегральными кривыми, входящими в О. т., между к-рыми расположены интегральные кривые типа гипербол (гиперболич. области) (рис. 5). Если нет интегральных кривых, входящих в О. т., то О. т.

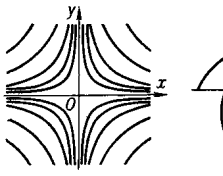


Рис. 2.

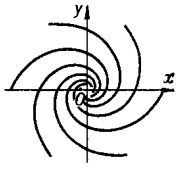


Рис. 3.

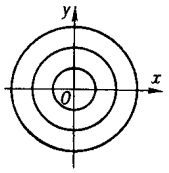


Рис. 4.

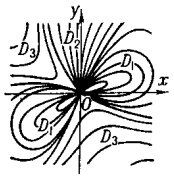


Рис. 5.

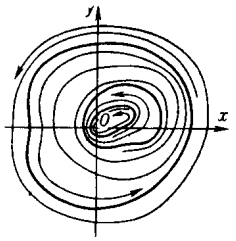


Рис. 6.

наз. точкой устойчивого типа. Окрестность устойчивой О. т. состоит из замкнутых интегральных кривых, содержащих О. т. внутри себя, между к-рыми расположены спирали (рис. 6).

Изучение О. т. дифференциальных уравнений, т. е. по существу изучение поведения семейств интегральных кривых в окрестности О. т., составляет один из разделов качественной теории дифференциальных уравнений и играет важную роль в приложениях, в частности в вопросах устойчивости движения. *В. В. Немыцкий.*

4) О. т. аналитической функции — препятствие для аналитического продолжения элемента аналитической функции вдоль некоторого пути. Каждая аналитич. функция $f(z)$ комплексного переменного z может быть задана своим регулярным элементом, т. е. степенным рядом

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

с центром z_0, представляющим эту функцию в своём круге сходимости $|z-z_0|<R$. Если аналитич. продолжение этого элемента возможно по всем путям во все точки z комплексной плоскости, включая и бесконечно удалённую точку $z=\infty$, то функция $f(z)$ необходимо является постоянной. Для нетривиальных же аналитич. функций характерно наличие препятствий для аналитич. продолжения по некрым путям, то есть О. т. При этом следует иметь в виду, что в одну и ту же точку z_0 комплексной плоскости продолжение по нек-рым путям возможно, а по другим — невозможно; в этом случае говорят, что над z_0 расположены как правильная точка, так и О. т.

Для однозначных элементарных функций характерно наличие *изолированных особых точек*, т. е. таких, для к-рых существует окрестность, свободная от других О. т. При этом если z_0 — изолированная О. т. и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, то z_0 наз. *полюсом* функции $f(z)$. Если же не существует конечного или бесконечного предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, то z_0 наз. *существенно особой точкой*. В случае конечного предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ аналитич. продолжение в точку z_0 возможно и следует положить $f(z_0)=A$; в этом случае z_0 иногда наз. устранимой О. т.

Ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности изолированной О. т. z_0

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

либо содержит лишь конечное число отрицательных степеней разности $z-z_0$, если z — полюс (причём наивысшая степень $\frac{1}{z-z_0}$, встречающаяся в ряде Лорана, наз. порядком полюса), либо содержит как угодно высокие степени $\frac{1}{z-z_0}$, если z_0 — существенно особая точка. Напр., для функции $1/z^3$ точка $z_0=0$ является полюсом порядка 3, а для функции

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}$$

$z_0=0$ — существенно особая точка.

У многозначных аналитич. функций, помимо уже описанных О. т. однозначного характера для однозначных элементов этих функций, могут встретиться изолированные О. т. многозначного характера, или *ветвления точки*. Точки ветвления z_0 характерны тем, что аналитич. продолжение функции $f(z)$ по достаточно малым окружностям $|z-z_0|=r$ с центром z_0 приводит к новым значениям $f(z)$, отличным от исходного. Напр., точка $z_0=0$ является точкой ветвления для функций $\sqrt{z}$ и $\operatorname{Ln} z$; при однократном обходе вокруг неё функция $\sqrt{z}$ меняет знак, а к значению $\operatorname{Ln} z$ прибавляется или вычитается $2\pi i$ (в зависимости от направления обхода). Если после нек-рого минимального числа $m>1$ обходов точки ветвления z_0 в одном и том же направлении приходят к исходному элементу, то z_0 наз. точкой ветвления конечного порядка $m-1$ ($z_0=0$ есть точка ветвления порядка 1 для $\sqrt{z}$). Если ни при каком числе последовательных обходов нельзя возвратиться к исходному элементу, то z_0 наз. логарифмической точкой ветвления или точкой ветвления бесконечного порядка (точка $z_0=0$ для функции $\operatorname{Ln} z$).

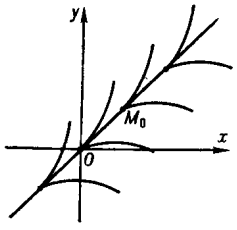
Если функция $f(z)$ представлена степенным рядом, то на границе круга сходимости этого ряда находится, по крайней мере, одна О. т. функции $f(z)$. Может оказаться, что все граничные точки области существования однозначной аналитич. функции являются для неё О. т. Так, напр., все точки единичной окружности $|z|=1$ являются особыми для функции

$$f(z)=z+z^2+z^4+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n},$$

а сама окружность $|z|=1$ есть естественная граница этой функции.

Для (однозначных) аналитич. функций $f(z_1,\ldots, z_n)$ многих комплексных переменных характерно прежде всего то, что у них не могут существовать изолированные О. т. При $n>1$ О. т. образуют нек-рые непрерывные множества. *Е. Д. Соломенцев.*

ОСОБОЕ РЕШЕНИЕ дифференциального уравнения — решение, в каждой точке которого нарушается единственность. Для уравнения $y'=f(x, y)$ это значит, что через каждую точку О. р. проходит несколько различных интегральных кривых (имеющих в этой точке общую касательную). При непрерывности $f(x, y)$ последнее возможно лишь, если в точках О. р. для функции $f(x, y)$ не выполнено условие Липшица по y. Напр., для уравнения $y'=1+\sqrt[3]{y-x}$ О. р. (рис.) является прямая $y=x$: через любую точку $M_0(x_0, y_0)$ этой прямой,



кроме самой прямой, проходят интегральные кривые

$$y = x \pm \left[\frac{2}{3}(x - x_0)\right]^{3/2}.$$

Геометрически О. р. представляет собой огибающую семейства интегральных кривых $\Phi(x, y, c) = 0$, образующих общий интеграл уравнения.

Для дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ определяется дискриминантная кривая $D(x, y) = 0$ как результат исключения параметра $p = y'$ из системы: $F(x, y, p) = 0$, $F'_p(x, y, p) = 0$. О. р. является, вообще говоря, лишь частью этой кривой.

Термин «О. р.» ввёл Ж. Лагранж.

ОСТА́ТОК — см. *Деление*.

ОСТА́ТОЧНАЯ ПРОГРА́ММА — см. *Смешанные вычисления*.

ОСТА́ТОЧНЫЙ СПЕ́КТР — см. *Спектральный анализ* линейных операторов.

ОСТА́ТОЧНЫЙ ЧЛЕ́Н разложения функции — аддитивное слагаемое в формуле, задающей аппроксимацию функции с помощью другой, в каком-то смысле более простой, функции. О. ч. равен разности между заданной функцией и функцией её аппроксимирующей, тем самым его оценка является оценкой точности рассматриваемой аппроксимации.

К указанным формулам относятся формулы типа формулы Тейлора, интерполяционных формул, асимптотич. формул, формул для приближённого вычисления тех или иных величин и т. п. Так, в формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n + O((x - x_0)^n), \quad x \longrightarrow x_0,$$

О. ч. (в виде Пеано) наз. слагаемое $O((x - x_0)^n)$. При асимптотич. разложении функции

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \longrightarrow +\infty,$$

О. ч. является $O(1/x^{n+1})$, $x \to \infty$. В частности, в *Стирлинга формуле*, дающей асимптотич. разложение гамма-функции

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z + O(e^{-z} z^{z-1/2}), \quad \mathrm{Re}\, z \longrightarrow +\infty,$$

О. ч. является $O(e^{-z} z^{z-1/2})$.

ОСТРОГРА́ДСКОГО МЕ́ТОД — метод выделения рациональной части неопределённого интеграла

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

где $Q(x)$ — многочлен степени n, имеющий кратные корни, а $P(x)$ — многочлен степени $m < n-1$.

О. м. позволяет алгебраич. путём представить такой интеграл в виде суммы двух слагаемых, из к-рых первое является рациональной функцией переменного x, а второе рациональной части не содержит. Имеет место равенство

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx, \qquad (1)$$

где Q_1, Q_2, P_1, P_2 — многочлены степеней соответственно n_1, n_2, m_1, m_2, причём $n_1 + n_2 = n$, $m_1 < n_1 - 1$, $m_2 < n_2 - 1$ и многочлен $Q_2(x)$ не имеет кратных корней. Многочлен $Q_1(x)$ является наибольшим общим делителем многочленов $Q(x)$ и $\frac{d}{dx}Q(x)$, и, следовательно, явное выражение $Q_1(x)$ можно найти, напр., с помощью алгоритма Евклида. Дифференцируя правую и левую части (1), получают тождество

$$Q_2(x)\frac{d}{dx}P_1(x) - P_1(x)\frac{Q_2(x)\frac{d}{dx}Q_1(x)}{Q_1(x)} + P_2(x)Q_1(x) \equiv P(x). \qquad (2)$$

Тождество (2) позволяет найти явное выражение многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ методом неопределённых коэффициентов.

О. м. был впервые предложен М. В. Остроградским (1844).

ОСТРОГРА́ДСКОГО ФО́РМУЛА — формула, дающая преобразование интеграла, взятого по объёму Ω, ограниченному поверхностью Σ, в интеграл, взятый по этой поверхности:

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_\Sigma X\,dy\,dz + Y\,dz\,dx + Z\,dx\,dy;$$

здесь X, Y, Z — функции точки (x, y, z), принадлежащей 3-мерной области Ω. О. ф. найдена М. В. Остроградским (1828, опубликовано в 1831). В векторной форме О. ф. имеет вид

$$\iiint \mathrm{div}\, \boldsymbol{p}\, d\sigma = \iint_\Sigma \boldsymbol{p}\boldsymbol{n}\, d\sigma,$$

где $\boldsymbol{p}$ — вектор поля, заданного в области Ω; $d\sigma$ — элемент объёма; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Σ; $d\sigma$ — элемент этой поверхности. В гидродинамич. истолковании О. ф. устанавливает равносильность двух способов учёта того количества жидкости, к-рое вытекает из оболочки Σ в единицу времени: 1) исходя из «произвольности» точечных источников, заполняющих область Ω (левая часть равенства); 2) исходя из скоростей частиц жидкости в момент их прохождения через оболочку Σ (правая часть равенства).

Самим М. В. Остроградским формула была дана (1834, опубликовано в 1838) также и в более общем виде — для интеграла, распространённого на n-мерную область. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ есть уравнение (гипер-)поверхности Σ, ограничивающей область Ω, то

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) dx_1\,dx_2 \ldots dx_n = \int_\Sigma \frac{X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}}\,ds,$$

где в правой части интеграл взят по поверхности Σ с элементом площади ds.

ОСТРОУГО́ЛЬНЫЙ ТРЕУГО́ЛЬНИК — треугольник, у которого все углы острые.

О́СТРЫЙ У́ГОЛ — угол, меньший прямого.

ОСЬ — прямая линия с указанным на ней направлением. Если на О. (термин ввёл И. Барроу, 1670) задано начало отсчёта и единица масштаба, то говорят, что задана О. координат, на к-рой каждому действительному числу соответствует определённая точка. Две взаимно перпендикулярные О. на плоскости — О. абсцисс и О. ординат — образуют прямоугольную *декартову систему координат*, в к-рой каждой упорядоченной паре действительных чисел соответствует определённая точка. В 3-мерном пространстве для определения положения точки вводится ещё О. аппликат, перпендикулярная названным двум О.

Полярная О. — см. *Полярные координаты*.

О. симметрии — см. *Симметрия*. В частности, О. гиперболы, параболы, эллипса, вращения — см. соответственно в статьях *Гипербола*, *Парабола*, *Эллипс*, *Вращения поверхность*.

О. гомологии — см. *Гомология*.

ОТДЕЛИ́МОЕ ПРОСТРА́НСТВО — то же, что *хаусдорфово пространство*.

ОТДЕЛИ́МОСТИ АКСИО́МЫ — условия, налагаемые на топологическое пространство и выражающие требования, чтобы те или иные непересекающиеся множества были в некотором определённом смысле отделены друг от друга. О. а. приведены ниже.

T_0 — одна из двух точек имеет окрестность, не содержащую другую точку (А. Н. Колмогоров, 1935). Другими словами, никакие две различные точки не имеют одного и того же замыкания. Пространства, удовлетворяющие аксиоме T_0, наз. пространствами Колмогорова.

T_1 — для любых двух точек существует окрестность каждой из них, не содержащая другой точки (М. Фреше, 1928, Ф. Рисс, 1909). Другими словами, каждая точка замкнута. Пространства, удовлетворяющие аксиоме T_1, наз. иногда достижимыми пространствами; $T_1 \neq T_0$.

T_2 — для любых двух точек существуют непересекающиеся окрестности (Ф. Хаусдорф, 1914). Пространства, удовлетворяющие аксиоме T_2, наз. отделимыми пространствами или хаусдорфовыми пространствами; $T_2 \neq T_1$.

T_3 — для любого замкнутого множества и не содержащейся в нём точки существуют их непересекающиеся окрестности (Л. Вьеторис, 1921). Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1+T_3, наз. регулярными пространствами; $T_3+T_1 \neq T_2+T_1$.

$T_{3^1/_2}$ — для любого замкнутого множества и точки вне его существует непрерывная числовая функция, равная нулю на множестве и единице в точке (А. Н. Тихонов, 1930). Пространство, удовлетворяющее аксиомам T_1+T_3, наз. вполне регулярным пространством или тихоновским пространством; $T_{3^1/_2}+T_1 \neq T_3+T_1$.

T_4 — для любых двух замкнутых непересекающихся множеств существуют их непересекающиеся окрестности. Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_4+T_1, наз. нормальными пространствами; $T_4+T_1 \neq T_3+T_1$, $T_4+T_1 \neq T_{3^1/_2}+T_1$.

ОТКА́З — понятие *надёжности теории*, означающее потерю работоспособности изделия (системы). См. также *Массового обслуживания теория*.

ОТКРЫ́ТАЯ БА́ЗА — см. *База* топологического пространства.

ОТКРЫ́ТО ЗА́МКНУТОЕ МНО́ЖЕСТВО — множество, граница которого пуста.

ОТКРЫ́ТОЕ МНОГООБРА́ЗИЕ — см. *Многообразие*.

ОТКРЫ́ТОЕ МНО́ЖЕСТВО — множество в топологическом пространстве, не содержащее предельных точек дополнительного к нему множества. Любая точка О. м. является внутренней, т. е. имеет окрестность, содержащуюся целиком в О. м. Всякое (не пустое) О. м. на прямой является интервалом или суммой не более чем счётного числа интервалов. Пересечение конечного числа и сумма любого числа О. м. являются О. м. Связные О. м. наз. областями. Любое топологич. пространство может быть определено заданием своих О. м. Если же топологич. пространство задано системой своих замкнутых множеств, то О. м. определяются в нём как множества, дополнительные к замкнутым.

ОТКРЫ́ТОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — отображение $f : X \to Y$ топологического пространства X в топологическое пространство Y такое, что образ всякого открытого множества открыт.

ОТКРЫ́ТЫЙ ПРОМЕЖУ́ТОК — то же, что промежуток или интервал. См. *Интервал и сегмент*.

ОТЛА́ДКА программы — средство экспериментальной проверки правильности уже составленной программы. См. *Программирование*.

ОТНОСИ́ТЕЛЬНАЯ НЕПРОТИВОРЕЧИ́ВОСТЬ — суждение типа «если теория T_1 непротиворечива, то непротиворечива и теория T». См. *Аксиоматический метод*.

ОТНОСИ́ТЕЛЬНАЯ ПОГРЕ́ШНОСТЬ — см. *Погрешность*.

ОТНОСИ́ТЕЛЬНЫЙ МАСШТА́Б — см. *Картографическая проекция*.

ОТНОСИ́ТЕЛЬНЫЙ ЭКСТРЕ́МУМ — то же, что *условный экстремум*.

ОТНОШЕ́НИЕ двух чисел — частное от деления первого числа на второе. О. двух однородных величин наз. число, получающееся в результате измерения первой величины, когда вторая выбрана за единицу меры. Если две величины измерены при помощи одной и той же единицы меры, то их О. равно О. измеряющих их чисел. О. длин двух отрезков может выражаться рациональным или иррациональным числом. В первом случае отрезки наз. соизмеримыми, а во втором — несоизмеримыми. Математики древнего мира не знали иррациональных чисел; для них понятие «О.» двух отрезков не сводилось к понятию числа; независимая от понятия числа геометрич. теория О. величин играла у них самостоятельную роль и заменяла в известном смысле теорию действительных чисел (см. *Число*).

ОТНОШЕ́НИЕ — произвольное подмножество R множества A^n всех кортежей (упорядоченных наборов) вида $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, где $a_1, \ldots, a_n$ суть элементы нек-рого множества A; в этом случае говорят, что R есть n-местное О. на A. Понятие О. служит в математике для выражения на теоретико-множественном языке связей между объектами. Множество всех таких элементов a, к-рые входят хотя бы в один кортеж, принадлежащий О. R, наз. полем этого О. 2-местные О. обычно наз. *бинарными отношениями*. Если R — бинарное О., то вместо $\langle a, b \rangle \in R$ часто пишут aRb. Обобщением понятия О. является *соответствие*.

О. порядка — см. *Порядка отношение*.

ОТНОШЕ́НИЯ ВЕРОЯ́ТНОСТЕЙ КРИТЕ́РИЙ — см. *Последовательный статистический анализ*.

ОТОБРАЖЕ́НИЕ — закон, по которому каждому элементу x некоторого заданного множества X сопоставляется однозначно определённый элемент y другого заданного множества Y (при этом X может совпадать с Y). Такое соотношение между элементами $x \in X$ и $y \in Y$ записывается в виде $y=f(x)$, $y=fx$, $y=xf$ или $f : x \mapsto y$. Говорят, что отображение f действует из X в Y и пишут $f : X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$. Вместо термина «О.» часто употребляют термин «оператор» (особенно в функциональном анализе и линейной алгебре), а также «функция» (особенно в случае, когда Y — числовое множество). Отображение $f : X \to X$ наз. также *преобразованием* множества X.

Иногда рассматривают О. f, определённые не на всём множестве X, а на нек-ром его подмножестве $D_f \subset X$, наз. областью определения О. f. Впрочем, в этой ситуации можно считать, что f — всюду определённое О. из D_f в Y. Подмножество

$$f(X) = \operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in X\}$$

множества Y наз. образом или областью значений О. f. Элемент $y=f(x)$ наз. образом элемента x, а сам x при этом — прообразом элемента y. Если $B \subset Y$, то множество всех таких $x \in X$, для к-рых $f(x) \in B$, наз. полным прообразом подмножества B в X. Множество всех О. из X в Y часто обозначается через Y^X. Сужением, или ограничением, О. $f : X \to Y$ на подмножество $A \subset X$ наз. отображение (обозначаемое f_A или $f|A$), заданное для $x \in A$ равенством $f_A(x) = f(x)$. Расширением, или распространением, или продолжением, О. f на множество $B \supset X$ наз. любое О. $f_B : B \to Y$, совпадающее с f на множестве X.

Если заданы три множества X, Y, Z и два О. $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, то существует О. $h : X \to Z$, определяемое равенством $h(x)=g(f(x))$. Это О. наз. композицией или суперпозицией или произведением О. f и g и обозначается $g \circ f$ (иногда просто gf). Композиция $f \circ g$, даже если она определена, может не совпадать с $g \circ f$. Композиция О. обладает свойством ассоциативности:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

здесь $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$. Если знак О. записывается справа, т. е. $f : x \to xf$, то композицию О. $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ пишут в обратном порядке: $f \circ g$.

$f : X \to X$ наз. тождественным (и обозначается id_X или 1_X), если $f(x)=x$ для всех $x \in X$. Для любого О. $f : X \to Y$ имеют место равенства

$$\mathrm{id}_Y \circ f = f \circ \mathrm{id}_X = f.$$

Отображение $f : X \to Y$ наз. инъективным или взаимно однозначным, или просто инъекцией, если для любых двух x_1, $x_2 \in X$ из равенства $f(x_1)=f(x_2)$ следует $x_1=x_2$. Отображение $f : X \to Y$ наз. сюръек-

тивным или отображением на, или просто сюръекцией, если для каждого $y \in Y$ существует такой $x \in X$, что $y=f(x)$ (т. е. $\mathrm{Im} f$ совпадает с Y). О., одновременно инъективное и сюръективное, наз. биективным или взаимно однозначным отображением на, или просто биекцией.

О. $g: Y \to X$ наз. правым (или левым) обратным к О. $f: X \to Y$, если $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (или $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ соответственно). О. g, являющееся одновременно и левым и правым обратным к f, наз. просто обратным, а само f — обратимым отображением. Наличие правого (левого) обратного О. доставляет информацию о разрешимости уравнения $y=f(x)$, а именно: если существует только правое обратное, то решение этого уравнения существует, но вопрос об однозначности его остаётся открытым; наличие же лишь левого обратного обеспечивает единственность решения в предположении, что оно существует.

О. $f: X \to Y$ порождает в произведении множеств $X \times Y$ множество $\Gamma_f = \{(x, f(x))\}$, к-рое наз. графиком отображения f и полностью определяет это О. Обратно, множество $M \subset X \times Y$ является графиком нек-рого О. тогда и только тогда, когда для любого $u \in X$ существует единственное $v \in Y$ такое, что $(u, v) \in M$. Таким образом, О. можно трактовать как частный случай *соответствия* (т. н. функциональные соответствия). Произвольные соответствия называют иногда многозначными функциями.

ОТРАЖЕ́НИЙ МЕ́ТОД — метод преобразования матрицы к более простому виду, состоящий в исключении элементов умножением на матрицы отражения. Применяется при решении линейных систем, линейных задач метода наименьших квадратов, в алгоритмах, связанных с проблемой собственных значений.

Матрицей отражения наз. матрица $U=E-2ww^*$, где $\|w\|_E=1$. Для заданной матрицы можно выбрать U так, чтобы при умножении на неё слева (справа) элементы k-го столбца (k-й строки) со строчным (столбцовым) индексом i при $i>l$ обратились в нуль и при $i<l$ остались неизменными. Такая матрица отражения обозначается через $U_k^{(l)}\left(U_k^{(l)}\right)$.

В итоге для $(m \times n)$-матрицы A определяется разложение $LAS=G$. При решении линейных систем используются в основном следующие разложения.

1. $L=U_n^{(n)} \ldots U_1^{(1)}$, $S=E$, G — правая треугольная (при $m \geqslant n$) или правая трапециевидная (при $m<n$). Последовательно в столбцах, начиная с первого, исключают поддиагональные элементы.

2. Те же L, G; S — произведение матриц перестановок. Сначала на место первого столбца ставится столбец наибольшей длины, исключаются его поддиагональные элементы; затем остальные столбцы переставляются так, чтобы на месте второго столбца находился элемент, имеющий наибольшую длину, без учёта элементов первой строки, исключаются его поддиагональные элементы и т. д. Этот процесс наз. нормализованным О. м.

3. $L=U_n^{(n)} \ldots U_1^{(1)}$, $S=\hat{U}_1^{(2)} \ldots \hat{U}_n^{(n+1)}$, G — правая двухдиагональная. Для $k=1, \ldots, n$ сначала строится $U_k^{(k)}$, выполняется умножение, затем по результату находится $\hat{U}_k^{(k+1)}$.

Используются также аналогичные разложения, в к-рых G — левая треугольная, левая трапециевидная или левая двухдиагональная матрица.

При вычислении матриц отражения необходимы меры по повышению устойчивости. Они позволяют получить исключительно устойчивую реализацию этих разложений, в к-рой в условиях t-разрядной арифметики с основанием p и при использовании накопления для скалярных произведений реально вычисленные матрицы удовлетворяют соотношению $\tilde{L}(A+M)\tilde{S}=\tilde{G}$, где

$$\|M\| \leqslant O(m+n)\, p^{-t+1} \|A\|_E;$$

матрицы $\tilde{L}$, $\tilde{S}$ близки к нек-рым унитарным матрицам.

Решение системы $Ax=b$ (в том числе и в смысле метода наименьших квадратов, в силу унитарности L, S), сводится к аналогичной задаче $Gu=l$, где $l=Lb$, и вычислению вектора $x=Su$. При программной реализации матрицы отражения задаются порождающими их векторами, к-рые запоминаются в основном на месте исключённых элементов (с привлечением незначительной, в общем случае дополнительной памяти). В явном виде матрицы отражения находить не нужно. Общий объём вычислительной работы определяется построением разложения. Разложения 1,2 требуют $4n^3/3$ арифметич. операций (при $m=n$). Соответствующий метод решения системы с невырожденной матрицей содержит операций в два раза больше, чем, напр., метод Гаусса. Однако здесь нет проблемы роста элементов и точность решения может быть гарантирована, если только матрица A остаётся невырожденной в пределах возмущений типа M.

ОТРЕ́ЗОК числовой прямой — то же, что сегмент. См. *Интервал и сегмент*.

ОТРИЦА́НИЕ — логическая операция, в результате которой из данного высказывания A получается новое высказывание «не A». В формализованных языках высказывание, получающееся в результате О. высказывания A, обозначается $\neg A$, $\sim A$, $\bar{A}$, $-A$, A' (читается: «не A», «неверно, что A», «A не имеет места»). О. в математич. логике определяется следующей истинностной таблицей, где И означает «истина», Л — «ложь»):

A	¬A
И	Л
Л	И

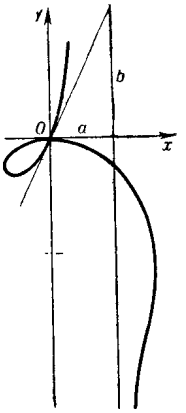
ОТРИЦА́ТЕЛЬНОЕ БИНОМИА́ЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — обобщение *Паскаля распределения*.

ОТРИЦА́ТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО́ — действительное число, меньшее нуля. На числовой прямой О. ч. изображаются точками, лежащими левее начала отсчёта, т. е. левее нуля.

ОТСЕЧЕ́НИЯ МЕ́ТОД — см. *Дискретное программирование*.

ОФИУРИ́ДА (от греч. ὄφις — змея и οὐρά — хвост) — плоская алгебраическая кривая 3-го порядка (рис.). Уравнение в прямоугольных координатах:

$$x(x^2+y^2)=y(ay-bx).$$



О. имеет в начале координат узловую точку с касательными $y=0$ и $y=bx/a$. Асимптота $x=a$.

ОЧЕРЕДЕ́Й ТЕО́РИЯ — раздел теории массового обслуживания. О. т. изучает системы обслуживания, в к-рых требования, застающие систему занятой, не теряются, а ожидают её освобождения и затем обслуживаются в том или ином порядке (часто с предоставлением приоритета определённым категориям требований).

Пусть, напр., имеется один обслуживающий прибор, на к-рый поступает случайный поток требований. Если в момент поступления требования прибор свободен, то оно сразу начинает обслуживаться. В противном случае оно становится в очередь и прибор обслуживает требования одно за другим в порядке их поступления. Пусть a — среднее число требований, поступающих за время одного обслуживания, $a<1$ и T — длительность периода занятости, т. е. промежутка времени от момента занятия прибора к.-л. требованием, заставшим прибор свободным, до первого момента полного освобождения прибора. О. т. показывает, что при естественных допущениях математич. ожидание T равно $m=1/(1-a)$, а дисперсия равна $(1+a)m^3$ (так, при $a=0{,}8$ соответствующие значения равны 5 и 225).

Таким образом, для «хорошо загруженного» обслуживающего прибора (т. е. при a, близких к 1) математич. ожидание m случайной величины T является весьма ненадёжной характеристикой T.

Задачи О. т. могут быть включены в теорию случайных процессов, а ответы часто бывают выражены в терминах преобразований Лапласа искомых характеристик. Выводы О. т. используют для рационального планирования систем массового обслуживания. Применение методов О. т. необходимо даже в простейших случаях для правильного понимания статистич. закономерностей, возникающих в системах массового обслуживания.

ОШИ́БКА ОКРУГЛЕ́НИЯ — см. *Округление*.

ОШИ́БОК ИНТЕГРА́Л — см. *Интеграл вероятности*.

ОШИ́БОК ТЕО́РИЯ — раздел математической статистики, посвящённый построению выводов о численных значениях приближённо измеренных величин и об ошибках (погрешностях) измерений. Повторные измерения одной и той же постоянной величины дают, как правило, различные результаты, т. к. каждое измерение содержит нек-рую ошибку. Различают три основных вида ошибок: систематические, грубые и случайные. Систематические ошибки постоянно либо преувеличивают, либо преуменьшают результаты измерений и происходят от определённых причин (неправильной установки измерительных приборов, влияния окружающей среды и т. д.), систематически влияющих на измерения и изменяющих их в одном направлении. Оценка систематич. ошибок производится с помощью методов, выходящих за пределы математич. статистики (см. *Наблюдений обработка*). Грубые ошибки возникают в результате просчёта, неправильного чтения показаний измерительного прибора и т. п. Результаты измерений, содержащие грубые ошибки, как правило, сильно отличаются от других результатов измерений и поэтому часто бывают хорошо заметны. Случайные ошибки происходят от различных случайных причин, действующих при каждом из отдельных измерений непредвиденным образом то в сторону уменьшения, то в сторону увеличения результатов.

О. т. занимается изучением лишь грубых и случайных ошибок. Основные задачи О. т.: разыскание законов распределения случайных ошибок, разыскание статистич. оценок неизвестных величин по результатам измерений, установление погрешностей таких оценок и устранение грубых ошибок.

Пусть в результате n независимых измерений нек-рой неизвестной величины μ получены значения $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Разности

$$\delta_1 = X_1 - \mu,\ \delta_2 = X_2 - \mu,\ \ldots,\ \delta_n = X_n - \mu$$

наз. истинными ошибками; в терминах вероятностной О. т. все δ_i трактуются как случайные величины, независимость измерений понимается как взаимная независимость случайных величин $\delta_1, \ldots, \delta_n$. При этом измерения наз. равноточными (в широком смысле), если величины δ_i имеют одинаковое распределение. Таким образом, истинные ошибки равноточных измерений суть независимые одинаково распределённые случайные величины. При этом математич. ожидание случайных ошибок $b = \mathsf{E}\delta_1 = \ldots = \mathsf{E}\delta_n$ наз. систематич. ошибкой, а разности $\delta_1 - b, \ldots, \delta_n - b$ — случайными ошибками. Таким образом, отсутствие систематич. ошибки означает, что $b=0$, и в этой ситуации $\delta_1, \ldots, \delta_n$ суть случайные ошибки. Величину $1/\sigma\sqrt{2}$, где σ — квадратичное отклонение ошибки δ_i, называют мерой точности (при наличии систематич. ошибки мера точности выражается отношением $1/\sqrt{2(b^2+\sigma^2)}$). Равноточность измерений в узком смысле понимается как одинаковость меры точности всех результатов измерений. Наличие грубых ошибок означает нарушение равноточности (как в широком, так и в узком смысле) для нек-рых отдельных измерений.

В качестве оценки неизвестной величины μ обычно берут арифметическое среднее из результатов измерений $X_1, \ldots, X_n$:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

а разности $\Delta_1 = X_1 - \overline{X}, \ldots, \Delta_n = X_n - \overline{X}$ наз. кажущимися ошибками. Выбор $\overline{X}$ в качестве оценки для a основан на том, что при достаточно большом числе n равноточных измерений, лишённых систематич. ошибки, оценка $\overline{X}$ с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, сколь угодно мало отличается от неизвестной величины μ; оценка $\overline{X}$ лишена систематич. ошибки (оценки с таким свойством наз. несмещёнными оценками); дисперсия этой оценки есть

$$\mathsf{D}\overline{X} = \mathsf{E}(\overline{X} - \mu)^2 = \sigma^2/n.$$

Опыт показывает, что практически очень часто случайные ошибки δ_i подчиняются распределениям, близким к нормальному (причины этого вскрыты т. н. предельными теоремами теории вероятностей). В этом случае распределение величины $\overline{X}$ мало отличается от нормального распределения с математич. ожиданием μ и дисперсией σ^2/n. Если распределение величин δ_i в точности нормально, то дисперсия всякой другой несмещённой оценки для μ, напр. медианы, не меньше $\mathsf{D}\overline{X}$. Если же распределение δ_i отлично от нормального, то последнее свойство может не иметь места.

Если дисперсия σ^2 отдельных измерений заранее неизвестна, то для её оценки пользуются величиной

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2;$$

s^2 — несмещённая оценка для σ^2, так как $\mathsf{E}s^2 = \sigma^2$.

Если случайные ошибки δ_i имеют нормальное распределение, то отношение

$$t = \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{s}$$

подчиняется распределению Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Этим можно воспользоваться для оценки погрешности приближённого равенства $\mu \approx \overline{X}$ (см. *Наименьших квадратов метод*).

Величина $\chi^2 = (n-1)s^2/\sigma^2$ при тех же предположениях имеет распределение хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы. Это позволяет оценить погрешность приближённого равенства $\sigma \approx s$. Относительная погрешность $|s-\sigma|/s$ не превосходит числа q с вероятностью

$$\omega = F(z_2,\ n-1) - F(z_1,\ n-1),$$

где $F(z,\ n-1)$ — функция распределения хи-квадрат

$$z_1 = \frac{\sqrt{n-1}}{1+q},\quad z_2 = \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

● Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, 2 изд., М., 1962; Большев Л. Н., Смирнов И. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

Л. Н. Большев.

ПАКЕ́Т ПРИКЛАДНЫ́Х ПРОГРА́ММ — см. *Программное обеспечение.*

ПАНОРА́МНАЯ ПЕРСПЕКТИ́ВА (от греч. πᾶν — всё и ὁραμα — вид) — см. *Перспектива.*

ПАПИ́РУСЫ математические (греч. πάπυρος) — памятники математической науки Древнего Египта, относящиеся к периоду Среднего царства (ок. 21 — ок. 18 вв. до н. э.). Наиболее известны: папирус Ринда, хранящийся в Лондоне (в Британском музее) и частично в Нью-Йорке, и Московский папирус, хранящийся в Музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина.

Папирус Ринда назван по имени его владельца, египтолога Г. Ринда, впервые изучен и издан на немецком языке в 1877; этот папирус наз. также папирусом Ахмеса — по имени его составителя писца Ахмеса (ок. 2000 до н. э.). Папирус Ринда представляет собой собрание решений 84 задач, имеющих прикладной характер; эти задачи относятся к действиям с дробями, определению площади прямоугольника, треугольника, трапеции и круга (последняя принимается равной площади квадрата со стороной в $^8/_9$ диаметра), объёма прямоугольного параллелепипеда и цилиндра; имеются также арифметич. задачи на пропорциональное деление, определение соотношений между количеством зерна и получающегося из него хлеба или пива и т. д.: решение одной задачи (79-й) приводится к вычислению суммы геометрич. прогрессии. Однако для решения этих задач не даётся никаких общих правил, не говоря уже о попытках каких-нибудь теоретич. обобщений.

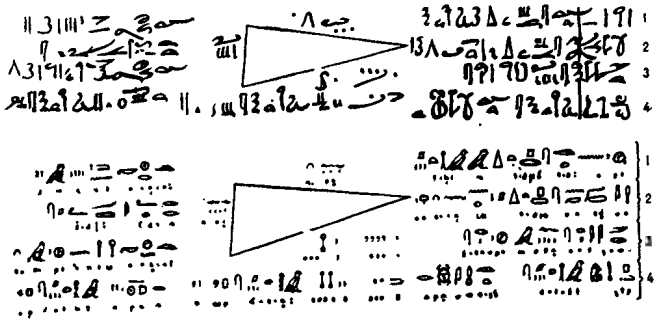


Рис. 1. Фрагмент папируса Ринда, написанного иератическим письмом, и его перевод на иерографическую запись. Вычисление площади треугольника.

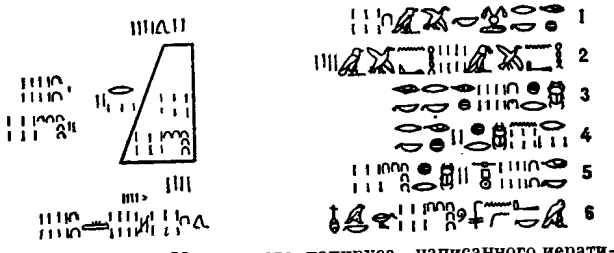
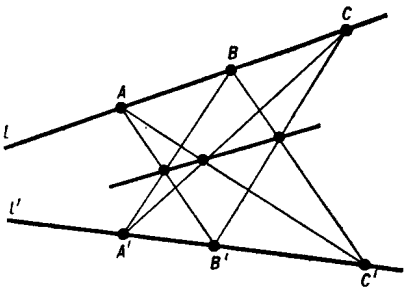


Рис. 2. Фрагмент Московского папируса, написанного иератическим письмом, и его перевод на иерографическую запись. Вычисление объёма усечённой пирамиды.

Московский папирус изучался египтологами Б. А. Тураевым (1917) и В. В. Струве (1927); полностью издан на немецком языке в 1930. В нём собраны решения 25 задач примерно такого же типа, как и в папирусе Ринда; особый интерес представляют 14-я и 10-я задачи. Решение первой из них основано на точной формуле объёма усечённой пирамиды с квадратным основанием. В 10-й задаче вычисляется боковая поверхность полуцилиндра, высота к-рого равна диаметру (или, возможно, поверхность полушария), что является первым в математич. литературе примером определения площади кривой поверхности.

● История математики, т. 1, М., 1970; Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

ПА́ППА АКСИО́МА: если l и l' — две различные прямые (рис.), A, B, C и A', B', C' — тройки различных точек прямых l и l' соответственно, отличных от точки пересечения прямых l и l', то точки пересечения прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, AC' и $A'C$ лежат на одной прямой. *Дезарга предложение* является следствием П. а., в то же время П. а.— вырожденный случай *Паскаля теоремы*. П. а. предложена Паппом (3 в.).



ПАРА́БОЛ МЕ́ТОД — метод вычисления корней многочлена

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

с комплексными коэффициентами, основанный на интерполяции многочленами 2-й степени. В П. м. по произвольной начальной тройке чисел z_0, z_1, z_2 строится последовательность z_0, z_1, z_2, z_3, ..., сходящаяся к корню многочлена. На каждом шаге по тройке векторов z_{i-2}, z_{i-1}, z_i как по узлам интерполяции строится интерполяционный многочлен Лагранжа $L^i(z)$ для $P_n(z)$ и за z_{i+1} берётся корень $L^{(i)}(z)$, ближайший к z_i. Эмпирически установлено, что так построенная последовательность z_0, z_1, z_2, ...сходится к нек-рому корню многочлена. Вычисленный корень выделяется, и далее описанный процесс применяется к многочлену меньшей степени.

ПАРА́БОЛ ФО́РМУЛА — то же, что *Симпсона формула.*

ПАРА́БОЛА (греч. παραβολή — приложение) — линия пересечения прямого кругового конуса плоскостью, не

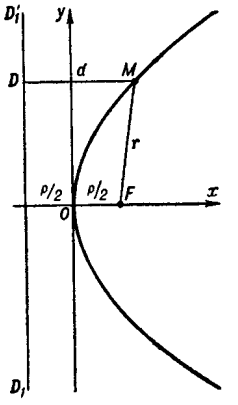


Рис. 1.

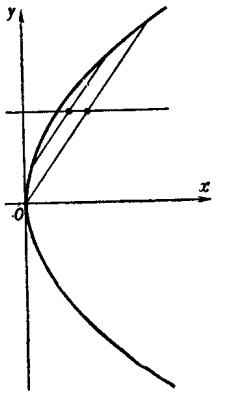


Рис. 2.

проходящей через вершину конуса и параллельной какой-либо касательной плоскости этого конуса. Парабола — множество точек $M(x, y)$ (рис. 1) плоскости, расстояние

$r=FM$ к-рых до определённой точки $F(p/2, 0)$ этой плоскости (фокуса параболы) равно расстоянию $d=DM$ до определённой прямой D_1D_1' (директрисы параболы). Прямая, проходящая через фокус F, перпендикулярна директрисе D_1D_1', наз. осью параболы, точка пересечения П. с осью — вершиной параболы.

В прямоугольной системе координат Oxy с началом в вершине П. и осью Ox, направленной по оси П. от директрисы к фокусу, уравнение П. имеет т. н. канонический вид:

$$y^2=2px,$$

где p (фокальный параметр) — расстояние от фокуса до директрисы или половина длины хорды, проходящей через фокус перпендикулярно оси.

П.— нецентральная *линия второго порядка*. Она состоит из одной бесконечной ветви, симметричной относительно оси. Эксцентриситет параболы $e=1$. Диаметр параболы — прямая, проходящая через середины параллельных хорд (рис. 2).

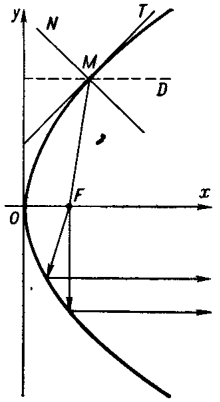


Рис. 3.

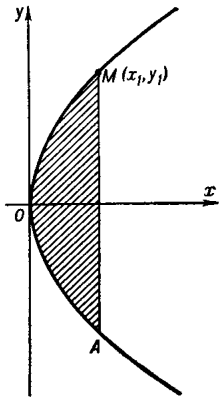


Рис. 4.

Касательная TM и нормаль NM к П. в точке M (рис. 3) являются биссектрисами углов между фокальным радиус-вектором FM и диаметром DM. Поэтому если в фокусе П. поместить источник света, то исходящие из него лучи после зеркального отражения от кривой образуют пучок, параллельный её оси.

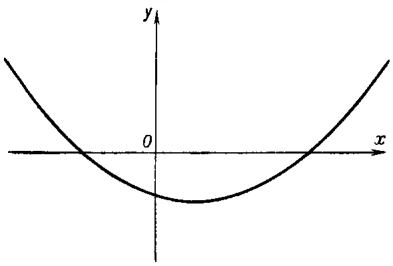


Рис. 5.

Радиус кривизны П. в точке $M(x, y)$:

$$R=(p+2x)^{3/2}/\sqrt{p};$$

в вершине: $R=p$.

Площадь сегмента AOM (рис. 4):

$$S_{AOM}=\frac{4}{3}x_1y_1.$$

В полярной системе координат (полюс в фокусе П., полярная ось направлена по оси П.) уравнение П. имеет вид

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\varphi}.$$

Уравнение П. с вертикальной осью (рис. 5):

$$y=ax^2+bx+c$$

(фокальный параметр $p=1/2|a|$); при $a>0$ П. обращена вершиной вниз, при $a<0$ — вершиной вверх; координаты вершины:

$$x_0=\frac{b}{2a},\quad y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

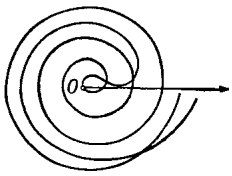
Иногда П. n-го порядка называют график степенной функции $y=ax^n$.

Название «парабола» ввёл Аполлоний Пергский (ок. 200 до н. э.), рассматривавший П. как одно из *конических сечений*.

ПАРАБОЛИ́ЧЕСКАЯ ГОМОЛО́ГИЯ — см. *Гомология*.

ПАРАБОЛИ́ЧЕСКАЯ РЕГРЕ́ССИЯ — см. *Регрессия*.

ПАРАБОЛИ́ЧЕСКАЯ СПИРА́ЛЬ — плоская трансцендентная кривая (рис.), конхоида *Ферма спирали*. Уравнение в полярных координатах:



$$\rho=a\sqrt{\varphi}+d,\ d>0.$$

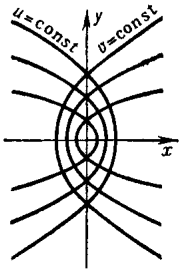
Кривая состоит из двух ветвей, пересекающихся между собой бесконечное число раз. Имеет одну точку перегиба. П. с. относится к алгебраич. *спиралям*.

ПАРАБОЛИ́ЧЕСКАЯ ТО́ЧКА поверхности — точка, в которой гауссова кривизна поверхности равна нулю. Часто, говоря о П. т., дополнительно предполагают, что в этой точке поверхность имеет со своей касательной плоскостью соприкосновение 1-го порядка; точки, в к-рых соприкосновение с касательной плоскостью выше 2-го порядка, наз. точками уплощения. См. также *Поверхностей теория*.

ПАРАБОЛИ́ЧЕСКИЕ КООРДИНА́ТЫ — числа u и v, связанные с прямоугольными координатами x и y формулами

$$x=u^2-v^2,\ y=2uv,$$

где $-\infty<u<\infty$, $0\leqslant v<\infty$. Координатные линии (рис.): две системы взаимно ортогональных парабол с противоположно направленными осями.



Коэффициенты Ламе:

$$L_u=L_v=2\sqrt{u^2+v^2}.$$

Элемент площади:

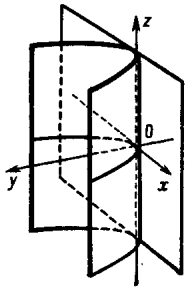
$$ds=4(u^2+v^2)\,du\,dv.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta f=\frac{1}{4(u^2+v^2)}\left(\frac{\partial^2 f}{du^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right).$$

Обобщения П. к. в пространстве: параболические координаты в пространстве, к-рые образуются параллельным переносом П. к. на плоскости вдоль оси Oz; параболоидальные координаты, к-рые образуются вращением системы П. к. на плоскости вокруг оси Oz.

ПАРАБОЛИ́ЧЕСКИЙ ЦИЛИ́НДР — цилиндрическая поверхность, направляющая линия которой — парабола (рис.). П. ц.— незамкнутая нецентральная поверхность 2-го порядка, канонич. уравнение



$$y^2=2px.$$

ПАРАБОЛИ́ЧЕСКОГО ТИ́ПА УРАВНЕ́НИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}(x,\,t)\,D_iD_ju+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,\,t)D_iu+a(x,\,t)=f(x,\,t),$$

где $D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1, \ldots, n$, квадратичная форма

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j$$

положительно определена.

Для решения П. т. у. на основе вычислительных алгоритмов часто применяются приближённые численные методы, рассчитанные на использование быстродействующих

ЭВМ. Наиболее универсальным является метод сеток (конечных разностей метод).

Ниже рассмотрен метод сеток на примере уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ t>0,\ 0<x<l, \qquad (1)$$

с краевыми условиями 1-го рода:

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(t),\ u(x,0)=u_0(x).$$

Вводится сетка узлов $(x_i,\ t_n)$, $x_i=ih$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ N$, $hN=l$, $t_n=n\tau$, $n=0,\ 1,\ \ldots$, на к-рой уравнение (1) приближённо заменяется системой линейных алгебраич. уравнений (разностной схемой)

$$\left.\begin{aligned} &y^n_{t,\,i}=\sigma y^{n+1}_{\overline{xx},\,i}+(1-\sigma)\,y^n_{\overline{xx},\,i}+\varphi^n_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,\\ &y^n_0=\mu_1(t_n),\ y^n_N=\mu_2(t_n),\ y^0_i=u_0(x_i),\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где σ — числовой параметр, φ^n_i — сеточная аппроксимация функции $f(x,\ t)$,

$$y^n_i=y(x_i,\ t_n),\ y^n_{t,\,i}=(y^{n+1}_i-y^n_i)/\tau,$$

$$y^n_{\overline{xx},\,i}=(y^n_{i+1}-2y^n_i+y^n_{i-1})/h^2.$$

Система уравнений (2) решается по слоям, т. е. для каждого $n=0,\ 1,\ \ldots$ по известным значениям y^n_i, φ^n_i находятся новые значения y^{n+1}_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$. Если $\sigma=0$ (явная схема), то y^{n+1}_i выражаются явным образом через y^n_i, φ^n_i. Если же $\sigma\neq 0$ (неявные схемы), то относительно y^{n+1}_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1$, возникает система уравнений, имеющая трёхдиагональную матрицу. Эта система уравнений решается *прогонки методом*. Недостатком явной схемы является сильное ограничение на шаг τ, возникающее из условия устойчивости, а именно $\tau\leqslant 0{,}5h^2$. Неявные схемы при $\sigma\geqslant 0{,}5$ абсолютно устойчивы, т. е. устойчивы при любых шагах τ и h. Известны и другие разностные схемы для уравнения (1).

Если схема (2) устойчива и φ^n_i аппроксимирует $f(x,\ t)$, то при $h,\ \tau\to 0$ решение y^n_i разностной задачи сходится к решению $u(x,\ t)$ исходной задачи. Порядок точности зависит от параметра σ. Так, симметричная схема ($\sigma=0{,}5$, $\varphi^n_i=f(x_i,\ t_n+0{,}5\tau)$) имеет 2-й порядок точности по τ и по h, т. е. для каждого n выполняется оценка

$$\max_{0<i<N}|y^n_i-u(x_i,\ t_n)|\leqslant M(\tau^2+h^2)$$

с константой M, не зависящей от τ и h. При $\sigma=0{,}5-h^2/(12\tau)$ и специальном выборе φ^n_i схема (2) имеет точность $O(\tau^2+h^4)$. Для остальных σ — точность $O(\tau+h^2)$.

При решении П. т. у. на больших отрезках времени существенное значение имеет асимптотич. устойчивость разностной схемы. Не всякая разностная схема, аппроксимирующая уравнение (1), обладает этим свойством.

Для решения П. т. у. с переменными коэффициентами применяются однородные консервативные разностные схемы, выражающие на сетке законы сохранения, присущие исходному дифференциальному уравнению. При построении разностных схем для П. т. у. с переменными коэффициентами применяются методы баланса, конечных элементов, вариационный метод. Напр., для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,\ t)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(x,\ t)$$

используются разностные схемы

$$y^n_{t,\,i}=(a(\sigma y^{n+1}+(1-\sigma)y^n)_{\overline{x}})_{x,\,i}+\varphi^n_i,$$

$$a=a^n_i=k(x_i-0{,}5h,\ t_n+0{,}5\tau).$$

Доказана сходимость и получены оценки погрешности однородных консервативных разностных схем для П. т. у. и систем уравнений как в случае непрерывных, так и в случае разрывных коэффициентов.

При решении квазилинейного П. т. у. используются неявные абсолютно устойчивые разностные схемы. Решение y^{n+1} находится итерационным методом с использованием прогонки. Напр., для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u),\ \frac{\partial u}{\partial x}\right),\ k(u)>0, \qquad (3)$$

применяют чисто неявную разностную схему

$$y^n_{t,\,i}=(a(y^{n+1}_i)\,y^{n+1}_{\overline{x}})_{x,\,i},$$

$$a(y^{n+1}_i)=0{,}5\,(k(y^{n+1}_i)+k(y^{n+1}_{i-1})),$$

к-рую решают с помощью итерационного метода (s — номер итерации):

$$y^{(s+1)}_i=y^n_i+\tau\left(a(y^{(s)}_i)\,y^{(s+1)}_{\overline{x}}\right)_{x,\,i},\ s=0,\ 1,\ \ldots,\ m,$$

$$y^{(0)}_i=y^n_i,\ y^{(m+1)}_i=y^{n+1}_i.$$

Решение $y^{(s+1)}_i$ на каждой итерации находится методом прогонки.

При решении нелинейного П. т. у. нашли также применение схемы, основанные на идее метода Рунге — Кутты. Так, для уравнения (3) используется двухэтапный метод

$$y^{n+1/2}_i=y^n_i+0{,}5\tau\left(a(y^n_i)\,y^{n+1/2}_{\overline{x}}\right)_{x,\,i},$$

$$y^{n+1}_i=y^n_i+0{,}5\tau\left(a(y^{n+1/2}_i)\,(y^{n+1}+y^n)_{\overline{x}}\right)_{x,\,i}.$$

При решении многомерного П. т. у. используются методы переменных направлений, к-рые позволяют свести решение многомерной задачи к решению нескольких одномерных задач.

● Самарский А. А., Теория разностных схем, 2 изд., М., 1983; Саульев В. К., Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток, М., 1960.

А. В. Гулин.

ПАРАБОЛО́ИД (от *парабола* и греч. εἶδος — вид) — незамкнутая нецентральная *поверхность второго порядка*; существуют два вида П.— эллиптический параболоид (рис. 1) и гиперболический параболоид (рис. 2). Оба они могут быть представлены как поверхность, описываемая при движении одной (подвижной) параболы вдоль другой (неподвижной) так, что вершина подвижной параболы скользит по неподвижной, а плоскость и ось подвижной параболы остаются всё время параллельными сами себе. Эллиптич. П. получается, если обе параболы обращены вогнутостью в одну сторону; гиперболич. П.— если параболы обращены вогнутостью в разные стороны, поэтому гиперболич. П. имеет вид седла.

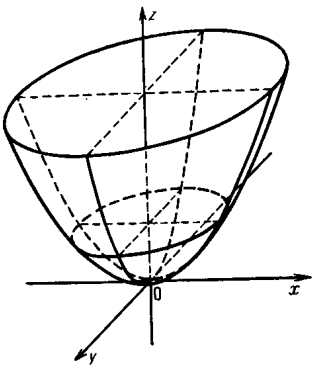


Рис. 1.

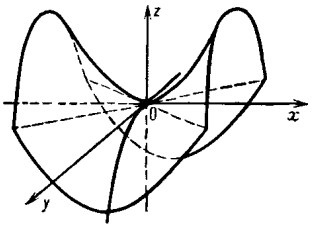


Рис. 2.

В прямоугольной системе координат $Oxyz$ с началом в вершине П., ось Oz к-рой является осью симметрии П., а плоскости Oxz и Oyz — плоскостями симметрии П., уравнение П. принимает т. н. канонический вид:

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\ \text{(эллиптич. П.)},$$

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\ \text{(гиперболич. П.)};$$

здесь $p>0$, $q>0$.

Сечения эллиптич. П., параллельные плоскости Oxy,— эллипсы; сечения, параллельные оси Oz,— параболы.

Если $p=q$, то П. является параболоидом вращения, получаемым вращением параболы $x^2=2pz$, лежащей в плоскости Oxz, вокруг своей оси. Сечения плоскостями Oxz и Oyz — параболы: $x^2=2pz$, $y=0$ (неподвижная) и $y^2=2qz$, $x=0$ (подвижная).

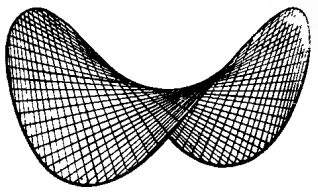


Рис. 3.

Сечения гиперболич. П. плоскостями Oxz и Oyz — параболы: $x^2=2pz$, $y=0$ (неподвижная) и $y^2=-2qz$, $x=0$ (подвижная). Сечения плоскостями, параллельными плоскости Oxy, — гиперболы (при $z=0$ — пара пересекающихся прямых). Через каждую точку гиперболич. П. проходят две прямые, целиком принадлежащие его поверхности,— прямолинейные образующие, таким образом, гиперболич. П.— линейчатая поверхность, образованная двумя семействами прямых (рис. 3).

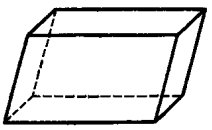
ПАРАБОЛОИДА́ЛЬНЫЕ КООРДИНА́ТЫ — см. *Параболические координаты*.

ПАРАДО́КС (от греч. παράδοξος — неожиданный, странный) — то же, что *антиномия*.

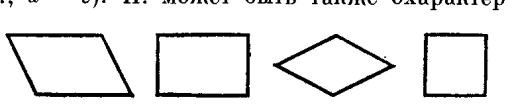
ПАРАКОМПА́КТНОЕ ПРОСТРА́НСТВО (от греч. παρά — возле, мимо, вне и *компакт*) — топологическое пространство такое, что в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие. Отделимое П. п. наз. паракомпактом. Напр., П. п. являются компактное пространство, метризуемое пространство. Замкнутое подпространство и топологич. сумма П. п. суть П. п., для топологич. произведений так не всегда. Отделимое П. п.— нормальное пространство.

Для паракомпактности пространства X необходимо и достаточно, чтобы для любого открытого покрытия существовало подчинённое ему *разбиение единицы*.

ПАРАЛЛЕЛЕПИ́ПЕД (греч. παραλληλεπίπεδον, от παράλληλος — параллельный и ἐπίπεδον — плоскость) — шестигранник, противоположные грани которого попарно параллельны (рис.). П. имеет 8 вершин, 12 рёбер; его грани представляют собой попарно равные параллелограммы. П. наз. прямым, если его боковые рёбра перпендикулярны к плоскости основания (в этом случае 4 боковые грани — прямоугольники); прямоугольным, если этот П. прямой и основанием служит прямоугольник (следовательно, 6 граней — прямоугольники); П., все грани к-рого квадраты, наз. кубом. Объём П. равен произведению площади его основания на высоту.



ПАРАЛЛЕЛОГРА́ММ (греч. παραλληλόγραμμον, от παράλληλος — параллельный и γράμμα — линия) — четырёхугольник, у которого стороны попарно параллельны (рис., *а* — *г*). П. может быть также охарактеризован



а *б* *в* *г*

как выпуклый четырёхугольник при любом из следующих признаков: 1) та и другая пара противоположных сторон состоит из равных отрезков; 2) одна пара противоположных сторон состоит из равных и параллельных отрезков; 3) при противоположных вершинах той и другой пары углы равны; 4) точка пересечения диагоналей делит каждую из них пополам. На рис. изображены виды П.: прямоугольник (рис., *б*) — П., все углы к-рого прямые, ромб (рис., *в*) — П., все стороны к-рого равны, квадрат (рис., *г*) — равносторонний прямоугольник. Площадь П. равна произведению основания на высоту.

ПАРАЛЛЕЛО́ЭДР (от греч. παράλληλος — параллельный и ἕδρα — основание, грань) — выпуклый многогранник, параллельным переносом которого можно заполнить пространство так, чтобы многогранники не входили друг в друга и не оставляли пустот между собой, т. е. образовать разбиение пространства. См. *Многогранник*.

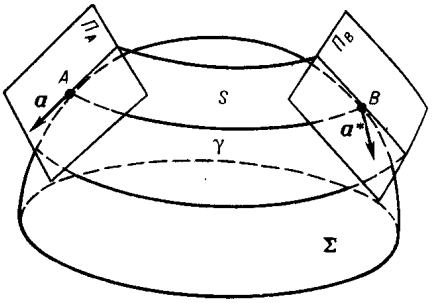
ПАРАЛЛЕ́ЛЬ (от греч. παράλληλος — параллельный, букв.— идущий рядом) — малый круг сферы, параллельный экватору (см. *Сферическая геометрия*). П. поверхности вращения — см. *Вращения поверхность*.

ПАРАЛЛЕ́ЛЬНАЯ АКСОНОМЕТРИ́Я — см. *Аксонометрия*.

ПАРАЛЛЕ́ЛЬНАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Проекция*.

ПАРАЛЛЕ́ЛЬНОЕ ПЕРЕНЕСЕ́НИЕ — обобщение понятия *параллельного переноса* на пространства более сложной структуры, чем евклидовы (например, так называемые пространства аффинной связности и, в частности, римановы пространства). П. п. позволяет сравнивать геометрич. образы, относящиеся к различным точкам пространства.

На поверхности Σ в трёхмерном евклидовом пространстве (являющейся двумерным римановым пространством) П. п. определяется следующим образом. Пусть γ — кривая на поверхности Σ, A и B — концы γ; S — развёртывающаяся поверхность, к-рая является огибающей семейства касательных плоскостей, построенных в точках кривой γ (рис.). Тогда параллельным перенесением вектора a, заданного в касательной плоскости Π_A в точке A, наз. параллельный перенос этого вектора по развёрнутой на плоскость поверхности S с последующим приложением S к γ. На рисунке вектор a^* представляет собой результат П. п. вектора a по поверхности Σ вдоль γ. П. п. можно рассматривать как нек-рое линейное преобразование касательной плоскости Π_A в точке A в касательную плоскость Π_B в точке B.



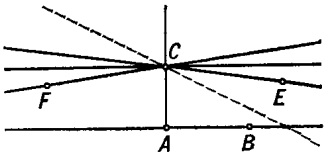
Вообще говоря, результат П. п. вектора зависит не только от исходного вектора, начальной и конечной точек перенесения, но и от выбора самого пути перенесения. Если результат П. п. вектора не зависит от выбора пути, то пространство (по крайней мере, в достаточно малой окрестности) является аффинным или евклидовым и понятие П. п. совпадает с понятием параллельного переноса.

ПАРАЛЛЕ́ЛЬНОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — см. *Программирование параллельное*.

ПАРАЛЛЕ́ЛЬНОСТИ АКСИО́МА — аксиома, определяющая соотношение параллельности. См. *Параллельные прямые*, *Пятый постулат*.

ПАРАЛЛЕ́ЛЬНОСТИ У́ГОЛ на плоскости Лобачевского — угол между прямой b, проходящей через точку O параллельно прямой a, не содержащей точку O, и перпендикуляром из O на a. См. *Лобачевского геометрия*.

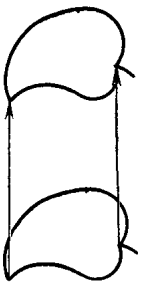
ПАРАЛЛЕ́ЛЬНЫЕ ПРЯМЫ́Е в евклидовой геометрии — прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. В абсолютной геометрии через точку, не лежащую на данной прямой, проходит хотя бы одна прямая, не пересекающая данную. В евклидовой геометрии существует только одна такая прямая. Этот факт равносилен V постулату Евклида (о параллельных). См. *Пятый постулат*.



В *Лобачевского геометрии* в плоскости через точку C (рис.) вне данной прямой AB проходит бесконечное мно-

жество прямых, не пересекающих AB. Из них параллельными к AB наз. только две. Прямая CE наз. параллельной прямой AB в направлении от A к B, если: 1) точки B и E лежат по одну сторону от прямой AC; 2) прямая CE не пересекает прямую AB; всякий луч, проходящий внутри угла ACE, пересекает луч AB. Аналогично определяется прямая CF, параллельная к AB в направлении от B к A.

ПАРАЛЛЕ́ЛЬНЫЙ ПЕРЕНО́С — точечное взаимно однозначное преобразование евклидова пространства, при котором все точки смещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние (рис.). Совокупность всех П. п. образует группу, к-рая составляет подгруппу группы движений.



ПАРА́МЕТР (от греч. παραμετρῶν — отмеривающий) — величина, значения которой служат для различения элементов нек-рого множества между собой. Напр., в декартовых прямоугольных координатах уравнением $(x-a)^2+(y-b)^2=1$ определяется множество всех окружностей радиуса 1 на плоскости xOy; полагая, напр., $a=3$, $b=4$, выделяют из этого множества вполне определённую окружность с центром (3, 4), следовательно, a и b суть П. окружности в рассматриваемом множестве. См. также *Параметрическое представление* функции.

ПАРАМЕТРИ́ЧЕСКАЯ СТАТИСТИ́ЧЕСКАЯ ГИПО́ТЕЗА — см. *Статистическая гипотеза*.

ПАРАМЕТРИ́ЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕ́НИЕ функции — выражение функциональной зависимости между несколькими переменными посредством вспомогательных переменных — параметров. В случае двух переменных x и y зависимость между ними $F(x, y)=0$ может быть геометрически истолкована как уравнение нек-рой плоской кривой. Любую величину t, определяющую положение точки (x, y) на этой кривой (напр., длину дуги, отсчитываемой со знаком + или — от нек-рой точки кривой, принятой за начало отсчёта, или момент времени в нек-ром заданном движении тела, описывающей кривую), можно принять за параметр, в функции к-рого выразятся x и y:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t). \qquad (*)$$

Последние функции и дадут П. п. функциональной зависимости между x и y; уравнения (*) наз. параметрич. уравнениями соответствующей кривой. Так, для случая зависимости $x^2+y^2=1$ имеют П. п. $x=\cos t$, $y=\sin t$ $(0\leqslant t<2\pi)$ (параметрич. уравнения окружности); для случая зависимости $x^2-y^2=1$ имеют П. п. $x=\frac{1+t^2}{2t}$; $y=\frac{1-t^2}{2t}$ $(t\neq 0)$ или также $x=\operatorname{cosec} t$, $y=\operatorname{ctg} t$ $(-\pi<t<\pi$, $t\neq 0)$ (параметрич. уравнения гиперболы). Если параметр t можно выбрать так, что функции (*) рациональны, то кривую наз. уникурсальной; такой является, напр., гипербола. Особенно важно П. п. пространственных кривых, т. е. задание их уравнениями вида $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$. Так, прямая в пространстве допускает П. п. $x=a+mt$; $y=b+nt$; $z=c+pt$, винтовая линия — П. п. $x=a\cos t$; $y=a\sin t$, $z=ct$.

Для случая трёх переменных x, y и z, связанных зависимостью $F(x, y, z)=0$ (одну из них, напр. z, можно рассматривать как неявную функцию двух других), геометрич. образом служит поверхность. Чтобы определить положение точки на ней, нужны два параметра u и v (напр., широта и долгота на поверхности шара), так что П. п. имеет вид

$$x=\varphi(u, v); \quad y=\psi(u, v); \quad z=\chi(u, v).$$

Напр., для зависимости $x^2+y^2=(z^2+1)^2$ имеют П. п. $x=(u^2-1)\cos v$; $y=(u^2+1)\sin v$; $z=u$. Важнейшие преимущества П. п.: 1) возможность изучать неявные функции и в тех случаях, когда переход к их явному заданию без посредства параметров затруднителен; 2) возможность выражать многозначные функции посредством однозначных. Вопросы П. п. изучены особенно хорошо для аналитич. функций. П. п. аналитич. функций составляет предмет теории униформизации.

ПАРАМЕТРИ́ЧЕСКОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — раздел математического программирования, посвящённый исследованию задач оптимизации, в которых условия допустимости и (или) целевая функция зависят от некоторых детерминированных параметров. (Задачи, в к-рых эти параметры являются случайными, составляют предмет *стохастического программирования*.) См. также *Исследование операций*.

В общем виде задача П. п. заключается в максимизации целевой функции $f(x, \lambda)$ по всем $x=(x_1, \ldots, x_n)\in\mathbb{R}^n$, удовлетворяющим ограничениям

$$g_i(x, \lambda)\leqslant b_i(\lambda), \quad i=1, \ldots, m, \qquad (1)$$

где λ — вектор параметров, принадлежащий нек-рому заданному множеству параметров $\Lambda\subset\mathbb{R}^p$. При любом фиксированном λ эта задача представляет собой обычную задачу математич. программирования. Пусть $\Lambda'\subset\Lambda$ — множество тех значений λ, при к-рых эта задача разрешима (множество разрешимости). Оптимальное решение $x^*=x^*_\lambda$ естественным образом является функцией от λ. Под решением задачи П. п. понимается семейство $\{x^*_\lambda\}$ при всех $\lambda\in\Lambda'$.

Источники задач П. п. довольно разнообразны. Это прежде всего стремление отразить определённый произвол, с к-рым нередко бывают определены все или нек-рые исходные данные практической оптимизационной задачи, либо охватить единой формулировкой несколько связанных между собой вариантов задачи (или целое семейство задач, напр., зависящих от времени). П. п. является наиболее адекватным способом постановки важной в теоретич. и практич. отношениях проблемы устойчивости решений задач оптимизации относительно вариаций тех или иных исходных данных. Наконец, с задачами П. п. тесно связана проблема нахождения множества оптимумов Парето в задачах *многокритериальной оптимизации*.

Если при любом фиксированном λ задача П. п. представляет собой задачу *линейного программирования* (*выпуклого программирования* и т. п.), то говорят о задаче линейного (соответственно выпуклого и т. п.) параметрического программирования. В общем виде проблематику П. п. можно охарактеризовать следующим образом. 1) Нахождение и выяснение свойств множеств разрешимости Λ' (см. выше). 2) Нахождение областей устойчивости решений, характеризация их строения; анализ поведения неустойчивых задач. 3) Характеризация зависимости оптимального значения целевой функции от вектора параметров. В полном своём объёме (т. е. для произвольных целевых функций, ограничений и областей изменения параметров Λ) эти задачи весьма трудны. Достаточно продвинуты в теоретическом и вычислительном отношении лишь нек-рые весьма частные их классы. В основном это касается задач линейного П. п. Напр., для случая, когда целевая функция задачи линейного П. п. аффинно зависит от одного скалярного ($\Lambda=\mathbb{R}^1$) параметра, имеют место следующие результаты. Существует такое разбиение Λ на конечное число открытых слева интервалов, что на каждом из них соответствующая задача линейного П. п. разрешима и имеет один и тот же базис (исключение могут составлять разве лишь бесконечные интервалы, на к-рых целевая функция может быть неограниченной). Оптимальное значение целевой функции на каждом из интервалов разрешимости является выпуклой кусочно линейной функцией параметра λ.

Численные методы решения однопараметрич. задач линейного П. п. представляют собой модификации симплекс-метода; в случае многомерного пространства параметров приходится привлекать более сложные соображения. В последнее время (1980-е гг.) начинает развиваться также теория выпуклого и квадратичного П. п. *А. А. Корбут.*

ПАРСЕВА́ЛЯ РА́ВЕНСТВО — равенство вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right),$$

где a_0, a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Установлено М. Парсевалем (1805) при предположении о возможности почленного интегрирования тригонометрич. рядов.

ПАСКА́ЛЬ — *программирования язык* учебно-производственного назначения, разработанный в 70-х гг. (в Швейцарии). При его создании успешно решена задача сочетания сравнительной простоты языка с потенциальной широтой области его применений. Принадлежа семейству алголоподобных языков, П. допускает (в дополнение к используемым конструкциям языка *алгол*-60) разнообразные типы составных объектов: з а п и с ь — упорядоченный набор поименованных объектов произвольных типов; ф а й л — упорядоченный набор однородных данных, размещаемых во внешней памяти; м н о ж е с т в о — набор элементов одного типа, кодируемых отрезками натурального ряда или произвольными именами. П. имеется оператор в а р и а н т а, т. е. выбора одной из нескольких альтернативных последовательностей (ветвей) операторов по вычисляемому номеру ветви. Особенностью П. является система ограничений на употребление ряда конструкций (напр., на задание диапазона индексов у элементов массива и числа элементов во множествах), к-рая позволяет существенно повышать качество *трансляции* программ. С 1980 П. широко используется в качестве языка персональных ЭВМ, а также для обучения программированию.

● Й е н с е н К., В и р т Н., Паскаль. Руководство для пользователя и описание языка, пер. с англ., М., 1982.

ПАСКА́ЛЯ ПРЯМА́Я — см. *Паскаля теорема.*

ПАСКА́ЛЯ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — распределение вероятностей случайной величины X с целочисленными неотрицательными значениями $k=0, 1, \ldots$, заданное формулой

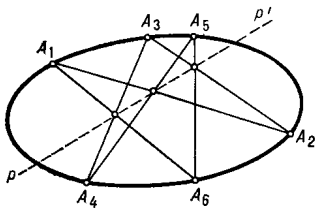
$$\mathrm{P}\{X=k\}=C_{r+k-1}^{r-1}p^r(1-p)^k,$$

где $r>0$ — целое и $0<p<1$ — параметры. Математич. ожидание и дисперсия равны $\mathrm{E}X=r\frac{1-p}{p}$ и $\mathrm{D}X=r\frac{1-p}{p^2}$. Функция распределения П. р. выражается формулой

$$F(k)=\mathrm{P}\{X<k\}=\frac{1}{\mathrm{B}(r,\,k+1)}\int_0^p x^{r-1}(1-x)^k\,dx,$$

где $\mathrm{B}(r,\,k+1)$ — бета-функция. Можно определить $F(k)$ при всех действительных $r>0$. В таком расширенном толковании П. р. наз. о т р и ц а т е л ь н ы м б и н о м и а л ь н ы м р а с п р е д е л е н и е м (значение $F(k)$ в точке k совпадает со значением функции биномиального распределения с параметрами $r+k-1$ и $1-p$). П. р. с параметрами r и p возникает в схеме испытаний Бернулли с вероятностью успеха p; при $r=1$ совпадает с геометрич. распределением с параметром p; при $r>1$ совпадает с распределением суммы независимых случайных величин, имеющих геометрич. распределение с параметром p.

ПАСКА́ЛЯ ТЕОРЕ́МА — теорема проективной геометрии, утверждающая, что во всяком шестиугольнике, вписанном в коническое сечение (эллипс, гиперболу или параболу) (рис.), точки пересечения трёх пар противоположных сторон (или их продолжений) лежат на одной прямой, наз. п р я м о й П а с к а л я; при этом шестиугольник может быть как выпуклым, так и звездчатым (на рис. $A_1A_2\ldots A_6$ — звездчатый многоугольник, pp' — прямая Паскаля). Теорема установлена Б. Паскалем (1639). Частный случай П. т. для конич. сечения, распадающегося на пару прямых, был известен ещё в древности. П. т. связана с *Брианшона теоремой.*



ПАСКА́ЛЯ ТРЕУГО́ЛЬНИК, а р и ф м е т и ч е с к и й т р е у г о л ь н и к, — треугольная числовая таблица для составления биномиальных коэффициентов. По боковым сторонам П. т. стоят единицы, внутри П. т. числа образуются сложением двух чисел, стоящих над данным:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
... ...

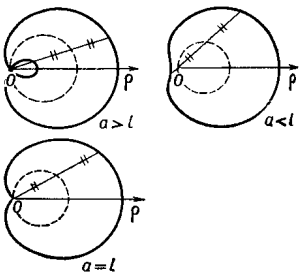
$(n+1)$-я строка П. т. даёт биномиальные коэффициенты для разложения n-й степени бинома $(a+b)^n$. П. т. сыграл важную роль в развитии комбинаторики. Он использовался Б. Паскалем в «Трактате об арифметическом треугольнике» (1654, опубл. 1665).

ПАСКА́ЛЯ УЛИ́ТКА — плоская алгебраическая кривая 4-го порядка (рис.). Уравнение в прямоугольных координатах:

$$(x^2+y^2-ax)^2=l^2(x^2+y^2),$$

в полярных координатах:

$$\rho=a\cos\varphi+l.$$



Симметрична относительно оси Ox. Начало координат — двойная точка, изолированная при $a<l$, узловая при $a>l$, точка возврата 1-го рода при $a=l$ (в этом случае П. у. — *кардиоида*). Длина дуги выражается эллиптич. интегралом 2-го рода. Площадь, ограниченная П. у.:

$$S=\frac{\pi a^2}{2}+\pi l^2;$$

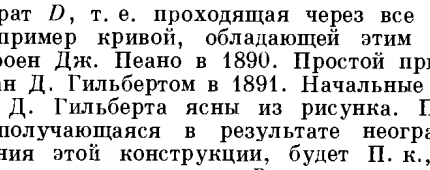
при $a>l$ площадь внутренней петли при вычислении по этой формуле считается дважды. П. у. — *конхоида* окружности диаметра a; частный случай *Декартова овала*; является *эпитрохоидой.*

Названа по имени Э. Паскаля, впервые (в 1-й пол. 17 в.) рассмотревшего её.

ПА́ША АКСИО́МА — сформулированная М. Пашем (1882) аксиома *евклидовой геометрии.*

ПЕА́НО АКСИО́МЫ — введённая Дж. Пеано (1889) система аксиом для натурального ряда. См. *Арифметика.*

ПЕА́НО КРИВА́Я — непрерывная кривая в смысле Жордана (см. *Жордана кривая*), целиком заполняющая некоторый квадрат D, т. е. проходящая через все его точки. Первый пример кривой, обладающей этим свойством, был построен Дж. Пеано в 1890. Простой пример П. к. был указан Д. Гильбертом в 1891. Начальные шаги конструкции Д. Гильберта ясны из рисунка. Предельная кривая, получающаяся в результате неограниченного продолжения этой конструкции, будет П. к., проходящей через все точки квадрата D.



ПЕ́ЛЛЯ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение вида

$$x^2-Dy^2=1$$

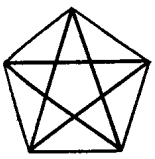
(D — целое положительное число), у которого разыскиваются решения в целых числах. Если D не является полным квадратом, то уравнение имеет бесконечное множество решений. Решение $x_0=1$, $y_0=0$ очевидно. Следующее по величине решение (x_1, y_1) П. у. можно найти, пользуясь разложением в непрерывную дробь числа $\sqrt{D}$. Зная решение (x_1, y_1), всю совокупность решений (x_n, y_n) П. у. получают из формулы

$$(x_1+y_1\sqrt{D})^n=x_n+y_n\sqrt{D},\quad n=0, 1, 2, \ldots$$

Изучение П. у. тесно связано с теорией алгебраич. чисел. П. у. названо по имени Дж. Пелля (17 в.), к-рому Л. Эйлер по ошибке приписал один из способов решения этого уравнения. См. также *Диофантовы уравнения*.

ПЕНТАГО́Н (от греч. πεντάγωνον — пятиугольник) — правильный пятиугольник.

ПЕНТАГРА́ММА (греч. πενταγραμμον, от πέντε — пять и γράμμα — линия) — правильный пятиугольник, на сторонах которого построены равнобедренные треугольники одинаковой высоты. В частности, они могут быть равносторонними или образованными продолжением сторон пятиугольника, взятых через одну. Последняя П. оказывается звездчатым многоугольником, к-рый может быть образован также диагоналями правильного пятиугольника (рис.).



ПЕ́РВАЯ АКСИО́МА СЧЁТНОСТИ — см. *Счётности аксиома*.

ПЕ́РВАЯ КВАДРАТИ́ЧНАЯ ФО́РМА поверхности — см. *Дифференциальная геометрия, Поверхностей теория*.

ПЕ́РВАЯ КРАЕВА́Я ЗАДА́ЧА — то же, что *Дирихле задача*. См. также *Дифференциальное уравнение, Краевая задача*.

ПЕРВООБРА́ЗНАЯ, первообразная функция,— функция, производная от которой равна данной функции. См. *Интегральное исчисление, Интеграл*.

ПЕРВООБРА́ЗНЫЙ КО́РЕНЬ — 1) П. к. по модулю m — натуральное число g такое, что наименьшее положительное число k, для к-рого разность g^k-1 делится на m (g^k сравнимо с 1 по модулю m), совпадает с $\varphi(m)$, где $\varphi(m)$ — число натуральных чисел, меньших m и взаимно простых с m. Напр., при $m=7$ П. к. по модулю 7 является число 3. Действительно, $\varphi(7)=6$; числа $3^1-1=2$, $3^2-1=8$, $3^3-1=26$, $3^4-1=80$, $3^5-1=242$ не делятся на 7, лишь $3^6-1=728$ делится на 7. П. к. существуют, когда $m=2$, $m=4$, $m=p^\alpha$, $m=2p^\alpha$ (где p — простое нечётное число, α — целое $\geqslant 1$), а для других модулей их нет. Число П. к. в этих случаях равно $\varphi[\varphi(m)]$ (числа, разность к-рых кратна m, не считаются за различные). И. М. Виноградов (1926) установил, что в интервале $(1, 2^{2k}\sqrt{p}\ln p)$ найдётся П. к. по модулю p, где p — простое нечётное число, k — число различных простых делителей числа $p-1$. См. также *Чисел теория, Индекс* (в теории чисел).

2) П. к.— корень *двучленного уравнения*.

ПЕ́РВЫЙ ИНТЕГРА́Л — см. *Интеграл дифференциального уравнения*.

ПЕРЕВА́ЛА МЕ́ТОД — метод нахождения асимптотических выражений некоторых интегралов. Многие специальные функции выражаются интегралами вида

$$\int_C e^{zf(\tau)}\,d\tau, \qquad (*)$$

где $f(\tau)=u(x, y)+iv(x, y)$ — аналитич. функция от $\tau=x+iy$ такая, что $u(x, y)$ стремится к $-\infty$ при приближении к концам контура C. Для вычисления этих интегралов при больших положительных значениях применяется П. м. Он состоит в том, что контур C деформируют в контур C', имеющий те же концы, что и C, и проходящий через нуль τ_0 функции $f'(\tau)$ по кривой вида $v(x, y)=\text{const}$ (по теореме Коши значение интеграла не меняется при деформации контура). На поверхности $t=u(x, y)$ контур C' изобразится путём, проходящим через точку перевала этой поверхности (отсюда название метода) так, что по обе стороны этой точки путь как можно более круто спускается к большим отрицательным значениям $u(x, y)$. Поэтому при действительном положительном z существенное влияние на значение интеграла (*) оказывает лишь ближайшая окрестность точки τ_0, и это обстоятельство может быть использовано для получения асимптотич. выражений интеграла, напр. заменой функции $f(\tau)$ в окрестности точки τ_0 отрезком её ряда Тейлора.

Так, если $f(\tau)=\ln\tau-\tau$ ($-\pi<\arg\tau\leqslant\pi$) и путь C соединяет точки $\tau=0$ и $\tau=+\infty$, то $\tau_0=1$ и интегрировать следует по действительной положительной полуоси, причём

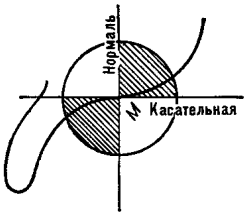
$$\int_0^\infty e^{z(\ln\tau-\tau)}\,d\tau=\int_0^\infty e^{z\left[-1-\frac{1}{2}(1-\tau)^2-\frac{1}{3}(1-\tau^3)-\ldots\right]}\,d\tau.$$

Отсюда, ограничиваясь окрестностью $0<\tau<2$ точки $\tau_0=1$ и полагая $\sqrt{z}(1-z)=\sigma$, находят асимптотич. выражение (при $z\to\infty$)

$$\int_0^\infty e^{z(\ln\tau-\tau)}\,d\tau\sim\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2}\,d\sigma=\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\,e^{-z}.$$

П. м., как правило, даёт возможность найти весь асимптотич. ряд для интеграла (*).

ПЕРЕГИ́БА ТО́ЧКА — точка M плоской кривой, обладающая следующими свойствами: в точке M кривая имеет единственную касательную; в достаточно малой окрестности точки M кривая расположена (рис.) внутри одной пары вертикальных углов, образуемых касательной и нормалью. Примером П. т. является точка (0,0) кривой $y=x^3$.



Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$, где функция $f(x)$ имеет непрерывную 2-ю производную $f''(x)$. Если точка с координатами $(x_0, f(x_0))$ является П. т., то $f''(x_0)=0$ (отсюда следует, что в П. т. кривизна линии равна нулю); обратное утверждение неверно. Напр., последнее равенство выполняется для кривой $y=x^4$ в точке (0,0), хотя эта точка не является П. т. Полное исследование вопроса, будет ли данная точка кривой П. т., требует привлечения производных более высоких порядков (если они существуют) или других дополнительных рассмотрений.

ПЕРЕМЕ́ННАЯ — величина, которая в изучаемой задаче принимает различные значения, причём так, что все допустимые значения П. полностью определены наперёд заданными условиями. Напр., при математич. изучении движения свободно падающего тела время t и высота тела над землёй h — П., удовлетворяющие условиям, выраженным в виде закона движения и начальных данных (начальный момент времени и соответствующие ему высота и скорость).

При наличии в изучаемой задаче более чем одной П. различают независимые и зависимые П. Последние рассматриваются как функции от независимых П. (аргументов). В указанном примере, если изучается зависимость высоты h от времени t, то независимой П. является время t, а зависимой П.— функцией от t — высота h; если же изучается зависимость скорости от высоты, то независимой П. является высота, а скорость есть функция от h. Таким образом, П. являются зависимыми или независимыми лишь по отношению друг к другу, и их различение определяется условиями задачи.

Понятие П. возникло в 17 в. первоначально под влиянием запросов естествознания, выдвинувшего на первый план изучение движения, процессов, а не только состояний. Это понятие не укладывалось в формы, выработанные математикой древности и средних веков, и требовало для своего выражения новых форм. Такими новыми формами явились буквенная алгебра и аналитич. геометрия Р. Декарта. В буквах декартовой алгебры, могущих принимать произвольные числовые значения, и нашли своё символич. выражение П. «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и тем самым диалектика и благодаря этому же стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление...» (Энгельс Ф., см. Маркс К. и Энгельс Ф., Соч., 2 изд., т. 20, с. 573). В этот период и вплоть до сер. 19 в. преобладает механич. воззрение на П. Наиболее ярко оно было выражено И. Ньютоном, назвавшим переменные величины

флюэнтами, т. е. текущими, и рассматривавшим их «не как состояние из крайне малых частей, но как описываемые непрерывным движением» (Ньютон И., Математические работы, 1937, с. 167). Такое воззрение, будучи полуинтуитивным и в известном смысле ограниченным, оказалось тем не менее весьма плодотворным и вызвало бурное развитие математич. методов в естествознании. Механич. и геометрич. наглядность появившихся в 17—18 вв. новых понятий, связанных с П., таких, как непрерывность, производная, интеграл, компенсировала первоначальный недостаток математич. строгости настолько, что огромное количество ценных и удивительно согласованных между собой результатов было получено до того как в 19 в. были корректно сформулированы основные понятия и обоснованы (за малым исключением) все ранее полученные результаты. Исследования математиков 19 в. по обоснованию математич. результатов и формализации математич. методов естественным образом расширили понятие П.

Математика начинает рассматривать как П. не только величины, но и всё более разнообразные и широкие классы других своих объектов. На этой почве во 2-й пол. 19 в. и в 20 в. развиваются теория множеств, топология и математич. логика. О том, насколько расширилось в 20 в. понятие П., свидетельствует тот факт, что в математич. логике рассматриваются не только переменные, пробегающие произвольные множества предметов, но и переменные, значениями к-рых служат высказывания, предикаты (отношения между предметами) и т. д. (см. *Переменная* в математической логике). Новые понятия и представления постепенно проникают во все, даже самые «классические» разделы математики. В этих условиях на смену старому воззрению на П. в кон. 19 и нач. 20 вв. приходят определения П. и способов их изменения в понятиях теории множеств, топологии и математич. логики. Так, независимая П. считается заданной, если дано множество всех её возможных значений; функциональная зависимость между двумя П. определяется как отображение множества значений одного П. в множество значений другого; понятие предела функции наиболее общим образом определяется с помощью окрестностей точки или в к.-л. иных топологич. терминах и т. д.

ПЕРЕМЕ́ННАЯ в математической логике — языковое выражение, служащее для обозначения произвольного объекта из некоторого фиксированного множества объектов. В качестве П. обычно употребляются буквы или буквы с индексами, но это не обязательно. С каждой П. связана область её возможных значений — непустое множество объектов, обозначением к-рых может быть данная П. Очень часто область возможных значений П. явно не указывается, но из контекста ясно, какова эта область. П. наз. вещественной или действительной П., если область её возможных значений есть множество действительных чисел. Аналогично П., возможными значениями к-рой являются комплексные числа, наз. комплексной П., и т. д. В математич. логике употребляются пропозициональные и предикатные П., возможными значениями к-рых являются соответственно высказывания и предикаты.

П. используются для построения именных форм — языковых выражений, содержащих П. Именная форма превращается в имя нек-рого объекта, если в ней заменить все вхождения каждой П. на имя объекта из области её возможных значений. Примерами именных форм являются выражения $x+y$, $(x+z)\cdot y$, $\sin x^2$ и т. п., где x, y, z — вещественные П.

Именные формы, а также пропозициональные и предикатные П. могут использоваться при построении высказывательных форм. Высказывательная форма — это выражение, к-рое превращается в высказывание при подстановке в него имён объектов вместо П. Примеры высказывательных форм: $x<y$, $z=x+y$, $A\&B\to C$, где x, y, z — вещественные П., A, B, C — пропозициональные П., $\&$ — знак конъюнкции, $\to$ — знак импликации.

Если П. употребляется таким образом, что допускается подстановка вместо неё имён объектов из области её возможных значений, то эта П. наз. свободной. Однако в математике встречается и такое употребление П., при к-ром не предполагается и не допускается подстановка имён конкретных объектов вместо П. Напр., в выражении $\int_0^3 x^2dx$, где x — вещественная П., нельзя подставить вместо x обозначения к.-л. конкретных чисел. Аналогично обстоит дело при употреблении кванторов. Так, выражение $\forall x\exists y\,(x=2y)$, где x, y — вещественные П., $\forall$ — квантор всеобщности, $\exists$ — квантор существования, есть высказывание, а не высказывательная форма, и подстановка чисел вместо x и y лишена смысла. В том случае, когда по смыслу выражения, содержащего П., подстановка имён конкретных объектов вместо П. недопустима, эта П. наз. связанной. В одном выражении могут употребляться и свободные, и связанные П. Так, в именной форме $\int_0^3 (xy)^2dx$ П. y является свободной, а x — связанной. Различение свободных и связанных вхождений П. очень важно для правильного понимания математич. выражений. Трудности, связанные с таким различением, преодолеваются путём формализации языка, состоящей в чётком описании правил построения языковых выражений.

ПЕРЕМЕ́ННАЯ ВЕЛИЧИ́НА — см. *Величина*, *Переменная*.

ПЕРЕМЕ́ННЫХ НАПРАВЛЕ́НИЙ МЕ́ТОД — один из важнейших итерационных методов решения систем сеточных уравнений; это же название в случае нестационарных задач часто используется для специального класса неявных разностных схем, тесно связанных с *расщепления методом*.

В случае системы уравнений

$$L(u)\equiv(\Lambda_1+\Lambda_2)\,u=f, \qquad (1)$$

возникающей, напр., при аппроксимации задачи Дирихле для уравнений Пуассона в прямоугольнике, матрица Λ_k соответствует простейшей разностной аппроксимации на сетке с шагом h оператора $-\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ и $\Lambda_k=\Lambda_k^*>0$, $\Lambda_1\Lambda_2=\Lambda_2\Lambda_1$. В этом случае П. н. м. записывается в виде

$$A_n(u^{n+1}-u^n)\equiv\prod_{k=1}^{2}(E+\tau_n\Lambda_k)\,(u^{n+1}-u^n)=$$
$$=-2\tau_n(L(u^n)-f), \qquad (2)$$

где E — тождественный оператор, τ_n — итерационный параметр; при подходящем выборе $\{\tau_n\}$ П. н. м. позволяет достичь точности при затрате $O(|\ln h|\,|\ln\varepsilon|h^{-2})$ арифметич. действий. Название метода связано с тем, что переход от u^n к u^{n+1} в (2) можно разбить на два этапа: на первом решаются независимые одномерные разностные системы на горизонтальных линиях сетки, на втором — подобные системы на вертикальных линиях.

ПЕРЕМЕСТИ́ТЕЛЬНЫЙ ЗАКО́Н, коммутативный закон,— см. *Коммутативность*.

ПЕРЕСЕЧЕ́НИЕ множеств — одна из основных операций над множествами. Пусть имеется нек-рая (конечная или бесконечная) совокупность множеств A_α. Тогда множество тех элементов, к-рые содержатся во всех данных множествах (множество элементов, общих всем множествам A_α), наз. пересечением этих множеств. П. множеств обозначается $A=\bigcap A_\alpha$.

ПЕРЕСТАНО́ВКА из n элементов — конечная последовательность длины n, все элементы которой различны, то есть П.— это размещение без повторений из n элементов по n. Число перестановок равно $n!$. Обычно в качестве элементов П. берут элементы множества $Z_n=\{1, 2, \ldots, n\}$; взаимно однозначное отображение π множества Z_n на себя определяет перестановку $\bar{\pi}=(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$. Отображение π наз. подстановкой (перестановкой) множества Z_n. Многие задачи, связанные с перечислением П., формулируются в терминах подстановок.

ПЕРЕХО́ДА ОПЕРА́ТОР — см. *Программы схема.*

ПЕРЕХО́ДНЫЕ ВЕРОЯ́ТНОСТИ — вероятности перехода *Маркова цепи* на заданном отрезке времени из одного состояния в другое.

ПЕРЕЧИСЛИ́МОЕ МНО́ЖЕСТВО, рекурсивно перечислимое множество, — множество, для к-рого существует алгоритм, последовательно шаг за шагом выдающий в качестве результата элементы этого множества. К П. м. относят также пустое множество. Если алгоритм $\mathfrak{A}$ таков, что область его применимости есть натуральный ряд N, а совокупность значений — множество A, то говорят, что $\mathfrak{A}$ перечисляет множество A. Область применимости всякого алгоритма есть П. м. С другой стороны, для всякого П. м. можно подобрать алгоритм, область применимости к-рого есть это множество.

Если A и B перечислимы, то $A \cup B$ и $A \cap B$ также перечислимы. Дополнение П. м. $A \subseteq N$ до натурального ряда не всегда перечислимо. Всякое разрешимое множество является перечислимым. Образ и прообраз П. м. $A \subseteq N$ при отображении, осуществляемом рекурсивной функцией, являются П. м.

П. м. играют важную роль в математич. логике, потому что у всякой формальной системы множество её теорем перечислимо.

ПЕРЕЧИСЛИ́ТЕЛЬНЫЕ ЗАДА́ЧИ — см. *Комбинаторный анализ.*

ПЕРИ́МЕТР (греч. περίμετρον — окружность, от περιμετρέω — измеряю вокруг) — длина замкнутого контура. Чаще всего этот термин применяется к треугольнику и многоугольникам и в этом случае означает сумму длин всех сторон.

ПЕРИ́ОД — 1) П. дроби — см. *Десятичная дробь, Периодическая дробь.*

2) П. функции — см. *Периодическая функция.*

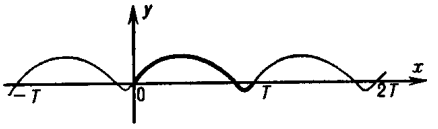
ПЕРИОДИ́ЧЕСКАЯ ГРУ́ППА — группа, все элементы которой имеют конечные порядки (не обязательно ограниченные в совокупности).

ПЕРИОДИ́ЧЕСКАЯ ДРОБЬ — бесконечная десятичная дробь, в которой, начиная с некоторого места, стоит только периодически повторяющаяся определённая группа цифр (период). Напр., 1,3181818...; короче эту дробь записывают так: 1,3(18), т. е. помещают период в скобки (и говорят: «18 в периоде»). П. д. наз. чистой, если период начинается сразу после запятой, напр. 2,(71)= =2,7171..., и смешанной, если после запятой имеются цифры, предшествующие периоду, напр. 1,3(18). Роль П. д. в арифметике обусловлена тем, что при представлении рациональных чисел, т. е. обыкновенных (простых) дробей, десятичными дробями получаются либо конечные дроби, либо П. д.; конечная десятичная дробь получается в том случае, когда знаменатель несократимой простой дроби не содержит других простых множителей, кроме 2 и 5; во всех других случаях получается П. д., и притом чистая, если знаменатель данной несократимой дроби вовсе не содержит множителей 2 и 5, и смешанная, если хотя бы один из этих множителей содержится в знаменателе. Всякая П. д. может быть обращена в простую дробь (т. е. она равна нек-рому рациональному числу). Чистая П. д. равна простой дроби, числителем к-рой служит период, а знаменатель изображается цифрой 9, написанной столько раз, сколько цифр в периоде; при обращении в простую дробь смешанной П. д. числителем служит разность между числом, изображаемым цифрами, предшествующими второму периоду, и числом, изображаемым цифрами, предшествующими первому периоду; для составления знаменателя надо написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и приписать справа столько нулей, сколько цифр до периода. Эти правила предполагают, что данная П. д. правильная, т. е. не содержит целых единиц; в противном случае целая часть учитывается особо. Известны также правила определения длины периода П. д., соответствующей данной обыкновенной дроби. Напр., для дроби a/p, где p — простое число и $1 \leqslant a \leqslant p-1$, длина периода является делителем $p-1$. Так, для известных приближений 22/7 и 355/113 к числу π период равен 6 и 112 соответственно.

ПЕРИОДИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция, значения которой не изменяются при добавлении к значениям её аргумента некоторого не равного нулю числа T, называемого периодом функции. Напр., $\sin x$ и $\cos x$ — П. ф. с периодом 2π; $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — П. ф. с периодом π; $\{x\}$ — дробная часть числа x — П. ф. с периодом 1.

Функция $f(x)$, определённая на множестве E, является П. ф., если существует число $T \neq 0$ такое, что для любого $x \in E$ значения $x+T$ и $x-T$ также принадлежат E и $f(x \pm T) = f(x)$. Если П. ф. $f(x)$ непрерывна на какомнибудь интервале и $f(x) \not\equiv \text{const}$ на этом интервале, то для неё существует наименьший положительный период T; тогда любой период этой функции имеет вид kT, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Для построения графика П. ф. с периодом $T > 0$ достаточно построить её график на отрезке $[0, T]$, тогда весь график получается сдвигом построенной части вдоль оси абсцисс на $\pm T, \pm 2T, \ldots$ (рис.).



Сумма, разность, произведение и частное П. ф. с одинаковым периодом являются П. ф. с тем же периодом. Производная П. ф. также П. ф. с тем же периодом. Первообразная П. ф. является П. ф. только тогда, когда интеграл от этой функции по отрезку длиной, равной периоду, равен нулю; при этом первообразная П. ф. является П. ф. с тем же периодом.

Сумма П. ф. с разными периодами является П. ф. только тогда, когда их периоды соизмеримы. Напр., $\sin 2x + \cos 3x$ — П. ф. с периодом 2π; $\sin x + \sin \pi x$ не является П. ф.; это — пример *почти периодической функции.*

П. ф. комплексного переменного может иметь комплексный период. Напр., e^z — П. ф. с периодом $2\pi i$, $e^{(1+i)z}$ — П. ф. с периодом $\pi(1+i)$. Непрерывная П. ф. может иметь два комплексных периода T_1 и T_2, отношение которых не равно действительному числу. Если T_1, T_2 — наименьшие по модулю периоды, то любой период имеет вид $k_1T_1 + k_2T_2$, $k_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Такие функции наз. двоякопериодическими; напр., *эллиптические функции.*

ПЕРИОДИ́ЧЕСКОЕ РЕШЕ́НИЕ обыкновенного дифференциального уравнения — решение, являющееся периодической функцией независимого переменного. Задача нахождения П. р. решена лишь для уравнений специальных типов.

ПЕРИОДОГРА́ММА случайного процесса — см. *Статистический анализ* случайных процессов.

ПЕРМАНЕ́НТ (от лат. permanens, род. падеж permanentis — остающийся, сохраняющийся) матрицы — см. *Комбинаторный анализ.*

ПЕРПЕНДИКУЛЯ́Р (от лат. perpendicularis — отвесный) к данной прямой (плоскости) — прямая, пересекающая данную прямую (плоскость) под прямым углом.

ПЕРПЕНДИКУЛЯ́РНОСТЬ — взаимное расположение двух прямых, плоскостей или прямой и плоскости, при котором указанные фигуры составляют прямой угол. При этом две такие прямые в пространстве не должны обязательно пересекаться (скрещивающиеся прямые); прямая l и плоскость P наз. взаимно перпендикулярными, если l перпендикулярна ко всякой прямой, лежащей на P; две плоскости наз. взаимно перпендикулярными, если, пересекаясь, они образуют прямой двугранный угол. Знак $\perp$ для обозначения П. ввёл П. Эригон (1634).

Об обобщении понятия «П.» см. в ст. *Ортогональность.*

ПЕРСЁЯ КРИВА́Я — плоская алгебраическая кривая 4-го порядка, линия пересечения поверхности тора плоскостью, параллельной его оси. Уравнение в прямоугольных координатах:

$$(x^2+y^2+p^2+d^2-r^2)^2=4d^2(x^2+p^2),$$

где r — радиус окружности, описывающей тор, d — расстояние от начала координат до её центра, p — расстояние секущей плоскости от оси тора. К П. к. относятся *Кассини овал* и *Бернулли лемниската*. П. к. названа по имени Персея (2 в. до н. э.), исследовавшего её в связи с изучением различных способов задания кривых.

ПЕРСПЕКТИ́ВА (франц. perspective, от лат. perspicio — ясно вижу) — система изображения объёмных тел на плоскости или какой-либо иной поверхности, учитывающая их пространственную структуру и удалённость отдельных их частей от наблюдателя.

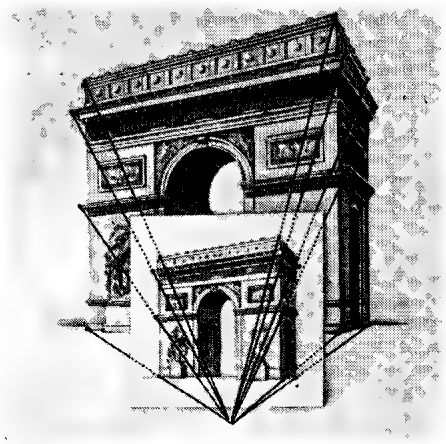


Рис. 1.

С точки зрения геометрии П.— способ изображения фигур, основанный на применении центрального проектирования (см. *Начертательная геометрия, Проекция*). Для получения перспективного изображения к.-л. предмета проводят из выбранной точки пространства (центра П.) лучи ко всем точкам данного предмета. На пути лучей ставят ту поверхность, на к-рой желают получить изображение. В пересечении проведённых лучей с поверхностью получают искомое изображение предмета; на рис. 1 — перспективное изображение предмета на плоскости (линейная П.), на рис. 2 — на внутренней поверхности цилиндра (панорамная П.), на рис. 3 — на внутренней поверхности сферы (купольная П.). Перспективные изображения параллельных прямых пересекаются в т. н. точках схода, а параллельных плоскостей — в линиях схода.

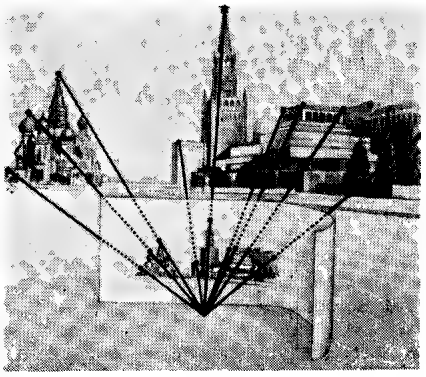


Рис. 2.

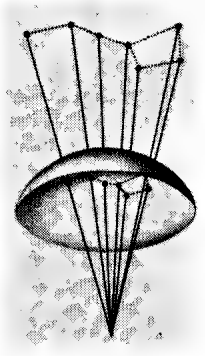


Рис. 3.

ПЕРСПЕКТИ́ВНАЯ КОЛЛИНЕА́ЦИЯ — см. *Проекция*.

ПЕРСПЕКТИ́ВНО-АФФИ́ННОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — см. *Проекция*.

ПЕТЛЯ́ в графе — дуга (или ребро) графа, у которой начало и конец совпадают.

ПИ, число π,— обозначение отношения длины окружности к диаметру. Это обозначение (вероятно, от греч. $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\acute{\varepsilon}\rho\varepsilon\iota\alpha$ - окружность, периферия) стало общепринятым после работы Л. Эйлера, относящейся к 1736, однако впервые оно было употреблено У. Джонсом (1706). Как и всякое иррациональное число, π представляется бесконечной непериодич. десятичной дробью:

$$\pi=3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\ldots$$

Нужды практич. расчётов, относящихся к окружности и к круглым телам, заставили уже в глубокой древности искать для π приближений с помощью рациональных чисел. Древнеегипетские вычисления (2-е тыс. до н. э.) площади круга соответствуют приближённому значению $\pi\approx3$ или, более точному, $\pi\approx\left(\frac{16}{9}\right)^2=3{,}16049\ldots$ Архимед (3 в. до н. э.), сравнивая окружность с правильными вписанными и описанными многоугольниками, нашёл, что π заключается между

$$3\tfrac{10}{71}=3{,}14084\ldots \quad \text{и} \quad 3\tfrac{1}{7}=3{,}14285\ldots$$

(последним из этих приближений до сих пор пользуются при расчётах, не требующих большой точности). В Китае во 2-й пол. 5 в. Цзу Чунчжи получил для π приближение 3,1415927, вновь найденное в Европе значительно позднее (16 в.); это приближение даёт ошибку лишь в 7-м десятичном знаке. Поиски более точного приближения π продолжались и в дальнейшем; напр., аль-Каши (1-я пол. 15 в.) вычислил 17 десятичных знаков π, Лудольф ван Цейлен (нач. 17 в.) — 32 десятичных знака (*лудольфово число*). Для практич. надобностей, однако, достаточно знать несколько десятичных знаков числа π и простейших выражений, содержащих π; в справочниках обычно даются приближённые значения для π, $1/\pi$, π^2 и $\lg\pi$ с 4—7 десятичными знаками.

Число π появляется не только при решении геометрич. задач. Со времени Ф. Виета (16 в.) разыскание пределов нек-рых арифметич. последовательностей, составляемых по простым законам, приводило к этому же числу π. Примером может служить ряд Лейбница (1673—74):

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Этот ряд сходится очень медленно. Существуют значительно быстрее сходящиеся ряды, пригодные для вычисления π. Так, напр., формула

$$\pi=24\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+8\operatorname{arctg}\frac{1}{57}+4\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

где значения арктангенсов вычисляются с помощью ряда

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots,$$

была использована для вычисления с помощью ЭВМ ста тысяч десятичных знаков числа π. Такого рода вычисления приобретают интерес в связи с понятием случайных и псевдослучайных чисел. Статистич. обработка указанной совокупности знаков π показывает, что она обладает многими чертами случайной последовательности.

Возможность чисто аналитич. определения числа π имеет принципиальное значение и для геометрии. Так, в неевклидовой геометрии π также участвует в нек-рых формулах, но уже не как отношение длины окружности к диаметру (это отношение в неевклидовой геометрии вовсе не является постоянным). Средствами анализа, среди к-рых решающую роль сыграла замечательная формула Эйлера

$$e^{2\pi i}=1$$

(e — основание натуральных логарифмов, $i=\sqrt{-1}$), была окончательно выяснена и арифметич. природа числа π.

В кон. 18 в. И. Ламберт и А. Лежандр установили, что π — число иррациональное, а в 1882 Ф. Линдеман доказал, что оно трансцендентно, т. е. не может удовлетворять никакому алгебраич. уравнению с целыми коэффициентами.

ПИКА́РА ТЕОРЕ́МА (большая) — теорема теории аналитических функций, согласно которой во всякой окрест-

ности существенно особой точки аналитич. функция принимает любое комплексное значение, кроме, быть может, одного исключительного. Напр., функция e^z имеет существенно особую точку $z_0=\infty$ с исключительным значением 0. Установлена Э. Пикаром (1879).

ПИРАМИ́ДА (от греч. πυραμίς, род. падеж πυραμίδος) — многогранник, одной из граней которого служит многоугольник (о с н о в а н и е П., которое, в частности, может быть треугольником), а остальные грани (б о к о в ы е) суть треугольники с общей вершиной (в е р ш и н а П.) (рис. 1, 2). В зависимости от числа боковых граней П. делятся на треугольные, четырёхугольные и т. д. Перпендикуляр, опущенный из вершины П. на плоскость её основания, наз. в ы с о т о й П. Объём П. вычисляется по формуле

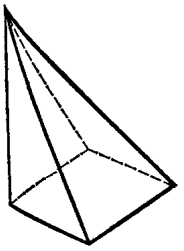


Рис. 1.

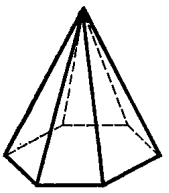


Рис. 2.

$$v=\frac{1}{3}Bh,$$

где B — площадь основания, h — высота. П. наз. п р а в и л ь н о й (рис. 2), если в основании её лежит правильный многоугольник и высота П. проходит через центр основания. Боковые грани правильной П. суть равные между собой равнобедренные треугольники; высота каждого из этих треугольников наз. а п о ф е м о й правильной П. (апофема основания П. служит проекцией апофемы П. на плоскость основания). Рассекая П. плоскостью, параллельной её основанию, получают две части: П., подобную данной, и т. н. у с е ч ё н н у ю п и р а м и д у (рис. 3). Объём усечённой П. равен $V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$, где S_1 и S_2 — площади оснований, h — высота (расстояние между основаниями).

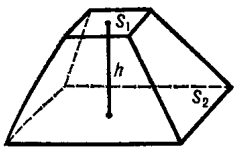


Рис. 3.

ПИ́РСА СТРЕ́ЛКА — логическая операция «ни A, ни B». Она обычно обозначается $A\downarrow B$ и задаётся следующей истинностной таблицей:

A	B	$A\downarrow B$
И	И	Л
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

П. с. обладает тем свойством, что через неё выражаются все другие логич. операции. Напр., высказывание $\neg A$ (отрицание A) эквивалентно высказыванию $A\downarrow A$, конъюнкция $A\&B$ высказываний A и B выражается так: $(A\downarrow A)\downarrow(B\downarrow B)$. П. с. была впервые введена в рассмотрение Ч. Пирсом в кон. 19 в.

ПИ́РСОНА РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — семейство распределений вероятностей, плотности которых $y=p(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x+a}{b_0+b_1x+b_2x^2}y,$$

где a, b_0, b_1, b_2 — действительные числа. Соответствующие графики $y=p(x)$, изображающие зависимость плотности вероятности от x, наз. обычно к р и в ы м и П и р с о н а. П. р. классифицированы в зависимости от значений параметров a, b_0, b_1, b_2 и области изменения x. Семейство П. р. образуют 12 типов и нормальное распределение. Примерами П. р. являются распределение Стьюдента, хи-квадрат распределение. Всякое П. р. однозначно определяется своими первыми четырьмя моментами:

$$\alpha_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k p(x)\,dx,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Это свойство семейства П. р. используется для описания часто встречающихся на практике распределений. Метод подгонки П. р. к нек-рому эмпирич. распределению состоит в следующем: для независимых результатов наблюдений с неизвестной плотностью распределения вычисляются первые четыре выборочных момента, определяется тип П. р. и методом моментов находятся значения неизвестных параметров искомого П. р.

П. р. впервые были применены для приближённого представления эмпирич. распределения К. Пирсоном (1894).

ПИФАГО́РА ТЕОРЕ́МА — теорема геометрии, устанавливающая связь между сторонами прямоугольного треугольника. П. т. была, по-видимому, известна до Пифагора (6 в. до н. э.), но ему приписывается её доказательство в общем виде. Первоначально теорема устанавливала соотношения между площадями квадратов, построенных на гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника: квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах. Обычно П. т. принято кратко формулировать так: квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов. Верна и теорема, обратная П. т.: если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то этот треугольник прямоугольный.

ПИФАГО́РОВЫ ЧИ́СЛА — тройки натуральных чисел таких, что треугольник, длины которого пропорциональны (или равны) этим числам, является прямоугольным. По теореме, обратной *Пифагора теореме*, для этого достаточно, чтобы они удовлетворяли диофантову уравнению $x^2+y^2=z^2$; таковы, напр., числа $x=3$, $y=4$, $z=5$. Все тройки взаимно простых П. ч. можно получить по формулам

$$x=m^2-n^2,\quad y=2mn,\quad z=m^2+n^2,$$

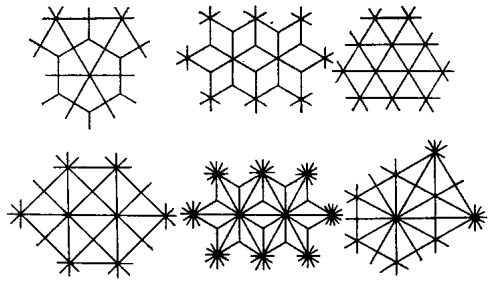
где m и n — целые числа, $m>n>0$.

ПЛ/I (PL/I — сокращение от слов Programming Language; англ. programming — программирование, language — язык) — *программирования язык* широкого применения. Разработан в 1960—70-х гг. в США. В ПЛ/I была предпринята попытка объединить конструкции таких языков, как *алгол*-60, *кобол*, *фортран*, учесть особенности ЭВМ 3-го поколения и их операционных систем. Язык имеет аналогичные алголу-60 блочную структуру и основные типы операторов (присваивания, цикла, условные операторы, вызов процедур). Линию кобола в ПЛ/I представляют развитые структуры данных и средства доступа к данным, размещаемым во внешней памяти ЭВМ. Преемственную связь с фортраном подчёркивает использование в ПЛ/I сходной лексики. Связь с архитектурой ЭВМ и её операционной системой находит своё выражение в многообразии типов и форматов данных, в наличии разнообразных средств управления обстановкой, в к-рой выполняется программа (распределение памяти, обработка прерываний, связь с внешними устройствами, средства параллельного выполнения ветвей программы, управление процессом трансляции).

● С к о т т Р., С о н д а к Н., ПЛ/I для программистов, пер. с англ., М., 1977; Б е з б о р о д о в Ю. М., Сравнительный курс языка PL/I (на основе Алгола-60), М., 1980.

ПЛА́ВАЮЩАЯ ЗАПЯТА́Я — см. *Запятая*.

ПЛАНИГО́Н (от лат. planum — плоскость и греч. γωνία — угол) — выпуклый многоугольник правильного разбиения плоскости на равные многоугольники, то есть такого разбиения, что существует группа движений плос-



кости, совмещающая разбиение с собой, которая действует транзитивно на совокупности многоугольников разбиения. На евклидовой плоскости существует 46 правильных разбиений (примеры см. на рис.).

ПЛАНИМЕ́ТРИЯ (от лат. planum — плоскость и греч. μετρέω — измеряю) — часть элементарной геометрии, в которой изучаются свойства фигур, лежащих в плоскости. Обычно под П. понимают часть курса геометрии в средней школе.

ПЛАНИ́РОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕ́НТА — раздел математической статистики, изучающий рациональную организацию измерений, подверженных случайным ошибкам. Обычно рассматривается следующая схема П. э. Со случайными ошибками измеряется функция $f(\theta, x)$, зависящая от неизвестных параметров θ (числовых или векторных) и от переменных x, к-рые по выбору экспериментаторов могут принимать значения из нек-рого допустимого множества X. Целью эксперимента является обычно либо оценка параметров θ или их функций, либо проверка нек-рых гипотез о параметрах θ. Под планом эксперимента понимается совокупность значений, задаваемых переменными x в эксперименте. Исходя из цели эксперимента, формулируется критерий оптимальности плана эксперимента. Как правило, оценки параметров θ ищут по методу наименьших квадратов, а гипотезы о параметрах θ проверяют с помощью F-критерия Фишера. В обоих случаях при этом оказывается естественным выбирать в качестве критерия оптимальности плана с заданным числом экспериментов нек-рую функцию от дисперсий и коэффициентов корреляции оценок метода наименьших квадратов. В случае когда $f(\theta, x)$ линейно зависит от θ, оптимальный план часто можно построить до проведения эксперимента, в других случаях уточнение плана эксперимента происходит по ходу эксперимента.

Начало П. э. положили труды Р. Фишера (1935), подчеркнувшего, что рациональное П. э. даёт не менее существенный выигрыш в точности оценок, чем оптимальная обработка результатов измерений. Можно выделить следующие направления П. э.

Одно из них, факторное, было связано с агробиологич. применениями дисперсионного анализа, что нашло отражение в сохранившейся терминологии. Здесь функция $f(\theta, x)$ зависит от вектора x переменных (факторов) с конечным числом возможных значений и характеризует сравнительный эффект значений каждого фактора и комбинаций разных факторов. Алгебраическими и комбинаторными методами были построены интуитивно привлекательные планы, одновременно и сбалансированным образом изучающие влияние по возможности большего числа факторов. Построенные планы оптимизируют нек-рые естественные характеристики оценок метода наименьших квадратов. Под влиянием приложений в химии и технике развивалось П. э. по поиску оптимальных условий протекания того или иного процесса. По существу эти методы являются модификацией обычных численных методов поиска экстремума с учётом случайных ошибок измерений.

Специфич. методами обладает планирование отсеивающих экспериментов, в к-рых нужно выделить те компоненты вектора x, к-рые сильнее всего влияют на функцию $f(\theta, x)$, что важно на начальной стадии исследования, когда вектор x имеет большую размерность.

Методы теории П. э. тесно связаны с теорией приближения функций и математич. программированием. Построены оптимальные планы и исследованы их свойства для широкого класса моделей. Разработаны также итерационные алгоритмы П. э., дающие во многих случаях удовлетворительное численное решение задач П. э.

● Хикс Ч. Р., Основные принципы планирования эксперимента, пер. с англ., М., 1967; Федоров В. В., Теория оптимального эксперимента, М., 1971; Математическая теория планирования эксперимента, М., 1983; Ермаков С. М., Жиглявский А. А., Математическая теория оптимального эксперимента, М., 1986.

М. Б. Малютов

ПЛАНШЕРЕ́ЛЯ ТЕОРЕ́МА — установленная М. Планшерелем (1910) теорема о *Фурье преобразованиях*.

ПЛАТО́ ЗАДА́ЧА — задача нахождения минимальной поверхности с заранее заданной границей. Впервые такая задача была поставлена Ж. Лагранжем (1760), к-рый свёл её в классе поверхностей $z=f(x, y)$ к решению нек-рого уравнения с частными производными. После опытов Ж. Плато (1849), в к-рых он показал, что минимальные поверхности могут быть получены в виде мыльных плёнок, натянутых на проволочный каркас, эту задачу стали называть задачей Плато. В строгой постановке П. з. требует ряд дополнительных уточнений, относящихся к искомой поверхности и её границе; напр., должно ли искомое решение быть регулярной поверхностью, обязательно ли искомая поверхность реализует абсолютный минимум площади, сколько различных минимальных поверхностей может быть натянуто на данный контур.

ПЛАТО́НА ТЕЛА́ — то же, что правильные выпуклые *многогранники*.

ПЛОСКА́Я КРИВА́Я — кривая, все точки которой лежат в одной плоскости. Существуют следующие аналитич. способы задания П. к.: 1) в декартовых координатах: $F(x, y)=0$ (в неявном виде), $y=f(x)$ (в явном виде), $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ (в параметрич. виде); 2) в полярных координатах: $\rho=f(\varphi)$.

ПЛО́СКОСТЬ — одно из основных понятий геометрии. При систематич. изложении геометрии понятие «П.» обычно принимается за одно из исходных понятий, к-рое лишь косвенным образом определяется аксиомами геометрии. Нек-рые характеристич. свойства П.: 1) П. есть поверхность, содержащая полностью каждую прямую, соединяющую любые её точки; 2) П. есть множество точек, равноотстоящих от двух заданных точек.

П.— алгебраич. поверхность первого порядка: в декартовой системе координат П. может быть задана уравнением 1-й степени.

Общее уравнение (полное) П.:

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (1)$$

где A, B, C и D — постоянные, причём A, B и C одновременно не равны нулю; в векторной форме:

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N})+D=0,$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, вектор $\boldsymbol{N}=(A, B, C)$ перпендикулярен к плоскости (нормальный вектор). Направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{N}$:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Если один из коэффициентов в уравнении П. равен нулю, уравнение наз. неполным. При $D=0$ П. проходит через начало координат, при $A=0$ (или $B=0$, или $C=0$) П. параллельна оси Ox (соответственно Oy или Oz); при $A=B=0$ (или $A=C=0$, или $B=C=0$) П. параллельна плоскости Oxy (соответственно Oxz или Oyz).

Уравнение в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$ — отрезки, отсекаемые П. на осях Ox, Oy и Oz (рис.).

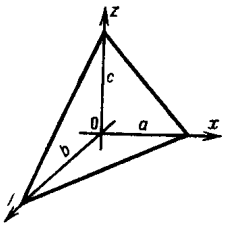
Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $N(A, B, C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$

в векторной форме:

$$((\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0), N)=0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$, не лежащие на одной прямой:



$$((\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1), (\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1), (\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1))=0$$

(смешанное произведение векторов), иначе

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Нормальное (нормированное) уравнение:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0; \qquad (2)$$

в векторной форме:

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N}^0)-p=0,$$

где $\boldsymbol{N}^0$ — единичный вектор, p — расстояние П. от начала координат. Уравнение (2) может быть получено из уравнения (1) умножением на нормирующий множитель

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(знаки μ и D противоположны).

Отклонение точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ от плоскости:

$$\delta=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p;$$

$\delta>0$, если M_i и начало координат лежат по разные стороны П., в противоположном случае $\delta<0$. Расстояние от точки до П. равно $|\delta|$.

Угол между двумя плоскостями. Если уравнения П. заданы в виде (1), то

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}};$$

если в векторной форме, то

$$\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2)}{|\boldsymbol{N}_1||\boldsymbol{N}_2|}.$$

П. параллельны, если

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \quad \text{или} \quad [\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2]=\boldsymbol{0}.$$

П. перпендикулярны, если

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \quad \text{или} \quad (\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2)=0.$$

Пучок плоскостей — уравнение любой П., проходящей через линию пересечения двух плоскостей:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

где α и β — любые числа, не равные одновременно нулю.

Уравнение П. впервые встречается у А. Клеро (1731). Уравнение П. в отрезках, по-видимому, впервые встречается у Г. Ламе (1816—18), нормальное уравнение ввёл О. Гессе (1861).

ПЛОСКОСТЬ СИММЕТРИИ — см. *Симметрия*.

ПЛОТНОЕ В СЕБЕ МНОЖЕСТВО — множество без изолированных точек или множество, содержащееся в своём *производном множестве*.

ПЛОТНОЕ МНОЖЕСТВО — то же, что *всюду плотное множество*. Более общо, множество A наз. плотным в открытом множестве G пространства X, если G содержится в замыкании A.

ПЛОТНОСТИ ТОЧКА множества — точка, для которой отношение меры части множества, лежащей в окрестности этой точки, к мере окрестности (относительная мера) стремится к единице, когда окрестность стягивается к точке. Если эта относительная мера, напротив, стремится к нулю, то точку называют точкой разрежения. В любом измеримом множестве точки, не являющиеся точками плотности, образуют множество меры нуль.

ПЛОТНОСТЬ топологического пространства — наименьшая из мощностей *всюду плотных множеств*, содержащихся в нём.

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ, плотность распределения вероятностей случайной величины X,— функция $p(x)$ такая, что

$$p(x)\geqslant 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,dx=1$$

и при любых $a<b$ вероятность события $a<X<b$ равна

$$\int_a^b p(x)\,dx.$$

Если $p(x)$ непрерывна, то при достаточно малых Δx вероятность неравенства $x<X<x+\Delta x$ приближённо равна $p(x)\Delta x$ (с точностью до малых более высокого порядка). Функция распределения $F(x)$ случайной величины X, имеющей плотность, связана с П. в. соотношениями

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(y)\,dy$$

и, если $F(x)$ дифференцируема,

$$p(x)=\frac{dF(x)}{dx}.$$

Случайные величины, имеющие П. в., наз. непрерывно распределёнными случайными величинами, а их распределения — непрерывными (точнее, абсолютно непрерывными) распределениями.

Моменты $\mathsf{E}X^r$ любого порядка r таких случайных величин X вычисляют по формулам

$$\mathsf{E}X^r=\int_{-\infty}^{\infty}x^r p(x)\,dx,$$

если интегралы абсолютно сходятся.

Аналогично определяют совместную П. в. нескольких случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ (П. в. совместного распределения):

$$p(x_1, \ldots, x_n)\geqslant 0, \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}p(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1\ldots dx_n=1,$$

и для любых $a_i<b_i$, $i=1, \ldots, n$, вероятность одновременного выполнения неравенств

$$a_1<X_1<b_1, \ldots, a_n<X_n<b_n$$

равна

$$\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}p(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1, \ldots, dx_n.$$

Если существует совместная П. в. случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, то для независимости этих величин необходимо и достаточно, чтобы совместная П. в. была произведением П. в. отдельных величин, т. е.

$$p(x_1, \ldots, x_n)=p_1(x_1)\ldots p_n(x_n),$$

где p_i — П. в. величины X_i. По совместной П. в. случайных величин можно найти распределение вероятностей любых функций от этих величин; так, напр., для двух независимых случайных величин с П. в. $p_1(x)$ и $p_2(x)$ П. в. их суммы задаётся формулой свёртки:

$$p(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p_1(y-x)\,p_2(x)\,dx.$$

ПЛОЩАДЬ — одна из основных величин, связанных с геометрическими фигурами. В простейших случаях измеряется числом заполняющих плоскую фигуру единичных квадратов, т. е. квадратов со стороной, равной единице длины.

Вычисление П. было уже в древности одной из важнейших задач практич. геометрии (разбивка земельных участков). За несколько столетий до нашей эры греческие учёные располагали точными правилами вычисления П., к-рые в «Началах» Евклида облечены в форму теорем. При этом П. многоугольников определялись теми же приё-

мами разложения и дополнения фигур, какие сохранились в школьном преподавании. Для вычисления П. фигур с криволинейным контуром применялся предельный переход в форме *исчерпывания метода*.

Теория П. плоских фигур, ограниченных простыми (т. е. не пересекающими себя) контурами, может быть построена следующим образом. Рассматриваются всевозможные многоугольники, вписанные в фигуру F, и всевозможные многоугольники, описанные вокруг фигуры F. (Вычисление П. многоугольника сводится к вычислению П. равновеликого ему квадрата, к-рый может быть получен посредством надлежащих прямолинейных разрезов и перекладывания полученных частей.) Пусть $\{S_i\}$ — числовое множество П. вписанных в фигуру многоугольников, а $\{S_d\}$ — числовое множество П. описанных вокруг фигуры многоугольников. Множество $\{S_i\}$ ограничено сверху (площадью любого описанного многоугольника), а множество $\{S_d\}$ ограничено снизу (напр., числом нуль). Наименьшее из чисел $\underline{S}$, ограничивающее сверху множество $\{S_i\}$, наз. нижней площадью фигуры F; а наибольшее из чисел $\overline{S}$, ограничивающее снизу множество $\{S_d\}$, наз. верхней площадью фигуры F. Если верхняя П. фигуры совпадает с её нижней П., то число $S=\underline{S}=\overline{S}$ наз. площадью фигуры, а сама фигура — квадрируемой фигурой. Для того чтобы плоская фигура была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε можно было указать такой описанный вокруг фигуры многоугольник и такой вписанный в фигуру многоугольник, разность S_d-S_i площадей к-рых была бы меньше ε.

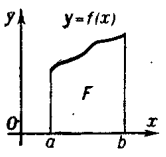


Рис. 1.

Аналитически П. плоской фигуры может быть вычислена с помощью интегралов. Пусть фигура F — т. н. криволинейная трапеция (рис. 1) — ограничена графиком заданной на сегменте $[a, b]$ непрерывной и неотрицательной функции $f(x)$, отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ и отрезком оси Ox между точками $(a, 0)$ и $(b, 0)$. П. такой фигуры может быть выражена интегралом

$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$

П. фигуры, ограниченной замкнутым контуром, к-рый встречается с параллелью к оси Oy не более чем в двух точках, может быть вычислена как разность П. двух фигур, подобных криволинейной трапеции. П. фигуры может быть выражена в виде двойного интеграла:

$$S=\iint dx\,dy,$$

где интегрирование распространяется на часть плоскости, занятой фигурой.

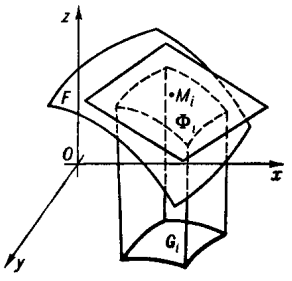


Рис. 2.

Теория П. фигур, расположенных на кривой поверхности, может быть определена следующим образом. Пусть F — односвязная фигура на гладкой поверхности, ограниченная кусочно гладким контуром. Фигура F разбивается кусочно гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i, каждая из к-рых однозначно проектируется на касательную плоскость, проходящую через точку M_i, принадлежащую части Φ_i (рис. 2). Предел сумм площадей этих проекций (если он существует), взятых по всем элементам разбиения, при условиях, что максимум диаметров этих элементов стремится к нулю и что он не зависит от выбора точек M_i, наз. площадью фигуры F. Фигура на поверхности, для к-рой этот предел существует, наз. квадрируемой. Квадрируемыми являются кусочно гладкие ограниченные полные двусторонние поверхности. П. всей поверхности слагается из П. составляющих её частей.

Аналитически П. фигуры F на поверхности, заданной уравнением $z=f(x, y)$, где функция f однозначна и имеет непрерывные частные производные, может быть выражена следующим образом:

$$S=\iint_G \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,ds.$$

Здесь G — замкнутая область, являющаяся проекцией фигуры F на плоскость Oxy, ds — элемент площади поверхности.

Об обобщении понятия П. см. в ст. *Мера множества*.

● Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; 2 изд., ч. 2, М., 1980.

Я. С. Дубнов.

ПЛЮККЕРОВЫ КООРДИНАТЫ прямой на плоскости — координаты, введённые Ю. Плюккером (1869); см. *Тангенциальные координаты*.

ПЛЮС (от лат. plus — больше) — знак (+) для обозначения действия сложения и положительности чисел.

ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕОРИЯ — раздел дифференциальной геометрии, в котором изучаются свойства поверхностей. В классич. П. т. рассматриваются свойства поверхностей, неизменные при их движении. Одна из основных задач классич. П. т. — задача измерений на поверхности — своим возникновением обязана геодезии, т. е. измерениям на поверхности Земли. Совокупность фактов, получаемых при помощи измерений на поверхности, составляет *внутреннюю геометрию* поверхности. К внутренней геометрии поверхности относятся такие понятия, как длина линии, угол между двумя направлениями, площадь области, а также геодезич. линии, геодезич. кривизна линии и множество других.

Внутреннюю геометрию определяет первая квадратичная форма поверхности:

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 \qquad (1)$$

[здесь $E=\boldsymbol{r}_u^2$, $G=\boldsymbol{r}_v^2$, $F=(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ — радиус-вектор переменной точки поверхности, u, v — её криволинейные координаты], выражающая квадрат дифференциала дуги линии на поверхности. Именно, если известны функции $E=E(u, v)$, $F=F(u, v)$, $G=G(u, v)$, то, зная внутренние уравнения линии $u=u(t)$, $v=v(t)$ и интегрируя ds, можно определить длину этой линии; кроме того, существуют формулы, к-рые при данных E, F, G выражают угол между двумя линиями и площадь области по внутренним уравнениям этих линий и по внутреннему уравнению контура области.

Изучение пространственного строения окрестности точки на поверхности производится при помощи второй квадратичной формы поверхности:

$$2h=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2 \qquad (2)$$

[здесь $L=(\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{n})$, $M=(\boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{n})$, $N=(\boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{n})$, $\boldsymbol{n}=\frac{[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]}{|[\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v]|}$ — единичный вектор нормали к поверхности]. Величина h с точностью до малых более высокого порядка относительно du, dv равна расстоянию от точки M' поверхности с координатами $u+du$, $v+dv$ до касательной плоскости π в точке M с координатами u, v, причём расстояние берётся со знаком в зависимости от того, с какой стороны от π расположена точка M'. Если форма (2) — знакоопределённая, то поверхность в достаточно малой окрестности точки M располагается по одну сторону от касательной плоскости π, и в этом случае точка M поверхности наз. эллиптической (рис. 1). Если форма (2) — знакопеременная, то поверхность в окрестности точки M располагается по разные стороны от плоскости π, и точка M тогда наз. гиперболической (рис. 2). Если форма (2) — знакоопределённая, но принимает нулевые значения (при не равных одновременно нулю du и dv), то точка M наз. параболической (на рис. 3 показан один из при-

мерой строения поверхности в окрестности параболич. точки).

Более точная характеристика пространственной формы поверхности может быть получена с помощью исследования геометрич. свойств линий на поверхности. Пусть M — нек-рая точка поверхности S и $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности в M. Линия L пересечения S с плоскостью, проходящей через $\boldsymbol{n}$ в направлении $\frac{du}{dv}$,

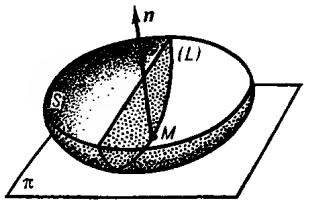


Рис. 1.

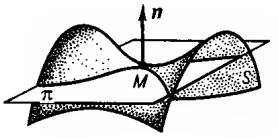


Рис. 2.

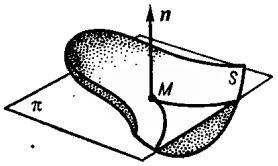


Рис. 3.

наз. нормальным сечением в этом направлении, а её кривизна — нормальной кривизной. Нормальная кривизна $1/R$ вычисляется по формуле

$$\frac{1}{R}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}.$$

Экстремальные значения нормальной кривизны в данной точке наз. главными кривизнами, а соответствующие направления на поверхности — главными направлениями. Если главные кривизны в точке M различны, то в этой точке существуют два различных главных направления. Линии, направления к-рых в каждой точке являются главными, носят наименование линий кривизны. Направления, в к-рых нормальная кривизна равна нулю, наз. асимптотическими, а линии, имеющие в каждой точке асимптотич. направление,— асимптотическими линиями. Поверхность, состоящая из эллиптич. точек (напр., сфера), не имеет асимптотич. линий. Поверхность, состоящая из гиперболич. точек, имеет два семейства асимптотич. линий (напр., две системы прямолинейных образующих однополостного гиперболоида). Поверхность, состоящая из параболич. точек, имеет одну систему асимптотич. линий — систему прямолинейных образующих.

Дальнейшее изучение свойств произвольных линий на поверхности (в первую очередь, кривизн линий) тесно связано с кривизнами нормальных сечений. Кривизна k в данной точке M произвольной линии Г может быть вычислена по формуле

$$k=\frac{k_n}{\cos\theta},$$

где k_n — кривизна нормального сечения L в точке M в направлении касательной к Г, а θ — угол между главными нормалями к Г и L в этой точке (см. *Мёнье формула*). Кривизна произвольного нормального сечения в данной точке связана простым соотношением (*Эйлера формулой*) с главными кривизнами. Нормальная кривизна поверхности в данной точке M и в данном направлении $\frac{du}{dv}$ может рассматриваться как мера искривлённости поверхности в M в направлении $\frac{du}{dv}$.

Поверхности, между точками к-рых можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что длины соответствующих линий равны, наз. изометричными. Изометричные поверхности имеют одинаковую геометрию, но их пространственное строение может быть различным, и главные кривизны в соответствующих точках у них могут быть также различными (напр., окрестность точки на плоскости изометрична нек-рой окрестности точки на цилиндре, но имеет иную пространственную структуру). Однако произведение K главных кривизн $1/R_1$ и $1/R_2$ в точке M не меняется при изометричных преобразованиях поверхности (теорема Гаусса, 1827) и поэтому может служить внутренней мерой искривлённости поверхности в данной точке. Величина K наз. внешней или гауссовой кривизной поверхности в точке M и выражается соотношением

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}; \qquad (3)$$

внешняя кривизна в соответствии с теоремой Гаусса может быть выражена только через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные. Приведённая выше классификация точек регулярной поверхности может быть сопоставлена со значениями внешней кривизны: в эллиптич. точке она положительна, в гиперболической — отрицательна и в параболической — равна нулю.

Важное значение в П. т. имеет вопрос о возможности изгибания поверхности: можно ли утверждать, что данная поверхность будет изгибаемой? Этот вопрос можно сформулировать следующим образом: возможно ли включить данную регулярную поверхность в однопараметрич. семейство изометричных неконгруэнтных регулярных поверхностей (конгруэнтные поверхности — поверхности, совмещаемые движением)? При этом рассматриваются как сама возможность изгибания, так и изгибания специального типа.

Задача изгибания поверхностей тесно связана с задачей определения поверхности по заданным основным квадратичным формам. Поскольку значение полной кривизны K поверхности может быть выражено через коэффициенты первой квадратичной формы, то уравнение (3) является одним из соотношений, связывающих коэффициенты первой (1) и второй (2) форм. Другие два соотношения

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Delta}{\partial v}-\frac{\partial\Delta'}{\partial u}+\Gamma^2_{22}\Delta-2\Gamma^2_{12}\Delta'+\Gamma^2_{11}\Delta''=0,\\ \frac{\partial\Delta''}{\partial u}-\frac{\partial\Delta'}{\partial v}+\Gamma^1_{22}\Delta-2\Gamma^1_{12}\Delta'+\Gamma^1_{11}\Delta''=0\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(здесь $\Delta=\frac{L}{\sqrt{EG-F^2}}$; $\Delta'=\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}$; $\Delta''=\frac{N}{\sqrt{EG-F^2}}$; Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля второго рода) были установлены К. М. Петерсоном (1853). Справедливо и обратное утверждение: если коэффициенты двух форм, одна из к-рых — положительно определённая, удовлетворяют уравнениям (3) и (4), то существует определённая с точностью до движения и зеркального отражения поверхность, для к-рой указанные формы будут первой и второй квадратичными формами (теорема Бонне).

С нач. 20 в. в классич. П. т. появляется новое направление, в к-ром исследуется поверхность «в целом» по данным свойствам окрестностей её точек. Важные результаты в этой области были получены Л. Г. Шнирельманом и Л. А. Люстерником, к-рыми утвердительно была решена проблема существования трёх замкнутых геодезических на регулярных замкнутых поверхностях, гомеоморфных сфере. Глубокие и принципиально новые результаты были получены А. Д. Александровым и А. В. Погореловым в теории выпуклых поверхностей. А. Д. Александровым был предложен новый метод исследования выпуклых поверхностей, основанный на приближении выпуклых поверхностей выпуклыми многогранниками. Н. В. Ефимов получил фундаментальные результаты по теории поверхностей отрицательной кривизны.

Рассмотренные свойства поверхностей не меняются при любых изометрич. преобразованиях всего пространства, т. е. они относятся к т. н. метрической П. т. Изучаются также свойства поверхностей, инвариантные по отношению к к.-л. другой группе преобразований пространства, напр. группе аффинных или проективных преобразований. Аффинная П. т. рассматривает свойства поверхностей, неизменные при эквиаффинных преобразованиях (аффинные преобразования, сохраняющие объём). Проективная П. т. рассматривает проективно инвариантные свойства поверхностей.

● Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, 4 изд., М., 1956; Погорелов А. В., Геометрия, М., 1983;

Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т., Современная геометрия. Методы и приложения, 2 изд., М., 1985; Каган В. Ф., Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1—2, М.— Л., 1947—48. *Э. Г. Позняк.*

ПОВЕ́РХНОСТНЫЙ ИНТЕГРА́Л — интеграл от функции, заданной на какой-либо поверхности. К П. и. приводит, напр., задача вычисления массы, распределённой по поверхности S с переменной поверхностной плотностью $f(M)$. Для этого разбивают поверхность на части s_1, s_2, . . ., s_n и выбирают в каждой из них по точке M_i. Если эти части достаточно малы, то их массы приближённо равны $f(M_i)s_i$, а масса всей поверхности будет равна $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)s_i$. Это значение тем ближе к точному, чем меньше части s_i. Поэтому точное значение массы поверхности есть

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\, s_i,$$

где предел берётся при условии, что размеры всех частей s_i (и их площади) стремятся к нулю. К аналогичным пределам приводят и другие задачи физики. Эти пределы называют поверхностными интегралами 1-го рода от функции $f(M)$ по поверхности S и обозначают

$$\iint_{(S)} f(M)\, ds = \iint_{(S)} f(x,\ y,\ z)\, ds.$$

Их вычисление приводится к вычислению двойных интегралов.

В нек-рых задачах физики, напр. при определении потока жидкости через поверхность S, встречаются пределы аналогичных сумм с той лишь разницей, что вместо площадей самих частей стоят площади их проекций на три координатные плоскости. При этом поверхность S предполагается ориентированной (т. е. указано, какое из направлений нормалей считается положительным) и площадь проекции берётся со знаком + или — в зависимости от того, является ли угол между положительным направлением нормали и осью, перпендикулярной плоскости проекций, острым или тупым. Пределы сумм такого вида называют поверхностными интегралами 2-го рода (или П. и. по проекциям) и обозначают

$$\iint_{(S)} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy.$$

В отличие от П. и. 1-го рода знак П. и. 2-го рода зависит от ориентации поверхности S.

М. В. Остроградский установил важную формулу, связывающую П. и. 2-го рода по замкнутой поверхности с тройным интегралом по ограниченному ею объёму V (см. *Остроградского формула*). Из этой формулы следует, что если функции P, Q, R имеют непрерывные частные производные и в объёме V выполняется тождество

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

то П. и. 2-го рода по всем поверхностям, содержащимся в V и имеющим один и тот же контур, равны между собой. В этом случае можно найти такие функции P_1, Q_1, R_1, что

$$P = \frac{\partial Q_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial y},\quad Q = \frac{\partial R_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial z},\quad R = \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial x}.$$

Стокса формула выражает криволинейный интеграл по замкнутому контуру через П. и. 2-го рода по ограниченной этим контуром поверхности.

ПОВЕ́РХНОСТЬ — одно из основных геометрических понятий. При логич. уточнении этого понятия в разных отделах геометрии ему придаётся различный смысл.

1) В школьном курсе геометрии рассматриваются плоскости, многогранники, а также нек-рые кривые поверхности. Каждая из кривых П. определяется специальным способом, чаще всего как множество точек, удовлетворяющих нек-рым условиям. Напр., П. шара — множество точек, отстоящих на заданном расстоянии от данной точки. Понятие «П.» лишь поясняется, а не определяется. Напр., говорят, что П. есть граница тела или след движущейся линии.

2) Математически строгое определение П. основывается на понятиях топологии. При этом основным является понятие простой поверхности, к-рую можно представить как кусок плоскости, подвергнутый непрерывным деформациям (растяжениям, сжатиям и изгибаниям). Более точно, простой П. наз. образ гомеоморфного отображения (т. е. взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения) внутренности квадрата. Этому определению можно дать аналитич. выражение. Пусть на плоскости с прямоугольной системой координат u и v задан квадрат, координаты внутренних точек к-рого удовлетворяют неравенствам $0<u<1$, $0<v<1$. Гомеоморфный образ квадрата в пространстве с прямоугольной системой координат x, y, z задаётся при помощи формул $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$, $z=\chi(u, v)$ (параметрич. уравнения П.). При этом от функций $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ и $\chi(u, v)$ требуется, чтобы они были непрерывными и чтобы для различных точек (u, v) и (u', v') были различными соответствующие точки (x, y, z) и (x', y', z'). Примером простой П. является полусфера. Вся же сфера не является простой П. Это вызывает необходимость дальнейшего обобщения понятия П. Поверхность, окрестность каждой точки к-рой есть простая П., наз. правильной. С точки зрения топологич. строения П. как двумерные многообразия разделяются на несколько типов: замкнутые и открытые, ориентируемые и неориентируемые и т. д.

В дифференциальной геометрии исследуемые П. обычно подчинены условиям, связанным с возможностью применения методов дифференциального исчисления. Как правило, это — условия гладкости П., т. е. существования в каждой точке П. определённой касательной плоскости, кривизны и т. д. Эти требования сводятся к тому, что функции $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ предполагаются однократно, дважды, трижды, а в нек-рых вопросах — неограниченное число раз, дифференцируемыми или даже аналитич. функциями. Кроме того, требуется, чтобы в каждой точке хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \chi'_u & \chi'_v \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \psi'_u & \psi'_v \\ \chi'_u & \chi'_v \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля.

В аналитич. и алгебраич. геометрии П. определяется как множество точек, координаты к-рых удовлетворяют определённому виду уравнений:

$$\Phi(x,\ y,\ z) = 0. \qquad (*)$$

Определённая таким образом П. может и не иметь наглядного геометрич. образа. В этом случае для сохранения общности говорят о мнимых П. Напр., уравнение $x^2+y^2+z^2+1=0$ определяет мнимую сферу, хотя в действительном пространстве нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяют такому уравнению. Если функция $\Phi(x, y, z)$ непрерывна в нек-рой точке и имеет в ней непрерывные частные производные $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, из к-рых хотя бы одна не обращается в нуль, то в окрестности этой точки П., заданная уравнением (*), будет правильной П. *А. Н. Колмогоров, Л. А. Скорняков.*

ПОВЕ́РХНОСТЬ ВТОРО́ГО ПОРЯ́ДКА — множество точек 3-мерного пространства, координаты которых в декартовой системе координат удовлетворяют алгебраическому уравнению 2-й степени:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) может и не определять действительного геометрич. образа, но для сохранения общности в таких случаях говорят, что оно определяет мнимую поверхность второго порядка. Существует прямоугольная система координат, в к-рой уравнение (*) в зависимости от коэффициентов приводится к одному из следующих канонических видов, каждому из к-рых соответствует определённый класс П. в. п.

Нераспадающиеся поверхности:

Невырождающиеся:

эллиптические —

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — *эллипсоид*,
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ — мнимый эллипсоид;

гиперболические —

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ — однополостный *гиперболоид*,
4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ — двуполостный гиперболоид;

параболические ($p>0$, $q>0$) —

5. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ — эллиптич. *параболоид*,
6. $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ — гиперболич. параболоид.

Вырождающиеся:

цилиндрические —

7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — *эллиптический цилиндр*,
8. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ — мнимый эллиптич. цилиндр,
9. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — *гиперболический цилиндр*,
10. $y^2=2px$ — *параболический цилиндр*;

конические —

11. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ — *конус*,
12. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ — мнимый конус.

Распадающиеся вырождающиеся поверхности:

13. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ — пара пересекающихся плоскостей,
14. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ — пара мнимых пересекающихся плоскостей,
15. $x^2=a^2$ — пара параллельных плоскостей,
16. $x^2=-a^2$ — пара мнимых параллельных плоскостей,
17. $x^2=0$ — пара совпадающих плоскостей.

П. в. п., имеющая единственный центр симметрии (центр поверхности второго порядка), наз. центральной поверхностью второго порядка; П. в. п. без центра симметрии или с неопределённым центром — нецентральной поверхностью второго порядка.

Среди П. в. п., содержащих хотя бы одну точку, ограниченными являются лишь эллиптические, все остальные неограниченные, т. е. имеют непустое пересечение с любой сферой, радиус к-рой больше нек-рого числа. Пересечение П. в. п. с плоскостью является *линией второго порядка*.

Исследование вида П. в. п. может быть проведено (табл. 1 и 2) без приведения уравнения (*) к канонич. виду с помощью т. н. инвариантов поверхностей второго порядка, составленных из коэффициентов уравнения (*). Основные инварианты:

$$S=a_{11}+a_{22}+a_{33},\quad T=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{23}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$\delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{13}&a_{23}&a_{24}&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}.$$

Их значения не меняются при параллельном переносе и повороте осей координат. Семиинварианты (полуинварианты) Δ' и Δ'', к-рые являются инвариантами относительно поворота системы координат:

$$\Delta'=\Delta_{11}+\Delta_{22}+\Delta_{33},$$

Табл. 1. — КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ИНВАРИАНТАМ

		Невырождающиеся поверхности		Вырождающиеся поверхности
		$\Delta>0$	$\Delta<0$	$\Delta=0$
Центральные поверхности $\delta\neq0$	$\delta S>0$, $T>0$	Мнимый эллипсоид	Эллипсоид	Мнимый конус
	$\delta S\leqslant 0$ и (или) $T\leqslant 0$	Однополостный гиперболоид	Двуполостный гиперболоид	Действительный конус
Нецентральные поверхности $\delta=0$		Гиперболический параболоид	Эллиптический параболоид	Цилиндрические и распадающиеся поверхности (см. табл. 2)

Табл. 2. — ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И РАСПАДАЮЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ($\Delta=0$, $\delta=0$)

	Цилиндрические поверхности $\Delta'\neq0$		Распадающиеся поверхности $\Delta'=0$	
$T>0$	Эллиптический цилиндр		Пара мнимых пересекающихся плоскостей	
	Мнимый $\Delta' S>0$	Действительный $\Delta' S<0$		
$T<0$	Гиперболический цилиндр		Пара пересекающихся плоскостей	
$T=0$	Параболический цилиндр		Пара мнимых параллельных плоскостей $\Delta''>0$	Пара совпадающих плоскостей $\Delta''=0$
			Пара параллельных плоскостей $\Delta''<0$	

где Δ_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в Δ;

$$\Delta''=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{14}\\a_{41}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{24}\\a_{42}&a_{44}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{33}&a_{34}\\a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}.$$

Их значения не меняются при повороте осей координат. Инварианты П. в. п. определяют П. в. п. с точностью до движения евклидовой плоскости. Любые две нераспадающиеся П. в. п., инварианты к-рых соответственно равны, эквивалентны по отношению к группе движений плоскости, т. е. могут быть совмещены движением.

По отношению к более широкой, чем группа движений, группе аффинных преобразований эквивалентными являются П. в. п., канонич. уравнения к-рых совпадают; имеется семнадцать аффинно эквивалентных классов, канонич. уравнения к-рых получаются из уравнений 1—17 при $a=b=c=1$ и $2p=-2q=1$.

В проективной геометрии эквивалентными являются П. в. п., к-рые могут быть переведены друг в друга при проективных преобразованиях (группа к-рых более широка, чем группа аффинных преобразований). Имеется восемь проективно эквивалентных классов, т. е. между нек-рыми аффинными классами имеется проективная общность. Это связано с тем, что при проективных преобразованиях исчезает особая роль бесконечно удалённых элементов пространства. Напр., эл-

липсоид и двуполостный гиперболоид, различные с аффинной точки зрения, принадлежат одному проективному классу П. в. п.

П. в. п. впервые представлены уравнениями 2-й степени у Л. Эйлера (1748), современные названия невырожденных П. в. п. даны Г. Монжем (1801). *А. Б. Иванов.*

ПОВЕ́РХНОСТЬ ПЕ́РВОГО ПОРЯ́ДКА — то же, что *плоскость.*

ПОВОРО́Т — то же, что *вращение.*

ПОВТО́РНОГО ЛОГАРИ́ФМА ЗАКО́Н — одна из предельных теорем теории вероятностей, близкая по смыслу к закону больших чисел. П. л. з. указывает (при определённых условиях) точный порядок роста сумм независимых случайных величин при увеличении числа слагаемых. Пусть, напр., случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимы и каждая из них принимает два значения $+1$ или -1 с вероятностями, равными $1/2$, пусть $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Тогда при любом $\delta > 0$ с вероятностью, равной 1:

1) при всех n, бо́льших нек-рого (зависящего от случая) номера N:

$$S_n < (1+\delta)\sqrt{2n \ln \ln n};$$

2) для бесконечной последовательности номеров n:

$$S_n > (1-\delta)\sqrt{2n \ln \ln n}.$$

Назв. «П. л. з.» объясняется наличием в вышеприведённых выражениях множителя $\ln \ln n$. Первый результат, относящийся к П. л. з., был установлен А. Я. Хинчиным (1924). Дальнейшие осуществлённые продвижения в изучении условий приложимости П. л. з. связаны с работами А. Н. Колмогорова (1929) и У. Феллера (1943).

ПОВТО́РНЫЙ ИНТЕГРА́Л — понятие интегрального исчисления. Вычисление двойного интеграла

$$I = \iint_S f(x, y)\, dx\, dy$$

от функции $f(x, y)$ по области S, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$ и кривыми $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, при нек-рых условиях относительно функций $f(x, y)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ производится по формуле

$$I = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx,$$

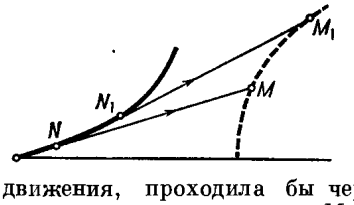
где при вычислении внутреннего интеграла x считается постоянным. Таким образом, вычисление двойного интеграла сводится к двум вычислениям обычных интегралов или, как говорят, к П. и. Геометрически сведение двойного интеграла к П. и. означает возможность вычисления объёма цилиндроида как путём разбиения его на элементарные столбики, так и путём разбиения его на элементарные слои, параллельные плоскости yOz. При нек-рых условиях на функцию $f(x, y)$ и область S в П. и. можно изменить порядок интегрирования (т. е. сначала интегрировать по x, а затем по y). Аналогично определяется П. и. в случае функций большего числа переменных.

ПОВТО́РНЫЙ РЯД — см. *Двойной ряд.*

ПОВТО́РНЫХ ПОДСТАНО́ВОК МЕ́ТОД — см. *Последовательных приближений метод.*

ПОГЛОЩЕ́НИЯ ЗАКО́НЫ — см. *Алгебра логики.*

ПОГО́НИ ЛИ́НИЯ — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка M (рис.) равномерно движется по нек-рой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки N такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки M. В плоском случае система



уравнений, к-рым должна удовлетворять П. л., имеет вид

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x), \quad F(\xi, \eta) = 0,$$

где $\frac{dy}{dx}$ — угловой коэффициент П. л., $F(\xi, \eta)=0$ — уравнение заданной кривой.

Задача о П. л. поставлена Леонардо да Винчи, решена П. Буге (1732).

ПОГРЕ́ШНОСТЬ — 1) П.— разность $a-a^*$, где a^* — известное приближённое значение некоторой величины, точное значение которой равно a. Разность $a-a^*$ наз. также а б с о л ю т н о й П. приближения a^*. Число $\Delta(a^*)$ такое, что

$$|a - a^*| \leqslant \Delta(a^*),$$

также наз. а б с о л ю т н о й П. Отношение $\frac{a-a^*}{a^*}$ наз. о т н о с и т е л ь н о й П. приближения a^*. Число $\delta(a^*)$ такое, что

$$\left| \frac{a-a^*}{a^*} \right| \leqslant \delta(a^*),$$

также наз. о т н о с и т е л ь н о й П. Величину относительной П. часто выражают в процентах.

При численном решении задачи П. результата обусловливается приближённым характером математич. описания реального процесса, неточностью задания исходных данных, неточностью метода решения и ошибками округления; соответственно различают П. математич. модели, П. входных данных, П. метода и вычислительную П. Иногда П. математич. модели и П. входных данных объединяют под общим названием — неустранимая П.

2) П. а п п р о к с и м а ц и и р а з н о с т н о й с х е м о й — см. *Разностных схем теория.*

3) П. к в а д р а т у р ы — см. *Оптимальная квадратура.*

4) П. м е т о д а — см. *Оптимизация вычислительных алгоритмов.*

5) П. о к р у г л е н и я — см. *Округление* числа.

ПОДАЛГЕБРА у н и в е р с а л ь н о й а л г е б р ы — см. *Универсальная алгебра.*

ПОДГРУ́ППА — подмножество H группы G, само являющееся группой относительно операции, определяющей G. Непустое подмножество H группы G является её подгруппой тогда и только тогда, когда H содержит произведения любых двух элементов из H и вместе со всяким своим элементом h содержит обратный к нему элемент h^{-1}.

Подмножество группы G, состоящее из одного элемента 1, будет, очевидно, подгруппой, и эта П. наз. е д и н и ч н о й п о д г р у п п о й группы G и обозначается обычно E. Сама G также является, по определению, своей П. Всякая П., отличная от всей группы, наз. и с т и н н о й П. Сама группа G и подгруппа E наз. н е с о б с т в е н н ы м и П. группы G, все остальные — с о б с т в е н н ы м и.

Теоретико-множественное пересечение любых двух (и любого множества) П. группы G является П. в G. Пересечение всех П. группы G, содержащих все элементы нек-рого непустого множества M, наз. п о д г р у п п о й, п о р о ж д ё н н о й м н о ж е с т в о м M. Если M состоит из одного элемента a, то такая П. наз. ц и к л и ч е с к о й. Теоретико-множественное объединение П., вообще говоря, П. не является. О б ъ е д и н е н и е м п о д г р у п п H_i, $i \in I$, наз. П., порождённая объединением множеств H_i.

Множество элементов группы G, равное

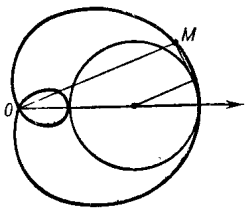
$$aH = \{ah \mid h \in H\},$$

где a — нек-рый фиксированный элемент из G, наз. л е в ы м с м е ж н ы м к л а с с о м по п о д г р у п п е H, определяемым элементом a. Для любых a, b из G смежные классы aH и bH либо совпадают, либо не пересекаются. Таким образом, группа G распадается на непересекающиеся левые смежные классы по подгруппе H — это разложение наз. л е в о с т о р о н н и м р а з л о ж е н и е м г р у п п ы G п о п о д г р у п п е H. Анало-

гично определяются правые смежные классы и правостороннее разложение. Оба эти разложения группы G по H состоят из одного и того же числа классов (в бесконечном случае совпадают мощности множеств этих классов). Это число (мощность) наз. индексом подгруппы H в G. Если число смежных классов по H конечно, то H наз. подгруппой конечного индекса. Индекс П. H в G обычно обозначается $[G:H]$. Произведение порядка П. H на её индекс равно порядку группы G (теорема Лагранжа). Это соотношение имеет место как для конечной группы G, так и в случае бесконечной G — для соответствующих мощностей.

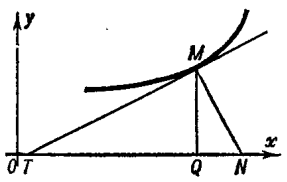
Важнейший тип П.— *нормальные подгруппы*, т. е. П., для к-рых левостороннее и правостороннее разложения на смежные классы совпадают. Они характеризуются также тем, что отображаются в себя любым внутренним автоморфизмом группы. П., отображающиеся в себя любым автоморфизмом группы, наз. характеристическими, а отображающиеся в себя любым эндоморфизмом — вполне характеристическими.

ПОДЕ́РА, подэра (франц. podaire, от греч. ποδός, род. падеж ποδός — нога), кривой l относительно точки O — множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки O на касательные к кривой l. Напр., улитка Паскаля — П. окружности относительно точки O (рис.). Кривая l по отношению к своей П. наз. антиподерой относительно точки O.



П. поверхности относительно точки O — множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки O на касательные плоскости поверхности.

ПОДКАСА́ТЕЛЬНАЯ И ПОДНОРМА́ЛЬ — направленные отрезки QT и QN, являющиеся проекциями на ось Ox отрезков касательной MT и нормали MN к некоторой кривой в её точке M (рис.). Если кривая есть график функции $y=f(x)$, то значения величин П. и п. равны соответственно



$$QT=-\frac{f(x)}{f'(x)},\quad QN=f(x)f'(x),$$

где x — абсцисса точки M. Если кривая задана параметрически: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то

$$QT=-\frac{\psi(t)\varphi'(t)}{\psi'(t)},\quad QN=\frac{\psi(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

где t — значение параметра, определяющее точку кривой.

ПОДКОЛЬЦО — см. *Кольцо*.

ПОДМА́ТРИЦА прямоугольной матрицы A размера $n\times m$ — матрица размера $k\times l$, где $1\leqslant k\leqslant n$, $1\leqslant l\leqslant m$, образованная элементами, находящимися на пересечении фиксированных k строк и l столбцов матрицы с сохранением прежнего порядка. Определитель квадратной П. порядка k матрицы A наз. *минором* k-го порядка матрицы A.

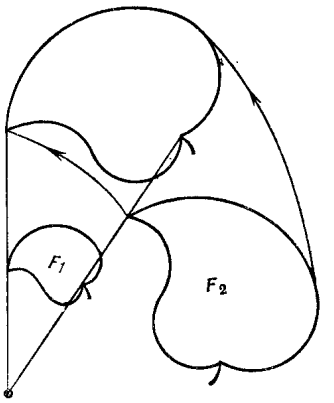
ПОДМНО́ЖЕСТВО множества A — любое множество, каждый элемент которого принадлежит A. Напр., множество всех натуральных чисел есть П. множества всех целых чисел. Если к числу множеств причислить «пустое» множество, совсем не содержащее элементов, то, в силу определения, его следует считать П. любого другого множества. Само множество A и пустое множество наз. иногда несобственным П., остальные же П.— собственными.

ПОДМО́ДУЛЬ — см. *Модуль*.

ПОДНОРМА́ЛЬ — см. *Подкасательная и поднормаль*.

ПОДО́БИЕ — понятие, характеризующее наличие у геометрических фигур одинаковой формы, независимо от их размеров. Две фигуры F_1 и F_2 наз. подобными, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие, при к-ром отношение расстояний между любыми парами соответствующих точек равно одной и той же постоянной k. Постоянная k наз. коэффициентом подобия. Углы между соответствующими линиями подобных фигур равны. Отношение площадей ограниченных подобных фигур равно квадрату коэффициента П., а отношение объёмов — кубу коэффициента.

Для П. треугольников необходимым и достаточным является каждый из следующих признаков: 1) стороны одного пропорциональны сторонам другого; 2) два угла одного равны двум углам другого; 3) две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами равны; 4) две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого, а наибольший угол одного равен наибольшему углу другого.



Геометрич. преобразование плоскости, при к-ром все фигуры плоскости переходят в им подобные с одним и тем же коэффициентом П., наз. подобным преобразованием. Преобразования П. являются частным случаем аффинного преобразования; образуют группу. Всякое преобразование П.— результат (рис.) последовательного выполнения гомотетии и движения (собственного или несобственного).

Теория П. существенно связана с постулатом о параллельности, к-рый эквивалентен существованию хотя бы одной пары неравных подобных треугольников. В геометрии Лобачевского из П. треугольников вытекает их равенство.

ПОДО́БНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — см. *Подобие*.

ПОДО́БНЫЕ МА́ТРИЦЫ — квадратные матрицы A и B одного порядка, связанные соотношением $B=S^{-1}AS$, где S — какая-либо невырожденная матрица того же порядка. П. м. имеют один и тот же ранг, один и тот же определитель, один и тот же характеристич. многочлен, одни и те же собственные значения. Часто бывает важно выбрать для данной матрицы ей П. м., имеющую возможно более простую форму, напр. диагональную или жорданову (см. *Жорданова матрица*).

ПОДО́БНЫЕ ЧЛЕ́НЫ многочлена — входящие в состав многочлена одночлены, отличающиеся только коэффициентами или знаками (или ничем не отличающиеся); напр., в многочлене $2a+5a^3b+3ab^2-3a^3b$ подобными являются члены $5a^3b$ и $-3a^3b$. П. ч. могут быть заменены одним членом, равным их алгебраич. сумме (приведение П. ч.).

ПОДПО́ЛЕ — см. *Поле*.

ПОДПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$, извлечённая из элементов данной последовательности $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ с сохранением порядка, то есть при условии, что $n_1<n_2<\ldots<n_k<n_{k+1}<\ldots$. Предел П. наз. частичным пределом последовательности, из к-рой она выделена. Всякая ограниченная числовая последовательность содержит сходящуюся П. (*Больцано — Вейерштрасса теорема*), всякая неограниченная числовая последовательность содержит бесконечно большую П.

ПОДПРЕДСТАВЛЕ́НИЕ — см. *Линейное представление*.

ПОДПРОСТРА́НСТВО — 1) П. векторного пространства — см. *Векторное пространство*.

2) П. топологического пространства — множество A в топологическом пространстве X, наде-

лённое топологией, в которой открытые множества суть $G \cap A$, где G — открытые множества в X.

ПОДСТАНО́ВКА элементов данного множества — замена каждого из его элементов a каким-либо другим элементом $\varphi(a)$ из того же множества; при этом должны получаться все элементы исходного множества и каждый только один раз. Таким образом, понятие П. по существу совпадает с понятием взаимно однозначного отображения множества на себя. Термин «П.» (иногда говорят «перестановка») применяется большей частью к конечным множествам. Только этот случай и рассматривается ниже. П. принято изображать двухрядным символом

$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & c \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \dots & \varphi(c) \end{pmatrix},$$

где под каждым из элементов данного множества написан соответствующий ему элемент. Так как свойства П. не зависят от природы элементов $a, b, \dots, c$, то большей частью используют целые числа $1, 2, \dots, n$, при этом в верхней строке они преимущественно записываются в своём естественном порядке; П. принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

или, проще,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix},$$

где вторая строка П. образует нек-рую перестановку $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ из чисел $1, 2, \dots, n$. Различных П. множества из n элементов существует столько же, сколько и перестановок этих элементов, то есть $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot n$. Подстановка

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

оставляющая на месте все элементы, наз. единичной или тождественной. Для каждой П. A существует обратная, т. е. такая, к-рая переводит φ_i в i; она обозначается через A^{-1}. Напр.:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Результат последовательного применения двух П. A и B снова будет нек-рой П. C: если A переводит i в φ_i, а B переводит φ_i в ψ_i, то C переводит i в ψ_i. Подстановка C наз. произведением П. A и B, что записывается $C=AB$. Напр., если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

то

$$C=AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

При умножении П. не выполняется закон коммутативности, т. е., вообще говоря, $AB \neq BA$; так, в том же примере

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \neq AB.$$

Легко видеть, что $IA=AI=A$, $AA^{-1}=A^{-1}A=I$, $A(BC)=(AB)C$ (ассоциативный закон). Таким образом, все П. из n элементов образуют группу, наз. симметрической группой степени n.

П., переставляющая местами только два элемента i и j, наз. транспозицией и обозначается (i, j), напр.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}=(2, 4).$$

Любую П. можно разложить в произведение транспозиций. Число множителей при разложении разными способами данной П. в произведение транспозиций может быть различно, но оно всегда будет либо чётным, либо нечётным. В соответствии с этим и П. наз. либо чётной, либо нечётной; $A=(1, 3)(5, 4)(5, 1)$ — нечётная П. Чётность П. можно определить также по числу инверсий, т. е. по числу нарушений порядка в нижней строке П., если числа верхней строки расположены в их естественном порядке: чётность П. совпадает с чётностью числа инверсий; напр., в нижней строке подстановки A имеется 5 инверсий, т. е. случаев, когда большее число стоит раньше меньшего: (3, 2), (3, 1), (2, 1), (5, 1) и (5, 4). Существует $n!/2$ чётных и $n!/2$ нечётных П. из n элементов.

П., циклически переставляющая данную группу элементов, а остальные элементы оставляющая на месте, наз. циклом. Число переставляемых элементов наз. длиной цикла. Напр., П. A есть цикл длины 4: она переводит 1 в 3, 3 в 5, 5 в 4, 4 в 1; коротко это записывается так: $A=(1, 3, 5, 4)$. Транспозиция есть цикл длины 2. Любую П. можно разложить в произведение независимых (т. е. не имеющих общих элементов) циклов, напр.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 1 & 8 & 6 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}=(1, 4)(2, 7)(3, 9, 5, 8).$$

Термин «П.» в математич. анализе означает замену переменного. *В. М. Курочкин.*

ПОДСТАНО́ВКИ АКСИО́МА — см. *Аксиоматическая теория множеств.*

ПОДСТАНО́ВОК ГРУ́ППА — то же, что *преобразований группа*. Термин чаще употребляется для групп преобразований конечного множества.

ПОДХОДЯ́ЩАЯ ДРОБЬ — число или функция, возникающие при обрыве *непрерывной дроби*.

ПОЗИЦИО́ННАЯ ДИФФЕРЕНЦИА́ЛЬНАЯ ИГРА́ — см. *Дифференциальные игры.*

ПОЗИЦИО́ННАЯ ИГРА́ — бескоалиционная игра, моделирующая процессы последовательного принятия решений игроками в условиях, вообще говоря, неполной и, кроме того, меняющейся во времени информации. Примерами П. и. могут служить шашки, шахматы, домино, покер, а также задачи последовательного статистич. анализа.

Процесс игры состоит в последовательном переходе от одного состояния игры к другому состоянию, к-рый осуществляется либо путём выбора нек-рым игроком одного из возможных действий в соответствии с правилами игры, либо случайным механизмом (случайный ход). Состояния игры наз. позициями, а возможные выборы в каждой позиции — альтернативами. В классических П. и. множество позиций предполагается конечным. Характерная особенность П. и. состоит в том, что множество позиций можно представить в виде древовидно упорядоченного множества, к-рое наз. деревом игры, а процесс игры состоит в переходе от начальной позиции к окончательной через непосредственно следующие друг за другом промежуточные позиции. В каждой окончательной позиции задан числовой выигрыш каждого игрока.

Различаются П. и. с полной информацией и П. и. с неполной информацией. В играх с полной информацией каждый игрок при своём ходе знает ту позицию дерева игры, в к-рой он находится. В играх с неполной информацией игроку при своём ходе известно лишь нек-рое множество позиций, наз. информационным множеством и содержащее позицию, в к-рой игрок фактически находится. Игры с полной информацией соответствуют случаю, когда каждое информационное множество каждого игрока состоит из одной позиции. Так, шашки и шахматы являются П. и. с полной информацией без случайного хода, а домино и покер, напротив,— играми с неполной информацией и со случайным ходом.

В П. и. предполагается, что все позиции, принадлежащие одному информационному множеству любого игрока, имеют одно и то же число альтернатив. Ввиду этого между множествами альтернатив позиций любого инфор-

мационного множества можно установить взаимно однозначное соответствие. Класс эквивалентности по этому соответствию наз. альтернативой информационного множества. Стратегией игрока наз. функция, ставящая в соответствие каждому его информационному множеству альтернативу этого множества. Ввиду возможного наличия случайного хода каждая ситуация определяет нек-рое распределение вероятностей на множестве партий и, следовательно, на множестве окончательных позиций. Под значением функции выигрыша игрока в любой ситуации понимается математич. ожидание его выигрышей по этому распределению. Эта конструкция позволяет свести П. и. к игре в нормальной форме.

Имеются различные обобщения классических П. и. на случаи бесконечных множеств позиций и альтернатив (см., напр., *Динамическая игра*), а также множеств позиций, к-рые невозможно древовидно упорядочить (при зацикливаниях процесса разыгрывания игры).

ПОЗИЦИО́ННАЯ СИСТЕ́МА — система *счисления*, основанная на принципе позиционного, или поместного, значения цифр.

ПОКАЗА́ТЕЛЬНАЯ ФУ́НКЦИЯ, экспоненциальная функция, экспонента,— функция

$$y = e^z = \exp z$$

[где e (основание натуральных логарифмов) — неперово число], для любого значения z (действительного или комплексного) определяемая соотношением

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n. \qquad (1)$$

Она обладает следующими основными свойствами:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \text{ и } (e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$$

при любых значениях z_1 и z_2.

Показательная функция действительного переменного. В курсе математич. анализа рассматривается П. ф. $y=a^x$ при действительных x и $a>0$, $a\neq 1$; она связана с П. ф. $y=e^x$ (основной) соотношением

$$a^x = e^{x\ln a}.$$

П. ф. $y=a^x$ определена при всех x, положительна, монотонна (возрастает, если $a>1$, и убывает, если $0<a<1$), непрерывна, бесконечно дифференцируема; при этом

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

в частности

$$(e^x)' = e^x, \quad \int e^x\,dx = e^x + C;$$

в окрестности каждой точки П. ф. может быть разложена в степенной ряд, напр.:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad (2)$$

$$-\infty < x < \infty.$$

График П. ф.— экспоненциальная кривая — проходит через точку (0, 1) и асимптотически приближается к оси Ox (рис. 1, где даны графики функций $y=e^x$, $y=\left(\frac{1}{e}\right)^x$, $y=10^x$, $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$, $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$); график П. ф. $y=a^x$ симметричен графику $y=(1/a)^x$ относительно оси ординат. Если $a>1$, то a^x при $x\to+\infty$ возрастает быстрее любой степени x, а при $x\to-\infty$ стремится к нулю быстрее любой степени $1/x$, т. е. при любом натуральном $b>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{|x|^b}=\infty, \quad \lim_{x\to-\infty}|x|^b a^x = 0.$$

Обратной к П. ф. является *логарифмическая функция*

П. ф. часто встречается в приложениях, когда скорость изменения к.-л. величины прямо пропорциональна самой величине:

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

Решением этого дифференциального уравнения является П. ф. $y=Ce^{kt}$. При $k>0$ эта функция с течением времени экспоненциально возрастает и выражает т. н. закон естественного роста, напр. рост числа бактерий, увеличение денежного вклада при постоянном процентном приращении. При $k<0$ П. ф. $y=Ce^{kt}$ с течением времени экспоненциально стремится к нулю. С помощью этой функции описываются, напр., процесс радиоактивного распада, затухающие колебания и т. п.

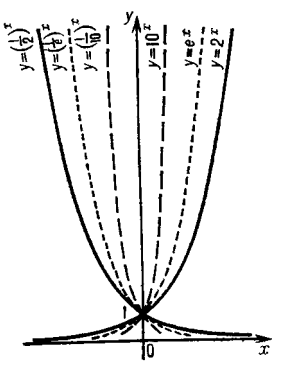


Рис. 1. Графики показательной функции a^x при различных значениях a: 1) $y=e^x$; 2) $y=\left(\frac{1}{e}\right)^x$; 3) $y=10^x$; 4) $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$; 5) $y=2^x$; 6) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Показательная функция w комплексного переменного $z=x+iy$. При комплексных a и z П. ф. связана с П. ф. (основной)

$$w = e^z$$

формулой

$$a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,a},$$

где $\mathrm{Ln}\,a$ — логарифм комплексного числа a.

П. ф. $w=e^z$ — целая трансцендентная функция и является аналитич. продолжением П. ф. $y=e^x$ с действительной оси в комплексную плоскость.

Помимо формулы (1), П. ф. может быть определена также с помощью ряда (2), сходящегося во всей комплексной плоскости, или по формуле Эйлера:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Если $z=x+iy$, то

$$|e^z| = e^x, \ \mathrm{Arg}\,e^z = y+2k\pi, \ k=0, \pm1, \pm2, \ldots$$

П. ф. e^z — периодическая с периодом $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z.$$

П. ф. e^z принимает все комплексные значения, за исключением нуля: уравнение $e^z=a$ имеет бесконечное число решений для любого комплексного числа $a\neq0$. Эти решения находятся по формуле

$$z = \mathrm{Ln}\,a = \ln|a| + i\,\mathrm{Arg}\,a.$$

Отображение $w=e^z$ переводит прямые $\mathrm{Re}\,z=c$ в окружности $|w|=e^c$, а прямые $\mathrm{Im}\,z=c$ — в лучи $\arg w=c$ (рис. 2).

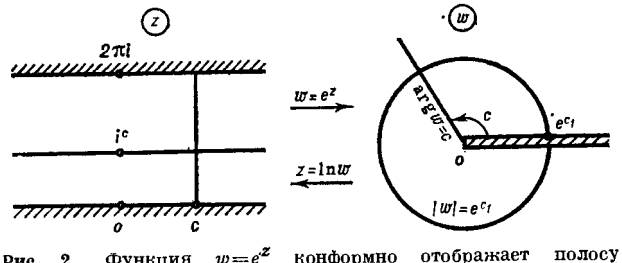


Рис. 2. Функция $w=e^z$ конформно отображает полосу $0<\mathrm{Im}\,z<2\pi$ на плоскость w с разрезом по положительной части действительной оси (нижняя граница полосы переходит в верхний берег разреза плоскости w, верхняя граница — в нижний берег); функция $z=\ln w$ осуществляет обратное отображение.

П. ф. e^z однолистна в области, если эта область не содержит точки z_1, z_2, связанные равенством $z_1-z_2=2k\pi i$, $k=\pm1, \pm2, \ldots$ Напр., П. ф. e^z однолистна в полосе $h<\mathrm{Im}\,z<h+2\pi$ и в любой её части. Отображение $w=e^z$ этих областей является конформным.

П. ф. $w=e^z$ конформно отображает прямоугольник $x_1<\mathrm{Re}\,z<x_2$, $y_1<\mathrm{Im}\,z<y_2$ на кольцевой сектор $e^{x_1}<|w|<e^{x_2}$, $y_1<\arg w<y_2$, где $-\infty\leqslant x_1<x_2\leqslant+\infty$,

$0<y_2-y_1\leqslant 2\pi$ (рис. 3). Частные случаи таких отображений показаны на рис. 4 (*а*, *б*, *в*).

Обратная к П. ф.

$$w=e^z$$

логарифмич. функция

$$z=\ln w$$

осуществляет обратное отображение. Подробно это означает следующее. Если П. ф. $w=e^z$ однолистна в области

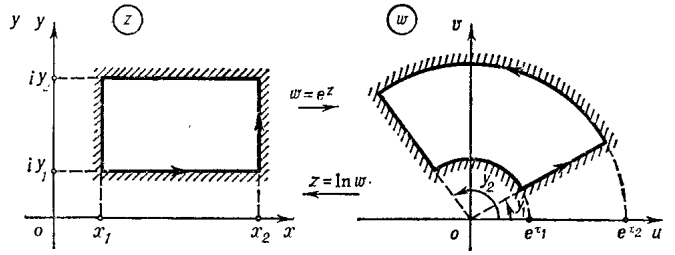


Рис. 3. Функция $w=e^z$ конформно отображает прямоугольник на кольцевой сектор. Функция $z=\ln w$ осуществляет обратное отображение.

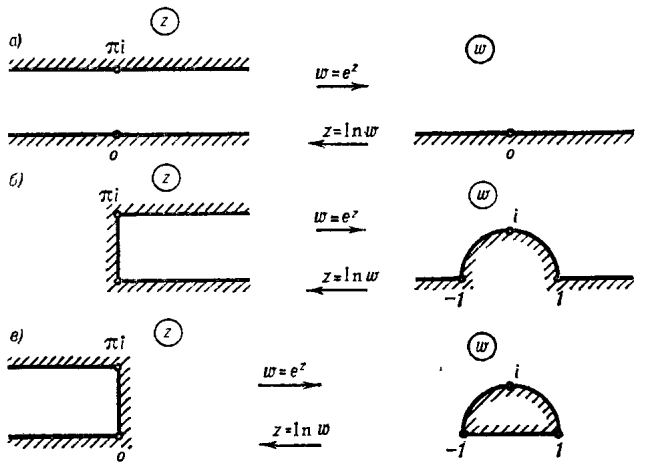


Рис. 4. Конформные отображения функций $w=e^z$ и обратной к ней функции $z=\ln w$: а) полоса $0<\mathrm{Im}\,z<\pi$ отображается на верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\,w>0$; б) полуполоса $0<\mathrm{Im}\,z<\pi$, $\mathrm{Re}\,z>0$ отображается на область $\mathrm{Im}\,w>0$, $|w|>1$; в) полуполоса $0<\mathrm{Im}\,z<\pi$, $\mathrm{Re}\,z<0$ — на верхний единичный полукруг $\mathrm{Im}\,w>0$, $|w|<1$.

D и конформно отображает эту область на область D_1 плоскости w, то функция $z=\ln w$ в области D_1 распадается на однозначные регулярные ветви, однолистные в области D_1. Одна из этих ветвей конформно отображает область D_1 на область D. Остальные ветви конформно отображают область D_1 на области, к-рые получаются из области D сдвигом на $2k\pi i$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$. Частные случаи таких отображений показаны на рис. 2—4.

П. ф. e^z является одной из основных элементарных функций. Через неё выражаются, напр., *тригонометрические функции* и *гиперболические функции*. П. ф. комплексного переменного играет важную роль в приложениях, напр. в теории рядов и интегралов Фурье, в теории колебаний и распространения волн. *Ю. В. Сидоров.*

ПОКАЗА́ТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — распределение вероятностей случайной величины X, заданное плотностью вероятности

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

зависящей от параметра $\lambda>0$. Вероятность того, что случайная величина X, имеющая П. р., примет значение, превосходящее нек-рое число x, будет при этом равна $e^{-\lambda x}$. Математич. ожидание и дисперсия равны соответственно $\mathsf{E}X=1/\lambda$ и $\mathsf{D}X=1/\lambda^2$.

П. р. является единственным непрерывным распределением вероятностей, обладающим тем свойством, что для любых чисел x_1 и x_2 выполняется равенство

$$\mathsf{P}\{X>x_1+x_2\}=\mathsf{P}\{X>x_1\}\,\mathsf{P}\{X>x_2\}$$

(т. н. свойство «отсутствия последействия»). Указанным характеристич. свойством в значительной мере объясняется, напр., та роль, к-рую П. р. играет в задачах *массового обслуживания теории*, где во многих случаях предположение о П. р. времени обслуживания является довольно естественным. П. р. тесно связано с понятием пуассоновского процесса: промежутки между последовательными событиями в таком процессе суть независимые случайные величины, имеющие П. р.; при этом λ равно среднему числу событий в единицу времени.

ПОКАЗА́ТЕЛЬНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение, в котором неизвестное содержится в показателе степени. Для решения П. у. может применяться логарифмирование обеих частей уравнения, замена переменных, уравнивание степеней с равными основаниями, графич. решение и др. способы.

ПОКООРДИНА́ТНОГО СПУ́СКА МЕ́ТОД — один из методов минимизации функций многих переменных. Пусть имеется приближение $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ к точке экстремума функции $F(x_1, \ldots, x_m)$. Функция $F(x_1, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ рассматривается как функция переменного x_1, и ищется точка x_1^1 её минимума. Затем, исходя из приближения $(x_1^1, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, путём минимизации функции $F(x_1^1, x_2, x_3^0, \ldots, x_m^0)$ находят следующее приближение $(x_1^1, x_2^1, x_3^0, \ldots, x_m^0)$. Процесс циклически повторяется. При уточнении компоненты x_k происходит смещение по прямой, параллельной оси x_k, до точки с наименьшим на этой прямой значением $F(x_1, \ldots, x_m)=C$. Эта точка будет точкой касания рассматриваемой прямой и линии уровня $F=C$.

ПОКРЫ́ТИЕ множества X — семейство подмножеств этого множества, объединение которых есть X, или семейство подмножеств пространства, в котором расположено X и которое содержит X.

В теории топологич. пространств естественно рассматривать открытые П., то есть П., все элементы к-рых являются открытыми множествами. Значение открытых П. обусловлено тем, что их элементы несут в себе полную информацию о локальном строении пространства, а свойства П. в целом отражают существенно глобальную характеристику пространств. Так, на языке П. определяется размерность по Лебегу нормального пространства: она не превосходит натурального числа n, если в любое конечное П. можно вписать открытое П., кратность к-рого (т. е. число элементов П., содержащих данную точку) не превосходит n. Возможность в любое открытое П. вписать конечное открытое П. характеризует компактные пространства; среди ограничений на П., связанных не с характером элементов, а с их расположением, чаще других встречается локальная конечность: у каждой точки есть окрестность, пересекающаяся с конечным числом элементов П.

ПО́ЛЕ — алгебраическое понятие, широко используемое во многих разделах математики. П. составляют особый подкласс *колец*.

П. может быть определено как множество, содержащее не менее двух элементов, на к-ром заданы две бинарные алгебраич. операции — сложение и умножение, обе ассоциативные и коммутативные, связанные между собою законом дистрибутивности, т. е. для любых a, b, c из П. справедливо:

$$a+b=b+a,\ ab=ba,$$
$$(a+b)+c=a+(b+c),\ (ab)\,c=a\,(bc),$$
$$(a+b)\,c=ac+bc.$$

Кроме того, в П. требуется существование нулевого элемента 0 (н у л я), для к-рого $0+a=a$, и для каждого элемента a п р о т и в о п о л о ж н о г о э л е м е н т а $-a$,

т. е. такого элемента, что $a+(-a)=0$, а также существование единичного элемента e (единицы), для к-рого $ae=a$, и для каждого ненулевого элемента a существование обратного элемента a^{-1}, т. е. такого элемента, что $aa^{-1}=e$. Отсюда следует, что в П. выполнимы операция вычитания, а также операция деления на ненулевой элемент. Таким образом, все элементы П. образуют абелеву группу по сложению (аддитивная группа поля), а все ненулевые элементы — абелеву группу по умножению (мультипликативная группа поля).

Примерами П. (относительно естественных операций сложения и умножения) являются: множество всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$, множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$, множество всех комплексных чисел $\mathbb{C}$, множество всех чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b — рациональные числа, множество всех алгебраич. чисел, множество всех рациональных функций от одного или нескольких переменных с действительными коэффициентами (а также с коэффициентами из произвольного П.). Множество элементов П. может быть конечным. Такие П. наз. полями Галуа. Простейшие примеры конечных П.— поля вычетов кольца по простому модулю.

Может оказаться, что в П. равно нулю целое кратное na какого-либо отличного от нуля элемента a. В этом случае существует такое простое число p, что p-кратное любого элемента этого П. равно нулю. Говорят, что в этом случае характеристика П. равна p (таковы поля вычетов по модулю p). Если же $na\neq 0$ ни для каких ненулевых n и a, то характеристика П. считается равной нулю. В П. не может быть делителей нуля. Всякое П. является простым кольцом, т. е. не содержит ненулевых идеалов, не совпадающих с ним. Обратно, всякое ненулевое ассоциативно-коммутативное простое кольцо с единицей есть поле. П. наз. простым, если оно не содержит подполей, т. е. таких подмножеств, к-рые сами являются П. относительно тех же операций сложения и умножения. Если F — подполе в G, то G наз. также надполем или расширением поля F. Всякое П. содержит единственное простое подполе. Все простые П. характеристики 0 исчерпываются П. рациональных чисел, а простые П. характеристики p — П. вычетов по модулю p.

Основные задачи теории П.— это описание всех подполей данного П., всех расширений данного П., классификация П. с точностью до изоморфизма и изучение групп автоморфизмов **П.**

Один из способов обозрения всех П.— отправляясь от простого П.— получать описания всех П., изучив структуру расширений. Расширение, к-рое порождается присоединением к F одного элемента, наз. простым. Возможны простые расширения двух типов: а) простое трансцендентное расширение, к-рое получается, если за G взять П. всех рациональных функций одного переменного с коэффициентами из F, и б) простое алгебраическое расширение, к-рое получается, если к F добавить корень нек-рого неприводимого над F многочлена $f(x)$ и все те элементы, к-рые можно выразить через этот корень и элементы из F. Во втором случае каждый элемент получаемого надполя G является корнем нек-рого многочлена с коэффициентами из F. Расширения, обладающие этим свойством, наз. алгебраическими, а все остальные — трансцендентными. Важный класс алгебраич. расширений составляют конечные расширения, т. е. расширения, являющиеся конечномерными векторными пространствами над П. F. Любое расширение можно выполнить в два приёма: сначала совершить чисто трансцендентное расширение (образовав П. рациональных функций, необязательно от одной переменной), а затем алгебраическое. Алгебраич. расширений не имеют такие П., в к-рых каждый многочлен разлагается на линейные множители (они наз. алгебраически замкнутыми). Таково, напр. поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел (основная теорема алгебры). Любое П. содержится в нек-ром алгебраически замкнутом П.

В теории чисел важную роль играет изучение конечных расширений П. $\mathbb{Q}$, т. н. полей алгебраических чисел. Теория П. изучает также П., несущие нек-рые дополнительные структуры, напр. нормированные П., топологич. П., упорядоченные П.

Зарождение теории П. относится к сер. 19 в., когда после опубликования работ Э. Галуа и Ж. Лагранжа по теории групп и К. Гаусса по теории чисел стало очевидно, что нужно исследовать природу самих числовых систем. Концепции П. появляются в работах Л. Кронекера и Р. Дедекинда. Р. Дедекинд ввёл первым общее понятие П., к-рое он первоначально назвал «рациональной областью». Термин «П.» впервые появился в 1871 в «Теории чисел» П. Дирихле.

● Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, пер. с англ., т. 1—2, М., 1963; Ленг С., Алгебра, пер. с англ., М., 1968; Ван дер Варден Б. Л., Алгебра, пер. с нем., 2 изд., М., 1979.

ПОЛЕ РАЗЛОЖЕ́НИЯ многочлена — наименьшее поле, содержащее все корни данного многочлена. Точнее, если задан многочлен $P_n(x)$ с коэффициентами из поля K, то П. р. многочлена $P_n(x)$ — это поле $L\supset K$, в к-ром $P_n(x)$ разлагается на линейные множители:

$$P_n(x)=a_0(x-a_1)\ldots(x-a_n)$$

(все $a_i\in K$) и $L=K(a_1, \ldots, a_n)$. П. р. многочлена является конечным алгебраич. расширением поля K; оно существует и определено однозначно с точностью до изоморфизма для любого многочлена над K.

Пример: поле комплексных чисел служит П. р. многочлена x^2+1 над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел.

ПОЛЕ́ЗНОСТИ ТЕО́РИЯ — математическая теория, предметом которой является представление отношений предпочтения численными критериями. Пусть $(G, \succ)$ — задача принятия решений, где G — множество допустимых решений (альтернатив), $\succ$ — бинарное отношение предпочтения, заданное на G так, что выражение $x\succ y$, $x, y\in G$, означает, что альтернатива x предпочтительнее альтернативы y. Для решения оптимизационной задачи принятия решений, т. е. нахождения подмножества альтернатив, являющихся оптимальными в том или ином смысле по отношению предпочтения $\succ$, удобно каждой альтернативе $x\in G$ сопоставить такое число $u(x)$ (полезность), что для любых двух альтернатив одна оказывается предпочтительнее другой в том и только в том случае, когда полезность первой альтернативы превосходит полезность второй, т. е.

$$x\succ y\Leftrightarrow u(x)>u(y). \qquad (1)$$

Функция u, удовлетворяющая соотношению (1), наз. функцией полезности. Если вместо (1) выполняется

$$x\succ y\Rightarrow u(x)>u(y), \qquad (2)$$

то функция u наз. односторонней функцией полезности.

Основное содержание П. т. составляют результаты о свойствах множества G и отношения предпочтения $\succ$, допускающего представления в виде (1) или (2), о возможности таких представлений посредством функций полезности определённого вида (непрерывных, линейных и т. д.) или единственной функцией полезности. Если множество G конечно, а $\succ$ — строгое упорядочение на нём, т. е. транзитивное, нерефлексивное и полное бинарное отношение, то функции полезности в смысле (1) всегда существуют. Примером значений таких функций могут служить номера рангов элементов множества G при произвольном их ранжировании по отношению предпочтения $\succ$. Для бесконечного множества G и строгих упорядочений функции полезности существуют тогда и только тогда, когда G плотно по этому упорядочению: существует такое счётное множество $D\subset G$, что для любых $x, y\in G\setminus D$, $x\succ y$,

существует $z\in D$, для к-рого $x\succ z\succ y$. Аналогичный результат имеет место для нестрогих (рефлексивных) упорядочений.

Пусть множество G конечно, $\succ$ — отношение строгого упорядочения на нём, M — множество всех вероятностных мер на G. Основополагающей теоремой П. т. является теорема Неймана — Моргенштерна о существовании единственной (с точностью до положительного линейного преобразования) функции полезности, заданной на G, такой, что её математич. ожидания относительно мер на M являются значениями функции полезности на M (ожидаемой полезности) для продолжения отношения $\succ$ на множество M, согласно нек-рой системе аксиом. Эта теорема обобщалась на случай бесконечного множества G и более общих отношений предпочтения.

Если $G=G_1\times\ldots\times G_n$, т. е. каждая альтернатива является многофакторной, состоящей из набора нескольких альтернатив, то рассматриваются представления полезностей $u(x)$, $x\in G$, в виде суммы значений полезностей, соответствующих каждой из n компонент альтернативы:

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x).$$

ПОЛИВЕ́КТОР (от греч. πολύς — многочисленный, обширный и *вектор*) — ковариантный или контравариантный тензор, кососимметрический относительно любых двух своих индексов (см. *Тензорное исчисление*). П. валентности 2, 3, . . ., p наз. соответственно бивектором, тривектором, . . ., p-вектором. Любой системе $x_1, \ldots, x_m$ векторов векторного пространства V над полем k сопоставляется n-контравариантный m-вектор $t=x_1\wedge\ldots\wedge x_m$ в пространстве V, координаты к-рого в произвольном базисе выражаются через координаты x_i^j векторов x_i в том же базисе по формуле

$$t^{i_1\ldots i_m}=\begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \ldots & x_1^{i_m}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ x_m^{i_1} & \ldots & x_m^{i_m}\end{vmatrix}.$$

При этом $x_1\wedge\ldots\wedge x_m\neq 0$ тогда и только тогда, когда система $x_1, \ldots, x_m$ линейно независима. П. вида $x_1\wedge\ldots\wedge x_m$ наз. разложимым или простым. Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис в V, то разложимые m-векторы $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_m}$ ($i_1<\ldots<i_m$) составляют базис в пространстве всех m-векторов. При $m=1$ или $n-1$ всякий m-вектор разложим (при $1<m<n-1$ это неверно).

ПОЛИГАРМОНИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция $u(x, y)$ двух действительных переменных, определённая в области D на плоскости (x, y), имеющая при некотором $m\geqslant 2$ непрерывные частные производные до $2m$-го порядка включительно и удовлетворяющая в D уравнению

$$\Delta^m u=\Delta(\Delta^{m-1}u)=0,\ \Delta^0=\Delta,$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа. В класс П. ф. входят гармонич. функции ($m=1$) и бигармонич. функции ($m=2$). Каждая П. ф. есть аналитич. функция от координат x, y.

ПОЛИГО́Н (от греч. πολύγωνος — многоугольный), полигональная линия,— ломаная линия, составленная из конечного числа прямолинейных отрезков (звеньев). Под П. также понимают замкнутую ломаную линию, т. е. многоугольник.

ПОЛИКОНИ́ЧЕСКАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция*.

ПОЛИЛИНЕ́ЙНАЯ ФО́РМА, полилинейная функция,— функция от нескольких элементов векторного пространства, линейная по каждому аргументу. При числе аргументов, равном 1, 2, 3, . . ., p, говорят соответственно о линейных, билинейных, трилинейных, . . ., p-линейных формах. П. ф. наз. симметрической (соответственно кососимметрической), если она не меняется (соответственно меняет знак) при перестановке любых двух различных аргументов. Напр., определитель матрицы порядка n над полем K, рассматриваемый как функция от столбцов (или строк) этой матрицы, есть n-линейная кососимметрич. форма на пространстве K^n.

Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V над полем K и $x_i=\sum_{j=1}^{n}x_i^j e_j$ — нек-рые p векторов этого пространства, то значение p-линейной формы φ на векторах $x_1, \ldots, x_p$ вычисляется по формуле

$$\varphi(x_1, \ldots, x_p)=\sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{p}a_{j_1\ldots j_p}x_1^{j_1}\ldots x_p^{j_p}, \quad (*)$$

где $a_{j_1\ldots j_p}=\varphi(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p})\in K$. П. ф. φ может быть отождествлена с p раз ковариантным тензором, координатами к-рого являются $a_{j_1\ldots j_p}$.

p-Линейной формой называют также многочлен от p систем неизвестных x_i^j ($j=1, \ldots, p$; $i=1, \ldots, n$), являющийся линейной формой по каждой системе, т. е. записывающийся в виде (*).

ПОЛИЛИНЕ́ЙНАЯ ФУ́НКЦИЯ — то же, что *полилинейная форма*.

ПОЛИНО́М (от греч. πολύς — многочисленный, обширный и лат. nomen — имя), многочлен,— выражение (обычно сумма), состоящее из нескольких частей одного типа. Принято выделять алгебраич. П.— целые рациональные функции конечной степени, наз. их *многочленами*, а П. иной природы именовать П. с соответствующим прилагательным, напр. тригонометрич. полином.

ПОЛИНОМИА́ЛЬНАЯ РЕГРЕ́ССИЯ — см. *Регрессия*.

ПОЛИНОМИА́ЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ, мультиномиальное распределение,— совместное распределение вероятностей случайных величин, каждая из которых есть число появлений одного из нескольких взаимно исключающих событий при повторных независимых испытаниях. Пусть при каждом испытании вероятности появления событий $A_1, \ldots, A_m$ равны соответственно $p_1, \ldots, p_m$, причём $0\leqslant p_k\leqslant 1$, $k=1, \ldots, m$, и $p_1+\ldots+p_m=1$, тогда совместное распределение величин $X_1, \ldots, X_m$, где X_k — число появлений события A_k при n испытаниях, задаётся определёнными для любого набора целых неотрицательных чисел $n_1, \ldots, n_m$, удовлетворяющих единственному условию $n_1+\ldots+n_m=n$, вероятностями

$$P_n(n_1, \ldots, n_m)=\frac{n!}{n_1!\ldots n_m!}p_1^{n_1}\ldots p_m^{n_m}$$

(вероятность того, что при n независимых испытаниях событие A_1 появляется n_1 раз, событие A_2 появляется n_2 раз, и т. д.). П. р. служит естественным обобщением *биномиального распределения* и сводится к последнему при $m=2$. Существенно то, что каждая случайная величина X_k имеет при этом биномиальное распределение с математич. ожиданием $\mathsf{E}X_k=np_k$ и дисперсией $\mathsf{D}X_k=np_k(1-p_k)$. При $n\to\infty$ совместное распределение величин

$$Y_k=(X_k-np_k)/\sqrt{np_k(1-p_k)}$$

стремится к нек-рому предельному нормальному распределению, а сумма

$$\sum_{k=1}^{n}(1-p_k)Y_k^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{(X_k-np_k)^2}{np_k}$$

стремится к хи-квадрат распределению с $n-1$ степенями свободы.

ПОЛИНОМИА́ЛЬНЫЙ ИНТЕРПОЛЯЦИО́ННЫЙ СПЛАЙН — см. *Интерполирование*.

ПОЛИНОМИА́ЛЬНЫЙ КОЭ́ФФИЦИЕ́НТ — коэффициент

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!},\ n_1+n_2+\ldots+n_m=n,$$

при $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_m^{n_m}$ в разложении многочлена (полинома) $(x_1+x_2+\ldots+x_m)^n$. В комбинаторике П. к. выражает: а) число всевозможных перестановок из n элементов, из к-рых n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого

вида, . . ., n_m элементов m-го вида; б) число способов размещения n различных элементов по m различным ячейкам, при к-ром в i-ю ячейку помещается n_i элементов, $i=1, 2, \ldots, m$, без учёта порядка элементов в любой ячейке.

Частный случай П. к.— биномиальный коэффициент.

ПОЛИЭ́ДР (от греч. πολύεδρος — многогранный) — объединение конечного числа выпуклых многогранников в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, расположенных так, что любые два из них либо не пересекаются вовсе, либо их пересечение является гранью каждого из них. Одномерные П. суть ломаные линии (причём допускается распадение на куски, а также ветвление — к одной вершине может примыкать несколько отрезков; самопересечений в точках, отличных от вершин, быть не должно). В двумерном случае П.— это замкнутый многоугольник (не обязательно выпуклый) вместе с ограниченным им куском плоскости. Простейший n-мерный П.— это *симплекс*. Любой П. можно триангулировать, т. е. разбить на симплексы так, что два симплекса или не имеют общих точек, или их общие точки образуют общую грань этих симплексов. Такие разбиения наз. т р и а н г у л я ц и я м и П., они составляют важнейший аппарат исследования в комбинаторной топологии.

ПО́ЛНАЯ АНАЛИТИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ — совокупность всех элементов аналитической функции, которые могут быть получены *аналитическим продолжением* данного элемента.

ПО́ЛНАЯ ВАРИА́ЦИЯ — то же, что *вариация* функции.

ПО́ЛНАЯ ГРУ́ППА — то же, что *делимая группа*.

ПО́ЛНАЯ КРИВИЗНА́ — интегральная характеристика кривизны поверхности, равная интегралу от её *гауссовой кривизны* (*внутренней кривизны* в случае абстрактно заданной поверхности). Для поверхности, расположенной в евклидовом пространстве, П. к. равна (с точностью до знака) площади её *сферического отображения*. См. также *Гаусса — Бонне формула*.

Иногда П. к. называют гауссову кривизну.

ПО́ЛНАЯ ЛИНЕ́ЙНАЯ ГРУ́ППА — группа всех обратимых линейных преобразований некоторого векторного пространства V над полем K. Если размерность пространства равна n, то П. л. г. изоморфна матричной группе $M_n(K)$ всех невырожденных квадратных матриц порядка n над полем K.

ПО́ЛНАЯ ПРОБЛЕ́МА СО́БСТВЕННЫХ ЗНАЧЕ́НИЙ — см. *Собственное значение*, *Линейная алгебра*; численные методы.

ПО́ЛНАЯ РЕШЁТКА — частично упорядоченное множество, в котором каждое непустое подмножество элементов имеет точную верхнюю и точную нижнюю грани. В частности, в П. р. имеется как наибольший, так и наименьший элементы. Решётка L тогда и только тогда является полной, когда для любого изотонного отображения φ этой решётки в себя существует неподвижный элемент, т. е. $a \in L$ такой, что $a\varphi = a$. Всякое частично упорядоченное множество можно изоморфно вложить в нек-рую П. р. Примерами П. р. являются множество всех подмножеств данного множества, множество всех подалгебр любой универсальной алгебры, множество всех замкнутых подмножеств топологич. пространства.

ПО́ЛНАЯ СИСТЕ́МА ВЫЧЕТОВ по модулю m — любая совокупность целых чисел, содержащая по одному числу из каждого класса чисел по модулю m (два целых числа a и b принадлежат одному классу по модулю m, если $a - b$ делится на m). В качестве П. с. в. чаще всего применяется система наименьших положительных вычетов $0, 1, 2, \ldots, m-1$ или система абсолютно наименьших вычетов: $-\frac{m-1}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m-1}{2}$ для нечётного m и $-\frac{m}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{m}{2}-1$ для чётного m. Любые m чисел, принадлежащих различным классам по модулю m, образуют П. с. в. по этому модулю.

ПО́ЛНАЯ СИСТЕ́МА ФУ́НКЦИЙ — *ортогональная система* функций $\{\varphi_n(x)\}$ нек-рого гильбертова пространства H такая, что в H не существует функции, ортогональной всем функциям данного семейства. Система функций, полная в одном пространстве, может оказаться неполной в другом. Напр., $1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ образуют П. с. ф. на отрезке $[0, 2\pi]$, но не образуют П. с. ф. на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$.

ПО́ЛНОГО НАКОПЛЕ́НИЯ ТО́ЧКА — точка множества A в топологическом пространстве такая, что пересечение A с любой окрестностью этой точки имеет мощность ту же, что и всё множество A.

ПО́ЛНОЕ ПРИРАЩЕ́НИЕ — приращение, приобретаемое функцией $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n независимых переменных, когда все аргументы получают (вообще говоря, не нулевые) приращения $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. При нек-рых условиях (напр., если все частные производные непрерывны) П. п. можно представить в виде суммы, одна компонента к-рой линейно зависит от приращений аргументов и наз. полным дифференциалом, другая — бесконечно мала по сравнению с

$$\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}.$$

ПО́ЛНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — метрическое пространство, в котором сходится любая фундаментальная последовательность. Примерами П. п. служат евклидово пространство, гильбертово пространство. Замкнутое подмножество П. п. является П. п. Если метрич. пространство неполно, то его можно пополнить аналогично тому, как пополняется множество рациональных чисел иррациональными до совокупности всех действительных чисел. Понятие полноты обобщается и на те неметрич. топологич. пространства, в к-рых можно сравнивать окрестности различных точек, напр. на топологич. группы.

ПО́ЛНОЕ ПРЯМО́Е ПРОИЗВЕДЕ́НИЕ — см. *Прямое произведение*.

ПО́ЛНОЙ ВЕРОЯ́ТНОСТИ ФО́РМУЛА — соотношение, позволяющее вычислять безусловную вероятность события через его условные вероятности. См. *Вероятностей теория*.

ПО́ЛНОЙ ИНДУ́КЦИИ АКСИО́МА — одна из аксиом Пеано; см. *Арифметика*.

ПО́ЛНОТА́ с и с т е м ы а к с и о м — свойство системы аксиом данной аксиоматической теории, характеризующее степень охвата этой теорией той или иной области математики. С интуитивной точки зрения, система аксиом считается п о л н о й, если из неё логически следуют все верные утверждения той части математики, к-рая излагается в виде данной аксиоматич. теории. Такое представление о П. относится лишь к математич. теориям, к-рые строятся на основе т. н. м а т е р и а л ь н о й а к с и о м а т и к и, когда значения исходных терминов аксиоматич. теории предполагаются данными с самого начала, т. е. фиксирована нек-рая интерпретация этой теории; аксиоматикой такого типа является, напр., система аксиом Евклида для геометрии. Для такой теории имеет смысл говорить как об истинности её утверждений, так и о выводимости их из аксиом. Совпадение этих понятий и означает П. рассматриваемой системы аксиом.

Если математич. теория строится на основе ф о р м а л ь н о й а к с и о м а т и к и, т. е. в виде аксиоматич. теории, в к-рой значения первоначальных терминов не предполагаются определёнными с самого начала, а так и остаются неопределёнными при выводе теорем из аксиом, можно говорить о П. относительно той или иной интерпретации: система аксиом наз. п о л н о й о т н о с и т е л ь н о д а н н о й и н т е р п р е т а ц и и, если из неё выводимы все утверждения, истинные в этой интерпретации. Наряду с таким понятием П. можно определить другое понятие П., к-рое является в н у т р е н н и м свойством системы аксиом, т. е. не зависит от к.-л. её интерпретации: система аксиом наз. д е д у к т и в н о п о л н о й, если всякое утверждение, формулируемое в данной теории, может быть либо доказано (т. е. является т е о р е м о й),

либо опровергнуто (т. е. может быть доказано его отрицание).

Два понятия П. системы аксиом тесно связаны между собой. Если аксиоматич. теория полна относительно нек-рой интерпретации, то она дедуктивно полна. Обратно, если теория дедуктивно полна и непротиворечива относительно данной интерпретации (т. е. все теоремы истинны в этой интерпретации), то она полна относительно этой интерпретации.

Понятие внутренней, или дедуктивной, П. является удобной характеристикой аксиоматич. теории при построении её в виде *формальной системы*. В связи с этим понятием важное значение имеет теорема Гёделя о неполноте, к-рая утверждает, что для широкого класса формальных систем требование П. несовместимо с непротиворечивостью.

ПО́ЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИА́Л функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n независимых переменных — выражение

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n$$

в случае, когда оно отличается от полного приращения $\Delta f = f(x_1+\Delta x_1,\ x_2+\Delta x_2,\ \ldots,\ x_n+\Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на величину, бесконечно малую по сравнению с

$$\sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}\,.$$

ПО́ЛНЫЙ ИНТЕГРА́Л — см. *Интеграл дифференциального уравнения*.

ПО́ЛНЫЙ ПРООБРАЗ — см. *Отображение, Прообраз*.

ПОЛОВИ́ННОГО ДЕЛЕ́НИЯ МЕ́ТОД, метод дихотомии, — 1) метод численного решения уравнения $f(x)=0$ с непрерывной на $[a, b]$ функцией $f(x)$, принимающей в точках a и b значения разных знаков. Отрезок $[a, b]$ делится пополам, и в его средней точке $c=(a+b)/2$ вычисляется значение $f(c)$. Если $f(c)\neq 0$, то для последующего деления пополам выбирается тот из двух отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, на концах к-рого значения функции различны по знаку.

2) Метод минимизации унимодальной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Задаётся нек-рое $\varepsilon>0$ и вычисляются значения функции в точках $c\pm\varepsilon=(a+b\pm\varepsilon)/2$ вблизи середины отрезка $[a, b]$. Описанная процедура повторяется либо на отрезке $[a, c+\varepsilon]$ (если $f(c-\varepsilon)\leqslant f(c+\varepsilon)$), либо на $[c-\varepsilon, b]$ (при $f(c-\varepsilon)>f(c+\varepsilon)$) и т. д. На классе унимодальных функций существуют и более эффективные по сравнению с П. д. м. методы.

ПОЛОЖИ́ТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННАЯ КВАДРАТИ́ЧНАЯ ФО́РМА — квадратичная форма вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,\quad a_{ij}=a_{ji}, \qquad (*)$$

с действительными коэффициентами a_{ij}, принимающая положительные значения при любых действительных значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обращающаяся в нуль лишь при $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Любая П. о. к. ф. приводится с помощью линейного преобразования к виду

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Для того чтобы форма (*) была П. о. к. ф., необходимо и достаточно, чтобы было $\Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\ \ldots,\ \Delta_n>0$, где

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

(критерий Сильвестра).

Эрмитова форма

$$f=\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}x_i\overline{x}_k$$

такая, что $a_{ik}=\overline{a}_{ki}$, $f>0$ для всех значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $f=0$ лишь при $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, наз. эрмитовой положительно определённой формой.

С понятием П. о. к. ф. связаны также понятия: 1) положительно определённой матрицы $\|a_{ik}\|_1^n$ — такой матрицы, что $\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\overline{\xi}_k$ есть эрмитова П. о. к. ф.; 2) положительно определённого ядра — такой функции $K(x, y)=\overline{K(y, x)}$, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)\,\xi(x)\overline{\xi(y)}\,dx\,dy \geqslant 0$$

для любой функции $\xi(x)$ с интегрируемым квадратом; 3) положительно определённой функции — такой функции $f(x)$, что ядро $K(x, y)=f(x-y)$ является положительно определённым. Класс непрерывных положительно определённых функций $f(x)$ с $f(0)=1$ совпадает с классом характеристич. функций законов распределения случайных величин.

ПОЛОЖИ́ТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННАЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Положительно определённая квадратичная форма*.

ПОЛОЖИ́ТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННАЯ ЭРМИ́ТОВА МА́ТРИЦА — эрмитова матрица, все главные миноры которой положительны. Если все главные миноры неотрицательны, то эрмитова матрица наз. положительно полуопределённой (или неотрицательной). Эрмитова матрица A наз. отрицательно определённой (соответственно отрицательно полуопределённой или неположительной), если матрица A положительно определена (соответственно полуопределена). Эрмитова матрица положительно (отрицательно) определена или положительно (отрицательно) полуопределена, если все её собственные значения соответственно положительны, отрицательны, неотрицательны или неположительны. В частности, всякая невырожденная положительно (отрицательно) полуопределённая эрмитова матрица является положительно (отрицательно) определённой.

Неотрицательные (соответственно положительно определённые) эрмитовы матрицы соответствуют неотрицательным (соответственно положительно определённым) эрмитовым линейным преобразованиям и эрмитовым формам.

ПОЛОЖИ́ТЕЛЬНОЕ ЧИ́СЛО — действительное число a, большее нуля ($a>0$). На числовой прямой П. ч. изображаются точками, лежащими правее начала отсчёта, т. е. правее нуля.

ПОЛОЖИ́ТЕЛЬНЫЙ ОПЕРА́ТОР — линейный оператор A в гильбертовом пространстве, для которого квадратичная форма (Ax, x) неотрицательна. П. о. необходимо симметричен и допускает самосопряжённое расширение, также являющееся П. о. Самосопряжённый оператор A является П. о. тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий: 1) $A=B^*B$, где B — замкнутый оператор; 2) $A=B^2$, где B — самосопряжённый оператор; 3) спектр содержится в $(0, \infty)$.

ПОЛО́С МЕ́ТОД — метод приближённого решения одномерных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, основанный на специальном способе замены ядра на вырожденное. Пусть исходное интегральное уравнение записано в виде

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x). \qquad (1)$$

Для построения вырожденного ядра в П. м. квадрат

$$\{a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant s\leqslant b\}$$

разбивается на N полос

$$\left\{\frac{b-a}{N}\,i\leqslant x\leqslant\frac{b-a}{N}\,(i+1),\ a\leqslant s\leqslant b\right\},\ i=0, 1, \ldots, N-1.$$

В каждой полосе (i) функция $K(x, s)$ приближается функцией вида

$$K_i(x, s)=C_i(x)+P_i(x)\,Q_i(s).$$

В простейшем случае

$$K_i(x, s)=K(\xi_i, s),\ \xi_i^0=\frac{b-a}{N}\left(i+\frac{1}{2}\right);$$

при помощи функции $K_i(x, s)$ можно образовать вырожденное ядро:

$$K_N(x, s)=\sum_{i=0}^{N-1}\hat{C}_i(x)+\hat{P}_i(x)\,Q_i(s), \qquad (2)$$

$$\hat{P}_i(x)=\begin{cases}P_i(x), & x\in\left[\frac{b-a}{N}\,i,\ \frac{b-a}{N}\,(i+1)\right]\\ 0, & x\notin\left[\frac{b-a}{N}\,i,\ \frac{b-a}{N}\,(i+1)\right]\end{cases}$$

$$\hat{C}_i(x)=\begin{cases}C_i(x), & x\in\left[\frac{b-a}{N}\,i,\ \frac{b-a}{N}\,(i+1)\right]\\ 0, & x\notin\left[\frac{b-a}{N}\,i,\ \frac{b-a}{N}\,(i+1)\right]\end{cases}$$

Решение уравнения с вырожденным ядром (2) аппроксимирует решение (1), вообще говоря, тем лучше, чем больше число полос N и чем лучше аппроксимация $K(x, s)$ в каждой полосе.

См. также *Интегральных соотношений метод*.

ПОЛОСА́ — совокупность точек плоскости, лежащих между двумя параллельными прямыми этой плоскости. Координаты точек x, y П. удовлетворяют неравенствам $C_1<Ax+By<C_2$, где A, B, C_1, C_2 — нек-рые постоянные, причём A и B одновременно не равны нулю. Преобразование $w=e^z$ конформно отображает П. $0<y<\pi$ комплексной плоскости $z=x+iy$ на верхнюю полуплоскость комплексной плоскости w.

ПОЛУГРУ́ППА — множество с определённой на нём бинарной операцией, удовлетворяющей закону ассоциативности. Понятие П. есть обобщение понятия *группы*: из аксиом группы остаётся лишь одна; этим объясняется и термин «П.».

Теория П. принадлежит к числу сравнительно молодых областей алгебры. Первые исследования, посвящённые П., относятся к 20-м гг. 20 в. и связаны с именем А. К. Сушкевича. Он, в частности, определил строение конечной П. без собственных идеалов. К концу 50-х гг. теория П. сформировалась в самостоятельную ветвь современной алгебры с богатой проблематикой, разнообразными методами и тесными связями с многими областями математики — как собственно алгебраическими (в первую очередь, с теорией групп и теорией колец), так и другими, напр. с функциональным анализом, дифференциальной геометрией, алгебраич. теорией автоматов.

Примеры П. чрезвычайно многочисленны. Это различные множества чисел вместе с операцией сложения или умножения, замкнутые относительно рассматриваемой операции (т. е. содержащие вместе с любыми двумя своими элементами их сумму или, соответственно, произведение), П. матриц относительно умножения, П. функций относительно «поточечного» умножения $*$, задаваемого формулой $(f*g)(x)=f(x)\,g(x)$, П. множеств относительно операции пересечения или объединения и т. д. Один из простейших примеров П.— множество всех натуральных чисел относительно сложения; эта П. является частью (подполугруппой) группы целых чисел по сложению или, как говорят, вложима в группу целых чисел. Далеко не всякая П. вложима в какую-нибудь группу: необходимым условием такой вложимости является закон сокращения — каждое из равенств $ac=bc$, $ca=cb$ влечёт за собой $a=b$; выполнение закона сокращения не достаточно для такой вложимости, но, напр., коммутативная П. с законом сокращения вложима в группу.

Если на множестве F_X всех конечных последовательностей элементов произвольного множества (алфавита) X задать операцию $*$ формулой

$$(x_1, \ldots, x_m)*(y_1, \ldots, y_n)=(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n),$$

то F_X станет П.; она наз. с в о б о д н о й П. над алфавитом X. Роль свободных П. в общей теории определяется тем, что всякая П. есть гомоморфный образ подходящей свободной П. Важную роль играют свободные П. и в некоторых приложениях, прежде всего в теории формальных языков и кодов.

Всякая совокупность преобразований произвольного множества M, замкнутая относительно операции композиции (последовательного выполнения), будет П. относительно этой операции; такова, в частности, совокупность всех преобразований множества M, наз. с и м м е т р и ч е с к о й П. на множестве M. Многие важные совокупности преобразований оказываются П. относительно композиции, причём часто они не являются группами. С другой стороны, всякая П. изоморфна нек-рой П. преобразований. Всё это определяет как роль П. преобразований в общей теории П., так и роль теории П. для изучения в самом общем виде преобразований с точки зрения их композиции. В большой степени через рассмотрение преобразований осуществляются связи теории П. с другими областями математики.

Как и в других алгебраич. теориях, одной из главных задач теории П. является классификация всевозможных П., описание их строения. Это осуществляется прежде всего наложением на рассматриваемые П. различных ограничений и выделение тем самым различных типов П. Среди важных типов — р е г у л я р н ы е П., то есть П., в к-рых для любого элемента a существует такой элемент x, что $axa=a$. Регулярными являются, напр., П. всех матриц данного порядка над телом, симметрические П., П. всех частичных преобразований множеств. Регулярные П. принадлежат к числу наиболее активно изучаемых в теории П.

Заметную часть общей теории составляет теория представлений П. преобразованиями и матрицами. Точка зрения теории представлений нередко проливает дополнительный свет на нек-рые типы П., естественно определяемые с точки зрения аксиоматики. Внесение в П. дополнительных структур, согласованных с полугрупповой операцией, выделяет особые разделы теории П., такие, как теория топологических П., теория упорядоченных П.

● Л я п и н Е. С., Полугруппы, М., 1960; К л и ф ф о р д А. Х., П р е с т о н Г. Б., Алгебраическая теория полугрупп, пер. с англ., т. 1—2, М., 1972; Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп, пер. с англ., М., 1975; Л а л л е м а н Ж., Полугруппы и комбинаторные приложения, пер. с англ., М., 1985.

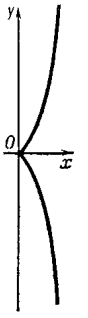
Л. Н. Шеврин.

ПОЛУИНТЕРВА́Л — см. *Интервал и сегмент*.

ПОЛУКОЛЬЦО́ — непустое множество с двумя ассоциативными бинарными операциями $+$ и $\cdot$ (сложением и умножением), связанными законами дистрибутивности:

$$(a+b)\cdot c=a\cdot b+a\cdot c \text{ и } a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$

Обычно предполагается также, что сложение коммутативно и существует нуль 0, для к-рого $a+0=a$ при любом a. Важнейшие примеры П.— кольца и дистрибутивные решётки. Пример П., не лежащего ни в одном из этих классов,— множество неотрицательных целых чисел с обычными сложением и умножением.



ПОЛУКУБИ́ЧЕСКАЯ ПАРА́БОЛА, п а р а б о л а Н е й л я,— плоская алгебраическая кривая 3-го порядка (рис.). Уравнение в прямоугольных координатах: $y=ax^{3/2}$; параметрич. уравнения: $x=t^2$, $y=at^3$. Точка возврата 1-го рода в начале координат. Названа по имени У. Нейля (1657), нашедшего длину её дуги. По дуге П. п. материальная точка под действием силы тяжести движется с постоянной скоростью (Х. Гюйгенс, 1687).

ПОЛУЛОГАРИФМИ́ЧЕСКАЯ БУМА́ГА — см. *Логарифмическая бумага*.

ПОЛУНЕПРЕРЫВНАЯ ФУ́НКЦИЯ — понятие математического анализа. П. ф. снизу (сверху) в точке x_0 наз. функция, для к-рой

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

(соответственно

$$\varlimsup_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)).$$

Иначе, функция полунепрерывна снизу в точке x_0, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что из $|x-x_0|<\delta$ вытекает

$$f(x_0)-f(x)<\varepsilon$$

(не по абсолютной величине!). Функция, полунепрерывная и снизу и сверху, непрерывна в обычном смысле. Ряд свойств П. ф. аналогичен свойствам непрерывных функций. Напр.: 1) если $f(x)$ и $g(x)$ — П. ф. снизу, то их сумма и произведение — П. ф. снизу; 2) П. ф. снизу на отрезке достигает своего наименьшего значения. Для рядов П. ф. снизу верно, напр., следующее утверждение: если $u_n\geqslant 0$ и все $u_n(x)$ — П. ф. снизу, то сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — П. ф. снизу. П. ф. принадлежат к функциям первого класса по классификации Бэра.

ПОЛУНО́РМА — конечная неотрицательная функция $p(x)$ на векторном пространстве X (над полем действительных или комплексных чисел) такая, что

$$p(x+y)\leqslant p(x)+p(y),\ p(\lambda x)=|\lambda|\,p(x)$$

для всех $x, y\in X$ и скаляров λ. Примером П. служит *норма*; отличие заключается в том, что для П. допустимо $p(x)=0$ при $x\neq 0$. Если на векторном пространстве задана П. p, а на его подпространстве — линейный функционал f, подчинённый условию $|f|\leqslant p$, то его можно продолжить на всё пространство с сохранением этого условия (теорема Хана—Банаха). Употребительны отделимые топологич. векторные пространства, базис окрестностей нуля в к-рых можно составить из множеств, определяемых неравенствами $p(x)<1$, где $p(x)$ — непрерывные П. Такие пространства наз. локально выпуклыми.

ПОЛУПЛО́СКОСТЬ — совокупность точек плоскости, лежащих по одну сторону от некоторой прямой этой плоскости. Координаты x, y точек П. удовлетворяют неравенству $Ax+By+C>0$, где A, B, C — нек-рые постоянные, причём A и B одновременно не равны нулю. Если сама прямая $Ax+By+C=0$ (граница П.) причисляется к П., то говорят о замкнутой П.

На комплексной плоскости $z=x+iy$ рассматриваются верхняя П. $y=\operatorname{Im} z>0$, нижняя П. $y=\operatorname{Im} z<0$, левая П. $x=\operatorname{Re} z<0$, правая П. $x=\operatorname{Re} z>0$. Верхняя П. комплексной плоскости z конформно отображается на круг $|w|<1$ с помощью дробно-линейной функции

$$w=e^{i\theta}\frac{z-\beta}{z-\overline{\beta}},$$

где θ — произвольное действительное, а $\operatorname{Im}\beta>0$.

ПОЛУПРА́ВИЛЬНЫЙ МНОГОГРА́ННИК — многогранник, все грани которого суть правильные многоугольники нескольких разных наименований, а многогранные углы при вершинах конгруэнтны или симметричны. Существует 13 определённых типов П. м. и две бесконечные серии. См. *Многогранник*.

ПОЛУПРОСТА́Я А́ЛГЕБРА — см. *Радикал*.

ПОЛУПРОСТА́Я ГРУ́ППА — группа, не имеющая неединичных разрешимых нормальных подгрупп. См. *Разрешимая группа*.

ПОЛУПРО́СТОЕ КОЛЬЦО́ — артиново кольцо с нулевым радикалом. Строение П. к. описывается теоремой Веддерберна—Артина: П. к. есть прямая сумма конечного числа идеалов, каждый из к-рых изоморфен полному кольцу матриц конечного порядка над подходящим телом, причём это разложение единственно с точностью до порядка слагаемых. В коммутативном случае П. к.— конечная прямая сумма полей.

ПОЛУПРОСТРА́НСТВО — совокупность точек пространства, лежащих по одну сторону от некоторой плоскости. Координаты x, y, z точек П. удовлетворяют неравенству $Ax+By+Cz+D>0$, где A, B, C, D — нек-рые постоянные, причём A, B, C одновременно не равны нулю. Если сама плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ (граница П.) причисляется к П., то говорят о замкнутом П.

ПОЛУПРЯМА́Я — совокупность точек прямой, лежащих по одну сторону от некоторой точки этой прямой. Координаты x точек П. удовлетворяют одному и только одному из неравенств: $x>a$, $x<a$, где a — нек-рая постоянная. Если сама точка $x=a$ (граница П.) причисляется к П., то говорят о замкнутой П.— луче.

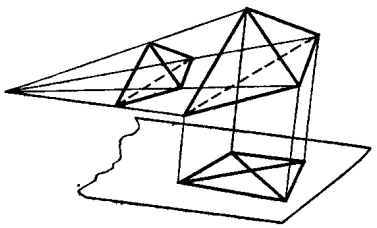
ПОЛУРЕШЁТКА — коммутативная полугруппа, все элементы которой — идемпотенты, т. е. полугруппа с тождествами $x+y=y+x$ и $x+x=x$. Всякая П. может быть превращена в частично упорядоченное множество (порядок $\leqslant$ вводится соотношением $a\leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a+b=b$), в к-ром для любой пары элементов существует точная верхняя грань ($\sup\{a, b\}=a+b$). Обратно, всякое частично упорядоченное множество с точными верхними гранями для любых пар элементов является П. относительно операции $a+b=\sup\{a, b\}$. В этом случае говорят, что частично упорядоченное множество является верхней полурешёткой. Нижняя полурешётка определяется дуально как частично упорядоченное множество, в к-ром для любых двух элементов существует точная нижняя грань.

ПОЛУСЕГМЕ́НТ — то же, что полуинтервал. См. *Интервал и сегмент*.

ПОЛУСИММЕТРИ́ЧЕСКАЯ ГРУ́ППА — то же, что *знакопеременная группа*.

ПОЛУУПОРЯ́ДОЧЕННОЕ ПРОСТРА́НСТВО — векторное пространство с отношением порядка, согласованным некоторым образом с векторной структурой. Иногда наз. частично упорядоченным пространством.

ПО́ЛЬКЕ ТЕОРЕ́МА: любой полный плоский четырёхугольник может служить параллельной проекцией тетраэдра, подобного любому данному (рис.).



Впервые теорема была сформулирована К. Польке (1853), доказана Г. Шварцем (1864). Иногда наз. теоремой Польке—Шварца.

ПО́ЛЮС (лат. polus, от греч. πόλος — полюс, ось) — 1) точка пересечения диаметра сферы, перпендикулярного к плоскости экватора, с поверхностью сферы.

2) П. прямой относительно линии второго порядка — точка P, для к-рой эта прямая является *полярой* точки P относительно данной линии второго порядка.

3) П. инверсии — см. *Инверсия*.

4) П. системы координат — см. *Координаты, Полярные координаты*.

5) П. функции — такая изолированная особая точка z_0 однозначного характера аналитич. функции $f(z)$ комплексного переменного z, в окрестности к-рой выполняется предельное соотношение

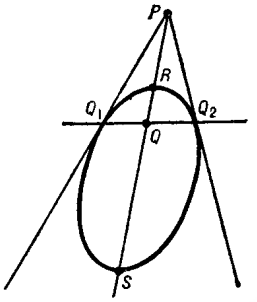
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty.$$

Если z_0 есть П. $f(z)$, то эта же точка z_0 есть *нуль* функции $1/f(z)$, причём порядок полюса для $f(z)$ совпадает с порядком нуля для $1/f(z)$; если порядок П. $m=1$, то П. наз. простым, при $m>1$ — кратным. Напр., функция $f(z)=\frac{1}{z^4-1}$ имеет всего четыре полюса ± 1, $\pm i$, и все они простые.

ПОЛЯ́РА (нем. Polare, от лат. polus, греч. πόλος — полюс, ось) — множество точек Q (рис.), гармонически сопряжённых с точкой P относительно точек R и S пересечения линии второго порядка секущими, проходящими через точку P. П. является прямой линией. Точку P наз. полюсом. Если точка P лежит вне линии второго порядка (через точку P можно провести две касательные к линии), то П. проходит через точки касания данной линии с прямыми, проведёнными через точку P. Если точка P лежит на линии второго порядка, то П. является прямая, касатель-

ная к данной линии в этой точке. Если **П.** точки P проходит через точку Q, то П. точки Q проходит через точку P.

Всякая невырожденная линия второго порядка определяет биекцию точек проективной плоскости и множества её прямых. Соответствующие при этом преобразовании фигуры наз. взаимно полярными. Фигура, совпадающая со своей взаимно полярной, наз. автополярной.



ПОЛЯ́РНАЯ ОСЬ — см. *Координаты, Полярные координаты.*

ПОЛЯ́РНОЕ РАЗЛОЖЕ́НИЕ — разложение линейного преобразования конечномерного евклидова (или унитарного) пространства L в произведение самосопряжённого и ортогонального (соответственно унитарного) преобразования. Каждое линейное преобразование A пространства L допускает П. р.

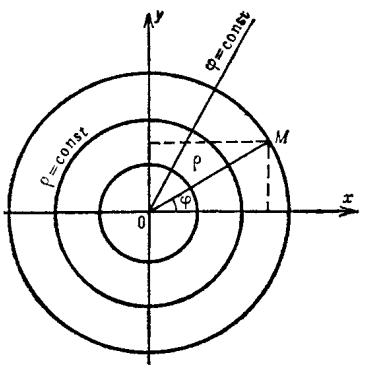
$$A = SU,$$

где S — неотрицательное самосопряжённое, а U — ортогональное (или унитарное) линейное преобразование, причём S определяется единственным образом. Если A невырождено, то преобразование S является даже положительно определённым, а U также определяется однозначно. Для одномерного унитарного пространства П. р. совпадает с представлением комплексного числа z в тригонометрич. форме:

$$z = |z| e^{i\varphi} = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

ПОЛЯ́РНОЕ РАССТОЯ́НИЕ — угол между направлением на полюс и направлением на некоторую точку на сфере. См. *Сферическая геометрия.*

ПОЛЯ́РНЫЕ КООРДИНА́ТЫ — числа ρ и φ (рис.), связанные с прямоугольными координатами x и y формулами



$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

где $0 \leqslant \rho < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Координатные линии — концентрич. окружности (ρ=const) и лучи (φ=const). Каждой точке плоскости Oxy (за исключением точки 0, для к-рой $\rho = 0$, а φ не определено, т. е. может быть любым числом $0 \leqslant \varphi < 2\pi$) соответствует пара чисел (ρ, φ) и обратно. Расстояние ρ точки M от точки (0, 0) (полюса) наз. полярным радиусом, а угол φ — полярным углом.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\rho = 1, \quad L_\varphi = \rho.$$

Элемент длины:

$$dl = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2\, d\varphi^2}.$$

Элемент площади:

$$ds = \rho d\rho\, d\varphi.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}.$$

Обобщёнными П. к. наз. числа r и ψ, связанные с прямоугольными координатами формулами

$$x = ar\cos\psi, \quad y = br\sin\psi,$$

где $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \psi < 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$. Координатные линии — эллипсы (r=const) и лучи (ψ=const). О П. к. в пространстве см. в ст. *Сферические координаты.*

П. к. в неявном виде использовал Динострат (4 в. до н. э.) при исследовании квадратрисы. Подобие П. к. имеется у А. Дюрера (1525). И. Ньютон в «Методе флюксий» (1670—71, опубл. 1736) трижды использует П. к. и приводит формулы, связывающие их с прямоугольными координатами. В почти современном виде **П.** к. появились у Я. Бернулли (1691), чёткое представление об определении точки на плоскости при помощи П. к. имеется у Л. Эйлера (1748). Термин «П. к.» появился только в 19 в. К современным обозначениям П. к. ближе всего обозначения Л. Эйлера: z, φ, и С. Е. Гурьева: r, ω.

ПОЛЯ́РНЫЙ ВЕ́КТОР — обычный вектор, называемый так для отличия от *осевого вектора.*

ПОЛЯ́РНЫЙ РА́ДИУС — см. *Координаты, Полярные координаты.*

ПОЛЯ́РНЫЙ РА́ДИУС СФЕРИ́ЧЕСКИЙ — см. *Сферические координаты.*

ПОЛЯ́РНЫЙ У́ГОЛ — см. *Координаты, Полярные координаты.*

ПОНТРЯ́ГИНА ПРИ́НЦИП ДВОЙСТВЕ́ННОСТИ — теорема о группах характеров топологических абелевых групп. Эта теорема получена Л. С. Понтрягиным в 1934; она явилась важной вехой в развитии алгебраич. топологии.

Множество всех непрерывных характеров данной топологич. абелевой группы G образует группу относительно обычного умножения отображений, обозначаемую $\hat{G}$. Она наз. двойственной или дуальной к группе G. В множестве $\hat{G}$ вводится топология равномерной сходимости на компактах, превращая $\hat{G}$ в топологич. группу. Существует канонич. гомоморфизм φ: $G \to \hat{\hat{G}}$, определяемый формулой $\varphi(x)(\chi) = \chi(x)$ для $x \in G$, $\chi \in \hat{G}$. П. п. д. утверждает, что для локально компактной группы G канонич. гомоморфизм φ является изоморфизмом топологич. групп.

ПОНТРЯ́ГИНА ПРИ́НЦИП МА́КСИМУМА — сформулированный Л. С. Понтрягиным (1956) принцип в математической теории *оптимального управления.*

ПОПЕРЕ́ЧНАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция.*

ПОПЕРЕ́ЧНИК множества — величина, характеризующая уклонение множества в метрическом пространстве от некоторой системы объектов при определённом методе приближения. Наиболее изучены П., характеризующие возможность аппроксимации множества конечномерными компактами и конечномерными линейными многообразиями.

ПОПОЛНЕ́НИЯ МЕ́ТОД — метод вычисления обратной матрицы, основанный на соотношении

$$(C + uv)^{-1} = C^{-1} - \frac{1}{\gamma} C^{-1}uvC^{-1}, \quad \gamma = 1 + vC^{-1}u, \qquad (*)$$

где u — вектор-столбец, v — вектор-строка. Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — квадратная матрица n-го порядка, $a_k = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{k,k-1}, a_{kk} - 1, a_{k,k+1}, \ldots, a_{kn})$, e_k есть k-й столбец единичной матрицы E. В П. м. строится последовательность матриц $A_0 = E$, $A_1, \ldots, A_n$, где $A_k = A_{k-1} + e_k a_k$. Тогда $A_n = A$ и матрица A^{-1} получается в результате n-кратного применения формулы (*).

ПОРОЖДА́ЮЩАЯ ГРАММА́ТИКА — см. *Математическая лингвистика.*

ПОРОЖДА́ЮЩИЕ ЭЛЕМЕ́НТЫ, образующие элементы, универсальной алгебры A — подмножество X элементов универсальной алгебры такое, что минимальная подалгебра в A, содержащая X, есть сама A. Алгебра наз. конечно порождённой, если у неё найдётся хотя бы одно конечное порождающее подмножество (наз. также системой образующих или системой порождающих). Алгебра наз. циклической, если у неё существует порождающее множество из одного элемента (см., напр., *Циклическая группа*).

Всякий элемент $a \in A$ может быть записан в виде нек-рого выражения от П. э. (с помощью операций, определённых в A), т. е. в виде слова от П. э. в сигнатуре данной алгебры, не обязательно единственным образом. Важный способ задания различных типов универсальных алгебр

(в частности, групп, полугрупп, колец) — задание с помощью порождающих элементов и *определяющих соотношений* между ними.

ПОРЯДКА АКСИОМЫ — группа аксиом *евклидовой геометрии*.

ПОРЯДКА ОТНОШЕНИЕ — бинарное отношение на нек-ром множестве A, обычно обозначаемое символом $\leqslant$ и обладающее следующими свойствами: (1) $a \leqslant a$ (рефлексивность); (2) если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$ (транзитивность); (3) если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$ (антисимметричность). Если $\leqslant$ — П. о., то отношение $<$, определяемое условием $a < b$, если $a \leqslant b$ и $a \neq b$, наз. строгим порядком. Строгий порядок может быть определён и как отношение со свойствами (2) и (3′): $a < b$ и $b < a$ не могут выполняться одновременно. Запись $a \leqslant b$ обычно читается как «a меньше или равно b» или «b больше или равно a», а $a < b$ — как «a меньше b» или «b больше a» (иногда говорят также «b следует за a» или «a предшествует b»). Порядок наз. линейным, если для любых a, $b \in A$ — либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$. Если же в A допускаются и несравнимые между собой элементы, то порядок наз. частичным.

Отношение, обладающее свойствами (1) и (2), наз. предпорядком или квазипорядком. Всякий предпорядок на множестве A индуцирует П. о. на фактормножестве, получаемом из A склеиванием в один класс элементов a и b, для к-рых $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ одновременно.

См. *Линейно упорядоченное множество*, *Частично упорядоченное множество*.

ПОРЯДКОВАЯ СТАТИСТИКА — см. *Вариационный ряд*.

ПОРЯДКОВОЕ ЧИСЛО, трансфинитное число, как ординальное число, или ординал,— порядковый тип вполне упорядоченного множества. Напр., П. ч. множества натуральных чисел, упорядоченного отношением $\leqslant$, есть ω. П. ч. множества, состоящего из числа 1 и чисел вида $1-\frac{1}{n}$, если $n=1, 2, \ldots$, упорядоченного отношением $\leqslant$, есть $\omega+1$. Говорят, что П. ч. α равно (меньше) П. ч. β, и пишут $\alpha=\beta$ ($\alpha<\beta$), если множество типа α подобно множеству (отрезку) типа β. Для произвольных П. ч. α и β выполняется одна и только одна из возможностей $\alpha<\beta$, $\alpha=\beta$, $\alpha>\beta$. Множество $\{\beta:\beta<\alpha\}$ всех П. ч., меньших α, вполне упорядочено по типу α отношением $\leqslant$. Более того, каждое множество П. ч. вполне упорядочено отношением $\leqslant$, т. е. в каждом непустом множестве П. ч. есть наименьшее П. ч. Для каждого множества Z П. ч. существует П. ч., превосходящее каждое П. ч. из Z. Таким образом, не существует множества всех П. ч. Наименьшее среди П. ч., следующих за П. ч. α, наз. последователем α и обозначается $\alpha+1$. П. ч. α наз. предшественником П. ч. $\alpha+1$. П. ч. наз. предельным числом, если оно не имеет предшественника. Таким образом, 0 — предельное число. Каждое П. ч. можно представить в виде $\alpha+n$, где α — предельное число, n — натуральное, а сумма понимается как сложение порядковых типов.

См. также *Число*.

ПОРЯДКОВЫЙ ТИП — см. *Трансфинитные числа*.

ПОРЯДОК — 1) П. алгебраической кривой $F(x, y)=0$, где $F(x, y)$ — многочлен от x и y, называют наивысшую степень членов этого многочлена. Напр., эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ есть кривая второго П., а лемниската $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ — кривая четвёртого П.

2) П. бесконечно малой величины α относительно бесконечно малой величины β — такое число n, что существует конечный предел $\lim \frac{\alpha}{\beta^n}$, отличный от нуля. Напр., $\sin^2 3x$ при $x \to 0$ есть бесконечно малая второго П. относительно x, так как $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}=9$. Вообще говорят, что α — бесконечно малая высшего П., чем β, если $\lim \frac{\alpha}{\beta}=0$, и низшего П., чем β, если $\lim \frac{\alpha}{\beta}=\infty$. Аналогично определяют П. бесконечно больших величин.

3) П. нуля (соответственно полюса) a функции $f(x)$ — такое число n, что существует конечный $\lim \frac{f(x)}{(x-a)^n}$ [соответственно $\lim (x-a)^n f(x)$], отличный от нуля.

4) П. производной — число дифференцирований, к-рые надо произвести над функцией, чтобы получить эту производную. Напр., y''' — производная третьего П., $\frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3}$ — производная четвёртого П. Аналогично определяют П. дифференциала.

5) П. дифференциального уравнения — наивысший из П. производных, входящих в уравнение. Напр., $y'''y'-(y'')^2=1$ — уравнение третьего порядка, $y''-3y'+y=0$ — уравнение второго П.

6) П. квадратной матрицы — число её строк (равное числу столбцов).

7) П. конечной группы — число элементов группы. Если группа G бесконечна, то говорят, что G — группа бесконечного П. П. элемента группы — целое положительное число, равное числу различных элементов в порождаемой этим элементом циклич. подгруппе, либо ∞, если эта группа бесконечна. В последнем случае элемент наз. элементом бесконечного П. Если П. элемента a конечен и равен n, то n является наименьшим из чисел, для к-рых $a^n=1$.

8) П. целой функции $f(z)$ — нижняя грань значений A, для к-рых отношение $\frac{|f(z)|}{e^{|z|^A}}$ ограничено.

9) П. приближения, порядок аппроксимации,— порядок погрешности приближения переменной величины относительно другой переменной, поведение к-рой, как правило, считается известным.

10) Если при нек-ром исследовании или вычислении отбрасываются все степени нек-рой малой величины, начиная с $(n+1)$-й, то говорят, что исследование или вычисление ведётся с точностью до величин n-го П. Напр., при исследовании малых колебаний струны пренебрегают величинами, содержащими вторые и высшие степени прогиба и его производных, получая благодаря этому линейное уравнение (линеаризируя задачу).

11) Слово «П.» употребляется также в исчислении конечных разностей (разности различных П.), в теории многих специальных функций (напр., цилиндрич. функции n-го П.) и т. д.

12) При измерениях говорят о величине порядка 10^n, подразумевая под этим, что она заключена между $0{,}5 \cdot 10^n$ и $5 \cdot 10^n$.

ПОСЛЕДЕЙСТВИЕ — см. *Вероятностей теория*, *Марковский процесс*.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬ — см. *Порядковое число*.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — функция, определённая на множестве натуральных чисел, множество значений которой может состоять из элементов любой природы: чисел, точек, функций, векторов, множеств, случайных величин и др., занумерованных натуральными числами 1, 2, ..., n, ... П. записывается в виде $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ или кратко $\{x_n\}$. Элементы $x_1, x_2, \ldots$ наз. членами П.

Определены, напр., П. простых чисел; П. правильных n-угольников, вписанных в данную окружность и имеющих одну общую вершину; П. отрезков $[a_n, b_n]$ таких, что каждый последующий является левой половиной предыдущего.

По определению, П. содержит бесконечное число членов, но множество её значений может быть конечным. Напр., множество значений П. $\{(-1)^n\}$ состоит из двух элементов 1 и -1.

Иногда рассматриваются П., определённые на конечном подмножестве множества натуральных чисел, их называют конечными П.; напр., выписанные в поряд-

ке возрастания делители числа 12 образуют конечную П. {1, 2, 3, 4, 6, 12}. Понятие П. является основным объектом исследования в теории пределов.

П. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ из множества действительных чисел наз. *числовой последовательностью*.

См. также *Возрастающая последовательность*, *Монотонная последовательность*, *Убывающая последовательность*.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ — метод решения статистических задач, при котором необходимое число наблюдений не фиксируется заранее, а определяется в процессе эксперимента. Таким образом, характерной особенностью П. с. а. является тот факт, что число наблюдений (объём выборки) представляет собой случайную величину, зависящую от результатов наблюдений в том смысле, что решение об окончании или продолжении наблюдений принимается последовательно после каждого наблюдения. Одно из преимуществ П. с. а. в том, что во многих случаях для получения обоснованных выводов применение П. с. а. позволяет ограничиться значительно меньшим (в среднем) числом наблюдений, чем при способах, в к-рых число наблюдений фиксируется заранее. Определение необходимого числа наблюдений в рамках П. с. а. представляет собой одну из сторон задачи *планирования эксперимента*.

В наибольшей степени идеи П. с. а. нашли применение в теории *статистических гипотез проверки* (впервые последовательные методы проверки гипотез были использованы при контроле качества изделий в *приёмочном статистическом контроле*). Пусть, напр., задача состоит в различении двух гипотез по результатам независимых наблюдений $X_1, X_2, \ldots$. Гипотеза H_1 заключается в том, что случайные величины X_i имеют распределение вероятностей с плотностью $f_1(x)$, а гипотеза H_2 — в том, что X_i имеют плотность $f_2(x)$. Для решения этой задачи поступают следующим образом. Выбирают два числа A и B, $0<A<B$. По результату x_1 первого наблюдения вычисляют отношение

$$\lambda_1 = f_2(x_1)/f_1(x_1).$$

Если $\lambda_1 < A$, принимают гипотезу H_1; если $\lambda_1 > B$, принимают H_2; если $A \leqslant \lambda_1 \leqslant B$, производят второе наблюдение и по его результату x_2 подобным же образом исследуют величину

$$\lambda_2 = f_2(x_1)\, f_2(x_2)/f_1(x_1)\, f_1(x_2),$$

и т. д. С вероятностью, равной единице, процесс оканчивается либо выбором H_1, либо выбором H_2. Величины A и B определяются из условия, чтобы вероятности ошибок первого и второго рода (т. е., соответственно, вероятность отвергнуть гипотезу H_1, когда она верна, и вероятность принять H_1, когда верна H_2) имели заданные значения α и β.

Для практич. целей вместо величин λ_n удобнее рассматривать их логарифмы. Пусть, напр., X_i имеют нормальное распределение с плотностью

$$f(x;\, a,\, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

и гипотеза H_1 состоит в том, что $a=0$, $\sigma=1$, гипотеза H_2 — в том, что $a=0{,}6$, $\sigma=1$, и пусть $\alpha=0{,}01$, $\beta=0{,}03$. Соответствующие подсчёты показывают, что в этом случае

$$A = \frac{1}{33},\quad B = 97 \quad \text{и} \quad \ln \lambda_n = 0{,}6 \sum_{k=1}^{n} x_k - 0{,}18n.$$

Поэтому неравенства $\lambda_n < {}^1/_{33}$ и $\lambda_n > 97$ равносильны неравенствам $\sum_{k=1}^{n} x_n < 0{,}3n - 5{,}83$ и $\sum_{k=1}^{n} x_k > 0{,}3n + 7{,}62$ соответственно. Процесс П. с. а. допускает при этом простое графич. изображение (рис.). На плоскости (xOy) наносятся две прямые $y = 0{,}3x - 5{,}83$ и $y = 0{,}3x + 7{,}62$ и ломаная линия с вершинами в точках $(n, \sum_{k=1}^{n} x_k)$, $n = 1, 2, \ldots$. Если ломаная впервые выходит из полосы, ограниченной этими прямыми, через верхнюю границу, принимается H_2, если — через нижнюю, принимается H_1. В приведённом примере для различения H_1 и H_2 методом П. с. а. требуется, в среднем, не более 25 наблюдений. В то же время для указанного различения гипотез H_1 и H_2 по выборкам фиксированного объёма потребовалось бы более 49 наблюдений.

Последовательные критерии указанного типа, впервые предложенные А. Вальдом (1946), наз. критериями отношения вероятностей. А. Вальду (1947) также принадлежит последовательный критерий о среднем значении нормального распределения, когда дисперсия неизвестна; этот критерий наз. последовательным t-критерием по аналогии с t-критерием Стьюдента в случае фиксированного числа наблюдений.

Кроме последовательных критериев проверки гипотез в П. с. а. входит и последовательное статистич. оценивание. Однако решение задач оценивания наталкивается на определённые трудности, т. к. в этом случае сложнее сформулировать правила, определяющие момент прекращения наблюдений. Напр., при оценивании среднего значения a нормального распределения с неизвестной дисперсией σ^2 правило может быть таким: задаётся нек-рая постоянная $c>0$, и наблюдения производятся до тех пор, пока не окажется, что $D_n \leqslant c$, где

$$D_n^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$$

— оценка дисперсии

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

при фиксированном n, $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность результатов наблюдений; после этого вычисляется $\overline{X}_n$ — оценка a. Тогда дисперсия $\overline{X}_n$ будет равна приближённо c^2.

● Блекуэлл Д., Гиршик М. А., Теория игр и статистических решений, пер. с англ., М., 1958; Вальд А., Последовательный анализ, пер. с англ., М., 1960; Ширяев А. Н., Статистический последовательный анализ, М., 1969. *Ю. В. Прохоров.*

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МЕТОД, метод повторных постановок, метод простой итерации,— один из общих методов приближённого решения операторных уравнений. В ряде случаев хорошая сходимость построенных этим методом приближений позволяет применять его в практике вычислений.

Пусть E — нек-рое множество, на к-ром задан оператор A, отображающий E в себя. Требуется найти неподвижную точку этого оператора, т. е. решение уравнения

$$A(x) = x,\quad x \in E. \qquad (1)$$

Пусть уравнение (1) имеет решение x_* и каким-либо способом указано его начальное приближение $x_0 \in E$. Последовательность (x_n) может быть определена с помощью рекуррентного соотношения

$$x_{n+1} = Ax_n,\quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (2)$$

Построение последовательности (2) и исследование вопроса о её сходимости обычно называют П. п. м.

Для исследования сходимости последовательности (2), а также для доказательства существования решения уравнения (1) широко применяется ниже сформулированный принцип сжимающих отображений.

Если E — полное метрич. пространство с метрикой ρ и для всех x и y из

$$\rho(Ax,\, Ay) \leqslant \alpha \rho(x,\, y),\quad 0 < \alpha = \text{const} < 1,$$

тогда уравнение (1) имеет единственное решение, к-рое

является пределом последовательных приближений (2) при любом начальном приближении x_0. Для приближения x_n верна следующая оценка близости к решению x_*:

$$\rho(x_n, x_*) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(Ax_0, x_0).$$

Пусть, напр., $E=\mathbb{R}^n$ — арифметическое n-мерное пространство и оператор A в (1) имеет вид $Ax=Bx+C$, где $B=\|b_{ik}\|$ — квадратная матрица n-го порядка, $c=(c_1, \ldots, c_n)$ — заданный, а $x=(x_1, \ldots, x_n)$ — искомый векторы в $\mathbb{R}^n$. Если в этом пространстве метрика определена формулой $\rho(x, y)=\max\limits_i|x_i-y_i|$ и элементы матрицы B удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{n}|b_{ik}|<1$ для всех $i=1, 2, \ldots, n$, то из принципа сжимающих отображений следует, что система алгебраич. уравнений (2) имеет единственное решение в $\mathbb{R}^n$, к-рое можно построить П. п. м., исходя из произвольного вектора $x_0=(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

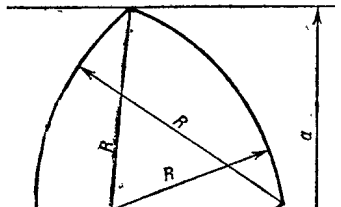
ПОСТОРО́ННИЙ КО́РЕНЬ, п о с т о р о н н е е р е ш е н и е,— корень (решение) одного из промежуточных уравнений, получающихся в процессе решения данного уравнения, который не является корнем данного уравнения. Появление П. к. связано с тем, что при решении не всегда удаётся, упрощая данное уравнение, совершать переходы только к равносильным уравнениям. П. к. могут появляться, напр., при возведении обеих частей уравнения в степень, при освобождении от знаменателя, при потенцировании и т. п. Пример: уравнение $\log_2(x-5)+\log_2(x-3)=3$ имеет только один корень $x=7$; однако после потенцирования получается уравнение $(x-5)\times(x-3)=8$, имеющее, помимо корня $x=7$, также корень $x=1$, являющийся П. к. для исходного уравнения.

ПОСТОЯ́ННАЯ, к о н с т а н т а,— величина, которая в изучаемой задаче сохраняет одно и то же значение. Напр., в задаче о нахождении корней квадратного трёхчлена x^2+px+q величины p и q являются П.

ПОСТОЯ́ННОЙ КРИВИ́ЗНЫ ПРОСТРА́НСТВО — риманово пространство, в каждой точке которого кривизна во всех двумерных направлениях касательного пространства постоянна (см. *Риманова геометрия*). Полное односвязное n-мерное П. к. п. с кривизной $k=0$ есть евклидово пространство, с кривизной $k>0$ — сфера радиуса $1/\sqrt{k}$, при $k<0$ — пространство Лобачевского. П. к. п., и только они, допускают свободное движение по себе достаточно малых частей.

Примерами полных, но неодносвязных П. к. п. могут служить двумерные П. к. п. с кривизной $k=0$; открытые — плоскость, цилиндр, лист Мёбиуса, и замкнутые — тор, поверхность Клейна.

ПОСТОЯ́ННОЙ ШИРИНЫ КРИВА́Я — плоская выпуклая замкнутая кривая, для которой расстояние a между любыми парами параллельных касательных (опорных прямых) одинаково. Таковы, напр., окружность и овальная кривая, изображённая на рисунке. В случае пространства поверхностью постоянной ширины называют такую поверхность, для к-рой расстояние между любыми парами параллельных (опорных) касательных плоскостей одинаково.



ПОСТУЛА́Т (от лат. postulatum — требование) — употребляемое иногда название для аксиом математической теории; так, ряд аксиом геометрии в «*Началах*» *Евклида* названы П.

П. наз. также аксиомы и правила вывода *формальной системы*.

ПОТЕНЦИА́Л (от лат. potentia — сила), п о т е н ц и а л ь н а я ф у н к ц и я,— понятие, характеризующее широкий класс физических силовых полей (электрическое, гравитационное и т. п.) и вообще поля физических величин, представляемых векторами (поле скоростей в жидкости и т. п.). В электростатич. поле П. вводится как вспомогательная функция, пространственные производные к-рой — компоненты напряжённости электрич. поля в данной точке; в гидродинамике — компоненты скорости в данной точке и т. п. При этом П. в ряде случаев имеет и другой важный физич. смысл. Так, в электростатич. поле он численно равен энергии, необходимой для удаления единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность (с обратным знаком).

В общем случае П. векторного поля $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ — скалярная функция $u(x, y, z)$ такая, что $\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}u$, то есть $a_x=\frac{\partial u}{\partial x}$, $a_y=\frac{\partial u}{\partial y}$, $a_z=\frac{\partial u}{\partial z}$, где a_x, a_y, a_z — компоненты поля $\boldsymbol{a}$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$. Если такую функцию можно ввести, то векторное поле $\boldsymbol{a}$ наз. п о т е н ц и а л ь н ы м. Иногда П. называют функцию $U=-u$ (например, в электростатике). П. векторного поля $\boldsymbol{a}$ определяется не однозначно, а с точностью до постоянного слагаемого. Поэтому при изучении потенциального поля представляют интерес лишь разности П. в различных точках поля. Уравнение $u(x, y, z)=c$ геометрически представляет поверхность, во всех точках к-рой П. имеет одинаковую величину; такие поверхности наз. п о в е р х н о с т я м и у р о в н я или э к в и п о т е н ц и а л ь н ы м и п о в е р х н о с т я м и.

Для поля тяготения, образованного помещённой в точку $A(\xi, \eta, \zeta)$ точечной массой m, П. (н ь ю т о н о в П.) имеет в точке $P(x, y, z)$ вид

$$u(x, y, z)=Gm/r,$$

где

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

G — постоянная тяготения. При наложении полей их П. алгебраически складываются. Если поле тяготения обусловлено нек-рой массой плотности $\rho(\xi, \eta, \zeta)$, занимающей объём T, то его можно рассматривать как результат наложения элементарных полей, образованных бесконечно малыми телами массы $\rho d\xi d\eta d\zeta$. Ньютонов П. такого поля представляется интегралом

$$u(x, y, z)=G\iiint_T \frac{\rho}{r}\,d\tau. \qquad (*)$$

П. $u(x, y, z)$ — непрерывная функция во всём пространстве вместе со своими частными производными 1-го порядка; вне тела объёма T функция $u(x, y, z)$ удовлетворяет *Лапласа уравнению*, внутри — *Пуассона уравнению*.

Если притягивающие массы распределены с плотностью $\rho_{пов}$ по поверхности S (п р о с т о й с л о й), то П. образованного ими поля выражается интегралом

$$v(x, y, z)=G\int_S \frac{\rho_{пов}}{r}\,ds.$$

П. простого слоя $v(x, y, z)$ — непрерывная во всём пространстве функция; при пересечении поверхности S нормальная производная функция $v(x, y, z)$ испытывает разрыв, равный $4\pi G/\rho_{пов}$. Неограниченно сближая две поверхности, на к-рых расположены простые слои с плотностями $\rho_{пов}$ и $-\rho_{пов}$, и одновременно увеличивая $\rho_{пов}$ до бесконечности, но так, чтобы был конечным предел $\lim n\rho_{пов}=\mu$, где n — нормальное расстояние между поверхностями, приходят к понятию П. д в о й н о г о с л о я:

$$w(x, y, z)=G\iint_S \mu\frac{d}{dn}\frac{1}{r}\,ds.$$

П. двойного слоя $w(x, y, z)$ — непрерывная функция во всём пространстве вне S; при пересечении поверхности S функция $w(x, y, z)$ испытывает разрыв, равный $4\pi G\mu$. Функции $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ удовлетворяют уравнению Лапласа.

Если тело объёма T — бесконечный цилиндр с поперечным сечением D и плотность ρ вещества цилиндра постоян-

на вдоль каждой прямой, параллельной образующим цилиндра, то формула (*) приводит к понятию л о г а р и ф м и ч е с к о г о п о т е н ц и а л а:

$$u(x, y) = G\iint_D \rho \ln(1/r)\, ds.$$

В виде суммы П. простого и двойного слоёв может быть представлена любая гармонич. функция; этим объясняется важность теории П.

Идея П. принадлежит Ж. Лагранжу (1775) и П. Лапласу (1782). Теория П. создана независимо Дж. Грином (1828) и К. Гауссом (1840). Термин «потенциальная функция» предложил Дж. Грин, термин «П.» — К. Гаусс.

В. И. Битюцков.

ПОТЕНЦИА́ЛЬНАЯ БЕСКОНЕ́ЧНОСТЬ — понятие о *бесконечности*, состоящее в рассмотрении бесконечной совокупности объектов, исходя из процесса построения этих объектов. Примером П. б. может служить бесконечность натурального ряда, рассматриваемого как процесс постепенного образования натуральных чисел путём перехода от n к $n+1$, начиная с нуля. П. б. имеет идеализированный характер, поскольку, напр., построение слишком больших натуральных чисел в реальных условиях невозможно из-за ограниченности нашей жизни и материальных средств. Идея П. б. возникает в результате мысленного отвлечения от реальных препятствий к построению объектов, т. е. в результате применения *абстракции потенциальной осуществимости*.

Понятию П. б. противопоставляется понятие *актуальной бесконечности*. Идея П. б. как с т а н о в я щ е й с я бесконечности считается интуитивно более ясной, чем представление о бесконечной совокупности как о з а в е р ш ё н н о м, готовом объекте.

ПОТЕНЦИА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Потенциал.*

ПОТЕНЦИА́ЛЬНОЕ ПО́ЛЕ, г р а д и е н т н о е п о л е, к о н с е р в а т и в н о е п о л е,— векторное поле, циркуляция которого вдоль любой замкнутой траектории равна нулю. Если П. п.— силовое поле, то это означает равенство нулю работы сил поля вдоль замкнутой траектории. Для П. п. $\boldsymbol{a}(M)$ существует такая однозначная функция $\varphi(M)$ (п о т е н ц и а л векторного поля), что $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}\varphi$. Если $\boldsymbol{a}(M)$ — П. п., то $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0$. Обратно, если $\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0$ и поле задано в односвязной области и дифференцируемо, то $\boldsymbol{a}(M)$ — П. п. П р и м е р ы П. п.: электростатич. поле, поле тяготения, поле скоростей при безвихревом движении. См. также *Векторный анализ*, *Потенциал.*

ПОТЕНЦИ́РОВАНИЕ (нем. potenzieren — возводить в степень, от Potenz — степень) — действие, заключающееся в нахождении числа по данному *логарифму.*

ПОТЕ́РЬ ФУ́НКЦИЯ — см. *Статистических решений теория.*

ПОТО́К — частный случай *динамической системы.*

ПОТО́К в е к т о р н о г о п о л я $\boldsymbol{a}$ — одно из понятий векторного анализа. П. через поверхность Σ выражается с точностью до знака поверхностным интегралом

$$\iint_\Sigma (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\, ds = \iint_\Sigma (a_x\, dy\, dz + a_y\, dz\, dx + a_z\, dx\, dy),$$

где $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности Σ (предполагается, что изменение вектора $\boldsymbol{n}$ по поверхности Σ непрерывно). Для поля скоростей частиц жидкости П. равен количеству жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность Σ. См. также *Векторное поле.*

Понятие и термин «П.» введены Дж. Максвеллом (1873).

ПОТО́КОВОЙ ПРОГО́НКИ МЕ́ТОД — метод решения краевых задач с произвольно сильно меняющимися коэффициентами. Задачи такого рода возникают, например, в высокотемпературной газодинамике, низкотемпературной плазме.

Исходные посылки метода видны на примере уравнения

$$(k(x)u')' - q(x)u = -f(x), \quad k(x) > 0,$$

для функции $u(x)$ на интервале $0<x<1$. Вводя в рассмотрение поток

$$w = -ku', \tag{1}$$

можно исходное уравнение преобразовать к потоковой форме

$$-w' - qu = -f. \tag{2}$$

Пусть граничные условия для системы (1)—(2) приведены к виду

$$\varkappa^{(0)}u + \lambda^{(0)}w = \nu^{(0)}, \quad x = 0, \tag{3}$$

$$\varkappa^{(1)}u - \lambda^{(1)}w = \nu^{(1)}, \quad x = 1, \tag{4}$$

где

$$\varkappa^{(\alpha)} \geqslant 0, \ \lambda^{(\alpha)} \geqslant 0, \ \varkappa^{(\alpha)} + \lambda^{(\alpha)} > 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Решение краевой задачи (1)—(4) методом факторизации можно свести к последовательному решению двух задач Коши. Для этого достаточно формально постулировать связь:

$$\alpha(x)u + \beta(x)w = \gamma(x). \tag{6}$$

Неизвестные коэффициенты α, β, γ определяют из условия непротиворечивости соотношений (1), (2), (6):

$$\frac{\alpha}{\alpha' - \beta q} = \frac{\beta}{\beta' - \alpha/k} = \frac{\gamma}{\gamma' - \beta f} = \frac{1}{\mu}, \tag{7}$$

где функция $\mu(x)$, вообще говоря, произвольна и конкретизируется условием нормировки, накладываемым на коэффициенты α, β, γ, определённые с точностью до постоянного множителя. Так, условию $\alpha^2+\beta^2=1$ соответствует $\mu = -\alpha\beta(q+1/k)$, а условию $\alpha+\beta=1$ отвечает $\mu = -(\beta q + \alpha/k)$. Граничное условие (3) вместе с условием нормировки однозначно; они определяют $\alpha(0)$, $\beta(0)$, $\gamma(0)$ в силу (5). Значения α, β, γ в остальных точках $0<x<1$ находятся из решения «прямой» задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (7).

Для отыскания функции $u(x)$ и её потока $w(x)$ решается «обратная» задача Коши для уравнений (1) и (2) в сочетании с условием нормировки. Начальные значения $u(1)$ и $w(1)$ находятся из граничного условия (4) и связи (6).

В дискретном случае конструктивное содержание потоковой прогонки строится по аналогии с непрерывным случаем.

ПОТО́КОВЫЙ АНА́ЛИЗ п р о г р а м м — см. *Программ анализ.*

ПОЧТИ́ ВСЮ́ДУ, д л я п о ч т и в с е х x (относительно меры μ),— термин, означающий, что речь идёт о всех x из измеримого пространства X, за исключением, быть может, некоторого множества $A \subseteq X$ меры нуль: $\mu(A) = 0$. Напр., говорят о сходимости последовательности п о ч т и в с ю д у. В теории вероятностей под сходимостью случайных величин П. в. понимают сходимость их с вероятностью единица, или сходимость п о ч т и н а в е р н о е.

ПОЧТИ́ ПЕРИОДИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция, значения которой при добавлении к аргументу надлежащим образом выбранных постоянных чисел (почти периодов) приближённо повторяются. Более точно: непрерывная функция $f(x)$, определённая для всех действительных значений x, наз. п о ч т и п е р и о д и ч е с к о й, если для каждого $\varepsilon>0$ можно указать такое $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале оси x длины l найдётся хотя бы одно число $\tau = \tau(\varepsilon)$, для к-рого при любом x выполняется неравенство $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$. Числа τ наз. п о ч т и п е р и о д а м и функции $f(x)$. Периодич. функции суть частные случаи П. п. ф.; простейшие примеры П. п. ф., не являющихся периодическими, получаются в результате сложения периодич. функций с несоизмеримыми периодами, напр. $\cos x + \cos\sqrt{2}\,x$.

Нек-рые наиболее важные свойства П. п. ф.:

1) П. п. ф. ограничена и равномерно непрерывна на всей оси x.

2) Сумма и произведение конечного числа П. п. ф. есть также П. п. ф.

3) Предел равномерно сходящейся последовательности П. п. ф. есть также П. п. ф.

4) Для каждой П. п. ф. существует среднее значение (на всей оси x):

$$M\{f(x)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)\,dx.$$

5) Каждой П. п. ф. можно сопоставить ряд Фурье:

$$f(x)\sim\sum_n A_n e^{i\lambda_n x},$$

причём $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ может быть любой последовательностью отличных друг от друга действительных чисел и

$$A_n=M\{f(x)\,e^{i\lambda_n x}\}.$$

6) Равенство Парсеваля: для каждой П. п. ф. справедливо равенство

$$M\{|f(x)|^2\}=\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^2.$$

7) Теорема единственности: если $f(x)$ есть непрерывная П. п. ф. и если для всех действительных λ

$$M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}=0,$$

то $f(x)=0$; иначе говоря, ряд Фурье однозначно определяет П. п. ф.

8) Теорема аппроксимации: для каждого $\varepsilon>0$ можно указать такой конечный тригонометрич. полином

$$P_\varepsilon(x)=\sum_{k=1}^{N}b_k e^{-i\mu_k x}$$

(μ_k — действительные числа), что для всех значений x выполняется неравенство $|f(x)-P_\varepsilon(x)|<\varepsilon$; обратно, каждая функция $f(x)$ с этим свойством является П. п. ф.

Первое построение непрерывных П. п. ф. было дано Х. Бором (1925). Ещё ранее (1893) частный случай П. п. ф.— т. н. квазипериодич. функции изучил П. Боль.

ПРА́ВАЯ ТРО́ЙКА векторов — см. *Векторная алгебра*.

ПРАВДОПОДО́БИЯ УРАВНЕ́НИЕ — см. *Максимального правдоподобия метод*.

ПРАВДОПОДО́БИЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Максимального правдоподобия метод*.

ПРА́ВИЛЬНАЯ ДРОБЬ — дробь, знаменатель которой больше числителя, напр. $^1/_2$, $^5/_6$.

ПРА́ВИЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕ́ТАЦИЯ — *интерпретация*, в которой все аксиомы данной теории истинны.

ПРА́ВИЛЬНАЯ ПИРАМИ́ДА — см. *Пирамида*.

ПРА́ВИЛЬНАЯ ПРИ́ЗМА — см. *Призма*.

ПРА́ВИЛЬНЫЙ МНОГОГРА́ННИК — многогранник, все грани которого суть одинаковые правильные многоугольники и все многогранные углы при вершинах равны между собой. Существует пять видов выпуклых П. м.: *тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр*.

ПРА́ВИЛЬНЫЙ МНОГОУГО́ЛЬНИК — многоугольник с равными сторонами и углами.

ПРЕДГИ́ЛЬБЕРТОВО ПРОСТРА́НСТВО — векторное пространство X, снабжённое скалярным произведением. На П. п. определена *полунорма* (x, x). Пополнение X по ней является *гильбертовым пространством*.

ПРЕДЕ́Л — одно из основных понятий математики, означающее, что нек-рая переменная в рассматриваемом процессе её изменения неограниченно приближается к какому-то постоянному значению. Точный смысл понятие «П.» имеет лишь при наличии корректного понятия близости между элементами (точками) множества, в к-ром указанное переменное принимает значения. Основные понятия математич. анализа — непрерывность, производная, интеграл — определяются через П.

Наиболее простыми являются понятия *предела функции* (в частности, понятие *предела последовательности*) и понятие предела интегральных сумм. Определение понятия П. числовой функции f, заданной на подмножестве X n-мерного евклидова пространства, таково: функция f имеет конечный или бесконечный предел a в конечной или бесконечно удалённой точке x_0, если для любой окрестности V точки a существует такая окрестность U точки x_0, что $f(X\cap U)\subset V$. П. интегральных сумм, возникающий при определении интеграла, определяется более длинно. Пусть, напр., функция f определена на отрезке $[a, b]$. Совокупность $\{x_i\}$ таких точек x_i, что $a=x_0<x_i<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, наз. разбиением отрезка $[a, b]$. Пусть $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1, 2, \ldots, n$. Тогда сумма

$$f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n$$

наз. интегральной суммой функции f. Число A является пределом интегральных сумм и наз. определённым интегралом

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что каково бы ни было разбиение $\{x_i\}$ отрезка $[a, b]$, для к-рого $\Delta x_i<\delta$, и каковы бы ни были точки ξ_i, $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, выполняется неравенство

$$|f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n-A|<\varepsilon.$$

Понятие П. интегральных сумм может быть введено и с помощью П. последовательности.

Обобщение понятия предела. Ввиду разнообразия употребляемых в математике специальных видов понятия П. естественно возникло стремление включить их как частный случай в более широкое понятие П. Напр., можно ввести понятие П., обобщающее как понятие П. числовой функции, так и понятие П. интегральных сумм. Система S непустых подмножеств нек-рого множества X наз. направлением, если для каждых двух подмножеств A и B этой системы выполняется одно из включений $A\subset B$ или $B\subset A$. Пусть на множестве X задана числовая функция f. Число a наз. пределом функции f по направлению S, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое множество A из S, что во всех его точках выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$. При определении конечного П. числовой функции f, заданной на множестве X n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, в точке x_0 за направление следует взять пересечения множества X со всевозможными δ-окрестностями этой точки. При определении П. интегральных сумм функций f, заданной на отрезке $[a, b]$, следует рассмотреть множество E, элементами к-рого являются всевозможные разбиения отрезка $[a, b]$ с выбранными в них точками ξ_i. Подмножества E_η множества E, отвечающие разбиениям, длины Δx_i отрезков к-рых не превышают η, образуют направление. П. интегральных сумм (к-рые, очевидно, при заданной функции f являются функциями, определёнными на множестве E) по указанному направлению является интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Понятие П. обобщается на более широкие классы функций, напр. на функции, заданные на частично упорядоченных множествах, или на функции, являющиеся отображениями одного пространства (метрического или, более общо́, топологического) в другое. Наиболее полно задача определения П. решается в топологии и означает в общем случае, что нек-рый объект, обозначенный $f(x)$, меняющийся при изменении другого объекта, обозначенного через x, при достаточно близком приближении объекта x к объекту x_0 сколь угодно близко приближается к объекту A, к-рый и называется пределом $f(x)$ при x, стремящемся к x_0. Основным в такого рода понятиях П. является понятие близости объектов x и x_0, $f(x)$ и A, к-рые нуждаются в математич. определении. Только после того как это будет сделано, высказанному определению П. можно будет придать чёткий смысл и оно станет содержательным. Различные понятия близости и изучаются, в частности, в топологии.

Встречаются, однако, понятия П. другой природы, не связанные с топологией, напр. понятие П. последовательности множеств. Последовательность множеств A_n, $n=1, 2, \ldots$, наз. сходящейся, если существует такое множество A, наз. её пределом, что каждая его точка принадлежит всем множествам A_n, начиная с нек-рого

номера, и каждая точка из объединения всех множеств A, не принадлежащая A, принадлежит лишь конечному числу A_n.

Историческая справка. К понятию П. вплотную подошли ещё древнегреч. учёные при вычислении площадей и объёмов нек-рых фигур и тел с помощью метода исчерпывания (см. *Бесконечно малых исчисление*). Так, Архимед, рассматривая последовательности вписанных и описанных ступенчатых фигур и тел с помощью метода исчерпывания, доказывал, что разность между их площадями (соответственно объёмами) может быть сделана меньше любой наперёд заданной положительной величины. Включая в себя представление о бесконечно малых, метод исчерпывания являлся зародышем теории П. Однако в явном виде в древнегреч. математике понятие П. не было сформулировано, не было создано и к.-л. основ общей теории.

Новый этап в развитии понятия П. наступил в эпоху создания дифференциального и интегрального исчисления. Г. Галилей, И. Кеплер, Б. Кавальери, Б. Паскаль и др. широко используют при вычислении площадей и объёмов метод неделимых, метод актуальных бесконечно малых, т. е. таких бесконечно малых, к-рые, по их представлению, являются неизменными величинами, не равными нулю и вместе с тем меньшими по абсолютной величине любых положительных конечных величин. Продолжает в этот период применяться и развиваться и метод исчерпывания (Григорий из Сен-Винцента, П. Гульдин, Х. Гюйгенс и др.). На основе интуитивного понятия П. появляются попытки создать общую теорию П. Так, И. Ньютон первый отдел первой книги («О движении тел») своего труда «Математические начала натуральной философии» посвящает своеобразной теории П. под названием «Метод первых и последних отношений», к-рую он кладёт в основу своего метода флюксий. В этой теории И. Ньютон взамен актуальных бесконечно малых предлагает концепцию «потенциальной» бесконечно малой, к-рая лишь в процессе своего изменения становится по абсолютной величине меньше любой положительной конечной величины. Точка зрения И. Ньютона была существенным шагом вперёд в развитии представления о П. Понятие П., намечавшееся у математиков 17 в., в следующем 18 в. постепенно всё более анализировалось (Л. Эйлер, Ж. Д'Аламбер, Л. Карно, братья Я. и И. Бернулли и др.) и уточнялось. В этот период оно служило лишь для попыток объяснить правильность дифференциального и интегрального исчисления и ещё не являлось методом разработки проблем математич. анализа.

Современная теория П. начала формироваться в нач. 19 в. в связи с изучением свойств различных классов функций, прежде всего непрерывных, а также в связи с попыткой доказательства существования ряда основных объектов математич. анализа (интегралов, функций действительных и комплексных переменных, сумм рядов, корней алгебраических и более общих уравнений и т. п.). Впервые в работах О. Коши понятие П. стало основой построения математич. анализа. Им были получены основные признаки существования П. последовательностей, основные теоремы о П. и, что очень важно, получен внутренний критерий сходимости последовательности, носящий теперь его имя. Наконец, он определил интеграл как П. интегральных сумм и изучил его свойства, исходя из этого определения. Окончательно понятие П. последовательности и функции оформилось на базе теории действительного числа в работах Б. Больцано и К. Вейерштрасса. Из дальнейших обобщений понятия П. следует отметить понятия П., данные в работах А. Картана (1937).

● Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; 2 изд., ч. 2, М., 1980; Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; Никольский С. М., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1983.

Л. Д. Кудрявцев.

ПРЕДЕ́Л ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТИ чисел: число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, $n=1, 2, \ldots$, если для любого положительного числа ε найдётся (зависящее от него) натуральное число N такое, что при всех $n>N$ выполняется неравенство

$$|x_n-a|<\varepsilon. \qquad (*)$$

При этом пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \text{ или } x_n\longrightarrow a$$

и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ стремится (сходится) к числу a, П. п. $\{x_n\}$ равен a. Неравенство (*) можно переписать в виде $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$, оно означает, что точка (число) x_n принадлежит ε-окрестности точки a. Геометрич. смысл понятия П. п. состоит в том, что в любой ε-окрестности точки a лежат все члены последовательности $\{x_n\}$, кроме, быть может, конечного их числа.

Числовая последовательность, имеющая предел, наз. сходящейся (примеры см. в табл.). Не всякая последовательность имеет предел, напр. последовательность $x_n=(-1)^n$, $n=1, 2, \ldots$, не стремится ни к какому пределу, её члены попеременно равны -1 и $+1$ и не могут одновременно попасть в интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ при $\varepsilon<\frac{1}{2}$ и любом a. Последовательность, не имеющая предела, наз. расходящейся.

ПРИМЕРЫ СХОДЯЩИХСЯ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Общий член последовательности	Предел	Общий член последовательности	Предел
$x_n=\sqrt[n]{a},\ a>0$	1	$x_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$	$\frac{1}{e}$
$x_n=\sqrt[n]{n}$	1	$x_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$	e
$x_n=q^n,\ \lvert q\rvert<1$	0	$x_n=\frac{\log_a n}{n},\ a>1$	0
$x_n=nq^n,\ \lvert q\rvert<1$	0	$x_n=\frac{n^k}{a^n},\ a>1,$	0
$x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$	0	k—натуральное	
$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	e		

Стремящаяся к нулю последовательность наз. бесконечно малой. Бесконечно малые играют особую роль в теории П. п.: общее определение П. п. может быть дано через бесконечно малые, так как П. п. x_n, $n=1, 2, \ldots$, равен a тогда и только тогда, когда разность x_n-a есть бесконечно малая (в период формирования основных понятий математич. анализа он назывался анализом бесконечно малых).

Последовательность не может иметь двух различных пределов. Если последовательность сходится, то она ограничена, т. е. все её члены лежат на нек-ром конечном отрезке. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую есть бесконечно малая (напр., $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\alpha n}{n}=0$, так как $|\sin\alpha n|\leqslant 1$ и $\frac{1}{n}\to 0$). Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то справедливы формулы:

$$\lim_{n\to\infty} cx_n=c\lim_{n\to\infty} x_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+\lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty} x_n\lim_{n\to\infty} y_n,$$

если, кроме того, $y_n\neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n\neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Числовая последовательность сходится к конечному пределу тогда и только тогда, когда она удовлетворяет *Коши условию*.

Всякая ограниченная и монотонная последовательность является сходящейся. В частности, если последовательность неубывающая (невозрастающая) и ограничена сверху (снизу), то она имеет предел, и этот предел есть точная верхняя (точная нижняя) грань множества значений последовательности. Примером возрастающей и ограниченной сверху последовательности является последовательность периметров правильных n-угольников, вписанных в нек-рую окружность, к длине к-рой эта последовательность сходится. Другой пример возрастающей и ограниченной сверху последовательности: $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n=1, 2, \ldots$ Предел этой последовательности есть иррациональное число, обозначаемое e.

Бесконечный предел последовательности вводится как свойство последовательности x_n, $n=1, 2, \ldots$, быть бесконечно большой: для любого положительного числа ε найдётся такое натуральное число N, что при всех $n>N$ справедливо неравенство $|x_n|>\varepsilon$. При этом пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty \text{ или } x_n\to\infty$$

и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ стремится к бесконечности, имеет бесконечный предел. Напр., $n^2\to\infty$, $2^n\to\infty$, $n!\to\infty$.

Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая и, начиная с нек-рого номера, принимает только положительные (отрицательные) значения, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$).

Если множества точек x, удовлетворяющие условиям $x>\frac{1}{\varepsilon}$, $x<-\frac{1}{\varepsilon}$ и $|x|<\frac{1}{\varepsilon}$ назвать соответственно ε-окрестностями $+\infty$, $-\infty$ и ∞, то определение как конечного, так и бесконечного предела формулируется одинаково: П. п. x_n, $n=1, 2, \ldots$, равен a (где a число или один из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞), если для любого положительного числа ε найдётся такое натуральное число N, что все члены последовательности с номерами $n>N$ лежат в ε-окрестности a.

Нек-рые свойства П. п. одинаковы в случае конечного и бесконечного предела. Напр., если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы (конечные или бесконечные) и при всех $n=1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $x_n\leqslant y_n$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (при предельном переходе нестрогие неравенства сохраняются).

Если последовательность имеет предел (конечный или бесконечный), то любая её подпоследовательность имеет тот же предел. Конечный или бесконечный предел подпоследовательности данной последовательности называется её частичным пределом. Наибольший (наименьший) из частичных пределов числовой последовательности всегда существует и наз. верхним (нижним) пределом этой последовательности. Совпадение верхнего и нижнего пределов последовательности равносильно тому, что она имеет (конечный или бесконечный) предел.

Для последовательности комплексных чисел определение П. п. аналогично: число $a=\alpha+i\beta$ наз. пределом последовательности $z_n=x_n+iy_n$, $n=1, 2, \ldots$, если для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное число N такое, что при всех $n>N$ имеет место $|z_n-a|<\varepsilon$. Этот предел сводится к П. п. действительных чисел, так как $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\beta$. Кроме того, по определению, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n|=\infty$.

В современной математике рассматриваются П. п. функций, П. п. точек метрич. пространства, П. п. множеств и др.

Т. С. Пиголкина.

ПРЕДЕ́Л ФУ́НКЦИИ: функция f, принимающая только действительные значения, имеет в конечной или бесконечно удалённой точке x_0 конечный или бесконечный предел a, если для любой последовательности

$$x_n,\ n=1, 2, \ldots, \tag{1}$$

стремящейся к точке x_0, последовательность $f(x_n)$, $n=1, 2, \ldots$, стремится к точке a. В этом случае пишут

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a. \tag{2}$$

Здесь предполагается, конечно, что все элементы последовательности (1) принадлежат множеству задания функции f. Если это множество лежит на числовой прямой, то в случае существования предела (2) точка x_0 может быть либо действительным числом, либо одной из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$, ∞. Если множество задания функции f лежит в плоскости, в пространстве, вообще говоря, m-мерном, $m>1$, то точка x_0 может быть либо точкой этой плоскости, соответственно пространства, либо бесконечно удалённой точкой. П. ф. может быть либо числом, либо одной из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$, ∞.

Точка x_0, в к-рой рассматривается П. ф., может принадлежать или не принадлежать множеству задания этой функции. Напр., $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. В первом случае функция $\sin x$ определена для всех действительных значений x, а во втором — для всех, кроме $x_0=0$. Если точка x_0 принадлежит множеству, на к-ром задана функция f и существует предел (2), то он равен $f(x_0)$, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

В этом случае функция f наз. непрерывной в точке x_0.

Иногда при определении предела (2) функции накладывается дополнительное условие

$$x_n\neq x_0,\ n=1, 2, \ldots \tag{3}$$

Так, определённое понятие предела является частным случаем введённого выше, а именно соответствующим случаю, когда точка x_0 не принадлежит множеству, на к-ром рассматривается функция f.

Определение предела (2) можно сформулировать и в терминах неравенств. Например:

1) число a является пределом функции f в конечной точке x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех значений аргумента x, принадлежащих множеству задания функции f и удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$;

2) существование предела $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех значений аргумента x, принадлежащих области задания функции f и удовлетворяющих неравенству $x<-\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>\varepsilon$.

Всё многообразие различных случаев, встречающихся при определении предела в терминах неравенств, сводится к одному с помощью понятия окрестности. Существование предела (2) для функции f, заданной на множестве $X\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$, означает, что для любой окрестности V точки a (конечной или бесконечно удалённой) числовой прямой существует такая окрестность U точки x_0 (конечной или бесконечно удалённой), что из включения $x\in X\cap U$ следует $f(x)\in V$, то есть $f(X\cap U)\subset V$. В случае определения предела с дополнительным условием (3) здесь для получения равносильного определения надо потребовать, чтобы условие $f(x)\in U$ выполнялось при добавочном ограничении $x\neq x_0$.

В данной точке функция может иметь только один конечный или определённого знака бесконечный предел.

Условие существования конечного П. ф. в точке даёт критерий Коши: функция f, заданная на множестве $X\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 1$, имеет в точке x_0 (конечной или бесконечно удалённой) конечный предел, если для любого $\varepsilon>0$

существует такая окрестность U точки x_0, что как только $x \in X \cap U$, $x' \in X \cap U$, то выполняется неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.

Функция, имеющая конечный предел в точке x_0, локально ограничена, т. е. существует окрестность точки x_0, на пересечении к-рой с множеством задания функции эта функция ограничена.

В случае существования пределов в неравенствах для функций можно переходить к пределу: если функции f, g, h заданы на множестве X, существуют конечные или определённого знака бесконечные пределы

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = a$$

и для всех $x \in X$ выполняются неравенства

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x),$$

то существует

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = a.$$

Если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ и } \lim_{x \to x_0} g(x),$$

то

1) для любых чисел λ и μ существует предел

$$\lim_{x \to x_0} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x \to x_0} f(x) + \mu \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(линейность предела);

2) существует предел

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x);$$

3) при

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Примеры вычисления пределов.

1. $$\lim_{x \to 0} \sin x = 0. \qquad (4)$$

Используя определение конечного предела функции в терминах неравенств, для любого $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = \varepsilon$, тогда при $|x| < \delta$ из $|\sin x| \leqslant |x|$ следует $|\sin x| < \varepsilon$, что и означает справедливость (4).

2. $$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ также можно взять $\delta = \varepsilon$, тогда при $0 < |x| < \delta$ из $|x \sin \frac{1}{x}| \leqslant x$ следует $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

3. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (5)$$

Этот предел следует, напр., из неравенств

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1, \qquad (6)$$

верных при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Поскольку $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, то

$$\lim_{x \to 0} \cos^2 x = 1 - \lim_{x \to 0} \sin^2 x = 1,$$

и справедливость равенства (5) вытекает из возможности перехода к пределам в неравенствах (6).

4. $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = 0.$$

Это равенство следует из легко проверяемых соотношений

$$0 < \sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} < \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

При вычислении пределов полезно использовать набор нек-рых основных пределов, напр. следующих:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Предел композиции функций: если определена сложная функция $F(f(x))$ и существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a, \quad \lim_{y \to a} F(y) = b,$$

то существует предел

$$\lim_{x \to x_0} F(f(x)) = \lim_{y \to a} F(y) = b.$$

5. $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x.$$

Использовав предел

$$\lim_{y \to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e$$

и сделав замену $y = \frac{3}{x-2}$, получают

$$\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x = (1+y)^{2+\frac{3}{y}}$$

и, следовательно,

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x = \lim_{y \to 0} (1+y)^{2+\frac{3}{y}} = e^3.$$

Определение предела (2) для функций, принимающих действительные значения, переносится на комплекснозначные функции.

Основным общим методом отыскания П. ф. является метод выделения главных частей функций в окрестности данной точки, что обычно делается с помощью формулы Тейлора. Для вычисления П. ф., принимающих только действительные значения, часто бывает полезно правило Лопиталя.

Понятие П. ф. обобщается и на более широкие классы функций: если функция f задана на множестве X_f, являющимся подмножеством топологич. пространства X, а множество её значений принадлежит топологич. пространству Y (в этом случае вместо термина «функция» обычно употребляют термин «отображение»), то точка $a \in Y$ наз. предел ом функции f при $x \to x_0 \in X$, если для любой окрестности V точки a в пространстве Y существует такая окрестность U точки x_0 в пространстве X, что $f(X \cap U) \subset V$. Ясно, что определение П. ф. содержательно только в том случае, когда точка x_0 является точкой прикосновения множества X_f, на к-ром задана функция f, т. е. когда в любой окрестности этой точки содержится, по крайней мере, одна точка указанного множества.

● Зорич В. А., Математический анализ, ч. 1, М., 1981; Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х., Математический анализ, т. 1, М., 1986; Кудрявцев Л. Д., Предел, Математическая энциклопедия, т. 4, М., 1984; Никольский С. М., Курс математического анализа, 3 изд., т. 1, М., 1983.

Л. Д. Кудрявцев.

ПРЕДЕ́ЛЬНАЯ ОКРУ́ЖНОСТЬ, о р и ц и к л,— см. *Лобачевского геометрия.*

ПРЕДЕ́ЛЬНАЯ СФЕ́РА, о р и с ф е р а,— см. *Лобачевского геометрия.*

ПРЕДЕ́ЛЬНАЯ ТО́ЧКА множества, точка накопления,— точка, в любой окрестности которой содержится, по крайней мере, одна точка данного множества, отличная от неё самой. Рассматриваемые точка и множество предполагаются принадлежащими нек-рому топологич. пространству. Напр., любое действительное число является П. т. для множества всех рациональных чисел; в дискретном пространстве ни у одного множества нет ни одной П. т. Совокупность всех П. т. множества наз. производным множеством. В T_1-пространстве (см. *Отделимости аксиомы*) любая окрестность П. т. множества содержит бесконечно много точек этого множества, и производное множество замкнуто.

Следует отличать понятие П. т. от понятия *прикосновения точки* и *полного накопления точки*. В частности, всякая точка множества является его точкой прикосновения, П. т. же она может и не быть.

ПРЕДЕ́ЛЬНОЕ ЧИСЛО́ — см. *Порядковое число*.

ПРЕДЕ́ЛЬНЫЕ ТЕОРЕ́МЫ теории вероятностей — общее название ряда теорем теории вероятностей, указывающих условия возникновения тех или иных закономерностей в результате действия большого числа случайных факторов. Первые П. т.— *Бернулли теорема* (1713) и *Лапласа теорема* (1812) — относятся к распределению отклонений частоты наступления нек-рого случайного события A в n независимых испытаниях от его вероятности p, $0<p<1$. С. Пуассон (1837) распространил эти теоремы на случай, когда вероятность p_k наступления A в k-м испытании может зависеть от k, описав предельное поведение при $n\to\infty$ распределения отклонений частоты события A от среднего арифметического $\bar{p}=(p_1+\ldots+p_n)/n$ вероятностей $p_1, \ldots, p_n$ (см. *Пуассона теорема*, *Больших чисел закон*). Если обозначить через X_k случайную величину, принимающую значение, равное 1 при наступлении события A в k-м испытании, и значение, равное нулю при его ненаступлении, то случайную величину — число наступлений события A в n независимых испытаниях можно представить в виде суммы

$$X_1+X_2+\ldots+X_n$$

независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, что позволяет рассматривать перечисленные теоремы как частные случаи общих П. т., относящихся к суммам независимых случайных величин,— закона больших чисел и центральной предельной теоремы.

Закон больших чисел. Пусть

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \qquad (*)$$

— к.-л. последовательность независимых случайных величин, S_n — сумма первых n из них

$$S_n=X_1+X_2+\ldots+X_n,$$

a_n и B_n^2 — соответственно математич. ожидание

$$a_n=\mathsf{E}S_n=\mathsf{E}X_1+\mathsf{E}X_2+\ldots+\mathsf{E}X_n$$

и дисперсия

$$B_n^2=\mathsf{D}S_n=\mathsf{D}X_1+\mathsf{D}X_2+\ldots+\mathsf{D}X_n$$

суммы S_n. Говорят, что последовательность (*) подчиняется закону больших чисел, если при любом $\varepsilon>0$ вероятность неравенства

$$\left|\frac{S_n}{n}-\frac{a_n}{n}\right|>\varepsilon$$

стремится к нулю при $n\to\infty$.

Широкие условия приложимости закона больших чисел найдены впервые П. Л. Чебышевым (1867). Эти условия затем были обобщены А. А. Марковым. Как показал А. А. Марков, для приложимости к последовательности (*) закона больших чисел достаточно, чтобы отношение B_n/n имело пределом нуль при $n\to\infty$ (теорема Маркова). Вопрос о необходимых и достаточных условиях закона больших чисел был окончательно решён А. Н. Колмогоровым (1928). В случае когда величины X_n имеют одну и ту же функцию распределения, эти условия, как показал А. Я. Хинчин (1929), сводятся к одному: величины X_n должны иметь конечные математич. ожидания.

Центральная предельная теорема. Говорят, что к последовательности (*) применима центральная П. т., если при любых действительных числах α и β, $\alpha<\beta$, вероятность неравенства

$$\alpha B_n<S_n-a_n<\beta B_n$$

имеет пределом при $n\to\infty$ величину

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-x^2/2}\,dx$$

(см. *Нормальное распределение*). Довольно общие достаточные условия центральной П. т. были указаны П. Л. Чебышевым (1887), но в его доказательстве обнаружились пробелы, восполненные позже А. А. Марковым (1898). Решение вопроса, близкое к окончательному, было получено А. М. Ляпуновым (1901). По Ляпунову, если отношение

$$L_n=C_n/\sqrt{B_n^{2+\delta}},$$

где

$$C_n=c_1+c_2+\ldots+c_n,\ c_k=\mathsf{E}\,|X_k-\mathsf{E}X_k|^{2+\delta},\ \delta>0,$$

стремится к нулю при $n\to\infty$ (условие Ляпунова), то к последовательности (*) применима центральная П. т. (см. *Ляпунова теорема*). Окончательное решение вопроса об условиях приложимости центральной П. т. получено в основных чертах С. Н. Бернштейном (1926) и дополнено У. Феллером (1935).

Из других направлений работ в области П. т. можно отметить следующие.

1) Начатые А. А. Марковым, продолженные С. Н. Бернштейном и другими исследования условий приложимости закона больших чисел и центральной П. т. к суммам зависимых величин.

2) Даже в случае последовательности одинаково распределённых случайных величин можно указать простые примеры, когда суммы имеют в пределе распределение, отличное от нормального (речь идёт о невырожденных распределениях, т. е. о распределениях, не сосредоточенных целиком в одной точке), см., напр., *Коши распределение*. Полностью изучены как класс возможных предельных распределений для сумм независимых случайных величин, так и условия сходимости распределений сумм к тому или иному предельному распределению.

3) С сер. 20 в. значительное внимание уделяется локальным П. т. Пусть, напр., величины X_n принимают лишь целые значения. Тогда суммы S_n принимают также только целые значения и естественно поставить вопрос о предельном поведении при $n\to\infty$ вероятностей $P_n(m)$ того, что $S_n=m$, где m — целое. Простейшим примером такой локальной П. т. может служить локальная теорема Лапласа (см. также *Пуассона теорема*). Аналогично ставится вопрос в случае, когда распределения X_n имеют плотность.

4) П. т. в их классич. постановке описывают поведение отдельной суммы S_n с возрастанием номера n. Достаточно общие П. т. для вероятностей событий, зависящих сразу от нескольких сумм, получены впервые А. Н. Колмогоровым (1931). Так, напр., из результатов А. Н. Колмогорова следует, что при весьма широких условиях вероятность неравенства

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|<xB_n,\quad x>0,$$

имеет пределом величину

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}e^{-\frac{(2k+1)^2x^2}{8\pi^2}},\quad x>0.$$

5) Существует целый ряд П. т., устанавливающих свойства последовательностей случайных величин, к-рые имеют место с вероятностью, равной 1 (см., напр., *Больших чисел усиленный закон*, *Повторного логарифма закон*).

6) К П. т. относятся также теоремы для вероятностей т. н. больших уклонений, к-рые дают представление о

поведении при больших n и x отношений

$$\frac{F_n(x)}{\Phi(x)},\ x<0, \text{ и } \frac{1-F_n(x)}{1-\Phi(x)},\ x>0,$$

для

$$F_n(x)=P\{S_n<a_n+xB_n\},$$

где $S_n=X_1+X_2+\ldots+X_n$ и

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz,$$

если к последовательности (*) применима центральная П. т.

7) Перечисленные выше П. т. относятся к суммам случайных величин. Примером П. т. иного рода могут служить П. т. для членов вариационного ряда.

8) Большую роль играют П. т. в математич. статистике. С их помощью выясняются важные свойства статистич. оценок и отыскивается предельное распределение выборочных характеристик, используемых для проверки статистич. гипотез.

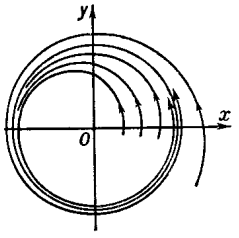
9) Разрабатываются П. т. для многомерных и бесконечномерных случайных величин.

● Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949; Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А., Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы, 3 изд., М., 1987; Петров В. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, М., 1987. *Ю. В. Прохоров.*

ПРЕДЕ́ЛЬНЫЙ ЦИКЛ системы дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y);\ \frac{dy}{dt}=Q(x,y)$$

— замкнутая траектория в фазовом пространстве Oxy, обладающая тем свойством, что все траектории, начинающиеся в достаточно узкой кольцеобразной её окрестности, неограниченно приближаются к этой траектории или при $t\to+\infty$ (устойчивый П. ц.), или при $t\to-\infty$ (неустойчивый П. ц.), или часть из них при $t\to+\infty$, а остальные — при $t\to-\infty$ (полуустойчивый П. ц.). Напр., система



$$\frac{dr}{dt}=1-r,\ \frac{d\varphi}{dt}=1$$

(r и φ — полярные координаты), общее решение к-рой $r=1-(1-r_0)\,e^{-t}$, $\varphi=\varphi_0+t$ (где $r_0\geqslant 0$), имеет устойчивый П. ц. $r=1$ (рис.). Понятие П. ц. переносится также на систему n-го порядка. С механич. точки зрения устойчивый П. ц. соответствует устойчивому периодич. режиму системы. Поэтому разыскание П. ц. имеет важное значение в теории нелинейных колебаний.

ПРЕДИКА́Т (от позднелат. praedicatum — сказанное) — высказывательная функция, определённая на некотором множестве M, то есть такая n-местная функция P, которая каждому упорядоченному набору $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ элементов множества M сопоставляет некоторое высказывание, обозначаемое $P(a_1, \ldots, a_n)$; P наз. n-местным П. на M. Под 0-местным П. понимается произвольное высказывание.

В математич. логике высказывание обычно отождествляется с его *истинностным значением* 1 («истина») или 0 («ложь»). При этом понятие П. получает следующее, наиболее общее определение: n-местным П. на множестве M наз. произвольная n-местная функция, определённая на M и принимающая значения 0 и 1. Если на наборе значений аргументов $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ П. P принимает значение 1, то есть $P(a_1, \ldots, a_n)=1$, то говорят, что этот набор значений аргументов удовлетворяет П. P, а П. P выполняется для набора $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$. П. наз. тождественно истинным, если он выполняется для любого набора значений своих аргументов, и тождественно ложным, если никакой набор не удовлетворяет этому предикату. П. наз. выполнимым, если он выполняется хотя бы для одного набора значений аргументов.

Множество тех наборов значений аргументов, к-рые удовлетворяют данному П., наз. областью истинности этого П. Если P есть n-местный П. на множестве M, то его область истинности является n-местным *отношением* на M. И наоборот, каждому n-местному отношению на множестве M однозначно соответствует n-местный П. на M. Поэтому изучение П. и отношений тесно связано между собой.

С помощью логич. операций из данных П. можно строить более сложные П. Наряду с теми логич. операциями, к-рые действуют и над высказываниями, для образования новых П. из уже имеющихся применяются *кванторы*. Применение квантора всеобщности $\forall x_i$ к П. $P(x_1, \ldots, x_n)$, где $1\leqslant i\leqslant n$, даёт $(n-1)$-местный П. $\forall x_i P(x_1, \ldots, x_n)$, который набору $\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\rangle$ сопоставляет высказывание, истинное тогда и только тогда, когда для любого значения a переменной x_i истинно высказывание $P(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. Квантор существования $\exists x_i$ в применении к П. $P(x_1, \ldots, x_n)$ при $1\leqslant i\leqslant n$ даёт $(n-1)$-местный П. $\exists x_i P(x_1, \ldots, x_n)$, который набору $\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\rangle$ сопоставляет высказывание, истинное тогда и только тогда, когда хотя бы для одного значения a переменной x_i истинно высказывание $P(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

Исследованием связей между П., определяемых их логич. структурой, занимается логика предикатов.

ПРЕДИКА́ТНАЯ ПЕРЕМЕ́ННАЯ — переменная, возможными значениями которой являются предикаты. См. также *Предикатов исчисление*.

ПРЕДИКА́ТОВ ИСЧИСЛЕ́НИЕ — общее название *формальных систем*, служащих для формализации логических умозаключений, в которых учитывается как логическая структура суждений (то есть каким образом данное суждение получено из других с помощью *логических операций*), так и их субъектно-предикатная структура, то есть связь между субъектом суждения (о чём говорится в данном суждении) и предикатом (что говорится о субъекте). При этом для логич. анализа суждений наряду с такими логич. операциями, как *конъюнкция*, *дизъюнкция*, *импликация*, *эквивалентность*, *отрицание*, используются *кванторы*, а субъектно-предикатная структура уточняется с помощью понятия *предиката*.

Поскольку в математич. логике интересуются лишь структурой суждений, отвлекаясь от их конкретного смысла, а также во избежание двусмысленностей, свойственных естественным языкам, для построения логики предикатов используется *формализованный язык*, алфавит к-рого обычно содержит четыре группы символов: 1) предикатные переменные — выражения вида P_n^m, где m и n — неотрицательные целые числа; 2) предметные переменные $x_1, x_2, x_3, \ldots$; 3) логич. символы $\&$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\to$ (импликация), $\sim$ (эквивалентность), $\neg$ (отрицание), $\exists$ (квантор существования), $\forall$ (квантор всеобщности); 4) вспомогательные символы (,) (скобки) и ,(запятая). Выражение P_n^m наз. m-местной предикатной переменной; 0-местные предикатные переменные наз. пропозициональными переменными.

Элементарной формулой наз. всякая пропозициональная переменная, а также любое выражение вида $P(y_1, \ldots, y_m)$, где P — какая-либо m-местная предикатная переменная ($m>0$), а $y_1, \ldots, y_m$ — произвольные предметные переменные. Из элементарных формул следующим образом строятся предикатные формулы: 1) все элементарные формулы суть формулы; 2) если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то выражения

$$(\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}),\ (\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}),\ (\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}),\ (\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}),\ \neg\mathfrak{A}$$

считаются формулами; 3) если $\mathfrak{A}$ — формула, x — предметная переменная, то $\forall x\mathfrak{A}$ и $\exists x\mathfrak{A}$ суть формулы. Напр., P_1^0, $P_0^1(x_1)$, $\exists x_1 P_1^2(x_1, x_3)$, $(P_0^1(x_2)\&\exists x_1 P_1^2(x_1, x_2))$ являются предикатными формулами.

Часть формулы $\mathfrak{A}$, к-рая сама является формулой, наз. подформулой формулы $\mathfrak{A}$. Областью действия квантора $\forall y$ или $\exists y$ в формуле $\mathfrak{A}$ наз. такая её подформула $\mathfrak{B}$, что $\forall y\mathfrak{B}$ или $\exists y\mathfrak{B}$ является подформулой формулы $\mathfrak{A}$. Вхождение переменной y в формулу $\mathfrak{A}$ наз. связанным, если оно есть вхождение в квантор $\forall y$ или $\exists y$, или в область действия одного из этих кванторов. Всякое вхождение переменной y, не являющееся связанным, наз. свободным. Напр., в формуле $(\forall x_1 P_0^1(x_1) \& P_1^1(x_1))$ первые два вхождения переменной x_1 — связанные, а третье — свободное. Переменная y наз. свободной переменной формулы $\mathfrak{A}$, если она имеет свободные вхождения в $\mathfrak{A}$.

Говорят, что задана *интерпретация* формулы $\mathfrak{A}$ на непустом множестве M, если каждой свободной переменной формулы $\mathfrak{A}$ сопоставлен нек-рый элемент из M, а каждой m-местной предикатной переменной из $\mathfrak{A}$ — нек-рый m-местный предикат на M. Истинностное значение $|\mathfrak{A}|$ формулы $\mathfrak{A}$ в данной интерпретации определяется индукцией по построению формулы $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ имеет вид $P(y_1, \ldots, y_m)$, то её значением является значение предиката, сопоставленного предикатной переменной P, на наборе значений переменных $y_1, \ldots, y_m$. Если $\mathfrak{A}$ имеет вид $\neg\mathfrak{B}$, то $|\mathfrak{A}|$=И тогда и только тогда, когда $|\mathfrak{B}|$=Л. Аналогично, в соответствии с истинностными таблицами для логич. операций &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ определяются значения формул вида

$$(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}),\ (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}),\ (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}),\ (\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B})$$

через значения формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Напр., $|\mathfrak{A}\&\mathfrak{B}|$= И тогда и только тогда, когда $|\mathfrak{A}|$=И и $|\mathfrak{B}|$=И. Значение формулы $\forall y\mathfrak{A}$ есть Л в том и только в том случае, когда $|\mathfrak{A}|$= =Л в нек-рой интерпретации, полученной из данной приписыванием значения переменной y. Значение формулы $\exists y\mathfrak{A}$ есть И, если $|\mathfrak{A}|$=И в нек-рой интерпретации, полученной из данной приписыванием значения переменной y. Если $|\mathfrak{A}|$=И, то говорят, что формула $\mathfrak{A}$ истинна в данной интерпретации.

Предикатная формула наз. общезначимой на множестве M, если она истинна в любой интерпретации на M. Напр., формула

$$(\exists x_1 P_0^1(x_1) \rightarrow \forall x_2 P_0^1(x_2))$$

общезначима на любом множестве, содержащем ровно один элемент, и не будет общезначимой на M, если в M есть хотя бы два элемента. Формула наз. общезначимой или тавтологией, или тождественно истинной, если она общезначима на любом непустом множестве. Тот факт, что формула $\mathfrak{A}$ общезначима, обычно обозначают так: $\models\mathfrak{A}$.

Целью логики предикатов является описание класса всех общезначимых формул. Одним из способов такого описания является построение П. и., то есть *исчисления*, аксиомами и выводимыми объектами к-рого являются предикатные формулы. При этом в качестве аксиом выбираются нек-рые общезначимые формулы, а правила вывода позволяют из общезначимых формул получать новые общезначимые формулы.

Обычно классич. П. и. строится на основе того или иного варианта *высказываний исчисления*: аксиомы классич. исчисления высказываний считаются схемами аксиом П. и., то есть любая предикатная формула, полученная из нек-рой аксиомы исчисления высказываний подстановкой в неё к.-л. предикатных формул вместо пропозициональных переменных, объявляется аксиомой П. и. Напр., из аксиомы исчисления высказываний $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ таким образом получается аксиома П. и.

$$(\forall x_2 P_0^1(x_2) \rightarrow (P_3^0 \rightarrow \forall x_2 P_0^1(x_2))).$$

К этим аксиомам добавляются две новые схемы аксиом:

$$(\forall x\mathfrak{A}(x) \supset \mathfrak{A}(y)) \text{ и } (\mathfrak{A}(y) \supset \exists x\mathfrak{A}(x)),$$

где $\mathfrak{A}(x)$ — произвольная предикатная формула, в к-рой переменная x не находится в области действия кванторов $\forall y$ и $\exists y$, а формула $\mathfrak{A}(y)$ получена заменой в $\mathfrak{A}(x)$ каждого свободного вхождения переменной x на y. Правилами вывода П. и. являются правило модус поненс и следующие два правила: $\forall$-правило, позволяющее из формулы $(\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A})$ получить формулу $(\mathfrak{B} \rightarrow \forall x\mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — произвольные предикатные формулы, причём $\mathfrak{B}$ не содержит свободно переменную x, и $\exists$-правило, позволяющее при тех же предположениях относительно формул $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и переменной x перейти от формулы $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$ к формуле $(\exists x\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$.

Выводом формулы $\mathfrak{A}$ в П. и. наз. конечная последовательность формул $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ такая, что каждая из формул $\mathfrak{A}_i$ либо есть аксиома, либо получается из нек-рых предшествующих ей формул по одному из перечисленных правил вывода, и $\mathfrak{A}_m$ совпадает с $\mathfrak{A}$. Формула $\mathfrak{A}$ выводима в П.и., или является теоремой, если можно построить вывод этой формулы. Согласно *Гёделя теореме о полноте*, все общезначимые предикатные формулы и только они выводимы в классич. П. и.

Дедуктивный аппарат П. и., то есть система аксиом и правила вывода, используется при построении логико-математич. исчислений (напр., *формальной арифметики*, *аксиоматической теории множеств*). *В. Е. Плиско.*

ПРЕДЛОЖЕ́НИЕ — то же, что *замкнутая формула*; см. также *Формальная арифметика*.

ПРЕДМЕ́ТНАЯ ПЕРЕМЕ́ННАЯ, индивидная переменная, объектная переменная, — переменная данного языка, допустимыми значениями которой являются объекты исследования теории, излагаемой на этом языке. Термин «П. п.» служит для отличения этих переменных от функциональных и предикатных переменных, допустимыми значениями к-рых являются соответственно функции и предикаты, определённые на объектах теории. Примером П. п. могут служить употребляемые в теории групп переменные для элементов группы, напр. переменные x, y, z в тождестве $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$; при нек-рых интерпретациях значениями этих переменных могут быть геометрич. преобразования, действительные функции и т. п., но, так как в теории групп они выступают как объекты, указанные переменные считаются предметными, а не функциональными. В то же время в математич. анализе переменные для действительных чисел суть П. п., а переменные для действительных функций выступают уже как функциональные переменные, т. к. существенна интерпретация этих переменных именно как функций. Таким образом, разделение переменных на предметные, функциональные и предикатные определяется не только множествами возможных значений, но и отношением этих переменных к объектам исследования теории.

В одном и том же языке могут встречаться несколько типов П. п. Напр., в математич. анализе наряду с действительными переменными употребляются переменные для натуральных и рациональных чисел, в геометрии — переменные для точек и прямых.

Понятие П. п. уточняется при рассмотрении *формализованных языков*, где П. п. отличается от функциональных и предикатных переменных синтаксич. правилами построения выражений.

ПРЕДНО́РМА — то же, что *полунорма*.

ПРЕДПОРЯ́ДОК — то же, что квазипорядок. См. *Порядка отношение*.

ПРЕДСТАВЛЕ́НИЙ ТЕО́РИЯ — теория, изучающая гомоморфизмы различных алгебраических систем. Наиболее развиты и нашли много приложений теории *линейных представлений* групп, ассоциативных алгебр и алгебр Ли.

Теория представлений групп зародилась в работах Л. Эйлера, А. Лежандра и К. Гаусса, где впервые появилось понятие характера коммутативной группы. Со времён Ж. Фурье коммутативный гармонич. анализ (разложение периодич. функций в ряды Фурье) стал одним из самых мощных методов математич. анализа. Вершиной теории характеров коммутативных групп является известный принцип двойственности Понтрягина для коммутативных

топологич. групп. П. т. некоммутативных групп существует как самостоятельная область математики около 100 лет. Первый период её развития связан с именами Г. Фробениуса, И. Шура, У. Бёрнсайда, Ф. Э. Молина. В работах этого периода рассматриваются только конечномерные представления конечных групп. Второй период — создание П. т. компактных топологич. групп. В это же время возникает теория конечномерных представлений полупростых групп Ли. Эти результаты нашли широкое применение в разных областях математики и физики (теория симметрич. пространств, теория моментов в квантовой механике). П. т. становится прикладной наукой, её популярность быстро растёт. Основной вклад в П. т. на этом этапе внесли Дж. Нейман, Г. Вейль и Э. Картан. В 40-х гг. началось систематич. изучение бесконечномерных представлений (И. М. Гельфанд и его школа), составляющее основное содержание третьего периода. Сейчас этот этап в идейном отношении завершён, хотя многие трудные конкретные задачи ещё ждут своего решения. Однако П. т. групп нельзя считать законченной наукой. Уже сейчас можно указать основные направления, составляющие новый, четвёртый этап её развития. Это, во-первых, теория бесконечномерных представлений групп, встречающихся в современной теории чисел и алгебраич. геометрии: алгебраич. групп над локальными полями и кольцами аделей. Во-вторых, это П. т. бесконечномерных групп Ли, к-рая всё больше сближается с математич. и теоретич. физикой.

Основными задачами П. т. являются: 1) классификация и описание неприводимых (или неразложимых) представлений данной алгебраич. системы; 2) разложение на простейшие (неприводимые или неразложимые) составляющие данного представления, напр. тензорного произведения двух неприводимых представлений, ограничения неприводимого представления большей системы или представления индуцированного неприводимого представления меньшей системы; 3) изучение пространств, операторов и специальных функций, возникающих при решении первых двух задач.

● Кириллов А. А., Элементы теории представлений, 2 изд., М., 1978; Наймарк М. А., Теория представлений групп, М., 1976; Барут А., Рончка Р., Теория представлений групп и ее приложения, пер. с англ., т. 1—2, М., 1980.

ПРЕДШЕСТВЕННИК — см. *Порядковое число.*

ПРЕКРАЩЕНИЯ ТОЧКА кривой — см. *Особая точка* кривой.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — обычно *отображение* φ некоторого множества X в себя. Иногда (в особенности в математич. анализе и геометрии), по традиции, преобразованиями называют и отображения, переводящие нек-рое множество в другое множество (таковы, напр., *Лапласа преобразование*, *Фурье преобразование* и нек-рые другие).

Совокупность всех П. множества замкнуто относительно (ассоциативной) операции композиции (т. е. образует полугруппу). Все обратимые преобразования, т. е. биективные преобразования множества X, образуют группу; она наз. *преобразований группой* множества X.

ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГРУППА, группа подстановок,— группа преобразований некоторого множества, рассматриваемая вместе с этим множеством. Точнее, П. г. есть пара (G, X), где G — группа, X — множество, для к-рой задана операция $(g, x) \mapsto gx$, сопоставляющая элементам $g \in G$ и $x \in X$ элемент $gx \in X$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $g(hx) = (gh)x$, $g, h \in G$, $x \in X$,

2) $ex = x$, $x \in X$, e — единица группы G.

Если задана П. г. (G, X), то каждый элемент $g \in G$ определяет инъективное преобразование $t_g : x \mapsto gx$ множества X, причём соответствие $t : g \mapsto t_g$ есть гомоморфизм группы G в симметрич. группу $S(X)$ всех биективных преобразований множества X. Обратно, всякий гомоморфизм G в $S(X)$ задаёт нек-рую П. г. (G, X). П. г. наз. эффективной, если t — мономорфизм. В этом случае группу G можно отождествить с подгруппой группы $S(X)$.

Наряду с абстрактными П. г. рассматриваются топологич. П. г. [при этом предполагается, что G — топологич. группа, X — топологич. пространство и отображение $(g, x) \mapsto gx$ непрерывно]. Аналогично определяются группы Ли преобразований и алгебраич. П. г.

П. г. играют важную роль во многих разделах математики и в её приложениях. На первом этапе развития теории групп, связанном с теорией Галуа, изучались группы подстановок, то есть П. г. конечных множеств. Теория групп Ли также начиналась как теория П. г. При изучении дифференциальных уравнений, нек-рых физич. систем и т. п. возникают П. г. — группы симметрий. Наличие достаточно богатой группы симметрий позволяет, напр., построить явные решения нек-рых дифференциальных уравнений. Особенно важна роль П. г. в геометрии (см. *Эрлангенская программа*). Уже в евклидовой планиметрии возникают такие П. г., как группа всех движений плоскости, группа параллельных переносов, группа поворотов вокруг заданной точки. С каждой фигурой на плоскости связана группа её симметрий, т. е. группа движений, переводящих эту фигуру в себя. Произвольная абстрактная группа G превращается в (эффективную) П. г. на том же множестве G, если в качестве t_g взять левый сдвиг $x \mapsto gx$ $(x \in G)$.

ПРИБЛИЖЕ́НИЕ — то же, что *аппроксимация*. Термин «П.» иногда употребляется в смысле приближающего объекта (напр., начальное П.).

ПРИБЛИЖЕ́НИЕ ФУ́НКЦИЙ — нахождение для данной функции f функции g из некоторого определённого класса (напр., среди алгебраических многочленов заданной степени), в том или ином смысле близкой к f, дающей её приближённое представление. Существует много разных вариантов задачи о П. ф., зависящих от того, какие функции приближают, какие функции используются для приближения, как строится приближающая функция g, как понимается близость функций f и g.

Для оценки близости функции f и приближающей её функции g используются в зависимости от рассматриваемой задачи метрики различных функциональных пространств. Обычно это метрики пространств непрерывных функций C и функций, интегрируемых с p-й степенью, L_p, $p \geqslant 1$, в к-рых расстояние между функциями f и g определяется (для функций, заданных на отрезке $[a, b]$) по формулам

$$\|f-g\|_C = \max_{x \in [a, b]} |f(x)-g(x)|$$

и

$$\|f-g\|_{L_p} = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Наиболее часто встречающейся и хорошо изученной является задача о П. ф. полиномами

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

где $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ — заданные функции, а $a_0, \ldots, a_n$ — произвольные числа. Обычно это алгебраич. многочлены

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

или тригонометрич. полиномы

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Рассматриваются также полиномы по ортогональным многочленам, по собственным функциям краевых задач и т. п. Другим классич. средством приближения являются рациональные дроби $P(x)/Q(x)$, где P и Q — алгебраич. многочлены заданной степени.

С 60-х гг. 20 в. значительное развитие получило приближение сплайнами (сплайн-функциями). Характерным их примером являются кубич. сплайны, определяемые следующим образом. Отрезок $[a, b]$ разбивается точками

$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, на каждом отрезке $[x_k,\ x_{k+1}]$ кубич. сплайн является алгебраич. многочленом 3-й степени, причём эти многочлены подобраны так, что на всём отрезке $[a,\ b]$ непрерывны сам сплайн и его первая и вторая производные. Оставшиеся свободными параметры могут быть использованы, напр., для того, чтобы сплайн интерполировал в узлах x_k приближаемую функцию. Улучшение приближения достигается за счёт увеличения числа узлов x_k и удачного их расположения на отрезке $[a,\ b]$. Сплайны оказались удобными в вычислительной математике, с их помощью удалось решить также нек-рые задачи теории функций.

Приближённые представления функций, а также сами функции на основе их приближённых представлений изучает теория приближений функций (употребляются также названия «теория аппроксимации функций» и «конструктивная теория функций»). К теории П. ф. обычно относят также задачи о приближении элементов в банаховых и общих метрич. пространствах.

Теория П. ф. берёт начало от работ П. Л. Чебышева. Он ввёл одно из основных понятий — понятие наилучшего приближения полиномами и получил ряд результатов о наилучших приближениях. Наилучшим приближением непрерывной функции $f(x)$ полиномами

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x)$$

в метрике C наз. величина

$$E_n(f)_C=\min\left\|f-\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k\right\|_C,$$

где минимум берётся по всем числам $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$. Полином, для к-рого достигается этот минимум, наз. полиномом наилучшего приближения (для других метрик определения аналогичны). П. Л. Чебышев установил, что наилучшее П. ф. x^{n+1} на отрезке $[-1,\ 1]$ в метрике C алгебраич. многочленами степени n равно 2^{-n}, а многочлен наилучшего приближения таков, что для него

$$x^{n+1}-\sum_{k=0}^{n} a_kx^k=2^{-n}\cos(n+1)\arccos x.$$

Следующая теорема Чебышева указывает характеристич. свойство полиномов наилучшего приближения в пространстве непрерывных функций: алгебраич. многочлен $\sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ в том и только том случае является многочленом наилучшего приближения непрерывной функции f в метрике $C[a,\ b]$, если существуют $n+2$ точки $a\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{n+2}\leqslant b$, в к-рых разность $f(x)-\sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ принимает максимальное значение своего модуля с последовательно чередующимися знаками.

Одним из первых результатов теории приближений является также теорема Вейерштрасса, согласно к-рой каждую непрерывную функцию можно приблизить в метрике C как угодно хорошо алгебраич. многочленами достаточно высокой степени.

С нач. 20 в. началось систематич. исследование поведения при $n\to\infty$ последовательности $E_n(f)$ — наилучших П. ф. f алгебраическими (или тригонометрическими) многочленами. С одной стороны, выясняется скорость стремления к нулю величин $E_n(f)$ в зависимости от дифференциальных свойств функции (т. н. прямые теоремы теории приближений), а с другой — изучаются свойства функции по последовательности её наилучших приближений (обратные теоремы теории приближений). В ряде важных случаев здесь получена полная характеристика свойств функций. Ниже приведены две такие теоремы.

Для того чтобы функция f была аналитической на отрезке, необходимо и достаточно, чтобы для последовательности её наилучших приближений алгебраич. многочленами выполнялась оценка

$$E_n(f)_C\leqslant Aq^n,$$

где $q<1$ и A — нек-рые положительные числа, не зависящие от n (теорема Бернштейна).

Для того чтобы функция f периода 2π имела производную порядка r, $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, удовлетворяющую условию

$$|f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x)|\leqslant M|h|^{\alpha}$$

($0<\alpha<1$, M — нек-рое положительное число) или условию

$$|f^{(r)}(x+h)-2f^{(r)}(x)+f^{(r)}(x-h)|\leqslant M|h|$$

(в этом случае $\alpha=1$), необходимо и достаточно, чтобы для наилучших П. ф. f тригонометрич. полиномами была справедлива оценка

$$E_n(f)_C\leqslant A/n^{r+\alpha},$$

где A — нек-рое положительное число, не зависящее от n. В этом утверждении прямая теорема была в основном доказана Д. Джексоном, а обратная является результатом исследований С. Н. Бернштейна, Ш. Ла Валле Пуссена и А. Зигмунда. Характеристика подобных классов функций, заданных на отрезке, в терминах наилучших приближений алгебраич. многочленами оказалась невозможной. Её удалось получить, рассматривая П. ф. с улучшением порядка приближения вблизи концов отрезка.

Возможность характеризовать классы функций с помощью приближений их полиномами нашла приложение в ряде вопросов математич. анализа. Развивая исследования по наилучшим П. ф. многих переменных полиномами, С. М. Никольский построил теорию вложений важных для анализа классов дифференцируемых функций многих переменных, в к-рой имеют место не только прямые, но и полностью обращающие их обратные теоремы.

Для приближений в метрике L_2 полином наилучшего приближения может быть легко построен. Для других пространств нахождение полиномов наилучшего приближения является трудной задачей, и её удаётся решить только в отдельных случаях. Это привело к разработке разного рода алгоритмов для приближённого нахождения полиномов наилучшего приближения.

Трудность нахождения полиномов наилучшего приближения отчасти объясняется тем, что оператор, сопоставляющий функции её полином наилучшего приближения, не является линейным: полином наилучшего приближения для суммы $f+g$ не обязательно равен сумме полиномов наилучшего П. ф. f и g. Поэтому возникла задача изучения (по возможности простых) линейных операторов, сопоставляющих каждой функции полином, дающий хорошее приближение. Напр., для периодич. функции $f(x)$ можно брать частные суммы её ряда Фурье $S_n(f,\ x)$. При этом справедлива оценка (теорема Лебега)

$$\|f-S_n(f)\|_C\leqslant(L_n+1)E_n(f)_C,$$

где L_n — числа, растущие при $n\to\infty$ как $(4/\pi^2)\ln n$,— т. н. константы Лебега. Эта оценка показывает, что полиномы $S_n(f)$ доставляют приближение, не очень сильно отличающееся от наилучшего.

Важный пример линейного оператора, используемого при П. ф., даёт интерполирование функций, когда требуется, чтобы в определённых точках (узлах интерполирования) совпадали значения функции и приближающего её полинома, а в более общем случае — и значения нек-рых их производных. Оценка, подобная теореме Лебега, имеет место и для приближений интерполяционными тригонометрич. полиномами с равноотстоящими узлами интерполирования, а также для приближений интерполяционными алгебраич. многочленами на отрезке $[-1,\ 1]$ с узлами $x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$, $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, то есть в нулях полинома Чебышева $\cos n\arccos x$.

Для большинства встречающихся в анализе классов функций известны такие линейные операторы, построенные с помощью рядов Фурье или на основе интерполяци-

онных полиномов, что значениями этих операторов являются полиномы, дающие на классе тот же порядок убывания приближений при $n \to \infty$, что и наилучшие приближения.

А. Н. Колмогоров начал изучение нового вопроса теории приближений — задачи о нахождении при фиксированном n такой системы функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, для к-рой наилучшие П. ф. заданного класса полиномами $\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$ были бы наименьшими (задача о поперечнике класса функций). В этом направлении в дальнейшем было выяснено, напр., что для ряда важных классов периодич. функций наилучшими в указанном смысле системами являются тригонометрич. полиномы.

Теория П. ф. является одним из наиболее интенсивно разрабатываемых направлений в теории функций. Идеи и методы теории приближений являются отправной точкой исследования в ряде вопросов вычислительной математики.

См. также *Приближение функций* комплексного переменного.

● Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, 2 изд., М., 1965; Дзядык В. К., Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., 1977; Корнейчук Н. П., Экстремальные задачи теории приближения, М., 1976; Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.— Л., 1949; Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного, М., 1960; Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., 1976.

С. А. Теляковский.

ПРИБЛИЖЕ́НИЕ ФУ́НКЦИЙ комплексного переменного — раздел комплексного анализа, изучающий вопросы приближённого представления (аппроксимации) функций комплексного переменного посредством аналитических функций специальных классов. Центральная проблематика относится к П. ф. многочленами и рациональными функциями. Основными являются задачи о возможности приближения, скорости приближения и аппроксимационных свойствах различных способов представления функций (интерполяционных последовательностей и рядов, рядов по ортогональным многочленам и многочленам Фабера, разложений в непрерывные дроби и т. п.). Теория приближений тесно связана с другими разделами комплексного анализа (теорией конформных отображений, интегральными представлениями, теорией потенциала и др.); многие теоремы, формулируемые в терминах теории приближений, являются, по существу, глубокими результатами о свойствах аналитич. функций и природе аналитичности.

Одним из первых результатов о полиномиальной аппроксимации является теорема Рунге, согласно к-рой любая функция, голоморфная в односвязной области плоскости комплексного переменного z, может быть равномерно аппроксимирована на компактных подмножествах этой области посредством многочленов от z. Общая задача о возможности равномерного приближения многочленами ставится так: для каких компактов K в комплексной плоскости любая функция f, непрерывная на K и голоморфная на множестве внутренних точек K, допускает равномерную аппроксимацию на K (с любой степенью точности) посредством многочленов от z. Необходимым и достаточным условием возможности такой аппроксимации является связность дополнения компакта K. Эта теорема для компактов без внутренних точек была доказана М. А. Лаврентьевым (1934), для замкнутых областей — М. В. Келдышем (1945), в общем случае — С. Н. Мергеляном (1951).

Пусть $E_n = E_n(f, K)$ — наилучшее П. ф. f на компакте K посредством многочленов от z степени не выше n (в равномерной метрике). Если K — компакт со связным дополнением и функция f голоморфна на K, то последовательность $\{E_n\}$ стремится к нулю быстрее нек-рой геометрич. прогрессии: $E_n < q^n$, $0 < q = q(f) < 1$, $n > N$. Если f непрерывна на K и голоморфна во внутренних точках K, то скорость её аппроксимации многочленами зависит как от свойств f на границе K (модуль непрерывности, дифференцируемость), так и от геометрич. свойств границы K.

Другие направления исследований — равномерные и наилучшие приближения рациональными функциями, приближения целыми функциями, весовые приближения многочленами, приближения многочленами и рациональными функциями в интегральных метриках. Большое внимание уделяется проблематике, связанной с П. ф. нескольких комплексных переменных.

● Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, т. 2, М., 1968; Смирнов В. И., Лебедев Н. А., Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.— Л., 1964; Уолш Д.-Л., Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, пер. с англ., М., 1961.

А. А. Гончар.

ПРИБЛИЖЁННАЯ ФО́РМУЛА — формула

$$f(x) \approx f^*(x),$$

получаемая из формулы вида

$$f(x) = f^*(x) + \varepsilon(x),$$

где $\varepsilon(x)$ рассматривается как погрешность и после оценки отбрасывается. Напр., П. ф. $(1+x)^2 \approx 1+2x$ получается из точной формулы для $(1+x)^2$ при малых $|x|$; этой формулой можно пользоваться при вычислении с точностью до сотых, тысячных, десятитысячных, если $|x|$ соответственно не больше 0,0707. . ., 0,0223. . ., 0,00707. . . Эта П. ф. даёт результат тем точнее, чем x ближе к 0. Но так бывает не всегда. Напр., точность П. ф. $\operatorname{tg} x \approx \frac{1}{(\pi/2)-x}$ тем больше, чем x ближе к $\pi/2$.

В таблице приведено несколько наиболее употребительных П. ф., причём показано, какого числа не должно превосходить $|x|$, чтобы формула давала k точных десятичных знаков.

Формула	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$(1+x)^3 \approx 1+3x$	0,04	0,012	0,004
$\frac{1}{1+x} \approx 1-x$	0,06	0,022	0,007
$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$	0,19	0,062	0,020
$\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{1}{3}x$	0,20	0,065	0,021
$\sin x \approx x$	0,31 (17°48′)	0,144 (8°15′)	0,067 (3°50′)
$\cos x \approx 1$	0,10 (5°43′)	0,031 (1°48′)	0,010 (0°34′)
$\operatorname{tg} x \approx x$	0,25 (14°8′)	0,112 (6°25′)	0,053 (3°2′)
$\lg(1+x) \approx 0,4343x$	0,14	0,047	0,015
$10^x \approx 1+2,303x$	0,04	0,014	0,004
$\lg\frac{1+x}{1-x} \approx 0,8686x$	0,25	0,119	0,055

Часто П. ф. получают с помощью разложения функции в ряды, напр. в ряд Тейлора. Чтобы уверенно применять П. ф., необходимо иметь оценку разности между точным и приближённым выражениями функции. Зная, напр., что разность между $\sin x$ и двучленом $x - \frac{1}{6}x^3$ не превосходит по абсолютному значению $\frac{1}{120}x^3$, легко убедиться, что П. ф. $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ даёт значения $\sin x$ с точностью до сотых, тысячных, десятитысячных, если x соответственно меньше 0,89 (51°), 0,55 (32°), 0,34 (20°).

ПРИВА́ЛОВА ТЕОРЕ́МА о сопряжённых функциях: пусть

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

— периодическая непрерывная функция с периодом 2π и

$$\tilde{f}(t) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos kt - a_k \sin kt)$$

— тригонометрически сопряжённая функция с $f(t)$: тогда если $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α, $f\in\mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то $\tilde{f}\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ при $0<\alpha<1$ и $\tilde{f}$ имеет модуль непрерывности, не больший $M\delta\ln(1/\delta)$ при $\alpha=1$. Эта теорема, доказанная **И. И.** Приваловым (1916), имеет важные применения в теории тригонометрич. рядов.

ПРИВЕДЕ́НИЕ К АБСУ́РДУ — правило логического вывода, позволяющее заключить, что если из списка утверждений Γ, A следует как утверждение B, так и утверждение $\neg B$, то из списка Γ следует $\neg A$. Правило П. к а. записывают, напр., в виде

$$\frac{\Gamma, A\to B;\ \Gamma, A\to\neg B}{\Gamma\to\neg A}$$

и называют также п р а в и л о м в в е д е н и я о т р и ц а н и я.

ПРИВЕДЕ́НИЯ ФО́РМУЛЫ в т р и г о н о м е т р и и — см. *Тригонометрические функции*.

ПРИВЕДЕ́ННАЯ СИСТЕ́МА ВЫЧЕТОВ — часть полной системы вычетов, состоящая из чисел, взаимно простых с модулем m. П. с. в. содержит число $\varphi(m)$ чисел, взаимно простых с m и меньших m. Всякие $\varphi(m)$ чисел, не сравнимые по модулю m и взаимно простые с ним, образуют П. с. в. по этому модулю.

ПРИВОДИ́МЫЙ МНОГОЧЛЕ́Н — см. *Многочлен*.

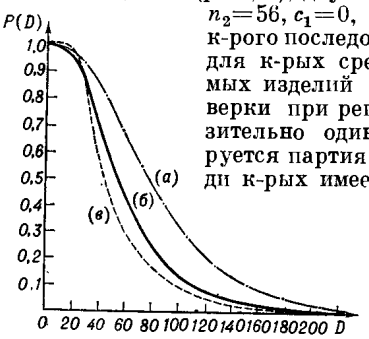
ПРИЁМОЧНЫЙ СТАТИСТИ́ЧЕСКИЙ КОНТРО́ЛЬ — совокупность статистических методов контроля массовой продукции с целью выявления её соответствия заданным требованиям.

П. с. к. проводится на основе системы (стандарта) правил контроля, предписывающих использование определённого плана контроля в зависимости от количества изделий в контролируемой партии, результатов контроля предыдущих партий, трудоёмкости контроля и т. д. Основным методом отбора изделий для контроля является случайный выбор (без возвращения), при к-ром изделия наудачу отбираются для контроля, причём любой из возможных составов выборки имеет одинаковую вероятность. Иногда используются другие методы выбора.

Если по результатам контроля изделия классифицируются на годные и дефектные, то говорят, что контроль проводится по альтернативному признаку. В практике П. с. к. широко используются одноступенчатые планы контроля по альтернативному признаку, определяемые заданием числа n отбираемых для контроля изделий (n — объём выборки) и т. н. приёмочного числа c. Если d (число обнаруженных в выборке дефектных изделий) больше c, то партия бракуется, если $d\leqslant c$, то принимается. Иногда выгодно использовать двухступенчатые планы П. с. к. по альтернативному признаку, определяемые объёмами n_1 и n_2 первой и второй выборок. Если d_1 — число дефектных изделий, обнаруженных в первой выборке не более c_1, то партия принимается, если же $d_1\geqslant r_1$ ($r_1>c_1$), то бракуется. В тех случаях, когда $c_1<d_1<r_1$, берётся вторая выборка, включающая n_2 изделий. Если же общее число d_1+d_2 дефектных объектов, обнаруженных в первой и второй выборках, не более c_2, то партия принимается, если же $d_1+d_2>c_2$, то бракуется. В нек-рых случаях рекомендуется использовать многоступенчатые планы контроля, последовательные планы (см. *Последовательный статистический анализ*) и др.

Для одних условий производства браковка партии влечёт за собой сплошную проверку с целью устранения из неё всех дефектных изделий, для других означает уничтожение изделий. П. с. к. является единственно возможным способом приёмочного контроля, когда контроль изделий носит разрушительный характер, напр. испытания на разрыв и т. п. Так как при использовании П. с. к. решение о приёме или браковке проводится на основе контроля лишь части случайно отбираемых изделий, то всегда имеется положительная вероятность приёмки партий, содержащих дефектные изделия.

Основной характеристикой плана П. с. к. является о п е р а т и в н а я х а р а к т е р и с т и к а плана контроля, равная вероятности $P(D)$ приёмки партии, содержащей D дефектных изделий. На рисунке показаны оперативные характеристики одноступенчатого плана контроля $n=35$, $c=2$ (рис., *а*), двухступенчатого плана $n_1=23$, $n_2=56$, $c_1=0$, $r_1=4$, $c_2=3$ (рис., *б*) и нек-рого последовательного плана (рис., *в*), для к-рых среднее число контролируемых изделий с учётом сплошной проверки при решении о браковке приблизительно одинаково, когда контролируется партия из $N=1000$ изделий, среди к-рых имеется 10 дефектных.



Оперативные характеристики для приёмочного статистического контроля: *а* — одноступенчатый план, *б* — двухступенчатый план, *в* — последовательный план.

В стандартах П. с. к. указывается, какие типы планов целесообразно использовать для контроля массовой продукции. Переход от контроля с одноступенчатыми планами к более сложным может уменьшить вероятность ошибочного принятия партий, содержащих большое число дефектных объектов. Однако планы, отличные от одноступенчатых, сложнее как с точки зрения их реализации, так и по методам получения на их основе статистич. оценок.

Пусть D — число дефектных изделий в партии, а d — число дефектных изделий, обнаруженных при выборочном контроле. Максимальное значение q математич. ожидания доли принимаемых дефектных изделий наз. п р е д е л ь н ы м с р е д н и м у р о в н е м выходного качества. Для одноступенчатого плана с объёмом выборки n и приёмочным числом c при случайном выборе изделий на контроль

$$q=\max_{0\leqslant D\leqslant N}(1/N)\sum_{d=0}^{c}(D-d)\,h_{N,D}^{n,d},$$

где

$$h_{N,D}^{n,d}=C_n^d C_{N-n}^{D-d}/C_N^D$$

— вероятность обнаружить d дефектных изделий в выборке объёма n из партии, содержащей N изделий. Если n и D много меньше N, а c много меньше n, то приближённо $q\approx\rho_c/n$, где, напр., $\rho_0=0{,}37$, $\rho_1=0{,}85$, $\rho_2=1{,}40$.

На основе результатов контроля можно получить т. н. последующие оценки для числа предъявленных и принятых дефектных изделий, а также для других показателей эффективности П. с. к.

Если в результате контроля изделий измеряемая величина принимает вещественное значение (размер, вес и т. п.), то говорят, что контроль ведётся по количественному признаку. Напр., годность изделия определяется тем, что нек-рый размер z не превышает значения d. Измеренные значения количественного признака содержат больше информации, чем данные только о количестве дефектных изделий, выявляемых при П. с. к. по альтернативному признаку. Можно ожидать, что методы П. с. к. по количественному признаку будут эффективнее П. с. к. по альтернативному признаку. Основы теории П. с. к. по количественному признаку разработаны в предположении, что измеряемые значения — взаимно независимые, одинаково распределённые случайные величины, законы распределения к-рых принадлежат нек-рому семейству, напр. семейству нормальных распределений. Выполнение этих предположений требует в конкретных условиях тщательной проверки. Поэтому к выводам теории П. с. к. по количественному признаку надо относиться с осторожностью.

● К о у д е н Д., Статистические методы контроля качества, пер. с англ., М., 1961; Б е л я е в Ю. К., Приёмочный контроль по

альтернативному признаку, в. 1—2, М., 1973; его же, Вероятностные методы выборочного контроля, М., 1975.

А. Н. Колмогоров, Ю. К. Беляев.

ПРИ́ЗМА (от греч. πρίσμα, букв.— отпиленное) — многогранник, у которого две грани — n-угольники (основания П.), а остальные n граней (боковых) — параллелограммы. Основания П. конгруэнтны и расположены в параллельных плоскостях. П. наз. прямой, если плоскости боковых граней перпендикулярны к плоскости основания. Прямую П. наз. правильной,

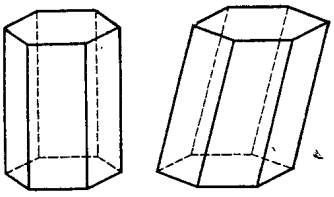


Рис. 1.

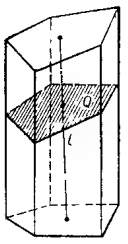
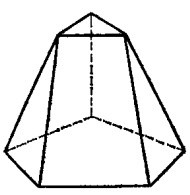


Рис. 2.

если основанием её служит правильный многоугольник. П. бывают треугольные, четырёхугольные и т. д., смотря по тому, лежит ли в основании треугольник, четырёхугольник и т. д. На рис. 1 дана шестиугольная П. (слева — прямая). Объём П. равен произведению площади основания на высоту (расстояние между основаниями П.). Часть П., рассечённой плоскостью, не параллельной основанию, наз. усечённой призмой (рис. 2). Объём усечённой призмы равен $V=lQ$, где l — длина отрезка, соединяющего центры оснований, Q — площадь сечения призмы плоскостью, перпендикулярной к этому отрезку.

Термин «П.» встречается в 3 в. до н. э. у Евклида и Архимеда.

ПРИЗМАТО́ИД (от греч. πρίσμα — призма, род. п. πρίσματος и εἶδος — вид) — многогранник, две грани которого (основания П.) лежат в параллельных плоскостях, а остальные являются треугольниками или трапециями, причём у треугольников одна сторона, а у трапеций оба основания являются сторонами оснований П. (рис.). Объём П. равен $\frac{h}{6}(S+S'+4S'')$, где h — расстояние между основаниями П., S и S' — их площади, S'' — площадь сечения, одинаково удалённого от обоих оснований.



«ПРИКЛАДНА́Я МАТЕМА́ТИКА И МЕХА́НИКА» — научный журнал Отделения механики и процессов управления АН СССР. Издаётся в Москве с 1936. Выходит 6 номеров в год. Публикует статьи по теоретич. механике, аэрогидродинамике, строительной механике, а также по отдельным вопросам математич. физики и вычислительной математики. Тираж (1987) ок. 2200 экз.

ПРИКЛАДНО́Е ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — см. *Программирование.*

ПРИКЛАДНО́Й МАТЕМА́ТИКИ ИНСТИТУ́Т имени М. В. Келдыша Академии наук СССР — центральное научно-исследовательское учреждение, разрабатывающее круг математических вопросов, связанных с применением и развитием электронно-вычислительных средств. Находится в Москве. В 1963 выделился из состава Математического института имени В. А. Стеклова АН СССР. С момента основания директором ин-та был М. В. Келдыш.

В ин-те были намечены принципиально новые возможности применения математики. Его коллектив впервые в СССР освоил и использовал ЭВМ и приобрёл опыт, на базе к-рого были заложены основы методов вычислит. математики и математич. обеспечения ЭВМ. В П. м. и. разрабатываются математич. проблемы ядерной энергетики, механики космич. полёта и др. прикладных задач, а также ряда направлений классич. математики. Ин-т награждён орденом Ленина (1967).

ПРИКОСНОВЕ́НИЯ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ, касательное преобразование,— преобразование кривых на плоскости, при которых две касающиеся кривые преобразуются в две другие кривые, также касающиеся друг друга. П. п. определяется формулами

$$X=f(x, y, y'),\ Y=\varphi(x, y, y'), \qquad (*)$$

где x, y — координаты переменной точки кривой, а X, Y — координаты переменной точки её образа. Для того чтобы формула (*) определяла П. п., $Y'=dY/dX$ должно быть независимо от $y''=d^2y/dx^2$.

ПРИКОСНОВЕ́НИЯ ТО́ЧКА — точка множества X в топологическом пространстве T такая, что всякая её окрестность имеет непустое пересечение с X. Совокупность П. т. образует замыкание множества X, это — пересечение всех *замкнутых множеств*, содержащих X; оно обозначается $[X]$ или $\mathrm{Cl}X$.

Операция $[\cdot]$, определённая на множествах пространства T, удовлетворяет условиям:

1) $[X]\cup[Y]=[X\cup Y]$,
2) $[X]\supset X$,
3) $[\varnothing]=\varnothing$,
4) $[[X]]=[X]$

и, кроме того,

$$[T]=T,\ X\subset Y\Rightarrow[X]\subset[Y]$$

и определяет в T топологич. структуру, в к-рой замкнутыми множествами считаются такие, что $[X]=X$. Эта операция двойственна операции взятия внутренности $\langle\cdot\rangle$ (см. *Внутренняя точка*).

ПРИМА́РНАЯ ГРУ́ППА (от ср.-век. лат. primarius — основной; лат. primarius — один из первых) — см. *Абелева группа.*

ПРИМИТИ́ВНО РЕКУРСИ́ВНАЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Рекурсивная функция.*

ПРИМИТИ́ВНЫЙ МНОГОЧЛЕ́Н — многочлен с целыми взаимно простыми между собой коэффициентами (то есть не имеющими общих делителей, кроме 1 и —1). Произведение двух целочисленных П. м. само есть П. м.

ПРИНАДЛЕ́ЖНОСТИ АКСИО́МЫ — группа аксиом о свойствах взаимного расположения (принадлежности) точек, прямых, плоскостей. См., напр., *Евклидова геометрия.*

ПРИСВА́ИВАНИЯ ОПЕРА́ТОР — см. *Программирования язык, Программы схема.*

ПРИСОЕДИНЁННЫЕ УРАВНЕ́НИЯ — то же, что *транспонированные уравнения.*

ПРИСТРЕ́ЛКИ МЕ́ТОД, метод стрельбы,— метод решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, который заключается во введении управляющих переменных (параметров) и в последующем нахождении их из системы уравнений. Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$y'(x)=F(x, y(x)) \qquad (1)$$

с граничным условием

$$g(y(a), y(b))=h, \qquad (2)$$

где вектор-функция $y(x)=(y_1(x), \ldots, y_n(x))^\top$ подлежит определению, а вектор-функции $F(x, y)=(F_1(x, y), \ldots, F_n(x, y))^\top$ и $g(y_0, y_1)=(g_1(y_0, y_1), \ldots, g_n(y_0, y_1))^\top$ и числовой вектор $h=(h_1, \ldots, h_n)$ заданы. Алгоритм П. м. состоит в следующем. Сначала вводят вектор параметров $r=(r_1, \ldots, r_n)$ и находят решение $r=r^*$ уравнения

$$g(r, Z(b, r))=h, \qquad (3)$$

где $Z(b, r)$ — граничное значение при $x=b$ решения $Z(x, r)$ задачи Коши:

$$\partial Z/\partial x=F(x, Z(x, r)),\ Z(a, r)=r.$$

Затем находят искомое решение краевой задачи (1), (2) как решение задачи Коши $y'(x)=F(x,\ y(x))$, $y(a)=r^*$. Для решения упомянутых задач Коши обычно используют численные методы, а для решения уравнения (3) — какой-либо итерационный метод (отсюда назв. «П. м.» — по аналогии с артиллерийской пристрелкой, где параметрами являются координаты начальной скорости снаряда).

В случае когда каждая из компонент вектора $g(y_0, y_1)$ зависит либо только от y_0, либо только от y_1 (одноточечные граничные условия), целесообразен другой выбор параметров. П. м. применяется также для решения сеточной краевой задачи.

ПРОБЛЕ́МНО-ОРИЕНТИ́РОВАННЫЙ ЯЗЫ́К — специализированный язык программирования задач, принадлежащих некоторому чётко выделяемому классу. Выделение класса производится либо фиксацией математич. объектов, лежащих в основе решаемых задач (напр., класс задач линейной алгебры), либо фиксацией области применения ЭВМ (напр., класс задач оперативного планирования и учёта на предприятии). Проблемная ориентация обычно производится в контексте нек-рого универсального языка программирования. *А. П. Ершов.*

ПРОГО́НКИ МЕ́ТОД — один из прямых методов решения линейного разностного уравнения вида

$$a_i y_{i-1}+c_i y_i+b_i y_{i+1}=f_i \qquad (1)$$

с действительными или комплексными коэффициентами a_i, b_i, c_i, f_i, $i=0, 1, \ldots, N$, причём $a_0=0$, $b_N=0$. Система вида (1) возникает при трёхточечной аппроксимации краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка, а также в неявных разностных схемах для нестационарных уравнений с частными производными. Часто требуется решить серию задач вида (1) с различными коэффициентами, причём число задач в серии может составлять несколько десятков и сотен при соответствующем числе N неизвестных в каждой задаче. П. м. является экономичным методом решения задач вида (1): для него число арифметич. операций пропорционально числу неизвестных.

Исключение неизвестных в (1) приводит к двучленному разностному уравнению

$$y_l-\alpha_{l+1}y_{l+1}=\beta_{l+1}, \qquad (2)$$

где α_{l+1} и β_{l+1} находятся по рекуррентным формулам:

$$\alpha_{l+1}=-(c_l+a_l\alpha_l)^{-1}b_l,\ \beta_{l+1}=(c_l+a_l\alpha_l)^{-1}(f_l-a_l\beta_l), \qquad (3)$$

$$l=0, 1, \ldots, N,$$

$$\alpha_0=0,\ \beta_0=0. \qquad (4)$$

Коэффициенты α_i и β_i наз. прогоночными коэффициентами, формулы (3), (4) описывают прямой ход П. м. Из (2) получаются окончательные формулы для нахождения неизвестных:

$$y_l=\beta_{l+1}+\alpha_{l+1}y_{l+1},\ l=N-1, \ldots, 1, 0, \qquad (5)$$

$$y_N=\beta_{N+1}, \qquad (6)$$

описывающие обратный ход. Формулы (3) — (6) наз. формулами правой прогонки. Аналогично выводятся формулы левой прогонки, где прогоночные коэффициенты ξ_i, η_i находятся в порядке убывания индекса i, а неизвестные y_i — в порядке возрастания индекса. Если надо найти только одно неизвестное, напр. y_m, где $1\leqslant m\leqslant N-1$, удобно комбинировать правую и левую прогонки. Пусть по формулам (3), (4) найдены α_m, β_m, а по соответствующим формулам левой прогонки — величины ξ_{m-1} и η_{m-1}. Тогда

$$y_m=\frac{\eta_{m-1}+\xi_{m-1}\beta_m}{1-\xi_{m-1}\alpha_m}.$$

Используя найденное y_m, по формуле (5) находят последовательно y_l для $l=m-1, \ldots, 1, 0$, а по соответствующей формуле $y_i=\eta_{i-1}+\xi_{i-1}y_{i-1}$ вычисляют y_i для $i=m+1, m+2, \ldots, N$ (метод встречных прогонок). Реализация П. м. по формулам (3) — (6) требует выполнения $3N+2$ умножений, $2N+2$ делений и $3N+2$ сложений и вычитаний.

Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям

$$|c_i|\geqslant|a_i|+|b_i|,\ a_ib_i\neq 0,\ i=1, 2, \ldots, N-1, \qquad (7)$$

$$|c_0|\geqslant|b_0|,\ |c_N|\geqslant|a_N|,\ c_0c_N\neq 0, \qquad (8)$$

причём хотя бы одно из неравенств (7), (8) строгое. Тогда для алгоритма (3) — (6) П. м. имеют место неравенства

$$c_l+a_l\alpha_l\neq 0,\ |\alpha_l|\leqslant 1,\ l=1, 2, \ldots, N.$$

Условия (7), (8) гарантируют корректность и устойчивость не только правой, но и левой прогонки. Кроме того, они обеспечивают существование и единственность решения системы (1) при любой сеточной функции $\{f_i\}$.

Другой путь получения формул П. м. основан на разложении матрицы A системы (1) на два сомножителя: правую и левую треугольные матрицы с сохранением тридиагональной структуры (т. н. метод факторизации).

В случае симметричной матрицы A можно построить квадратичный функционал, для к-рого уравнение (1) является уравнением Эйлера. Минимизируя этот функционал методом динамич. программирования, снова получают формулы (2) — (4). Любую систему уравнений вида (1), удовлетворяющих условиям $b_0\neq 0$, $a_N\neq 0$, $a_ib_i\neq 0$ для $i=1, 2, \ldots, N-1$, можно преобразовать к эквивалентной системе

$$a'_iy_{i-1}+c'_iy_i+a'_{i+1}y_{i+1}=f_i,\ i=0, 1, \ldots, N,$$

с симметричной матрицей A', причём $a'_0=a'_{N+1}=0$. При решении уравнений этого вида с сильно меняющимися коэффициентами применяется потоковый вариант П. м.

Если система (1) бесконечна и её коэффициенты периодичны, т. е. $a_i=a_{i+N}$, $b_i=b_{i+N}$, $c_i=c_{i+N}$, $f_i=f_{i+N}$, то для отыскания периодич. решения применяется метод циклической прогонки.

К уравнению вида (1) с матричными коэффициентами a_i, b_i, c_0 и векторными неизвестными y_i приводят разностные схемы для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка с матричными коэффициентами, а также для эллиптич. уравнения с частными производными в прямоугольной области. Для решения векторно-матричного аналога уравнения (1) применяется метод матричной прогонки, аналогичный П. м. (3) — (6). Условия корректности и устойчивости матричной прогонки аналогичны скалярным условиям (7), (8).

Пусть рассматривается пара уравнений

$$\left.\begin{aligned} u_{i+1}&=A_iu_i+B_iv_i+e_i\\ v_{i+1}&=C_iu_i+D_iv_i+f_i,\ i=0, 1, \ldots, N-1,\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

где A_i, B_i, C_i, D_i — действительные или комплексные коэффициенты, u_i и v_i — неизвестные, а e_i и f_i — заданные числа. Предполагается, что граничные условия имеют вид

$$u_0=\alpha v_0+\varphi,\ v_N=\beta u_N+\psi, \qquad (10)$$

где α, β, φ, ψ — заданные числа. Пусть решение системы (9), (10) ищется в виде

$$v_i=R_iu_i+s_i, \qquad (11)$$

где R_i, s_i — неопределённые коэффициенты. Тогда $R_N=\beta$, $s_N=\psi$,

$$R_i=(R_{i+1}B_i-D_i)^{-1}(C_i-R_{i+1}A_i),$$

$$s_i=(R_{i+1}B_i-D_i)^{-1}(f_i-s_{i+1}-R_{i+1}e_i), \qquad (12)$$

где $i=N-1, \ldots, 1, 0$. Подставив $v_0=R_0u_0+s_0$ в первое граничное условие (10), находят $u_0=(1-\alpha R_0)^{-1}(\varphi+\alpha s_0)$. Подставив (11) в первое уравнение (9), получают формулу обратного хода:

$$u_{n+1}=(A_i+B_iR_i)u_i+e_i+B_is_i,\ i=0, 1, \ldots, N-1. \qquad (13)$$

Вместо (11) можно исходить из представления $u_i=S_iv_i+t_i$ и получить формулы правой прогонки, аналогичные формулам (12), (13) левой прогонки. Для нахождения u_k и v_k при заданном значении k можно воспользоваться

встречной прогонкой. В случае матричных коэффициевтов уравнений (9) применима матричная прогонка.

Т. А. Гермогенова, А. Ф. Шапкин.

ПРОГРАММ АНАЛИЗ — систематическая процедура извлечения из программы для ЭВМ информации, как характеризующей программу в целом, так и соотнесённой тем или иным её элементам. Потребность в П. а. возникает во многих видах работы с программами, в частности при *программ синтезе*, *программ оптимизации* и при *смешанных вычислениях*. В качестве примеров свойств программ, устанавливаемых средствами П. а., можно указать следующие задачи: можно ли сопоставить двум величинам программы одну и ту же ячейку памяти ЭВМ? Содержит ли программа циклы или рекурсивные вызовы подпрограмм? Влияет ли результат одной команды программы на аргумент другой команды? и т. п.

Наиболее распространённым способом П. а. является потоковый анализ, представляющий собой индуктивный процесс движения по выделенному ориентированному графу, характеризующему структуру программы,— чаще всего управляющему графу (см. *Программы схема*), вершинами к-рого являются команды программы, а дуги (a, b) означают возможность команде b исполниться сразу вслед за командой a. Пусть N — множество команд программы, $P=\{x\}$ — запас всевозможных информационных сообщений (пометок), являющийся конечной дистрибутивной решёткой без своего максимального элемента 1. Минимальный элемент 0 содержательно соответствует минимуму информации, а операция пересечения пометок $x\wedge y$ соответствует максимальной информации, содержащейся как в x, так и в y. Роль команд программы в потоковом анализе выражается функцией $f: N\times P\to P$, наз. эффектом вершины и удовлетворяющей свойству дистрибутивности:

$$f(n, x\wedge y)=f(n, x)\wedge f(n, y).$$

Разметкой R программы является любое отображение $R: K\to P$, где $K\subseteq N$. Общий алгоритм П. а. работает с нек-рой непустой начальной разметкой E программы, активатором L — переменной разметкой, к-рая побуждает анализ к продолжению вплоть до опустошения L (вначале $L=E$), и текущей разметкой M, к-рая вначале помечает каждую команду программы максимальной пометкой 1, сокращается в процессе анализа и является искомой разметкой по окончании работы.

Сам алгоритм близок к построению транзитивного замыкания ориентированного графа:

A1: если $L=\varnothing$ (пустое множество), то на выход;

A2: выбрать любую $(n, p)\in L$ и вычесть её из L;

A3: взять $(n, q)\in M$, если $q\subseteq p$, то на A1;

A4: заменить элемент (n, q) в M на $(n, p\wedge q)$, пополнить L всеми элементами вида $(m, f(n, p\wedge q))$, где m — команда, к к-рой в управляющем графе ведёт дуга от n; затем на A2;

выход: взять M в качестве искомой разметки.

Конкретные виды П. а. достигаются подходящим выбором множества пометок и функции эффекта вершины.

● Ершов А. П., Введение в теоретическое программирование, М., 1977.

ПРОГРАММ ВЕРИФИКАЦИЯ — направление *программирования теоретического*, связанное с разработкой и изучением методов доказательства правильности программ, ориентированных на практическое применение, в частности на *программ синтез*.

Программа A частично правильна относительно предусловия P и постусловия Q (обозначение $P\{A\}Q$), если в случае когда P истинно для входных значений переменных и A завершает работу, Q истинно для выходных значений переменных. Программа A тотально правильна относительно P и Q, если выполняется $P\{A\}Q$ и A завершает работу для входных значений переменных, удовлетворяющих условию P. Для доказательства частичной правильности операторных программ обычно используются модификации метода Флойда, к-рый состоит в следующем. На *программы схеме* выбираются контрольные точки так, чтобы любой циклич. путь проходил, по крайней мере, через одну точку. С каждой контрольной точкой ассоциируется специальное условие (индуктивное утверждение или инвариант цикла), к-рое истинно при каждом переходе через эту точку. С входом и выходом схемы также ассоциируются пред- и постусловия. Затем каждому пути программы между двумя соседними контрольными точками сопоставляется т. н. условие правильности. Выполнимость всех условий правильности гарантирует частичную правильность программы.

Один из способов доказательства завершения работы программы состоит во введении в программу дополнительных счётчиков для каждого цикла и в доказательстве их ограниченности в процессе доказательства частичной правильности. Одна из модификаций метода Флойда заключается в построении конечной аксиоматич. системы (т. н. логики Хоара), состоящей из схем аксиом и правил вывода, в к-рой в качестве теорем выводимы утверждения о частичной правильности программ на языке программирования паскаль. Такая система используется и для задания аксиоматич. семантики паскаля.

Аксиоматич. системы, родственные логике Хоара, разработаны для фрагментов языков программирования кобол и алгол-68, а также для нек-рых языков с недетерминированными и параллельными конструкциями. Для доказательства правильности рекурсивных программ используется индукция, связанная с определением наименьшей неподвижной точки, а для программ со сложными структурами данных (напр., графами, деревьями) — индукция по структуре данных. В теоретич. исследованиях по логикам Хоара интересуются вопросами их состоятельности и полноты, т. е. обычными свойствами аксиоматизаций в логике. В работах по практич. П. в. рассматриваются вопросы построения удобных языков утверждений о программах, синтеза и элиминации инвариантов циклов, применения ЭВМ для автоматизации процесса П. в.

● Андерсон Р., Доказательство правильности программ, пер. с англ., М., 1982; Грис Д., Наука программирования, пер. с англ., М., 1984.

ПРОГРАММ ОПТИМИЗАЦИЯ — преобразование программ для ЭВМ, направленное на улучшение таких их рабочих характеристик, как время выполнения и объём используемой памяти. Автоматич. П. о., выполняемая в ходе *трансляции*, имеет важное практич. значение. Одно из требований, предъявляемых к П. о.,— это её корректность: преобразованная программа должна быть эквивалентна исходной по своим результатам. Иногда допускается, чтобы область определения преобразованной программы была доопределением исходной области. Другое требование состоит в том, чтобы П. о. имела приемлемую алгоритмич. сложность при реализации на ЭВМ (см. *Алгоритмов анализ*).

По степени зависимости оптимизации от особенностей ЭВМ П. о. делят на машинно-зависимую, машинно-ориентированную и универсальную. По размеру оптимизируемого участка программы различают локальную, квазилокальную и глобальную оптимизации. Для ускорения П. о. используют факторизацию управляющего графа (см. *Программы схема*): программа представляется в виде иерархии вложенных фрагментов (т. н. гамаков, интервалов, зон), а глобальная П. о. заменяется серией квазилокальных, применяемых к выделенным структурным фрагментам программы.

При П. о. часто отделяют фазу *программ анализа*, на к-рой выделяются фрагменты управляющего графа и выявляются разнообразные свойства программы, существенные с точки зрения улучшения её эффективности, от фазы собственно преобразования, на к-рой производится улучшение программы.

Наиболее важными с практич. точки зрения являются следующие виды П. о.: уменьшение частоты выполнения фрагментов программы («чистка» циклов, зон и рекурсивных областей); экономия избыточных и общих выражений; «чистка» программы за счёт удаления недоступных, неиспользуемых или не влияющих на результат фрагментов программы; выполнение действий над константами; открытая подстановка тел процедур; упрощающие алгебраические преобразования с использованием свойств применяемых в программе операций; оптимизация распределения регистров, замена рекурсии на итерацию.

Развитие средств вычислительной техники оказывает существенное влияние на П. о., включаемую в трансляцию. В особенности это касается машинно-зависимых оптимизаций. Появляется необходимость в оптимизации средств задания параллелизма вычислений (см. *Программирование параллельное*). Разработка алгоритмов оптимизации опирается на теорию схем программ. В свою очередь, методы П. о. находят применение при верификации программ и синтезе программ.

ПРОГРА́ММ СИ́НТЕЗ — процесс так называемого доказательного программирования, когда результирующая программа сопровождается доказательством её соответствия формальной постановке исходной задачи. На практике П. с. объединяет в себе три типа формальных манипуляций с программами: логич. синтез, сборка и конкретизация.

Логический синтез — один из способов перехода от спецификации программы к реализующему алгоритму, имеющий форму точного рассуждения в нек-рой логич. системе. Одной из логич. систем является конструктивная логика, где синтезируемая программа извлекается из конструктивного доказательства теоремы о существовании решения задачи. Другим типом логич. системы являются т. н. логики Хоара, где спецификация задачи задаётся в виде двух формул исчисления предикатов — пред- и постусловий (см. *Динамическая логика*), а аксиомами являются схемы пред- и постусловий, связываемых теми или иными конструкциями языка программирования. Синтезируемая программа получается в форме выводимого в логике Хоара утверждения, гласящего, что если аргументы задачи удовлетворяют заданному предусловию, то результат выполнения синтезированной программы удовлетворяет заданному постусловию (см. *Программ верификация*).

Сборка — особый случай логич. синтеза, когда элементами конструирования программы являются сравнительно крупные программные заготовки — т. н. модули программ. Спецификация частной задачи при сборке задаётся в виде указания аргументов и результатов на т. н. вычислительной модели, характеризующей класс синтезируемых программ и задающей правила сочетаемости модулей при сборке программ. Возникающая при этом логич. система обладает свойством разрешимости, что позволяет в ряде случаев осуществлять сборку программы автоматически.

При конкретизации результирующая программа получается путём сужения имеющегося универсального алгоритма на особые условия его применения, характеризующие частную задачу, подлежащую решению. Доказательность процедуры сужения обеспечивается использованием *смешанных вычислений*.

Существенную роль во всех видах П. с. играет *программ оптимизация*, основанная на формальных эквивалентных преобразованиях текста программ.

● Тыугу Э. Х., Концептуальное программирование, М., 1984; Грис Д., Наука программирования, пер. с англ., М., 1984.

ПРОГРА́ММА (от греч. *πρόγραμμα* — объявление, распоряжение) — план действий, подлежащих выполнению некоторым исполнителем, обычно автоматическим устройством, чаще всего ЭВМ; предписание, *алгоритм*. П. выглядит как конечная совокупность команд (инструкций), каждая из к-рых побуждает исполнителя выполнить нек-рую элементарную операцию над данными, хранящимися в памяти исполнителя, и имена к-рых являются параметрами команды. Автоматизм исполнения достигается тем, что любая текущая команда, кроме завершающей, указывает однозначно на команду П., к-рая должна выполниться после текущей. Особенностью исполнения является наличие команд ветвления (условных переходов), в к-рых выбор одного из нескольких указанных продолжений делается на основании проверки свойств данных, упоминаемых в команде. Другой особенностью является возможность многократного выполнения отдельных команд. Эти особенности приводят к тому, что последовательность выполняемых команд и её длина при исполнении П. могут варьировать, однозначно определяясь входными данными. Таким образом, П., являясь конечным объектом, побуждает исполнителя закономерно реагировать на потенциально бесконечное разнообразие входных данных. Тем самым П. так же, как и теоремы с их доказательствами, реализуют всеобщность математич. закономерностей.

Математич. абстракции П. изучаются *программированием теоретическим*. П. важна не только как предписание для ЭВМ, но и как источник операционного знания для человека. Тем самым *программирования языки*, созданные для записи П., несут также коммуникативную функцию, свойственную естественным языкам.

Составление П. для ЭВМ, или *программирование*, стало в связи с широким применением ЭВМ новой массовой формой математич. практики. *А. П. Ершов.*

ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — 1) процесс составления *программы*, плана действий.

2) Дисциплина, изучающая методы и приёмы составления программ. С определённой долей условности П. как дисциплина делится на *программирование теоретическое*, изучающее математич. абстракции программ и способов их построения, системное программирование, имеющее дело с разработкой *программного обеспечения* ЭВМ, т. е. программных комплексов массового и длительного применения, и П. прикладное, обслуживающее конкретные применения ЭВМ во всём их разнообразии.

Составление программы является творческой задачей, т. к. поиски способа достижения даже чётко сформулированной цели в общем случае требуют выработки или привлечения нового знания. В нек-рых частных случаях возможно нахождение более систематической и формальной процедуры П. Так, если задание на П. уже сформулировано в виде алгоритма, то П. сводится к переводу с языка записи алгоритма, или *программирования языка*, к языку, непосредственно воспринимаемому исполнителем. В нек-рых математич. моделях задача перевода решается исчерпывающе. Поиски систематич. процедур перевода записей алгоритма в программы или извлечения программы из условия задачи и дополнительной информации составляют предмет *программ синтеза* и его частного случая — *трансляции* программ.

Методика П. уделяет особое внимание способам описания исходной спецификации программы (см. *Программы спецификация*), поскольку умелое использование заложенной в спецификации информации позволяет придать П. более достоверный характер. Важным аспектом П. является забота о чёткой структуре программы, облегчающей проверку её правильности (см. *Программ верификация*), а главное — выделение и изоляцию тех фрагментов программы, дальнейшая детализация к-рых требует привлечения нового знания. Дополнительным средством проверки правильности уже составленной программы является её отладка, т. е. систематич. испытания программы на машине и сравнение эффекта, производимого программой, с ожидаемым. Хотя на практике отладка является преимущественным способом проверки программ, теоретически она не может быть исчерпывающей, т. к. установление правильности программы путём

конечной системы испытаний может быть достигнуто только для очень узких классов задач.

● Любимский Э. З., Мартынюк В. В., Трифонов Н. П., Программирование, М., 1980; Мейер Б., Бодуэн К., Методы программирования, пер. с франц., т. 1—2, М., 1982; Грис Д., Наука программирования, пер. с англ., М., 1984.

А. П. Ершов.

«ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ» — научно-технич. журнал Отделения математики АН СССР. Издаётся в Москве с 1975. Выходит 6 номеров в год. Публикует статьи по различным вопросам программирования на ЭВМ и смежным вопросам. Тираж (1987) ок. 10200 экз.

ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ ДОКАЗА́ТЕЛЬНОЕ — см. *Программ синтез.*

ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ МАТЕМАТИ́ЧЕСКОЕ — см. *Математическое программирование.*

ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ ПАРАЛЛЕ́ЛЬНОЕ — раздел программирования, связанный с изучением и разработкой методов и средств для: а) адекватного выражения в программах естественного параллелизма решаемых на ЭВМ задач; б) распараллеливания обработки информации в многопроцессорных и мультипрограммных ЭВМ с целью ускорения вычислений и эффективного использования ресурсов машины.

В отличие от обычного (последовательного) программирования, основу к-рого составляет понятие *алгоритма*, исполняемого по шагам строго последовательно во времени, в П. п. программа порождает совокупность процессов обработки информации, связанных между собой статическими или динамическими пространственно-временны́ми или причинно-следственными отношениями.

Параллелизм вычислений выступает в разных конкретных формах в зависимости от этапа программирования, от сложности параллельно выполняемых фрагментов вычислений и характера связей между ними. На этапе составления математич. модели задачи и выбора метода её решения выявляется присущий задаче естественный параллелизм и способ его оптимальной реализации в процессе вычислений. На этапе программирования главной задачей является выбор удобных для программиста и подходящих для данного класса ЭВМ способов представления в программе параллельных процессов и взаимодействий между ними. На этапе исполнения программы главной проблемой является организация в ЭВМ вычислительного процесса, эффективно реализующего программный параллелизм при заданной конфигурации машины.

В теории П. п. разрабатываются формальные модели параллельных программ, процессов и систем и с их помощью исследуются различные содержательные аспекты П. п.: автоматич. распараллеливание последовательных алгоритмов и программ; разработка методов параллельных вычислений для разных классов задач и разных типов параллельных вычислительных систем; оптимальное планирование параллельных вычислений и распределение ресурсов ЭВМ между параллельными процессами; формальное описание семантики программ и языков П. п. Среди таких моделей — схемы параллельных программ, отражающие с разной степенью детализации структурные свойства программ, графовые модели и асинхронные сети (т. н. сети Петри), являющиеся математич. абстракциями дискретных процессов и систем.

Исследования в области П. п. имеют большое значение для дальнейшего развития архитектуры высокопроизводительных вычислительных машин и комплексов.

● Вальковский В. А. [и др.], Элементы параллельного программирования, М., 1983.

ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ ПРИКЛАДНО́Е — раздел *программирования*, обслуживающий конкретные применения ЭВМ во всём их разнообразии.

ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ СИСТЕ́МНОЕ — раздел *программирования*, имеющий дело с разработкой *программного обеспечения* ЭВМ.

ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ ТЕОРЕТИ́ЧЕСКОЕ — математическая дисциплина, изучающая математические абстракции *программ*, трактуемых как объекты, выраженные на формальном языке, обладающие определённой информационной и логической структурой и подлежащие исполнению на автоматических устройствах.

П. т. сформировалось преимущественно на основе двух моделей вычислений: последовательных программ с памятью (операторных программ) и рекурсивных программ. Обе модели строятся над нек-рой абстрактной алгебраич. системой $\langle D, \Phi, \Pi \rangle$, образованной предметной областью D, конечными наборами (сигнатурой) функциональных Φ и предикатных Π символов с заданным для каждого символа числом его аргументов (арностью). Определение класса программ слагается из трёх частей: схемы программы (синтаксиса), интерпретации и семантики. *Программы схема* — это конструктивный объект, показывающий, как строится программа с использованием сигнатуры и других формальных символов. Интерпретация — это задание конкретной предметной области и сопоставление символам сигнатуры конкретных функций и предикатов (базовых операций), согласованных с предметной областью и арностью символов. Семантика — это способ сопоставления каждой программе результата её выполнения. Как правило, с программами связывают вычисляемые ими функции. Интерпретация обычно входит в семантику как параметр, поэтому схема программы задаёт множество программ и вычисляемых ими функций, к-рое получается при варьировании интерпретаций над нек-рым запасом базовых операций.

Исследования по П. т. несут на себе отпечаток общематематич. средств, используемых при изучении моделей программ. Формально-комбинаторные методы формируют теорию схем программ, изучающую свойства программ, инвариантные к выбору интерпретации базовых операций. Логич. методы изучают способы определения семантики программы, а также создают аксиоматич. системы для вывода утверждений о свойствах программы (см. *Программ верификация*). Алгебраич. методы, отвлекаясь от конкретной структуры программы, концентрируют внимание на изучении множеств, возникающих при рассмотрении программы или класса программ.

Сложившиеся разделы П. т. охватывают в основном модели последовательных вычислений, выполняемых одним активным устройством. Изучение проблем, возникающих при необходимости организовать совместную работу ансамбля машин, объединяемых для решения одной задачи или взаимодействующих посредством передачи сигналов и информации, составляет предмет новой, становящейся дисциплины — *программирования параллельного*.

П. т. оказывает влияние на практику прежде всего как концептуальный багаж при изучении программирования и — более технич. путём — через теорию формальных *программирования языков*. Здесь свойства абстрактных моделей вычислений используются для уточнения семантики языков программирования и для обоснования различных манипуляций с программами: *программ синтез*, *трансляция*, *программ оптимизация*, содержательные преобразования и т. п.

● Ершов А. П., Введение в теоретическое программирование, М., 1977; Семантика языков программирования. Сб. статей, пер. с англ., М., 1980; Грис Д., Наука программирования, пер. с англ., М., 1984.

А. П. Ершов.

ПРОГРАММИ́РОВАНИЯ СИСТЕ́МА — комплекс программ, осуществляющих *трансляцию* программ с того или иного языка программирования и предоставляющих инструментальные средства разработки программ на этом языке (см. *Программное обеспечение*).

ПРОГРАММИ́РОВАНИЯ ЯЗЫК — формальная знаковая система, служащая общению человека с ЭВМ. Решая вычислительные задачи или управляя исполнительными механизмами, ЭВМ с её *программным обеспечением* демонстрирует сложные формы поведения, обычно относимые к умственной деятельности человека. Именно эта

схожесть функций, отражающая общность законов обработки информации в живых организмах и автоматич. устройствах, позволяет говорить о языке ЭВМ, о понимании машиной передаваемой ей информации, об общении человека и ЭВМ. Основное назначение П. я.— быть средством *программирования*, т. е. формулирования программ, подлежащих исполнению на ЭВМ. Осмысленная программа для ЭВМ представляет собой своеобразную операционную и информационную модель нек-рой закономерности внешнего мира, причём программа фиксирует эту закономерность в точной и воспроизводимой форме. Эта документальная сторона программирования делает П. я. также важным средством профессионального общения людей.

Наиболее распространённым видом П. я. являются алгоритмические языки, формулирующие алгоритм решения задачи на ЭВМ. Среди понятий алгоритмич. языков выделяются базовые конструкции — описания, выражения и операторы (команды, инструкции). Описания характеризуют тип (вид) значений, вычисляемых при исполнении программы, их представления и способ хранения в памяти ЭВМ. Для составных значений (векторов, матриц, структурных величин) указывается также способ доступа к их элементарным компонентам (см. *Структура данных*). Выражения являются источником значений, операторы — единицами законченных действий в программе. Базовыми операторами являются присваивание значения выражения переменной величине, передача управления (безусловная или по условию), вызов процедуры, цикл.

Циклы и процедуры — наиболее характерные средства П. я. для сокращённой записи сколь угодно длинных вычислений. Цикл организует повторное выполнение нек-рой части программы (тело цикла), управляемое заданным условием на число повторений. Описание процедуры вводит сокращённое параметризованное функциональное обозначение для нек-рой части программы (тело процедуры). Выполнение тела процедуры впоследствии может трактоваться как элементарное действие, инициируемое вызовом процедуры, вносящим одновременно в тело процедуры фактич. значения параметров.

Обычно П. я. носит универсальный характер, допуская формулирование алгоритмов решения самых разнообразных задач на различных типах ЭВМ. В то же время для более удобного представления задач из нек-рого чётко выделяемого класса создают проблемно-ориентированные П. я., а для более полного использования возможностей конкретной ЭВМ — машинно-ориентированные языки, или ассемблеры. В связи с развитием методов формального вывода программ из условия задачи (см. *Программ синтез*) П. я. обогащаются средствами спецификации программы (см. *Программы спецификация*), позволяющими избежать деталей чисто алгоритмич. описания.

Наиболее известные П. я. (1987) — *фортран*, *бейсик*, *паскаль*, *кобол*, *ПЛ*/I, *алгол*-68, *ада*. К более специальным языкам относятся *лисп*, *симула*-67, *снобол*. В СССР разработаны также языки *альфа*, *эль*-76.

● Криницкий Н. А., Миронов Г. А., Фролов Г. Д., Программирование и алгоритмические языки, 2 изд., М., 1979; Барron Д., Введение в языки программирования, пер. с англ., М., 1980.

А. П. Ершов.

ПРОГРА́ММНАЯ ЛО́ГИКА — то же, что *динамическая логика*.

ПРОГРА́ММНОЕ ОБЕСПЕ́ЧЕНИЕ — организованная совокупность программ постоянного употребления, ориентирующая ЭВМ на тот или иной класс применений. Различается общесистемное П. о., характеризующее данный тип ЭВМ и лежащее в основе любого её применения, и прикладное П. о., ориентирующее ЭВМ на заданный класс задач.

Ядром общесистемного П. о. является операционная система — комплекс программ, связывающих устройство ЭВМ в единое целое и обеспечивающих фундаментальные процессы, лежащие в основе исполнения любой программы: управление памятью, управление заданиями, связь с внешней памятью и устройствами ввода-вывода, организация совместного исполнения нескольких программ, самоконтроль ЭВМ. Следующий слой общесистемного П. о. образует система программирования, к-рая осуществляет трансляцию программ с того или иного языка программирования, а также предоставляет инструментальные средства разработки программ, включая *программ верификацию* и *программ синтез*. К системе программирования примыкают системы управления *базами данных*, разнообразные средства обработки текстовой информации и системы *машинной графики*.

Прикладное П. о. разрабатывается обычно в виде пакета прикладных программ (ППП), т. е. программ, образующих целостное единство. Основное назначение ППП — дать возможность пользователю ЭВМ сформулировать задачу, найти и использовать её решение в понятиях и терминах, близких его основной деятельности и не требующих детального программирования средствами универсального языка.

● Королев Л. Н., Структуры ЭВМ и их математическое обеспечение, 2 изд., М., 1978; Флорес А., Программное обеспечение, пер. с англ., М., 1971.

ПРОГРА́ММЫ СПЕЦИФИКА́ЦИЯ — а) точное описание задачи, которую должна решать программа для ЭВМ; б) деятельность по построению такого описания.

Назначение П. с.— точно фиксировать постановку задачи в рамках нек-рой математич. модели и служить основой для систематич. программирования, в частности для *программ синтеза*. Проектирование и разработка программы могут включать в себя несколько уровней, на каждом из к-рых программа представлена нек-рой спецификацией. Поэтому спецификации используются не только для описания исходной задачи, но и для промежуточных представлений. Переход от одного представления к другому может выполняться как вручную, так и автоматически, напр. с помощью *трансляции*.

Существенное отличие спецификации от программы состоит в использовании средств описания, ориентированных в большей степени на понимание описания человеком, нежели на автоматич. обработку с помощью ЭВМ. Понятия и средства построения математич. объектов, используемые в спецификациях, выходят далеко за рамки того, что характерно для типичных языков программирования. Это — равенства, системы подстановок и формулы исчисления предикатов, таблицы, графы (сети, диаграммы), операции над сложными объектами, средства описания взаимодействия процессов и процедурные средства высокого уровня, структурирование рассматриваемой области или задачи с помощью типов, схем и абстрактных математич. структур, таких, напр., как алгебраич. системы.

Тем не менее между языками спецификации и языками программирования нет абсолютной границы. Многие языки программирования содержат средства высокого уровня, характерные для языков спецификации. Понятие П. с. относительно ещё и в том смысле, что зависит от объёма математич. знаний, к-рые необходимы для понимания П. с.

● Требования и спецификации в разработке программ. Сб. статей, пер. с англ., М., 1984.

ПРОГРА́ММЫ СХЕ́МА — математическая абстракция программы, отражающая её структурные свойства. При моделировании программ схемами переменные, операции, предикаты или даже целые фрагменты программ заменяются формальными символами, не имеющими внутренних свойств. В то же время структура программы, в частности информационные и управляющие связи её команд и других составных частей, при построении П. с. обычно сохраняется. Таким образом, свойства П. с. распространяются на целый класс программ, к-рые могут

быть получены из схемы при той или иной интерпретации, сопоставляющей формальным символам конкретные переменные, операции и предикаты.

Наиболее изученными (1987) являются классы стандартных (операторных) и рекурсивных схем. Стандартная схема — это всякая конечная последовательность (возможно, помеченных) команд следующих трёх типов:

а) оператор присваивания

$$x := f(x_1, \ldots, x_n) \text{ или } x := y;$$

б) условный оператор

$$\textbf{if } p(x_1, \ldots, x_n) \textbf{ then goto } M;$$

в) оператор перехода goto N;

здесь x, y, x_1, . . ., x_n — символы переменных, p — предикатный символ, f — функциональный символ, M, N — метки команд.

Рекурсивная схема — это совокупность функциональных определений, имеющих вид $\alpha(x_1, \ldots, x_n) = T$, где α — символ определяемой функции, T — обычный терм, образованный суперпозицией определяемых функций и заданных функциональных символов, или условный терм вида

$$\textbf{if } p(x_1, \ldots, x_n) \textbf{ then } T_1 \textbf{ else } T_2,$$

где p — предикатный символ, а T_1 и T_2 — любые термы.

Центральным понятием теории П. с. является понятие эквивалентности. Примером интерпретационной эквивалентности является функциональная эквивалентность стандартных схем: схемы S_1 и S_2 эквивалентны, если для любой интерпретации I программы $S_1(I)$ и $S_2(I)$ вычисляют одну и ту же функцию. Функциональная эквивалентность стандартных схем алгоритмически неразрешима. Понятие формальной эквивалентности не использует интерпретацию: со схемой связывается её детерминант — нек-рое множество термов, производное от множества всех путей в управляющем графе от начала к концу; схемы с равными детерминантами объявляются эквивалентными. Введённое таким образом отношение логико-термальной эквивалентности стандартных схем оказалось разрешимым с полиномиальной сложностью $O(n^6)$.

● Ершов А. П., «Проблемы кибернетики», 1973, в. 27, с. 87—110; Котов В. Е., Введение в теорию схем программ, Новосиб., 1978.

ПРОГРЕ́ССИЯ (от лат. progressio, букв.— движение вперёд) — последовательность $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, каждый член u_k которой получается из предыдущего u_{k-1} прибавлением постоянного (для данной П.) числа (*арифметическая прогрессия*) или умножением на постоянное число (*геометрическая прогрессия*).

ПРОДОЛЖЕ́НИЯ ПО ПАРА́МЕТРУ МЕ́ТОД — один из методов приближённого решения нелинейных функциональных уравнений. П. по п. м. состоит в том, что решаемое уравнение $P(x)=0$ погружается в множество уравнений $F(x, t)=0$ путём введения параметра t, принимающего заданные значения на конечном интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$, так, что первоначальное уравнение $F(x, t^*)=P(x)$ получается при $t=t^*$, а уравнение $F(x, t_0)=0$ легко решается или известно его решение x_0.

Обобщённое уравнение $F(x, t)=0$ последовательно решается при отдельных значениях t: $t_0, t_1, \ldots, t_k=t^*$. Уравнение при $t=t_{i+1}$ решается к.-л. итерационным методом (методом Ньютона, простой итерации, итерационным методом вариации параметра и др.), начиная с полученного решения x_i уравнения $F(x, t)=0$ при $t=t_i$. Если разность $t_{i+1}-t_i$ достаточно мала, то значение x_i может оказаться достаточно хорошим начальным приближением, обеспечивающим сходимость, для получения решения x_{i+1} при $t=t_{i+1}$.

На практике часто исходная задача естественным образом зависит от нек-рого параметра, к-рый может быть выбран в качестве параметра t. П. по п. м. применяется как для решения систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений, так и для более общих нелинейных функциональных уравнений в банаховых пространствах.

П. по п. м. иногда называют также прямой метод вариации параметра на конечном или бесконечном промежутке, а также комбинированный метод прямого и итерационного методов вариации параметра. В этих методах решение обобщённого уравнения $F(x, t)=0$ сводится путём дифференцирования по параметру t к решению дифференциальной задачи с начальными условиями (задачи Коши) методами численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с шагами $t_{i+1}-t_i$.

Метод вариации параметра применим к широкому классу задач как для построения решений, так и для доказательства их существования и единственности. Комбинированный метод вариации параметра представляет собой один из наиболее эффективных методов решения нелинейных задач.

● Ортега Дж., Рейнболдт В., Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными, пер. с англ., М., 1975.

ПРОЕКТИ́ВНАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ — раздел геометрии, изучающий проективные свойства фигур, то есть те свойства, которые не меняются при *проективных преобразованиях*, например при центральном проектировании (рис. 1).

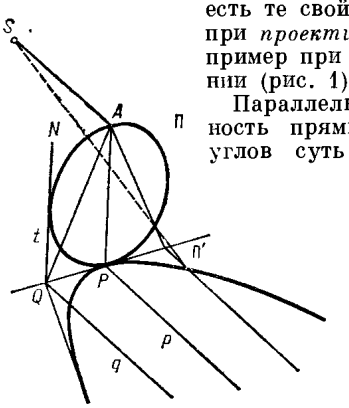


Рис. 1. Центральное проектирование из точки S окружности, лежащей в плоскости Π на плоскость Π′: пересекающиеся прямые AQ и AP проектируются в параллельные прямые q и p; окружность проектируется в параболу; касательная к окружности QN — в касательную к параболе.

Параллельность и перпендикулярность прямых, равенство отрезков и углов суть непроективные свойства. Действительно, пересекающиеся прямые могут спроектироваться в параллельные, равные отрезки — в неравные и т. д. Поэтому понятия расстояния и угла в П. г. не имеют места. Проективными свойствами являются, напр., прямолинейное расположение точек на прямой (коллинеарность), гармонич. расположение четырёх точек на прямой (см. *Гармоническая четвёрка*), порядок и класс алгебраич. кривой (проекция линии второго порядка есть также линия второго порядка), касание прямой и любой линии, разделённость (см. ниже).

При проектировании точек одной плоскости на другую не каждая точка плоскости Π имеет образ на плоскости Π′ и не каждая точка Π′ имеет прообраз на Π. Это обстоятельство привело к необходимости дополнения евклидовой плоскости т. н. бесконечно удалёнными (несобственными) точками (см. *Бесконечно удалённые элементы*). Такое присоединение приводит к образованию понятия *проективной плоскости*. Евклидова плоскость, дополненная несобственными элементами, наз. действительной проективной плоскостью. На ней через любые две различные точки проходит (и притом только одна) прямая, и любые две различные прямые имеют (и притом только одну) общую точку. Дополнение евклидовой плоскости до проективной приводит к тому, что проектирование становится взаимно однозначным преобразованием. Аналогичным образом из евклидова пространства получается *проективное пространство*.

Аксиоматическое задание действительной проективной плоскости может быть осуществлено различными способами. Наиболее распространённая система аксиом получается видоизменением системы аксиом, предложенной Д. Гильбертом для обоснования евклидовой геомет-

рии на плоскости. Проективная плоскость рассматривается как совокупность элементов двух родов: точек и прямых, между к-рыми устанавливаются отношения инцидентности и порядка, характеризуемые соответствующими аксиомами. Эта (первая) группа аксиом отличается от соответствующей группы аксиом евклидовой геометрии тем, что каждые две прямые на плоскости имеют общую точку и что на прямой имеется, по крайней мере, три различные точки. В качестве основного отношения порядка принимается р а з д е л ё н н о с т ь двух пар точек, лежащих на одной прямой, или двух пар прямых, проходящих через одну точку (рис. 2), описываемая второй группой аксиом. Иногда к этим аксиомам добавляются *непрерывности аксиомы*.

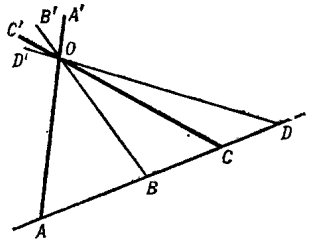


Рис. 2. Пара точек A и C разделяет пару точек B и D; пара прямых AA' и CC' разделяет пару прямых BB' и DD'.

Существуют интерпретации проективной плоскости, не привлекающие бесконечно удалённых элементов. Напр., пусть E^3 — евклидово пространство и O — точка в нём. Обозначим через П множество прямых, проходящих через O; точкой в П назовём евклидову прямую, проходящую через O, а прямой в П — множество евклидовых прямых, проходящих через O и лежащих в одной плоскости. Тогда П удовлетворяет аксиомам проективной плоскости.

Большое значение в П. г. имеет п р и н ц и п д в о й с т в е н н о с т и. Основные понятия П. г. проективной плоскости «точка» и «прямая» связаны между собой также одним из основных понятий П. г.— инцидентностью. Точка и прямая инцидентны, если точка принадлежит прямой или (что то же самое) прямая проходит через точку. Принцип двойственности утверждает, что если верно к.-л. предложение, касающееся точек, прямых и отношения инцидентности между ними, то верно и т. н. двойственное предложение, получаемое из данного, если поменять слова «прямая» и «точка» (для проективного пространства слова «плоскость» и «точка»). Напр.:

Двум различным точкам инцидентна прямая (и притом только одна).	Двум различным прямым инцидентна точка (и притом только одна).

Принцип двойственности отражает фундаментальное свойство проективной плоскости: прямые и точки на ней — совершенно равноправные геометрич. объекты.

Важную роль в П. г. играет *Дезарга предложение*. В частности, выполнение его необходимо и достаточно для введения координат на проективной плоскости проективными средствами. Для этого на проективной прямой вводятся операции сложения и умножения точек, превращающие её в тело K, из элементов к-рого и образуются проективные координаты. Построение осуществляется с помощью полных ч е т ы р ё х в е р ш и н н и к о в (рис. 3), конфигурация к-рых позволяет определить чисто проективно четвёрку гармонически расположенных точек. Двойственным образом с использованием полных ч е т ы р ё х с т о р о н н и к о в (рис. 4) устанавливаются операции сложения и умножения в пучке прямых.

Свойства проективной прямой как алгебраич. системы определяются, с одной стороны, геометрич. свойствами проективной плоскости, в к-рой она расположена. Так, напр., коммутативность тела равносильна выполнению *Паппа аксиомы*: тело K имеет отличную от двух характеристику тогда и только тогда, когда диагональные точки полного четырёхвершинника не лежат на одной прямой. С другой стороны, в зависимости от выбора исходного тела K определяются различные проективные плоскости Π_K как совокупности классов пропорциональных троек элементов тела K, за исключением тройки (0, 0, 0). Такой аналитич. подход, наряду с синтетическим, с успехом применяется для изучения проективных свойств кривых и поверхностей. Аналогичные построения можно провести и для проективного пространства.

Основы П. г. были заложены в 17 в. Ж. Дезаргом (в связи с развитием им учения о перспективе) и Б. Паскалем (в связи с изучением им нек-рых свойств конич. сечений). Большое значение для последующего развития П. г. имели работы Г. Монжа (2-я пол. 18 — нач. 19 вв.). Как самостоятельная дисциплина П. г. была изложена

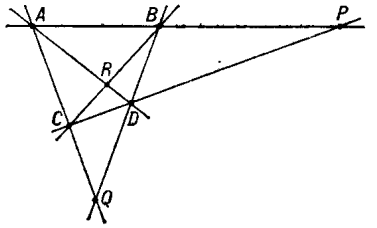


Рис. 3. Полный четырёхвершинник: четыре точки A, B, C, D (любые три из них не лежат на одной прямой) — вершины — соединены шестью прямыми — сторонами; точки пересечения противоположных (не проходящих через одну и ту же вершину) сторон P, Q, R — диагональные точки.

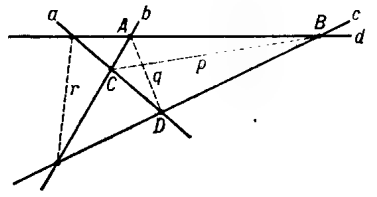


Рис. 4. Полный четырёхсторонник; четыре прямые a, b, c, d (любые три из них не проходят через одну точку) — стороны — пересекаются в шести точках — вершинах; прямые, соединяющие противоположные (не лежащие на одной и той же стороне) вершины p, q, r — диагональные прямые.

Ж. Понселе (нач. 19 в.). Заслуга Ж. Понселе заключалась в выделении проективных свойств фигур в отдельный класс и установлении соответствий между метрическими и проективными свойствами этих фигур. К этому же периоду относятся работы Ш. Брианшона. Дальнейшее развитие П. г. получила в трудах Я. Штейнера и М. Шаля. Большую роль в развитии П. г. сыграли работы К. Штаудта, к-рыми были также намечены контуры аксиоматич. построения П. г. Все эти геометры стремились доказывать теоремы П. г. синтетич. методом, положив в основу изложения проективные свойства фигур. Аналитич. направление в П. г. было намечено работами А. Мёбиуса. Влияние на развитие П. г. оказали работы Н. И. Лобачевского по созданию неевклидовой геометрии, позволившие в дальнейшем А. Кэли и Ф. Клейну рассмотреть различные геометрич. системы с точки зрения П. г. Развитие аналитич. методов обычной П. г. и построение на этой базе комплексной П. г. (Э. Штуди, Э. Картан) поставили задачу о зависимости тех или иных проективных свойств от того тела, над к-рым построена геометрия. В решении этого вопроса больших успехов добились А. Н. Колмогоров и Л. С. Понтрягин.

Нек-рые положения и факты П. г. применяются в номографии, в теории статистич. решений, в квантовой теории поля, в конструировании печатных схем (через теорию графов).

● Г л а г о л е в Н. А., Проективная геометрия, 2 изд., М.—Л., 1963; Г и л ь б е р т Д., К о н - Ф о с с е н С., Наглядная геометрия, пер. с нем., 3 изд., М., 1981; Г и л ь б е р т Д., Основания геометрии, пер. с нем., М.—Л., 1948; Е ф и м о в Н. В., Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978; К о к с т е р Х. С. М., Действительная проективная плоскость, пер. с англ., М., 1959; Х а р т с х о р н Р., Основы проективной геометрии, пер. с англ., М., 1970.

П. С. Моденов, А. С. Пархоменко.

ПРОЕКТИ́ВНАЯ КОНЕ́ЧНАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ — см. *Блок-схема*.

ПРОЕКТИ́ВНАЯ МЕ́ТРИКА — способ измерения длин и углов проективными средствами. Он состоит в закреплении нек-рой фигуры в качестве а б с о л ю т а, определяющего данную метрич. геометрию, и в выделении из группы всех проективных преобразований таких, к-рые отображают абсолют в себя и порождают таким образом соответствующую группу движений. Напр., метрика плоскости Лобачевского получается, если за абсолют принять нераспадающуюся действительную линию второго порядка,— тогда длина отрезка AB равна $\lambda \ln (ABPQ)$, где P

и Q — точки пересечения прямой AB с абсолютом, $(ABPQ)$ — двойное отношение, λ — константа, одинаковая для всех отрезков. Если для измерения длин и углов используется линия второго порядка без действительных точек, то получается (эллиптическая) геометрия Римана. Для построения евклидовой геометрии выбирают вырожденную линию второго порядка.

ПРОЕКТИ́ВНАЯ ПЛО́СКОСТЬ — евклидова плоскость, дополненная бесконечно удалёнными (несобственными) точками и прямой (см. *Бесконечно удалённые элементы*). При этом каждая прямая дополняется одной несобственной точкой — получается п р о е к т и в н а я п р я м а я (параллельные прямые дополняются общей несобственной точкой, непараллельные прямые — разными). Все несобственные точки всех проективных прямых П. п. принадлежат несобственной прямой. После дополнения евклидовой плоскости несобственными элементами становится верным утверждение: любые две прямые пересекаются.

П. п. можно определить аналитически как совокупность классов пропорциональных между собой троек действительных чисел, не равных одновременно нулю. При этом классы интерпретируются либо как точки П. п. (и тогда числа x_1, x_2, x_3 наз. однородными координатами точек), либо как прямые П. п. (и числа u_1, u_2, u_3 наз. однородными координатами прямых). Отношение инцидентности точки и прямой выражается равенством

$$\sum_{i=1}^{3} u_i x_i = 0.$$

В более общем смысле П. п. — совокупность двух множеств элементов, наз. соответственно точками и прямыми, для к-рых определены отношения инцидентности и порядка так, что соблюдаются требования аксиом проективной геометрии. С точки зрения топологии П. п.— замкнутая неориентируемая поверхность, эйлерова характеристика к-рой равна 1.

ПРОЕКТИ́ВНАЯ ПРЯМА́Я — *проективное пространство* размерности 1. П. п.— замкнутое одномерное многообразие.

ПРОЕКТИ́ВНАЯ СВЯ́ЗНОСТЬ — см. *Дифференциальная геометрия*.

ПРОЕКТИ́ВНОЕ АЛГЕБРАИ́ЧЕСКОЕ МНОГООБРА́ЗИЕ— см. *Алгебраическая геометрия*.

ПРОЕКТИ́ВНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — взаимно однозначное отображение проективной плоскости или проективного пространства в себя, при котором точки, лежащие на прямой, переходят в точки, также лежащие на прямой (поэтому П. п. иногда наз. к о л л и н е а ц и е й). П. п. проективной прямой наз. взаимно однозначное отображение её в себя, при к-ром сохраняется гармонич. расположение точек этой прямой. Простейшим и вместе с тем наиболее важным для приложений примером П. п. на плоскости является *гомология*, примером П. п. пространства — центральное проектирование (*перспектива*). П. п. образуют группу, основным инвариантом к-рой является двойное отношение четырёх точек прямой. Теории инвариантов групп П. п., оставляющих на месте нек-рую фигуру, представляют собой метрич. геометрии.

Основная теорема о П. п. прямой утверждает, что существует единственное П. п. прямой, переводящее три её заданные точки в любые другие три заданные точки. Эта теорема следует из *Паппа аксиомы*. Основная теорема о П. п. проективной плоскости утверждает, что каковы бы ни были четыре точки A, B, C, D плоскости, из к-рых никакие три не лежат на одной прямой, и четыре точки A', B', C', D' той же плоскости, из к-рых никакие три также не лежат на одной прямой, существует единственное П. п., к-рое точки A, B, C, D переводит соответственно в точки A', B', C', D'. Аналогичная теорема имеет место и в проективном пространстве: П. п. определяется пятью точками, из к-рых никакие четыре не лежат в одной плоскости.

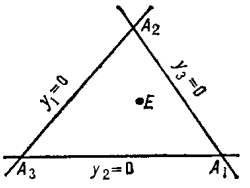
В однородных координатах П. п. выражается однородным линейным преобразованием, определитель матрицы к-рого не равен нулю. Рассматриваются также П. п. евклидовой плоскости или пространства; в декартовых координатах они выражаются дробно-линейными функциями, причём свойство взаимной однозначности преобразования утрачивается.

ПРОЕКТИ́ВНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — евклидово пространство, дополненное бесконечно удалёнными (несобственными) точками, прямыми и плоскостью (см. *Бесконечно удалённые элементы*). При этом каждая прямая дополняется одной несобственной точкой, каждая плоскость — одной несобственной прямой, всё пространство — одной несобственной плоскостью; параллельные прямые дополняются общей несобственной точкой, непараллельные — разными; параллельные плоскости дополняются общей несобственной прямой, непараллельные — разными; несобственные точки, дополняющие всевозможные прямые данной плоскости, принадлежат несобственной прямой, дополняющей ту же плоскость, все несобственные точки и прямые — несобственной плоскости.

П. п. можно определить аналитически как совокупность классов пропорциональных между собой четвёрок действительных чисел, не равных одновременно нулю. При этом классы интерпретируются либо как точки П. п., и тогда числа x_1, x_2, x_3, x_4 наз. однородными координатами точек, либо как плоскости П. п., а числа u_1, u_2, u_3, u_4 наз. однородными координатами плоскостей. Отношение инцидентности точки и плоскости выражается равенством $\sum_{i=1}^{4} u_i x_i = 0$. Аналогичным образом вводится понятие n-мерного П. п., играющего важную роль в алгебраич. геометрии, причём координатами его могут быть элементы нек-рого тела K.

В более общем смысле П. п.— совокупность трёх множеств элементов, наз. соответственно точками, прямыми и плоскостями, для к-рых определены отношения инцидентности и порядка так, что соблюдаются требования аксиом проективной геометрии. А. Н. Колмогоров и Л. С. Понтрягин показали, что если П. п. над телом K есть связное компактное топологич. пространство, в к-ром прямая непрерывно зависит от двух принадлежащих ей точек, и выполняются аксиомы инцидентности, то K есть либо поле действительных чисел, либо поле комплексных чисел, либо тело кватернионов.

ПРОЕКТИ́ВНЫЕ КООРДИНА́ТЫ — тройка чисел y_1, y_2, y_3, одновременно не равных нулю, определяющая с точностью до множителя пропорциональности положение точки на проективной плоскости по отношению к заданным четырём точкам A_1, A_2, A_3, E, никакие три из к-рых не лежат на одной прямой (четыре точки A_1, A_2, A_3, E наз. б а з и с н ы м и или ф у н д а м е н т а л ь н ы м и т о ч к а м и системы П. к.). Если на проективной плоскости введены *однородные координаты* x_1, x_2, x_3, в к-рых уравнения прямых A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 суть соответственно



$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0,\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и x_1^0, x_2^0, x_3^0 — координаты точки E т о п р о е к т и в н ы е к о о р д и н а т ы y_1, y_2, y_3 точки M, имеющей однородные координаты x_1, x_2, x_3, определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \lambda \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3}{a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0},\\ y_2 &= \lambda \frac{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3}{a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0},\\ y_3 &= \lambda \frac{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3}{a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Условия, что никакие три точки из четырёх базисных не лежат на одной прямой, равносильны тому, что определитель системы (1) и знаменатели в формулах (2) отличны от нуля. Прямые A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 имеют в П. к. уравнения $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=0$ и наз. координатными прямыми, точка E, П. к. к-рой 1, 1, 1, наз. единичной.

Во всякой системе П. к. прямая на проективной плоскости выражается однородным уравнением

$$u_1y_1+u_2y_2+u_3y_3=0.$$

Если базисные точки A_1, A_2, A_3, E нек-рой системы П. к. проективным преобразованием переводятся в четвёрку точек A_1', A_2', A_3', E', то П. к. произвольной точки M проективной плоскости относительно базисных точек A_1, A_2, A_3, E совпадают с П. к. её образа M' относительно базисных точек A_1', A_2', A_3', E'.

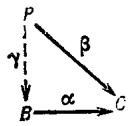
Однородные координаты являются частным случаем П. к., когда A_1 — несобственная точка оси Ox, A_2 — несобственная точка оси Oy (таким образом координатная прямая $y_3=0$ является несобственной), точка A_3 — точка пересечения осей, и точка E имеет декартовы координаты (1, 1).

Если координатные прямые и единичная точка системы П. к. являются собственными элементами проективной плоскости, то для любой собственной точки M её П. к. пропорциональны трилинейным координатам, т. е. отношениям расстояний от точки M до координатных прямых к соответственным расстояниям от единичной точки E до тех же прямых (при этом расстояния считаются одного знака, если точки M и E лежат по одну сторону от прямой).

П. к. y_1, y_2, y_3 определяются с точностью до множителя пропорциональности и, следовательно, являются однородными. Иногда рассматриваются также неоднородные П. к. как отношения $\frac{y_1}{y_3}$ и $\frac{y_2}{y_3}$ однородных П. к. при $y_3\neq 0$.

Аналогично определяются П. к. в пространстве; П. к. могут быть определены и на прямой.

ПРОЕКТИ́ВНЫЙ МО́ДУЛЬ — модуль P над ассоциативным кольцом с единицей, удовлетворяющий следующему условию: для любого эпиморфизма модулей $\alpha\colon B\to C$, если существует гомоморфизм $\beta\colon P\to C$, то найдётся и такой гомоморфизм $\gamma\colon P\to B$, что $\beta=\alpha\gamma$.



Эквивалентным определением является следующее: P проективен, если он — прямое слагаемое нек-рого свободного модуля. В частности, всякий свободный модуль проективен. Для нек-рых классов колец (напр., для колец многочленов над полем от нескольких переменных) доказано, что классы свободных и классы проективных модулей над этими кольцами совпадают. Изучение П. м. сводится к изучению П. м. со счётным числом образующих.

ПРОЕ́КТОР, проекционный оператор,— линейный оператор P в векторном пространстве такой, что $P^2=P$.

ПРОЕКЦИО́ННЫЕ МЕ́ТОДЫ — методы отыскания приближённого решения операторного уравнения в заданном подпространстве, основанные на проектировании уравнения на некоторое (вообще говоря, другое) подпространство. П. м. являются основой построения различных вычислительных схем решения краевых задач, в том числе метода конечных элементов и метода коллокации.

Пусть L — оператор, область определения $D(L)$ к-рого лежит в банаховом пространстве X, а область значений $R(L)$ — в банаховом пространстве Y. Для решения уравнения

$$Lx=y \qquad (1)$$

проекционным методом выбирают две последовательности подпространств: $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$,

$$X_n\subset D(L)\subseteq X,\ Y_n\subset Y,\ n=1,2,\ldots,$$

а также проекторы P_n, проектирующие Y на Y_n. Уравнение (1) заменяется приближённым

$$P_nLx_n=P_ny,\ x_n\in X_n. \qquad (2)$$

В случае $X=Y$, $X_n=Y_n$, $n=1, 2, \ldots$ П. м. (2) принято называть *Галёркина методом.*

Имеет место теорема сходимости П. м. Пусть L линеен и переводит $D(L)$ на $R(L)$ взаимно однозначно, причём $D(L)$ и $R(L)$ плотны в X и Y соответственно. Пусть подпространства X_n и Y_n конечномерны, $\dim X_n=\dim Y_n$, $n=1, 2, \ldots$, а проекторы P_n ограничены равномерно по n, то есть $\|P_n\|\leqslant c-\text{const}$, $n=1, 2, \ldots$ Тогда следующее условие а) равносильно набору условий б) и в):

а) начиная с нек-рого $n=n_0$, существует единственное решение x_n уравнения (2) и $\|Lx_n-y\|\to 0$ при любом $y\in Y$;

б) последовательность подпространств LX_n предельно плотна в Y, т. е. расстояние $d(y, LX_n)\to 0$ при $n\to\infty$ для всех $y\in Y$;

в) $\tau=\varliminf\limits_{n\to\infty}\tau_n>0$, где

$$\tau_n=\inf_{y_n\in LX_n,\ \|y_n\|=1}=\|P_ny_n\|.$$

Быстрота сходимости при соблюдении условий б) и в) характеризуется неравенством

$$d(y, LX_n)\leqslant\|Lx_n-y\|\leqslant(1+c/\tau_n)\,d(y, LX_n). \qquad (3)$$

В случае когда пространства X и Y гильбертовы, а P_n и Q_n — ортопроекторы, проектирующие Y соответственно на Y_n и LX_n, условие в) равносильно условию в') $\theta=\overline{\lim}\,\theta_n<1$, где $\theta_n=\|P_n-Q_n\|$. Вместо (3) получается оценка

$$\|y_n-Q_ny\|\leqslant\|Lx_n-y\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\theta_n^2}}\|y-Q_ny\|.$$

В случае $Y_n=LX_n$ (*наименьших квадратов метод*) $\theta_n=0$, $n=1, 2, \ldots$, и критерием сходимости является условие б).

Теорема даёт условия сходимости невязки $\|Lx_n-y\|$. Если L^{-1} ограничен и $y\in R(L)$, то из сходимости невязки следует сходимость самих приближений x_n к решению $x=L^{-1}y$ уравнения (1).

ПРОЕКЦИО́ННЫЙ ОПЕРА́ТОР — то же, что *проектор.*

ПРОЕ́КЦИЯ (от лат. projectio — бросание вперёд, выбрасывание) — термин, связанный с операцией проектирования (проецирования), которую можно определить следующим образом (рис. 1): выбирают произвольную точку S пространства в качестве центра проектирования и плоскость Π', не проходящую через точку S, в качестве плоскости проекций (картинной плоскости). Чтобы спроектировать точку A (прообраз) пространства на плоскость Π', через центр проекций S («глаз») проводят прямую SA до её пересечения в точке A' с плоскостью Π'. Точку A' (образ) и наз. проекцией точки A. Проекцией фигуры F наз. совокупность П. всех её точек. Прямая линия, не проходящая через центр П., проектируется в виде прямой. Описанная П. носит название центральной или конической. Она существенно зависит от выбора центра проекций S. При проектировании точек данной плоскости Π на плоскость Π' (рис. 2) встречаются следующие затруднения. На плоскости Π имеются такие точки, для к-рых не существует образов на плоскости Π'. Такова, напр., точка B, если проектирующая прямая SB параллельна плоскости Π'. Для устранения этого затруднения, происходящего от свойств евклидова пространства, последнее пополняют бесконечно удалёнными элементами (несобственными элементами). Именно, принимают, что параллельные пря-

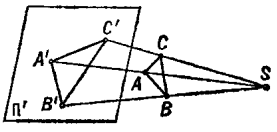


Рис. 1.

мые BS и PA' пересекаются в бесконечно удалённой точке B'; тогда её можно считать образом точки B на плоскости П′. Аналогично — бесконечно удалённая точка C является прообразом точки C' (рис. 2). Благодаря введению бесконечно удалённых элементов между точками плоскости П и точками плоскости П′ устанавливается взаимно однозначное соответствие, осуществляемое при помощи центральной П. Такое соответствие носит название перспективной коллинеации.

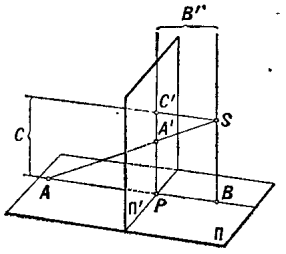


Рис. 2.

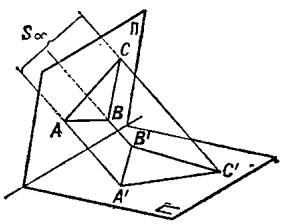


Рис. 3.

Большое практич. значение имеет вид проектирования, при к-ром центром П. является бесконечно удалённая точка S_∞ пространства (рис. 3). При этом все проектирующие прямые параллельны и П. наз. параллельной или цилиндрической. Взаимно однозначное соответствие между точками плоскостей П и П′, установленное при помощи параллельного проектирования, наз. перспективно-аффинным или родственным отображением.

Широко применяется частный вид параллельного проектирования, когда плоскость проекции расположена перпендикулярно (ортогонально) к направлению проектирования. П. в этом случае наз. прямоугольной или ортогональной.

Центральные и параллельные (в частности, ортогональные) П. находят применение в начертательной геометрии, причём получаются различные виды изображений (перспективные, аксонометрические и др.). Специальные виды проектирования на плоскость, сферу и др. поверхности используются в географии, астрономии, кристаллографии, топографии и т. д. (см., напр., *Картографическая проекция*).

ПРОИЗВЕДЕ́НИЕ — результат *умножения*; в русской литературе термин «П.» впервые встречается у Л. Ф. Магницкого (1703).

ПРОИЗВО́ДНАЯ — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функций $f(x)$ при изменении аргумента x; производная есть функция, определяемая для каждого x как предел отношения

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

если он существует. П. функции $y=f(x)$ обозначают $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, $Df(x)$. Функция, имеющая П., непрерывна. Однако существуют непрерывные функции, не имеющие П. во всех точках заданного промежутка (см. *Недифференцируемая функция*). Если существует П. функции $f'(x)$, то её называют второй П. функции $y=f(x)$ и обозначают y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, $D^2f(x)$. Аналогично определяется П. любого (целого) порядка n, к-рую обозначают $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$, $\frac{d^nf}{dx^n}$, $D^nf(x)$. Для функций действительного переменного сама П. может быть недифференцируемой и даже разрывной. В комплексной же области существование первой П. влечёт существование П. всех порядков. Для функций многих переменных определяются *частные производные* — П. по одному из аргументов, вычисленные в предположении, что остальные аргументы постоянны.

Термин «П.» (а также «вторая П.» и др.) ввёл Ж. Лагранж (1797), обозначения y', $f'(x)$, $f''(x)$ — он же (1770, 1779), а $\frac{dy}{dx}$ — Г. Лейбниц (1675). Частные П. появились в трудах И. Ньютона, Г. Лейбница, Я. и И. Бернулли, обозначения $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ввёл А. Лежандр (1786), f'_x, z'_x — Ж. Лагранж (1797, 1801), $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ — К. Якоби (1837).

В теории функций действительного переменного изучаются, в частности, функциональные свойства П. и различные обобщения понятия П. Так, напр., всюду существующая П. относится к функциям 1-го класса по классификации Бэра; П. (даже если она разрывна) принимает все промежуточные значения между наименьшим и наибольшим. Из различных обобщений понятия П. наиболее существенны следующие.

Производные числа. Верхним правым производным числом Λ_d называют верхний предел отношения $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x\to x_0$, где $x>x_0$. Аналогично определяют нижнее правое λ_d, верхнее Λ_g и нижнее λ_g левые производные числа. Если $\Lambda_d=\lambda_d$ ($\Lambda_g=\lambda_g$), то $f(x)$ имеет в точке x односторонюю правую (левую) П. Обыкновенная П. существует, если все четыре производных числа конечны и совпадают. Если все четыре производных числа конечны на нек-ром множестве, то функция имеет обычную П. всюду на этом множестве, кроме точек множества меры нуль.

Асимптотическая (или аппроксимативная) производная — предел отношения $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, когда $x\to x_0$, пробегая точки множества, для к-рого x_0 является точкой плотности (см. *Плотности точка*).

О П. вектор-функции см. в ст. *Векторный анализ*.

ПРОИЗВО́ДНАЯ группы — то же, что *коммутант* группы.

ПРОИЗВО́ДНАЯ отображения — обобщение понятия производной числовой функции. Пусть $f: X\to Y$ — отображение (вообще говоря, нелинейное) топологич. векторных пространств X, Y; производной отображения f в точке $x_0\in X$ наз. линейное отображение $f'(x_0): X\to Y$, аппроксимирующее в том или ином смысле разность $f(x_0+h)-f(x_0)$ относительно приращения h. Значение аппроксимирующего отображения на элементе h обозначается $f'(x_0)h$ или $d_hf(x_0)$ и наз. дифференциалом отображения f в точке x_0 при приращении h.

В зависимости от того что понимается под аппроксимацией приращения $f(x_0+h)-f(x_0)$ линейным по h выражением, приходят к различным понятиям дифференцируемости и производной.

Если выбирается в $F(X, Y)$ [где $F(X, Y)$ — совокупность всех отображений из X в Y] топология поточечной сходимости, получается дифференцирование по Гато, так что производная Гато (или слабая производная) — это предел

$$\delta(x_0, h)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}$$

[если он линеен; в противном случае $\delta(x_0, h)$ наз. вариацией Гато]. Если X и Y — нормированные пространства, а в $F(X, Y)$ выбрана топология равномерной сходимости (на ограниченных множествах X), то получается дифференцирование по Фреше, так что производная Фреше (сильная производная) — это отображение $\Lambda: X\to Y$ такое, что

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\Lambda h+\varepsilon(h),$$

и

$$\|\varepsilon(h)\|/\|h\|\to 0.$$

ПРОИЗВО́ДНАЯ ПРОПО́РЦИЯ — пропорция, являющаяся следствием данной пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Таковы, напр., пропорции:

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c},\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d},\ \frac{d}{b}=\frac{c}{a},$$

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d},\ \frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{c\pm d},\ \frac{a}{a\pm c}=\frac{b}{b\pm d},\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

и т. п.

ПРОИЗВО́ДНОЕ МНО́ЖЕСТВО — множество всех *предельных точек* данного множества. П. м. получается вычитанием из замыкания данного множества всех изолированных точек его. Множество, совпадающее со своим П. м., наз. совершенным.

ПРОИЗВО́ДНОЕ ЧИСЛО́ — см. *Производная.*

ПРОИЗВО́ДНЫЙ РЯД группы — см. *Коммутант* группы.

ПРОИЗВОДЯ́ЩАЯ ФУ́НКЦИЯ, генератриса, последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — функция переменного t:

$$U(t)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n t^n,$$

если степенной ряд сходится в каком-нибудь интервале $|t|<t_0$. П. ф. определяется как для числовых, так и для функциональных последовательностей (в последнем случае П. ф. зависит не только от t, но и от аргументов функций u_n). Напр., если $u_n=aq^n$ (где a и q — постоянные) — геометрич. прогрессия, то её П. ф.

$$U(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a(qt)^n=\frac{a}{1-qt};$$

если $u_n=T_n(x)$ — многочлены Чебышева: $T_0(x)=1$, $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$, то соответствующая П. ф.

$$U(t)=U(t, x)=\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\,t^n=\frac{1-tx}{1-2tx+t^2}.$$

Как правило, П. ф. упрощает изучение свойств последовательностей; при довольно широких предположениях последовательности однозначно восстанавливаются по П. ф. Метод П. ф. используется в алгебре (теория инвариантов), теории функций и особенно в теории вероятностей, где этот метод был впервые применён А. Муавром и П. Лапласом.

ПРОИЗВО́ЛЬНАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция.*

ПРОИЗВО́ЛЬНЫХ ФУ́НКЦИЙ МЕ́ТОД — метод, дающий объяснение причин равновероятности исходов испытаний. См. *Вероятностей теория.*

ПРОМЕЖУ́ТОК — то же, что открытый промежуток или интервал. См. *Интервал и сегмент.*

ПРОМЕЖУ́ТОЧНАЯ ЛО́ГИКА — логика, лежащая между классической и интуиционистской логиками. См. *Математическая логика.*

ПРОМЕЖУ́ТОЧНЫЙ ИНТЕГРА́Л — см. *Интеграл дифференциального уравнения.*

ПРОМИ́ЛЛЕ (от лат. pro mille — за тысячу) — тысячная часть числа; обозначение: $^0/_{00}$.

ПРООБРАЗ элемента $b\in B$ при отображении φ множества A в множество B — всякий элемент $a\in A$ такой, что элемент b является образом элемента a, то есть $\varphi(a)=b$.

П. подмножества $B'\subset B$ — всякое подмножество $A'\subset A$ такое, что B' является образом множества A', то есть $\varphi(A')=B'$. Если $A_1\subseteq A$ множество всех элементов $a_1\in A$ таких, что $\varphi(a_1)\in B'$, то A' является полным П. множества B'. Полный П. множества B' (в частности, элемента b) обозначается символом $\varphi^{-1}(B')$.

ПРОПОЗИЦИОНА́ЛЬНАЯ ПЕРЕМЕ́ННАЯ (от лат. propositio — предложение, суждение, высказывание) — *переменная*, возможными значениями которой являются *высказывания.*

ПРОПОЗИЦИОНА́ЛЬНАЯ СВЯ́ЗКА — символ *формализованного языка*, употребляемый для обозначения логической операции, которая из высказываний образует более сложные высказывания. Наиболее употребительны П. с.: $\vee$ — знак дизъюнкции, & — знак конъюнкции, $\supset$ — знак импликации, $\neg$ — знак отрицания.

ПРОПОЗИЦИОНА́ЛЬНАЯ ФО́РМУЛА — см. *Высказываний исчисление.*

ПРОПОЗИЦИОНА́ЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕ́НИЕ — то же, что *высказываний исчисление.*

ПРОПОРЦИОНА́ЛЬНОЕ ДЕЛЕ́НИЕ — деление величины A на части $x_1, x_2, \ldots, x_n$, пропорциональные заданным числам $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Искомые части равны:

$$x_1=\frac{a_1A}{a_1+a_2+\ldots+a_n},\ x_2=\frac{a_2A}{a_1+a_2+\ldots+a_n},\ \ldots$$

ПРОПОРЦИОНА́ЛЬНОСТЬ — простейший вид функциональной зависимости. Различают прямую и обратную П. Две переменные величины называют прямо пропорциональными (или просто пропорциональными), если отношение их не изменяется, т. е. во сколько раз увеличится (или уменьшится) одна из них, во столько же раз увеличится (или уменьшится) и другая. Аналитически П. величин x и y характеризуется соотношением $y=kx$, где k — т. н. коэффициент пропорциональности. Графически пропорциональная зависимость изображается прямой линией (или полупрямой), проходящей через начало координат, угловой коэффициент к-рой равен коэффициенту П. Переменные величины x и y называют обратно пропорциональными, если одна из них пропорциональна обратному значению другой, т. е. $y=k\frac{1}{x}$ или $xy=k$. Графиком обратно пропорциональной зависимости служит равнобочная гипербола (или одна её ветвь).

ПРОПО́РЦИЯ (от лат. proportio — соотношение, соразмерность) — равенство между двумя отношениями четырёх величин

$$a:b=c:d.$$

Величины a, $b\neq 0$, c, $d\neq 0$ называют членами П., причём a и d — крайними, а b и c — средними. Произведение средних членов П. равно произведению крайних: $bc=ad$.

ПРОПУСКНА́Я СПОСО́БНОСТЬ канала связи — теоретико-информационная мера возможности передачи информации по *каналу* связи. См. также *Информации теория.*

ПРОСТА́Я А́ЛГЕБРА — ненулевая алгебра без двусторонних идеалов, отличных от нулевого идеала $\{0\}$ и всей алгебры. П. а. без единицы может и не быть *простым кольцом*, т. к. в этом случае не всякий идеал кольца является идеалом алгебры. Для нек-рых классов алгебр (напр., для алгебр Ли) известна классификация конечномерных П. а.

ПРОСТА́Я ГРУ́ППА — группа, не имеющая нормальных подгрупп, отличных от всей группы и единичной подгруппы. Описание всех простых конечных групп является центральной задачей теории *конечных групп.* В теории бесконечных групп значение П. г. значительно меньше ввиду их необозримости. Простейшими примерами конечных П. г. служат циклич. группы простых порядков. Все остальные конечные П. г. — неразрешимые группы, и их порядки — чётные числа. Простыми являются все знакопеременные группы A_m при $m\neq 4$. Примером бесконечной П. г. служит группа всех чётных подстановок, каждая из к-рых перемещает конечное подмножество элементов нек-рого бесконечного множества M. Существуют конечно порождённые бесконечные П. г. Всякая группа вложима в нек-рую П. г.

Определение простой группы Ли см. в ст. *Ли группа.*

ПРОСТА́Я ДУГА́ — см. *Дуга.*

ПРОСТЕ́ЙШАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция.*

ПРОСТО́ГО СЛО́Я ПОТЕНЦИА́Л — см. *Потенциал.*

ПРОСТО́Е КОЛЬЦО́ — ненулевое кольцо без двусторонних идеалов, отличных от нулевого идеала $\{0\}$ и всего кольца.

Ассоциативное П. к. с единицей, содержащее одиосторонний минимальный идеал, изоморфно кольцу матриц с элементами из нек-рого тела. Существуют П. к. без делителей нуля, отличные от тел.

ПРОСТО́Е ОТНОШЕ́НИЕ трёх точек M_1, M, M_2 на прямой — число λ такое, что $\overline{M_1M}=\lambda\overline{MM_2}$. При этом говорят, что точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ. Если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — координаты точек M_1 и M_2, то координаты точки M определяются по формулам

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

П. о. является инвариантом аффинных преобразований.

ПРОСТО́Е ПО́ЛЕ — поле, не имеющее собственных подполей. Каждое поле содержит единственное простое подполе. Всякое П. п. характеристики 0 изоморфно полю рациональных чисел, а П. п. характеристики p изоморфно полю вычетов по модулю p (p – простое число).

ПРОСТО́Е ПРЕДСТАВЛЕ́НИЕ — то же, что *неприводимое представление*.

ПРОСТО́Е РАСШИРЕ́НИЕ поля — см. *Поле*.

ПРОСТО́Е ЧИСЛО́ — целое положительное число, большее единицы, не имеющее других делителей, кроме самого себя и единицы:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ \ldots \qquad (*)$$

Понятие П. ч. является основным при изучении делимости натуральных чисел; именно, основная теорема теории делимости утверждает, что всякое целое положительное число, кроме 1, единственным образом разлагается в произведение П. ч. (порядок сомножителей при этом не принимается во внимание). П. ч. бесконечно много (это предложение, наз. теоремой Евклида, было известно ещё древнегреческим математикам, его доказательство имеется в кн. IX «Начал» Евклида). П. Дирихле (1837) установил, что в арифметич. прогрессии $a+bx$ при $x=1, 2, \ldots$ с целыми взаимно простыми a и b также содержится бесконечно много П. ч.

Для нахождения П. ч. от 1 до x служит известный с 3 в. до н. э. метод *Эратосфена решета*. Рассмотрение последовательности (*) П. ч. от 1 до x показывает, что с увеличением x она становится в среднем более редкой. Существуют сколь угодно длинные отрезки ряда натуральных чисел, среди к-рых нет ни одного П. ч. В то же время в (*) встречаются такие П. ч., разность между к-рыми равна 2 (т. н. близнецы). До сих пор (1987) неизвестно конечно или бесконечно множество таких близнецов. Таблицы П. ч., лежащих в пределах первых 11 миллионов натуральных чисел, показывают наличие весьма больших близнецов (напр., 10 006 427 и 10 006 429).

Выяснение распределения П. ч. в натуральном ряде чисел является весьма трудной задачей теории чисел. Она ставится как изучение асимптотич. поведения функции $\pi(x)$, обозначающей количество П. ч., не превосходящих положительного числа x. Из теоремы Евклида ясно, что $\pi(x)\to\infty$ при $x\to\infty$. Л. Эйлер в 1737 ввёл *дзета-функцию*

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Он же доказал, что при $s>1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

где суммирование проводится по всем натуральным числам, а произведение берётся по всем простым. Это тождество и его обобщения играют фундаментальную роль в теории распределения П. ч. Исходя из него, Л. Эйлер доказал, что ряд $\sum\frac{1}{p}$ и произведение $\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$ по простым p расходятся. Более того, Л. Эйлер установил, что П. ч. «много», ибо

$$\pi(x)>\ln x-1,$$

и в то же время почти все натуральные числа являются составными, т. к. $\pi(x)x^{-1}\to 0$ при $x\to\infty$.

Далее значительного успеха достиг П. Л. Чебышев, к-рый в 1851—52 доказал, что имеются такие две постоянные a и A, что

$$a\frac{x}{\ln x}<\pi(x)<A\frac{x}{\ln x},$$

где

$$a>\frac{\ln 2}{2}\quad\text{и}\quad A<2\ln 2,$$

при любых $x\geqslant 2$ (т. е., что $\pi(x)$ растёт, как функция $x/\ln x$). Хронологически следующим значительным результатом, уточняющим теорему Чебышева, является т. н. асимптотич. закон распределения П. ч. (Ж. Адамар, 1896, Ш. Ла Валле Пуссен, 1896), заключающийся в том, что предел отношения $\pi(x)$ к $x/\ln x$ равен 1. В дальнейшем значительные усилия математиков направлялись на уточнение асимптотич. закона распределения П. ч. Вопросы распределения П. ч. изучаются и элементарными методами, и методами математич. анализа.

● Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981; Трост Э., Простые числа, пер. с нем., М., 1959; Прахар К., Распределение простых чисел, пер. с нем., М., 1967.

ПРОСТО́Й ЗАМКНУТЫЙ КО́НТУР — гомеоморфный образ окружности. См. *Жордана кривая*.

ПРОСТО́Й ИДЕА́Л — двусторонний идеал кольца, неразложимый в произведение идеалов. Точнее, идеал P прост в кольце R, если из $AB\subseteq P$, где A и B — идеалы в R, следует, что либо $A\subseteq P$, либо $B\subseteq P$. Для ассоциативного кольца эквивалентным определением будет следующее: идеал P прост в R, если для любых элементов a и b кольца R из $aRb\subseteq P$ следует, что либо a, либо b лежит в P.

Пусть R — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей, тогда простота идеала P равносильна тому, что факторкольцо R/P есть область целостности. В этом случае всякий максимальный идеал прост, а пересечение всех П. и. кольца совпадает с множеством всех его нильпотентных элементов.

Обобщением понятия П. и. служит понятие примарного идеала. В теории примарных разложений П. и. играют ту же роль, что простые числа в разложении целых чисел по степеням простых, а примарные идеалы — роль степеней простых чисел.

ПРОСТО́Й ИТЕРА́ЦИИ МЕ́ТОД — см. *Линейная алгебра*; численные методы, *Последовательных приближений метод*.

ПРОСТО́Й МО́ДУЛЬ — то же, что *неприводимый модуль*.

ПРОСТО́Й ПРОЦЕ́НТ — см. *Процент*.

ПРОСТРА́НСТВЕННАЯ КРИВА́Я — кривая, точки которой не лежат в одной плоскости. П. к. может быть задана в декартовых координатах в одной из следующих форм: $F(x, y, z)=0$, $\Phi(x, y, z)=0$ (пересечение двух поверхностей); $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$ (параметрич. форма).

ПРОСТРА́НСТВО — логически мыслимая форма (или структура), служащая средой, в которой осуществляются другие формы и те или иные конструкции. Напр., в элементарной геометрии плоскость или пространство служат средой, где строятся разнообразные фигуры. В большинстве случаев в П. фиксируются отношения, сходные по формальным свойствам с обычными пространственными отношениями (расстояние между точками, равенство фигур и др.), так что о таких П. можно сказать, что они представляют логически мыслимые пространственно-подобные формы. Исторически первым и важнейшим математич. П. является 3-мерное *евклидово пространство*, представляющее приближённый абстрактный образ реального П. Общее понятие «П.» в математике сложилось в результате постепенного, всё более широкого обобщения и видоизменения понятий геометрии евклидова П. Первые П., отличные от 3-мерного евклидова, были введены в 1-й пол. 19 в. Это были пространство Лобачевского и евклидово П. любого числа измерений. Общее понятие о математич. П. было выдвинуто в 1854 Б. Риманом; оно обобщалось, уточнялось и конкретизировалось в разных направлениях: таковы, напр., *банахово прост-*

ранство, векторное пространство, гильбертово пространство, риманово пространство, топологическое пространство. В современной математике П. определяют как множество к.-л. объектов, к-рые наз. его точками; ими могут быть геометрич. фигуры, функции, состояния физич. системы и т. д. Рассматривая их множество как П., отвлекаются от всяких их свойств и учитывают только те свойства их совокупности, к-рые определяются принятыми во внимание или введёнными (по определению) отношениями. Эти отношения между точками и теми или иными фигурами, т. е. множествами точек, определяют «геометрию» П. При аксиоматич. её построении основные свойства этих отношений выражаются в соответствующих аксиомах.

Примерами П. могут служить: 1) метрич. П., в к-рых определено расстояние между точками, напр. П. непрерывных функций на к.-л. отрезке $[a, b]$, где точками служат функции $f(x)$, непрерывные на $[a, b]$, а расстояние между $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определяется как максимум модуля их разности: $r=\max|f_1(x)-f_2(x)|$. 2) «П. событий», играющее важную роль в геометрич. интерпретации теории относительности. Каждое событие характеризуется положением — координатами x, y, z и временем t, поэтому множество всевозможных событий оказывается 4-мерным П., где «точка»-событие определяется 4 координатами x, y, z, t. 3) Фазовые П., рассматриваемые в теоретич. физике и механике. Фазовое П. физич. системы — это совокупность всех её возможных состояний, к-рые рассматриваются при этом как точки этого П. Понятие об указанных П. имеет вполне реальный смысл, поскольку совокупность возможных состояний физич. системы или множество событий с их координацией в П. и во времени вполне реальны. Речь идёт, стало быть, о реальных формах действительности, к-рые, не являясь пространственными в обычном смысле, оказываются пространственно-подобными по своей структуре. Вопрос о том, какое математич. П. точнее отражает общие свойства реального П., решается опытом. Так, было установлено, что при описании реального П. евклидова геометрия не всегда является достаточно точной и в современной теории реального П. применяется риманова геометрия. По поводу П. в математике см. также *Геометрия*, *Многомерная геометрия*.

А. Д. Александров.

ПРОТИВОПОЛО́ЖНАЯ ТЕОРЕ́МА — см. *Обратная теорема*.

ПРОТИВОПОЛО́ЖНЫЕ ЧИ́СЛА — два числа, сумма которых равна нулю. Примеры П. ч.: 7 и -7, $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$, $2-i$ и $-2+i$. На комплексной плоскости П. ч. изображаются точками, симметричными относительно нуля. В частности, действительные П. ч. изображаются на числовой прямой точками, симметричными относительно начала отсчёта, т. е. относительно нуля. Нуль — единственное число, противоположное самому себе.

ПРОТИВОРЕ́ЧИЯ ЗАКО́Н — логический закон, утверждающий, что никакое высказывание не может быть истинным одновременно со своим отрицанием. В языке исчисления высказываний П. з. выражается формулой

$$\neg(A\&\neg A).$$

Эта формула выводима как в классическом, так и в интуиционистском исчислении высказываний.

ПРО́ФИЛЬНАЯ ПЛО́СКОСТЬ (от итал. profilo — очертание) — см. *Начертательная геометрия*.

ПРО́ФИЛЬНАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Начертательная геометрия*.

ПРОЦЕДУ́РА (франц. procédure, от лат. procedo, букв.— продвигаюсь вперёд) программы — см. *Программирования язык*.

ПРОЦЕ́НТ (от лат. pro centum — за сто) — сотая доля целого (принимаемого за единицу); обозначение: %. Тысячная доля целого, т. е. десятая часть процента, имеет специальное название — промилле — и особое обозначение: ‰. В хозяйственных и статистич. расчётах, а также во многих отраслях науки части величин принято выражать в П.; если с величины a нарастает p% за год (или за к.-л. другой промежуток времени), то через t лет она превратится в $x=a\left(1+\frac{pt}{100}\right)$ (формула простых процентов). При этом предполагается, что по истечении каждого года доход за этот год изымается, так что за новый год доход исчисляется с первоначальной величины (в этом именно смысле говорят о простых П.). Если же доход причисляют к первоначальной величине и, следовательно, доход за новый год исчисляется с наращённой суммы, то говорят о сложных процентах; в этом случае величина, в к-рую превратится a через t лет, вычисляется по формуле сложных П.:

$$x=a\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

ПРЯМА́Я И ОБРА́ТНАЯ ЗАДА́ЧИ — альтернативные классы задач для уравнений математической физики, состоящие в определении по заданному уравнению различных характеристик его решения (напр., спектральных параметров, данных рассеяния и пр.) — прямая задача, и в определении самого уравнения (напр., его коэффициентов) по заданным характеристикам его решения — обратная задача.

См. также *Математическая модель*, *Некорректные задачи*.

ПРЯМА́Я ЛИ́НИЯ — одно из основных понятий геометрии. При систематич. изложении геометрии П. л. обычно принимается за одно из исходных понятий, к-рое лишь косвенным образом определяется аксиомами геометрии. Если основой построения геометрии служит понятие расстояния между точками пространства, то П. л. можно определить как линию, вдоль к-рой расстояние между двумя точками является кратчайшим.

П.л.— алгебраич. линия первого порядка: в декартовой системе координат. П. л. задаётся на плоскости уравнением 1-й степени (линейным уравнением).

Прямая линия на плоскости. Общее уравнение (полное):

$$Ax+By+C=0, \qquad (1)$$

где A, B и C — любые постоянные, причём A и B одновременно не равны нулю. Если один из коэффициентов равен нулю, уравнение наз. неполным.

Уравнение в отрезках (рис. 1):

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (2)$$

где $a=-\frac{C}{A}$ и $b=-\frac{C}{B}$ — отрезки, отсекаемые прямой на осях Ox и Oy.

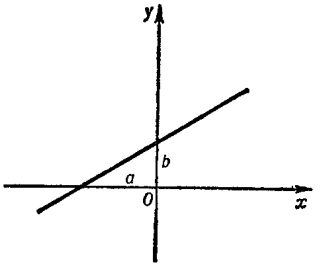


Рис. 1.

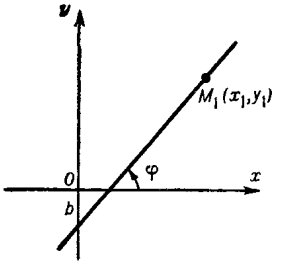


Рис. 2.

Уравнение с угловым коэффициентом (рис. 2):

$$y=kx+b, \qquad (3)$$

где k — угловой коэффициент: $k=\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$; φ — угол наклона прямой к оси Ox, отсчитываемый в направлении, противоположном часовой стрелке.

Прямая, проходящая через заданную точку $M(x_1, y_1)$, имеющая заданный

угловой коэффициент k:

$$y-y_1=k(x-x_1). \quad (4)$$

Прямая, проходящая через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 3):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \quad (5)$$

Нормальное (нормированное) уравнение:

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0, \quad (6)$$

где p — расстояние П. л. (рис. 4) от начала координат, θ — угол между осью Ox и перпендикуляром, проведённым к П. л. из начала координат. Уравнение (6) может быть получено из уравнения (1) умножением на нормирующий множитель

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

(знаки μ и C противоположны).

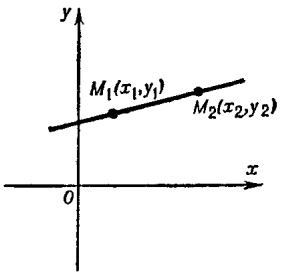


Рис. 3.

Уравнение в полярных координатах (рис. 5):

$$r=\frac{\rho}{\sqrt{\cos(\alpha-\varphi)}},$$

где ρ — расстояние от полюса до прямой, α — угол между полярной осью и перпендикуляром из полюса на прямую.

Отклонение точки $M(x_1, y_1)$ от прямой:

$$\delta=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-p;$$

$\delta>0$, если M и начало координат лежат по разные стороны П. л. (рис. 4); в противном случае $\delta<0$.

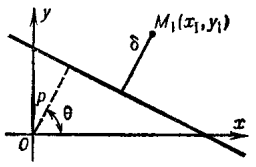


Рис. 4.

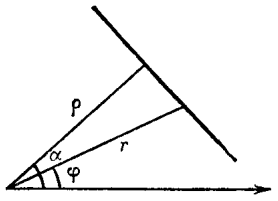


Рис. 5.

Расстояние точки $M(x_1, y_1)$ до прямой равно $|\delta|$. Угол α между двумя прямыми (рис. 6)|.

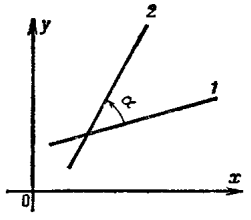


Рис. 6.

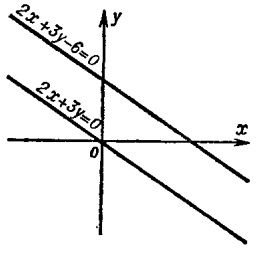


Рис. 7.

Если уравнение П. л. имеет вид (1), то

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2};$$

$$\cos\alpha=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}},\quad \sin\alpha=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Если уравнения П. л. имеют вид (3) или (4), то

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2};$$

$$\cos\alpha=\frac{1+k_1k_2}{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+k_2^2}},\quad \sin\alpha=\frac{k_2-k_1}{\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{1+k_2^2}}$$

(угол α отсчитывается от 1-й П. л. ко 2-й против часовой стрелки).

П. л. параллельны (рис. 7), если

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \text{ или } k_1=k_2.$$

П. л. взаимно перпендикулярны (рис. 8), если

$$A_1A_2+B_1B_2=0 \text{ или } k_1k_2=-1.$$

Координаты точки $M(x_0, y_0)$ пересечения двух прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$

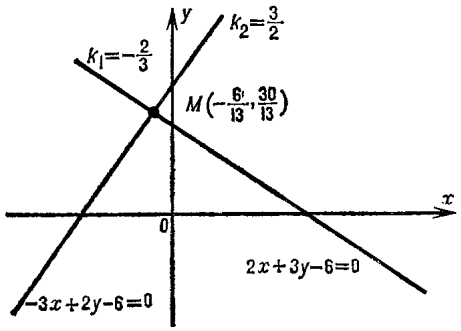


Рис. 8.

(рис. 8) выражаются с помощью определителей 2-го порядка:

$$x_0=\left|\begin{matrix}B_1C_1\\B_2C_2\end{matrix}\right| : \left|\begin{matrix}A_1B_1\\A_2B_2\end{matrix}\right|;\quad y_0=-\left|\begin{matrix}C_1A_1\\C_2A_2\end{matrix}\right| : \left|\begin{matrix}A_1B_1\\A_2B_2\end{matrix}\right|.$$

Пучок прямых — уравнение любой прямой, проходящей через данную точку:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0,$$

где α и β — любые числа, не равные одновременно нулю.

Прямая линия в пространстве. Общее уравнение. П. л. определяется как линия пересечения двух плоскостей:

$$\left.\begin{aligned}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

или в векторной форме:

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N}_1)+D_1=0,\quad (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{N}_2)+D_2=0.$$

Прямая, проходящая через данную точку $M(x_1, y_1, z_1)$ параллельно направляющему вектору $\boldsymbol{R}(l, m, n)$ (рис. 9):

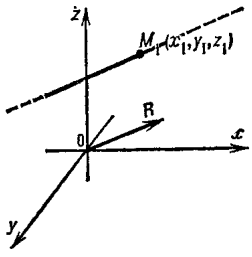


Рис. 9.

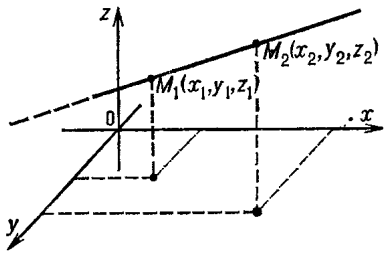


Рис. 10.

$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ (каноническое уравнение), (8)

где

$$l=\left|\begin{matrix}B_1C_1\\B_2C_2\end{matrix}\right|;\quad m=\left|\begin{matrix}C_1A_1\\C_2A_2\end{matrix}\right|;\quad n=\left|\begin{matrix}A_1B_1\\A_2B_2\end{matrix}\right|;$$

в векторной форме:

$$[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1), \boldsymbol{R}]=0,$$

где $\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2]$;

$x=x_1+lt,\quad y=y_1+mt,\quad z=z_1+nt$ (параметрическое уравнение).

в векторной форме:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{R}t,$$

где t — параметр.

Прямая, проходящая через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 10):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1};$$

в векторной форме:

$$[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1),\ (\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)]=0.$$

Угол между двумя прямыми. Если уравнения П. л. имеют вид (8), то

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)}};$$

в векторной форме:

$$\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{R}_1,\ \boldsymbol{R}_2)}{|\boldsymbol{R}_1|\,|\boldsymbol{R}_2|}.$$

П. л. параллельны, если

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}\ \text{или}\ [\boldsymbol{R}_1,\ \boldsymbol{R}_2]=0;$$

П. л. перпендикулярны, если

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0\ \text{или}\ (\boldsymbol{R}_1,\ \boldsymbol{R}_2)=0.$$

Угол между прямой и плоскостью. Если прямая задана уравнениями вида (8), а плоскость — уравнением вида (7), то

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(l^2+m^2+n^2)}};$$

в векторной форме:

$$\sin\varphi=\frac{(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{N})}{|\boldsymbol{R}|\,|\boldsymbol{N}|};$$

П. л. и плоскость параллельны, если $Al+Bm+Cn=0$ или $(\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{N})=0$;

П. л. и плоскость перпендикулярны, если $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$ или $[\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{R}]=0$.

П. Ферма (1636) впервые высказал замечание, что любое уравнение 1-й степени с двумя переменными есть уравнение П. л. Доказательство этого факта дано Я. де Виттом (1658—59). Нормальное уравнение П. л. встречается у О. Коши, по общеупотребительным оно стало после выхода учебника геометрии О. Гессе (1861). Канонич. уравнения П. л. в пространстве ввёл О. Коши.

ПРЯМА́Я ПРИ́ЗМА — см. *Призма.*

ПРЯМА́Я ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция.*

ПРЯМА́Я СУ́ММА — конструкция, широко используемая в теории векторных пространств, модулей над кольцами и абелевых групп, то есть объектов, где для групповой операции используется аддитивная запись. Для конечного числа абелевых групп (модулей, векторных пространств и т. п.) эта конструкция совпадает с конструкцией *прямого произведения.* Если A_i, $i\in I$,— бесконечное множество абелевых групп, то П. с. этих групп состоит из всех последовательностей вида

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots),$$

в к-рых только конечное число элементов отлично от нуля, а сложение таких последовательностей определяется покоординатно:

$$s_1+s_2=(a_1'+a_1'',\ a_2'+a_2'',\ \ldots,\ a_i'+a_i'',\ \ldots)$$

для $s_1=(a_1',\ a_2',\ \ldots,\ a_i',\ \ldots)$, $s_2=(a_1'',\ a_2'',\ \ldots,\ a_i'',\ \ldots)$. П. с. абелевых групп A_i обозначается или символом $\sum_{i\in I}A_i$, или символом $\sum^{\oplus}_{i\in I}A_i$. Для конечного множества групп используются также обозначения

$$A_1\dotplus A_2\dotplus\ldots\dotplus A_n\ \text{или}\ A_1\oplus A_2\oplus\ldots\oplus A_n.$$

Аналогичные определения и обозначения используются для модулей и векторных пространств.

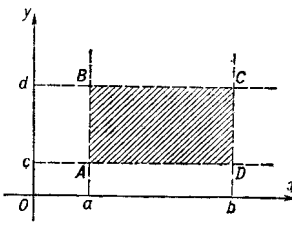
ПРЯ́МО ПРОПОРЦИОНА́ЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИ́НЫ — две величины, связанные между собой так, что с увеличением (уменьшением) одной величины в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз. П. п. в. x и y связаны соотношением $y=kx$, где k — коэффициент пропорциональности.

ПРЯМО́Е ПРОИЗВЕДЕ́НИЕ — одна из основных теоретико-множественных конструкций, широко используемая во всех областях математики. Впервые она была введена Р. Декартом при построении аналитич. геометрии и поэтому часто наз. также *декартовым произведением.* Иногда вместо слов «П. п.» говорят просто произведение.

П. п. двух множеств A_1 и A_2 — это множество всех упорядоченных пар $(a_1,\ a_2)$, в к-рых $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$; оно обозначается $A_1\times A_2$. При $n>2$ П. п. множеств A_1, A_2, ..., A_n определяется индуктивно:

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=(A_1\times A_2\times\ldots\times A_{n-1})\times A_n.$$

Оно может быть отождествлено с множеством всех последовательностей вида $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$, в к-рых $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, ..., $a_n\in A_n$. Такие последовательности часто наз. кортежами длины n. При $n=1$ П. п. множества A_1 считается (по определению) совпадающим с A_1, а П. п. пустого семейства множеств считается равным одноэлементному множеству. П. п. пустого множества с любым другим множеством — пустое множество.



В определении П. п. множества A_1, ..., A_n не предполагаются различными. Для обозначения П. п., в к-ром все $A_i=A$, используется символ A^n.

Если на плоскости P введена нек-рая аффинная система координат, то между точками плоскости и упорядоченными парами действительных чисел $(x,\ y)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому плоскость P можно отождествить с декартовым произведением $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$ — множество действительных чисел). Аналогично 3-мерное пространство можно отождествить с $\mathbb{R}^3$. Если на плоскости P ввести прямоугольную систему координат Oxy (рис.) и на осях Ox и Oy отложить отрезки $[a,\ b]$ и $[c,\ d]$ соответственно, то декартово произведение этих отрезков можно отождествить с прямоугольником, вершины A, B, C, D к-рого имеют соответственно координаты $(a,\ c)$, $(a,\ d)$, $(b,\ d)$, $(b,\ c)$.

Если в множестве A_1 имеется m элементов, а в множестве A_2 имеется n элементов, то их П. п. $A_1\times A_2$ содержит mn элементов (в частности, A_1^2 имеет m^2 элементов, A_1^3 имеет m^3 элементов и т. д.). Эти соотношения объясняют происхождение термина «П. п.».

На случай бесконечного семейства множеств конструкция П. п. обобщается следующим образом. Пусть задано семейство A_i, $i\in I$, и I вполне упорядочено. Тогда П. п. семейства A_i, $i\in I$, состоит из всех последовательностей $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots)$, в к-рых $a_i\in A_i$; оно обозначается символом $\prod_{i\in I}A_i$. Всякую последовательность $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots)$ можно рассматривать как функцию, к-рая отображает множество индексов I в объединение $\bigcup_{i\in I}A_i$ и каждому индексу i сопоставляет элемент a_i соответствующего множества A_i. П. п. совпадает с множеством таких функций. Считая элементы П. п. функциями из I в $\bigcup_{i\in I}A_i$, можно и не предполагать, что I — вполне упорядоченное множество. В случае когда все A_i совпадают между собой ($A_i=A$), П. п. $\prod_{i\in I}A_i$ обозначается A^I; оно совпадает с множеством всех функций из I в A.

П. п. $\prod_{i\in I}A_i$ обладает следующими свойствами: 1) для каждого $i\in I$ существует канонич. отображение

$p_i: \prod_{i \in I} A_i \to A_i$, сопоставляющее последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$ элемент a_i; это отображение наз. проекцией П. п. на множитель A_i; 2) для произвольного семейства отображений $f_i: X \to A_i$, где X — нек-рое множество, $i \in I$, существует единственное отображение $f: X \to \prod_{i \in I} A_i$ такое, что $fp_i = f_i$ для каждого $i \in I$. Эти два свойства дают аксиоматич. характеристику П. п., т. е. определяют П. п. однозначно (с точностью до биективного соответствия).

Если множества A_i, $i \in I$, обладают однотипной математич. структурой, то, как правило, эта структура может быть перенесена на их П. п. покоординатно. Напр., если все A_i — группы, то множество $\prod_{i \in I} A_i$ также превращается в группу при помощи следующего определения: если $s_1 = (a_1', a_2', \ldots, a_i', \ldots)$, $s_2 = (a_1'', a_2'', \ldots, a_i'', \ldots)$, то $s_1 s_2 = (a_1' a_2', a_2' a_2'', \ldots, a_i' a_i'', \ldots)$. Множество $\prod_{i \in I} A_i$ с таким умножением наз. полным прямым произведением групп A_i, $i \in I$. Прямым произведением групп A_i принято называть подгруппу группы $\prod_{i \in I} A_i$, содержащую все последовательности, в к-рых лишь конечное число элементов отлично от единицы. Аналогичным образом определяются прямые и полные прямые произведения полугрупп, колец, векторных пространств и других алгебраич. систем.

М. Ш. Цаленко.

ПРЯМО́Й КРУГОВО́Й КО́НУС — см. *Конус.*

ПРЯМО́Й ПАРАЛЛЕЛЕПИ́ПЕД — см. *Параллелепипед.*

ПРЯМО́Й У́ГОЛ — угол, равный своему смежному. В градусной мере равен 90°.

ПРЯМО́Й ХОД ПРОГО́НКИ — см. *Ортогональной прогонки метод, Прогонки метод.*

ПРЯМОЛИНЕ́ЙНЫЕ ОБРАЗУ́ЮЩИЕ поверхности — бесконечная система прямых линий (или отрезков прямых линий), целиком заполняющих поверхность. Поверхность, состоящая из прямых линий, наз. линейчатой поверхностью. Поверхности, имеющие два семейства прямолинейных образующих, суть поверхности второго порядка — однополостный гиперболоид и гиперболич. параболоид.

ПРЯМОУГО́ЛЬНАЯ МА́ТРИЦА — см. *Матрица.*

ПРЯМОУГО́ЛЬНАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Проекция.*

ПРЯМОУГО́ЛЬНАЯ СИСТЕ́МА КООРДИНА́Т — см. *Декартова система координат.*

ПРЯМОУГО́ЛЬНИК — четырёхугольник, у которого все углы прямые. П. является параллелограммом.

ПРЯМОУГО́ЛЬНИКОВ ФО́РМУЛА — формула для вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong h \sum_{k=1}^{N} f(\alpha + (k-1)h), \qquad (*)$$

где промежуток $[a, b]$ конечен, $h = (b-a)/N$ и $\alpha = a + \frac{h}{2}$. Если $b - a = 2\pi$, то квадратурная формула $(*)$ точна для всех тригонометрич. полиномов порядка не выше $N-1$. Пусть $R(f, \alpha)$ — погрешность П. ф.: разность между левой и правой частями приближённого равенства $(*)$. Если $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то справедливо представление

$$R(f, a + h/2) = [(b-a)/24]\, h^2 f''(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Если $f(x)$ — периодическая с периодом $b-a$ и имеет непрерывную производную порядка $2k$ на всей действительной оси, то при любом α

$$R(f, \alpha) = -(b-a)\, B_{2k} \left(\frac{h^{2k}}{(2k)!} \right) f^{(2k)}(\eta),$$

где $\eta \in [a, b]$ и B_{2k} — число Бернулли.

ПРЯМОУГО́ЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — то же, что *равномерное распределение.*

ПРЯМОУГО́ЛЬНЫЕ КООРДИНА́ТЫ — координаты точки на плоскости или в пространстве в *декартовой системе координат*, в которой базисные векторы имеют единичную длину и попарно перпендикулярны. См. *Координаты.*

ПРЯМОУГО́ЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИ́ПЕД — см. *Параллелепипед.*

ПРЯМОУГО́ЛЬНЫЙ ТРЕУГО́ЛЬНИК — треугольник, у которого один угол прямой.

ПРЯМЫХ МЕ́ТОД — метод численного решения дифференциальных уравнений с частными производными. Применяется для нелинейных уравнений эллиптич., гиперболич. и параболич. типов любых порядков и систем уравнений. В П. м. производится аппроксимация операции дифференцирования по нек-рым направлениям, что позволяет понизить размерность задачи и заменить решение исходной системы дифференциальных уравнений с частными производными расчётом аппроксимирующей её системы дифференциальных уравнений с меньшим числом независимых переменных. П. м. близок схеме *интегральных соотношений метода.*

ПСЕВДОВЕ́КТОР (от греч. ψεῦδος — ложь и вектор) — то же, что *осевой вектор.*

ПСЕВДОКОНИ́ЧЕСКАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция.*

ПСЕВДОМЕ́ТРИКА на множестве X — неотрицательная действительная функция ρ на множестве всех пар элементов X такая, что $\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z)$ для всех $x, y, z \in X$. Примером П. служит метрика, отличие заключается в том, что для П. допускается $\rho(x, y) = 0$ при $x \neq y$.

ПСЕВДООРТОГОНА́ЛЬНАЯ ГРУ́ППА — см. *Классическая группа.*

ПСЕВДОРЕШЕ́НИЕ — см. *Функциональное уравнение.*

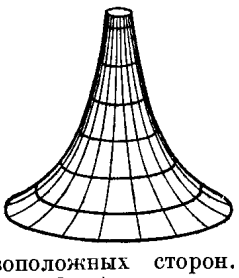
ПСЕВДОРИ́МАНОВО ПРОСТРА́НСТВО — см. *Риманова геометрия.*

ПСЕВДОСКАЛЯ́Р — величина, не изменяющаяся при переносе и повороте координатных осей, но изменяющаяся при замене направления каждой оси на противоположное. Примером П. может служить смешанное произведение трёх векторов и скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, где $\boldsymbol{a}$ — осевой вектор, $\boldsymbol{b}$ — обычный (полярный) вектор. Примеры П.: радиус кручения пространственной кривой, статич. момент.

ПСЕВДОСКАЛЯ́РНОЕ ПРОИЗВЕДЕ́НИЕ векторов — см. *Векторная алгебра.*

ПСЕВДОСЛУЧА́ЙНЫЕ ЧИ́СЛА — см. *Случайные числа.*

ПСЕВДОСФЕ́РА — поверхность постоянной отрицательной кривизны, образованная вращением трактрисы вокруг её асимптоты (рис.). Внутренняя геометрия П. локально совпадает с геометрией Лобачевского.



ПСЕВДОУНИТА́РНАЯ ГРУ́ППА — см. *Классическая группа.*

ПСЕВДОЦИЛИНДРИ́ЧЕСКАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция.*

ПТОЛЕМЕ́Я ТЕОРЕ́МА: произведение длин диагоналей вписанного в круг четырёхугольника равно сумме произведений длин его противоположных сторон. П. т. установлена Клавдием Птолемеем (2 в.).

ПУАНКАРЕ́ ИНТЕРПРЕТА́ЦИЯ — модель, реализующая геометрию плоскости Лобачевского. Предложена А. Пуанкаре (1882). См. *Лобачевского геометрия.*

ПУАНКАРЕ́ ПРОБЛЕ́МА в дифференциальной геометрии — см. *Дифференциальная геометрия.* Проблему сформулировал А. Пуанкаре (1908).

ПУАНСО́ ТЕЛА́ — правильные невыпуклые *многогранники.* Впервые перечислены Л. Пуансо (1809).

ПУАССО́НА ИНТЕГРА́Л — 1) интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}\, d\theta = u(r, \varphi),$$

где r и φ — полярные координаты, θ — параметр, меняющийся на отрезке $[0, 2\pi]$; П. и. выражает значения функции $u(r, \varphi)$, гармонической внутри круга радиуса R, через её значения $f(\theta)$, заданные на границе этого круга. Функция $u(r, \varphi)$ является решением задачи Дирихле

для круга. Изучены также П. и., дающие решение задачи Дирихле для шара, полуплоскости и полупространства. П. п. был впервые рассмотрен С. Пуассоном (1823). Строгая теория П. и. была создана Г. Шварцем (1869).

2) Интеграл

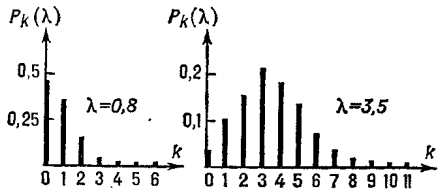
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi};$$

встречается в теории вероятностей и нек-рых задачах математич. физики. С. Пуассон предложил весьма простой приём для вычисления этого интеграла. Впервые этот интеграл был вычислен Л. Эйлером (1729).

ПУАССО́НА РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — распределение вероятностей случайной величины X с целочисленными неотрицательными значениями (рис.), $k=0, 1, 2, \ldots$, заданное формулой

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda>0$ — параметр. Своё название «П. р.» получило по имени С. Пуассона (1837). Математич. ожидание и



дисперсия равны $\mathsf{E}X=\mathsf{D}X=\lambda$. Если независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют П. р. с параметрами λ_1 и λ_2, то их сумма X_1+X_2 имеет П. р. с параметром $\lambda_1+\lambda_2$.

В теоретико-вероятностных моделях П. р. используется и как аппроксимирующее, и как точное распределение. Напр., если при n независимых испытаниях события $A_1, \ldots, A_n$ осуществляются с одной и той же малой вероятностью p, то вероятность одновременного осуществления каких-либо k событий (из общего числа n) приближённо выражается функцией $P_k(np)$ (математич. содержание этого утверждения при больших значениях n и $1/p$ формулируется *Пуассона теоремой*). В частности, такая модель хорошо описывает процесс радиоактивного распада и многие другие физич. явления.

Как точное П. р. появляется в теории случайных процессов. Напр., при расчёте нагрузки линий связи обычно предполагают, что количество вызовов, поступивших за непересекающиеся интервалы времени, суть независимые случайные величины, подчиняющиеся П. р. с параметрами, значения к-рых пропорциональны длинам соответствующих интервалов времени (см. *Пуассоновский процесс*).

В качестве оценки неизвестного параметра λ по наблюдённым значениям независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ используется их арифметич. среднее $\overline{X} = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$, поскольку эта оценка лишена систематич. ошибки и её квадратич. отклонение минимально.

ПУАССО́НА ТЕОРЕ́МА — 1) одна из предельных теорем теории вероятностей, являющаяся частным случаем *больших чисел закона*. П. т. описывает поведение частоты нек-рого события в последовательности независимых испытаний и обобщает в этом отношении *Бернулли теорему*. П. т. была установлена С. Пуассоном в сочинении «Исследования о вероятностях суждений» (1837), где впервые появился термин «закон больших чисел». Формулировка П. т. такова: если $\frac{\mu_n}{n}$ — частота наступления μ_n раз случайного события A в последовательности n независимых испытаний, в испытании с номером k событие A наступает с вероятностью p_k, $k=1, 2, \ldots, n$

$$\overline{p} = (p_1+\ldots+p_n)/n,$$

то при любом $\varepsilon>0$ вероятность неравенства

$$\left|\frac{\mu_n}{n} - \overline{p}\right| \leqslant \varepsilon$$

будет стремиться к единице при $n\to\infty$. Теорема Бернулли является частным случаем П. т. при $\overline{p}=p_1=\ldots=p_n$. Доказательство П. т. было получено С. Пуассоном из варианта центральной предельной теоремы в формулировке, обобщающей теорему Лапласа. Простое доказательство П. т. было дано П. Л. Чебышевым (1846).

2) Одна из предельных теорем теории вероятностей, дающая приближённое распределение числа наступлений нек-рого маловероятного (редкого) события при большом числе независимых испытаний. Если, напр., $P_n(m)$ — вероятность того, что в схеме Бернулли n испытаний нек-рое событие A наступило m раз и вероятность его равна p, то П. т. утверждает, что при больших значениях n и $1/p$ вероятность $P_n(m)$ близка к величине

$$e^{-np}\frac{(np)^m}{m!}.$$

Величина np представляет собой среднее значение числа наступления события A в n испытаниях, а величины $e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$ при $\lambda>0$ и $m=0, 1, 2, \ldots$ составляют распределение вероятностей нек-рой случайной величины — т. н. *Пуассона распределение*. Более удобна П. т. в форме неравенства для более общей, чем схема Бернулли, схемы испытаний: если событие A наступает в k-м испытании с вероятностью p_k, $k=1, 2, \ldots$, $\lambda=p_1+\ldots+p_n$, $\delta=p_1^2+\ldots+p_n^2$, то при $n\geqslant 2$

$$\left|P_n(m) - e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\right| \leqslant 2\delta.$$

Это неравенство указывает ошибку при замене $P_n(m)$ величиной $e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$. Если, напр., $\overline{p}=p_1=\ldots=p_n=\frac{\lambda}{n}$, то $\delta=\lambda^2/n$, и ошибка уменьшается с ростом n. П. т. часто наз. теоремой о сходимости биномиального распределения к распределению Пуассона.

ПУАССО́НА УРАВНЕ́НИЕ — уравнение с частными производными вида

$$\Delta u = f,$$

где Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

При $n=3$ этому уравнению удовлетворяет *потенциал* $u(x, y, z)$ объёмных масс, распределённых с плотностью $f(x, y, z)/4\pi$ (в областях, где $f=0$, потенциал u удовлетворяет уравнению Лапласа), а также потенциал объёмно распределённых электрич. зарядов. При этом плотность распределения f должна удовлетворять известным требованиям гладкости (напр., условию непрерывности частных производных). Если функция f отлична от нуля лишь в конечной области G, ограничена и имеет непрерывные частные производные 1-го порядка, то при $n=2$ частное решение П. у. имеет вид

$$V(P) = \frac{1}{2\pi}\int\int_G f(A)\ln\frac{1}{r(A, P)}\,d\sigma,$$

а при $n=3$:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi}\int\int\int_G \frac{f(A)}{r(A, P)}\,d\tau,$$

где $r(A, P)$ — расстояние между переменной точкой интегрирования A и нек-рой точкой P. В более подробной записи:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int\int\int_G \frac{f(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}.$$

Решение краевых задач для П. у. сводится подстановкой $u=v+w$ к решению краевых задач для уравнения Лапласа $\Delta w=0$.

Основные численные методы для решения П. у. — различные варианты проекционных и разностных ме-

тодов. Ряд численных методов связан с переходом к интегральным уравнениям и их последующим аппроксимациям, наиболее часто они применяются для уравнения Лапласа.

П. у. впервые было изучено С. Пуассоном (1812).

ПУАССО́НА ФО́РМУЛА СУММИ́РОВАНИЯ — формула для вычисления суммы ряда вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n).$$

Если

$$f(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i y x} F(x)\,dx$$

— преобразование Фурье (несколько иначе, чем обычно, нормированное) функции $F(x)$, то

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(m)$$

(m и n — целые). Это и есть П. ф. с.; она может быть записана в более общем виде: если $\lambda>0$, $\mu>0$, $\lambda\mu=1$ и $0\leqslant t<1$, то

$$\sqrt{\mu}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n t} f(n\mu)=\sqrt{\lambda}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(t\lambda+m\lambda).$$

Для справедливости этой формулы достаточно, чтобы в каждом конечном интервале $F(x)$ имела ограниченную вариацию и для $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ выполнялось одно из условий: 1) $F(x)$ — монотонна и абсолютно интегрируема; 2) $F(x)$ — интегрируема и обладает абсолютно интегрируемой производной. П. ф. с. позволяет в ряде случаев заменить вычисление суммы ряда вычислением суммы другого ряда, сходящегося быстрее первоначального.

ПУАССО́НОВСКИЙ ПОТО́К — то же, что *пуассоновский процесс*. Этот термин используют, как правило, в теории массового обслуживания.

ПУАССО́НОВСКИЙ ПРОЦЕ́СС — случайный процесс, описывающий моменты наступления каких-либо случайных событий, в котором число событий, происходящих в течение любого фиксированного интервала времени, имеет распределение Пуассона, и чи́сла событий, происходящих в непересекающиеся промежутки времени, независимы.

Пусть $X(s,\ t)$ — число событий, моменты наступления к-рых τ_i удовлетворяют неравенствам $0\leqslant s<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_n<\ldots<t$, и пусть $\lambda(s,\ t)$—математич. ожидание $X(s,\ t)$. Тогда в П. п. при любых $0<s_1<t_1\leqslant s_2<t_2<\ldots\leqslant s_r<t_r$ случайные величины $X(s_1,\ t_1)$, $X(s_2,\ t_2)$, $\ldots$, $X(s_r,\ t_r)$ независимы, и вероятность того, что $X(s,\ t)=n$, равна

$$e^{-\lambda(s,\ t)}(\lambda(s,\ t))^r/n!.$$

В однородном П. п. $\lambda(s,\ t)=a(t-s)$, где a — среднее число событий в единицу времени, расстояния $\tau_n-\tau_{n-1}$ между соседними моментами τ_n независимы и имеют показательное распределение с плотностью ae^{-at}, $t\geqslant 0$. П. п. обладает тем свойством, что появление очередного случайного события после любого фиксированного момента времени t не зависит от наступления событий до этого момента, то есть П. п. является однородным марковским процессом.

Если имеется много независимых процессов, описывающих моменты возникновения нек-рых случайных редких событий, то суммарный процесс при определённых условиях в пределе даёт П. п.

П. п. представляет собой удобную математич. модель, к-рая часто используется в различных приложениях теории вероятностей. В частности, с помощью П. п. описывается однородный поток требований (напр., вызовов, поступающих на телефонную станцию, выездов медицинских машин скорой помощи при транспортных происшествиях в большом городе) в теории массового обслуживания.

ПУСТО́Е МНО́ЖЕСТВО — множество, не содержащее ни одного элемента; обозначение: $\varnothing$, $\wedge$. Понятие «П. м.» (подобно понятию «нуль») возникает из потребности, чтобы результат всякой операции над множествами был также множеством (см. *Множеств теория*). Источником понятия «П. м.» является и самый способ задания множества характеристич. свойством его элементов, ибо может оказаться заранее неизвестным, существуют ли на самом деле элементы, обладающие этим свойством. Так, до сих пор неизвестно (1987), разрешимо ли, вообще говоря, в натуральных числах x, y, z уравнение $x^n+y^n=z^n$, где n — целое число, большее двух (т. е. пусто или непусто множество тех $n>2$, для к-рых упомянутое уравнение разрешимо в натуральных числах).

ПУЧО́К — однопараметрическое семейство линий на плоскости или поверхностей в пространстве, линейно зависящее от параметра. Пусть F_1 и F_2 — функции двух переменных, непропорциональные друг другу. Семейство линий на плоскости, определяемых уравнением

$$\lambda_1 F_1+\lambda_2 F_2=0$$

при всевозможных значениях параметров λ_1 и λ_2 (кроме $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$), представляет собой П. (фактически П. зависит от одного параметра $\lambda_1:\lambda_2$). Каждые два элемента П. пересекаются по одному и тому же множеству точек — н о с и т е л ю П. Напр., П. прямых — множество всех прямых плоскости, проходящих через фиксированную точку или параллельных фиксированной прямой (носитель — несобственная точка), задаётся уравнением

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

Аналогично определяется П. плоскостей в пространстве:

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0;$$

носитель — прямая (собственная или несобственная).

П. окружностей — однопараметрич. семейство окружностей, линейно зависящее от параметра; носителем П. окружностей в общем случае являются две круговые точки и две собственные точки.

ПЯ́ТЫЙ ПОСТУЛА́Т — аксиома параллельности евклидовой геометрии: через точку P вне прямой AA' в плоскости, проходящей через P и AA', можно провести лишь одну прямую, не пересекающую AA'. В «Началах» Евклида (3 в. до н. э.) П. п. был приведён в другой формулировке. Комментаторы Евклида предполагали, что это предложение можно доказать, опираясь на остальные аксиомы. Попытки доказательств возникли ещё в Древней Греции. Эти попытки продолжались на средневековом Востоке (напр., Омар Хайям в 11—12 вв.), а затем в Западной Европе (напр., Дж. Саккери в 1733, И. Ламберт в 1766, А. Лежандр в 1800). Если не говорить о прямых логич. ошибках, то обычно неявно (а иногда и с отчётливым пониманием) вводилось предположение, не выводимое из остальных аксиом, к-рое оказывалось таким образом эквивалентным П. п. Решение проблемы П. п. (точнее, её снятие) было получено путём создания Н. И. Лобачевским в 1826 геометрии, отрицающей П. п. Из непротиворечивости *Лобачевского геометрии* следует независимость П. п. от других аксиом евклидовой геометрии.

Р

РАВНОБЕ́ДРЕННЫЙ ТРЕУГО́ЛЬНИК — треугольник, у которого две стороны равны.

РАВНОБО́ЧНАЯ ГИПЕ́РБОЛА — см. *Гипербола.*

РАВНОБО́ЧНАЯ ТРАПЕ́ЦИЯ — трапеция с равными боковыми сторонами.

РАВНОВЕЛИ́КАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция.*

РАВНОВЕЛИ́КИЕ И РАВНОСОСТА́ВЛЕННЫЕ ФИГУ́РЫ — две фигуры в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, имеющие равные площади и соответственно два многоугольника M_1 и M_2 такие, что их можно разрезать на многоугольники так, что части, составляющие M_1, соответственно конгруэнтны частям, составляющим M_2. Для $\mathbb{R}^3$ равновеликость фигур означает равенство объёмов; равносоставленность многогранников определяется аналогично равносоставленности многоугольников.

Равносоставленные фигуры являются равновеликими. Ф. Больяй (1832) и П. Гервин (1833) доказали, что равновеликие многоугольники являются равносоставленными (теорема Больяй — Гервина). Поэтому разрезанием на части и их перекладыванием можно любой многоугольник превратить в равновеликий ему квадрат. Понятие равносоставленности лежит в основе метода разбиения, применяемого для вычисления площадей многоугольников: параллелограмм «разрезанием и перекладыванием» сводят к прямоугольнику, треугольник — к параллелограмму, трапецию — к треугольнику. Эквивалентным понятию равносоставленности является понятие равнодополняемости, к-рое лежит в основе метода дополнения, т. е. дополнения двух фигур равными частями так, чтобы получившиеся после такого дополнения фигуры были равны.

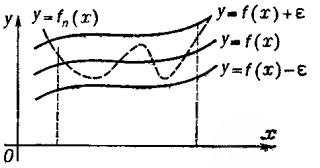
Равновеликие многогранники не всегда являются равносоставленными. Так, напр., куб и равновеликий ему правильный тетраэдр не являются равносоставленными — т. н. теорема Дена (1901), установившая отрицательное решение третьей проблемы Гильберта.

РАВНОМЕ́РНАЯ НЕПРЕРЫ́ВНОСТЬ — свойство функции $f(x)$, заданной на множестве E (из $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{C}$), заключающееся в том, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ для любой пары чисел x_1 и x_2 из множества E, удовлетворяющей условию $|x_1-x_2|<\delta$. Равномерно непрерывная функция на данном множестве непрерывна на нём; обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

В более общем случае Р. н.— свойство отображения $f: X \to Y$, где X и Y — метрич. пространства, означающее, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x_1, x_2)<\delta$, выполняется неравенство $\rho(f(x_1), f(x_2))<\varepsilon$. Если отображение $f: X \to Y$ непрерывно на X и X — компакт, то f равномерно непрерывно на X. Композиция равномерно непрерывных отображений равномерно непрерывна.

РАВНОМЕ́РНАЯ ОГРАНИ́ЧЕННОСТЬ — свойство семейства F функций $f(x)$, удовлетворяющих на данном множестве E значений x следующему условию: существует такое число M, что для каждого $x \in E$ и любой функции $f(x)$ из F выполняется неравенство $|f(x)|<M$. Если равномерно ограниченное семейство функций является равностепенно непрерывным, то из него можно выделить последовательность, равномерно сходящуюся на данном множестве к непрерывной функции.

РАВНОМЕ́РНАЯ СХОДИ́МОСТЬ — важный частный случай сходимости. Последовательность функций $f_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, наз. равномерно сходящейся на данном множестве к предельной функции $f(x)$, если для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $N=N(\varepsilon)$, что $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ при $n>N$ для всех точек x из данного множества. Напр., последовательность функций $f_n(x)=x^n$ равномерно сходится на отрезке $[0, 1/2]$ к предельной функции $f(x)=0$, так как $|f(x)-f_n(x)|<1/2^n<\varepsilon$ для всех $0 \leqslant x \leqslant 1/2$, если только $n>\ln(1/\varepsilon)/\ln 2$, но она не будет равномерно сходящейся на отрезке $[0, 1]$, где предельной функцией является $f(x)=0$ при $0 \leqslant x<1$ и $f(1)=1$, т. к. для любого сколько угодно большого заданного n существуют точки η, удовлетворяющие неравенствам $\sqrt[n]{1/2}<\eta<1$, для к-рых $|f(\eta)-f_n(\eta)|=\eta^n>1/2$. Понятие Р. с. допускает простую геометрич. интерпретацию: если последовательность функций $f_n(x)$ равномерно сходится, напр. на отрезке $[a, b]$ к функции $f(x)$, то это означает, что для любого $\varepsilon>0$ все кривые $y=f_n(x)$ с достаточно большим номером будут расположены при $a \leqslant x \leqslant b$ внутри полосы ширины 2ε, ограниченной кривыми $y=f(x)\pm\varepsilon$ (рис.).



Равномерно сходящиеся последовательности функций обладают важными свойствами; напр., предельная функция равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций также непрерывна (приведённый выше пример показывает, что предельная функция последовательности непрерывных функций, к-рая не является равномерно сходящейся, может быть разрывной). Важную роль в математич. анализе играет теорема Вейерштрасса: каждая непрерывная на отрезке функция может быть представлена как предел равномерно сходящейся последовательности алгебраич. многочленов (или тригонометрич. полиномов).

О Р. с. рядов и её признаках см. в ст. *Ряд.*

РАВНОМЕ́РНАЯ ТОПОЛО́ГИЯ — см. *Топология.*

РАВНОМЕ́РНО НАИБО́ЛЕЕ МО́ЩНЫЙ СТАТИСТИ́ЧЕСКИЙ КРИТЕ́РИЙ — см. *Статистических гипотез проверка.*

РАВНОМЕ́РНОЕ ПРИБЛИЖЕ́НИЕ, чебышевское приближение,— приближение функции, в котором мерой уклонения на данном множестве служит точная верхняя грань модуля разности между данной функцией $f(x)$ и приближающей функцией $P(x)$. Напр., уклонением непрерывной функции $P(x)$ от непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ будет

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)-P(x)| = \rho(f, P).$$

См. также *Приближение функций.*

РАВНОМЕ́РНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — множество X, наделённое семейством *псевдометрик* $\{\rho_\alpha(x, y)\}$ [обычно отделяющим точки: для каждой пары различных точек x, y существует α такое, что $\rho_\alpha(x, y)\neq 0$]. Если семейство сводится к одной псевдометрике, то X — метрич. пространство. Р. п. является топологич. пространством, более того,— тихоновским.

РАВНОМЕ́РНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ, прямоугольное распределение,— распределение вероятностей случайной величины X, заданное плотностью

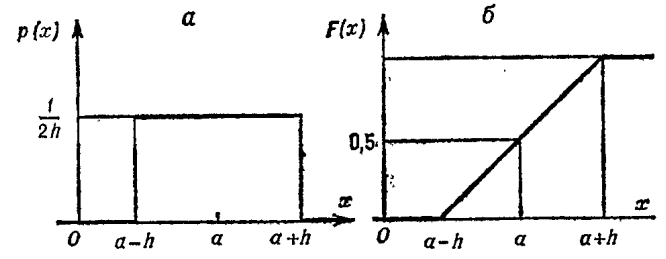
$$p(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ при } x \in [a, b], \\ 0 \text{ в ином случае.} \end{cases} \quad (*)$$

Понятие Р. р. на $[a, b]$ соответствует представлению о выборе точки из отрезка $[a, b]$ «наудачу». Математич. ожидание и дисперсия соответственно равны $EX=\frac{b+a}{2}$

и $DX=(b-a)^2/12$. Характеристич. функция имеет вид $\frac{1}{it(b-a)}(e^{itb}-e^{ita})$.

Произвольное Р. р. с плотностью (*) может быть сведено линейным преобразованием к Р. р. на отрезке [0, 1], характеристики к-рого имеют наиболее простой вид (напр., моменты любого порядка k равны $EX^k=\frac{1}{k+1}$).

Если X_1 и X_2 независимы и имеют Р. р. на отрезке [0, 1], то их сумма X_1+X_2 подчиняется т. н. треугольному распределению на отрезке [0, 2]. Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и имеют Р. р. на отрезке [0, 1], то распределение их суммы $X_1+X_2+\ldots+X_n$, нормированной математич. ожиданием $n/2$ и средним квадратич. отклонением $n/12$ (в силу центральной пре-



Равномерное распределение на интервале $(a-h,\ a+h)$: *а* — плотность вероятности; *б* — функция распределения.

дельной теоремы), с ростом n довольно быстро сближается с нормальным распределением с параметрами 0 и 1 (уже при $n=3$ приближение удовлетворительно для практич. целей).

Аналогично определяется Р. р. на нек-ром множестве D в евклидовом пространстве размерности k:

$$p(x_1, \ldots, x_k)=\begin{cases} C, & (x_1, \ldots, x_k)\in D, \\ 0, & (x_1, \ldots, x_k)\notin D, \end{cases}$$

где постоянная C обратно пропорциональна мере (длине, площади, объёму и т. п.) множества D. Р. р. является одним из самых распространённых распределений в теории вероятностей.

РАВНОМЕ́РНЫЙ КОД — *код*, слова которого имеют одинаковую длину (одно и то же количество символов).

РАВНОМО́ЩНЫЕ МНО́ЖЕСТВА — множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие. См. *Кардинальное число*.

РАВНОПРОМЕЖУ́ТОЧНАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция*.

РАВНОСИ́ЛЬНОСТЬ, или эквивалентность, утверждений (формул) A и B — понятие, означающее, что при каждом допустимом наборе значений параметров утверждений A и B оба истинны или оба ложны. Напр., Р. уравнений, неравенств и их систем означает совпадение множеств их решений.

РАВНОСИ́ЛЬНЫЕ УРАВНЕ́НИЯ, эквивалентные уравнения,— уравнения, имеющие одно и то же множество корней (решений). Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же аналитич. выражение (напр., многочлен) или умножить обе части на одно и то же число, не равное 0, то получают уравнение, равносильное данному; напр.: $x^2-x+1=x-1$ и $x^2-2x+2=0$ — Р. у. (к обеим частям первого прибавлен многочлен — $x+1$), $0{,}01x^2-0{,}37x+1=0$ и $x^2-37x+100=0$ — также Р. у. (обе части первого умножены на 100). Но если умножить или разделить обе части уравнения на многочлен степени не ниже 1, то полученное уравнение, вообще говоря, не будет равносильным данному; напр., $x-1=0$ и $(x-1)(x+1)=0$ — не Р. у. (корень $x=-1$ второго не является корнем первого).

Понятие Р. у. приобретает точный смысл, когда указано поле, в к-ром лежат корни уравнений; напр., $x^2-1=0$ и $x^4-1=0$ — Р. у. в поле действительных чисел (множество корней как для одного, так и для другого состоит из двух чисел: $x_1=1$, $x_2=-1$), но они не Р. у. в поле комплексных чисел, т. к. второе имеет ещё два мнимых корня: $x_3=i$, $x_4=-i$. Понятие Р. у. применяется и к системам уравнений. Две системы наз. равносильными, если они имеют одно и то же множество решений. Любые несовместные системы по определению равносильны между собой. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ два многочлена от переменных x и y и a, b, c и d — числа (действительные или комплексные), то две системы

$$P(x, y)=0,\ Q(x, y)=0$$

и

$$aP(x, y)+bQ(x, y)=0,\ cP(x, y)+dQ(x, y)=0$$

равносильны тогда, когда определитель $ad-bc\neq 0$.

РАВНОСОСТА́ВЛЕННЫЕ ФИГУ́РЫ — см. *Равновеликие и равносоставленные фигуры*.

РАВНОСТЕПЕ́ННАЯ НЕПРЕРЫ́ВНОСТЬ — свойство семейства F функций $f(x)$, удовлетворяющих на данном множестве E значений x следующему условию: для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любых x_1 и x_2 из E таких, что $|x_1-x_2|<\delta$, и для любой функции $f(x)$ из F выполняется неравенство $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. Каждая функция равностепенно непрерывного семейства равномерно непрерывна на данном множестве. Если равностепенно непрерывное семейство функций является равномерно ограниченным, то из него можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на данном множестве, т. е. это семейство компактно в пространстве непрерывных функций.

РАВНОСТОРО́ННИЙ ТРЕУГО́ЛЬНИК, правильный треугольник,— треугольник, все стороны которого равны.

РАВНОСТОРО́ННЯЯ ГИПЕ́РБОЛА — то же, что равнобочная *гипербола*.

РАВНОУГО́ЛЬНАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция*.

РАВНОУГО́ЛЬНАЯ СПИРА́ЛЬ — то же, что *логарифмическая спираль*.

РАДИА́Н (от лат. radius — спица колеса, луч) — угол, соответствующий дуге, длина которой равна её радиусу; содержит приблизительно $57°17'44{,}8''$. Р. принимается за единицу измерения углов при т. н. круговом, или радианном, измерении углов. Если круговая мера угла равна α, то угол содержит $\frac{180°}{\pi}\alpha$ градусов; обратно, угол в $n°$ имеет круговую меру $\frac{\pi n}{180°}$. Напр., углам в 30°, 45°, 60°, 90°, 180° соответствуют углы, содержащие $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π радиан.

РАДИКА́Л (от позднелат. radicalis — имеющий корни, лат. radix — корень) —1) математический знак $\sqrt{\ }$ (изменённое лат. r), которым обозначают действие извлечения корня, а также результат извлечения корня, т. е. число вида $\sqrt[n]{a}$.

2) Р.— важное понятие теории колец. Впервые понятие «Р.» было введено в нач. 20 в. для конечномерных ассоциативных алгебр, это т. н. классич. Р. (см. *Кольцо*). Он определяется как наибольший нильпотентный идеал алгебры. Впоследствии понятие Р. обобщалось различными способами на многие классы колец и алгебр. Во всех случаях радикал R кольца или алгебры A определяется таким образом, чтобы Р. факторкольца (факторалгебры) A/R был нулевым. Кольца и алгебры с нулевыми Р. наз. полупростыми.

Наиболее часто используемый Р. ассоциативных колец определяется как множество тех элементов, к-рые при любом неприводимом представлении кольца отображаются в нуль (см. *Модуль*).

Определение Р. для алгебр Ли см. в ст. *Ли алгебра*.

РА́ДИУС о к р у ж н о с т и (с ф е р ы) (лат. radius — спица колеса, луч) — отрезок, соединяющий точку окружности (сферы) с центром. Р. также называют длину этого отрезка.

РА́ДИУС КРИВИЗНЫ́ к р и в о й — радиус *круга кривизны*; см. также *Соприкасающаяся окружность*; о Р. к. п л о с к о с т и (п р о с т р а н с т в а) см. в ст. *Неевклидовы геометрии*.

РА́ДИУС ПОЛЯ́РНЫЙ — см. *Координаты*, *Полярные координаты*, *Сферические координаты*.

РА́ДИУС СХОДИ́МОСТИ с т е п е н н о г о р я д а — см. *Круг сходимости*, *Степенной ряд*.

РА́ДИУС-ВЕ́КТОР — вектор, идущий в точку пространства из некоторой заранее фиксированной точки, называемой п о л ю с о м. Если в качестве полюса берётся начало декартовых координат, то проекции Р.-в. точки M на оси координат (прямоугольных) совпадают с координатами точки M.

Термин «Р.-в.» ввёл О. Коши (1853); ему же принадлежит представление $r=x+y+z$.

РАДО́ КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — наивысшей алгебраической степени точности квадратурная формула для отрезка $[-1, 1]$ и веса $p(x)=1$ с одним фиксированным узлом — концом отрезка:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \cong Af(-1)+\sum_{j=1}^{n} C_j f(x_j).$$

Узлы x_j — корни ортогонального на $[-1, 1]$ с весом $1+x$ многочлена Якоби $P_n^{0,1}(x)$, $A=2/(n+1)^2$. Коэффициенты C_j положительны. Алгебраич. степень точности равна $2n$. Формула найдена Р. Радо (1880).

РАДО́НА ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — отображение, сопоставляющее функции f на плоскости функцию $\hat{f}$ на множестве всех прямых, задаваемую интегралами от f вдоль прямых. Введено И. Радоном (1917), к-рому удалось получить явную формулу обращения, выражающую f через $\hat{f}$. Им же была поставлена общая задача об изучении отображений типа $f \to \hat{f}$ и намечены методы исследования таких отображений. Задачи указанного типа (т. н. обратные задачи) встречаются в различных областях математики (дифференциальные уравнения, математич. физика, теория представлений) и физики (радиоастрономия, геофизика).

РАЗБИ́ЕНИЕ ЕДИНИ́ЦЫ — семейство действительных неотрицательных непрерывных функций $\{\varphi_\alpha\}$ на топологическом пространстве X такое, что носители этих функций (т. е. замыкания множеств, где $\varphi_\alpha>0$) образуют локально конечное покрытие X и сумма значений этих функций в каждой точке равна единице.

РАЗБИ́ЕНИЯ МЕ́ТОД — метод вычисления площадей многоугольников; см. *Равновеликие и равносоставленные фигуры*.

РАЗВЁРНУТЫЙ У́ГОЛ — угол, стороны которого составляют одну прямую. В угловой мере Р. у. равен 180°, в радианной равен π.

РАЗВЁРТКА — 1) Р. к р и в о й — прямолинейный отрезок, длина к-рого равна длине этой кривой. Разыскание такого отрезка наз. с п р я м л е н и е м кривой. Иногда под Р. кривой понимают её эвольвенту. См. также *Риманова геометрия*.

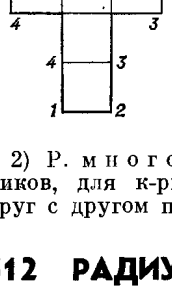


Рис. 1.

Рис. 2.

2) Р. м н о г о г р а н н и к а — множество многоугольников, для к-рых указано, как следует их соединить друг с другом по сторонам и вершинам, чтобы получить данный многогранник. При этом должны выполняться следующие требования: каждая сторона многоугольника соединяется не более чем с одной стороной другого многоугольника Р.; от каждого многоугольника можно перейти к любому другому, идя по многоугольникам, соединённым друг с другом; соединяемые стороны должны иметь равные длины. На рис. 1 показана Р. куба.

Понятие Р. иногда применяется (напр., в начертательной геометрии и черчении) к кривым поверхностям. Так, Р. боковой поверхности конуса — сектор круга (рис. 2).

РАЗВЁРТЫВАЮЩАЯСЯ ПОВЕ́РХНОСТЬ — линейчатая поверхность, которая при помощи изгибания может быть наложена («развёрнута») на плоскость.

РАЗВЕТВЛЕ́НИЯ ТО́ЧКА многозначной аналитической функции — то же, что *ветвления точка*.

РАЗДЕЛЕ́НИЯ ПЕРЕМЕ́ННЫХ МЕ́ТОД — то же, что *Фурье метод*.

РАЗДЕЛЕ́ННЫЕ РА́ЗНОСТИ — см. *Конечных разностей исчисление*.

РАЗЛОЖЕ́НИЕ — 1) Р. в е к т о р а п о б а з и с у — представление вектора в виде линейной комбинации базисных векторов.

2) Р. м н о г о ч л е н а н а м н о ж и т е л и — представление многочлена в виде произведения двух или большего числа многочленов низших степеней; напр.:

$$x^2-1=(x-1)(x+1),\quad x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b),$$
$$x^4-a^4=(x+a)(x-a)(x^2+a^2).$$

Простейшие приёмы Р. на множители:

вынесение общего множителя за скобку, напр.:

$$x^4+a^2x^2=x^2(x^2+a^2),$$
$$x(x-a)-b(x-a)=(x-a)(x-b);$$

применение готовых (запоминаемых наизусть) формул:

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a);$$
$$x^2\pm 2ax+a^2=(x\pm a)^2,$$
$$x^3\pm 3a^2x+3ax^2\pm a^3=(x\pm a)^3;$$

способ группировки, напр.:

$$x^3+ax^2+a^2x+a^3=(x^3+ax^2)+(a^2x+a^3)=$$
$$=x^2(x+a)+a^2(x+a)=(x+a)(x^2+a^2);$$
$$x^4+a^4=(x^4+2a^2x^2+a^4)-2a^2x^2=$$
$$=(x^2+a^2)^2-(\sqrt{2}ax)^2=$$
$$=(x^2+a^2-\sqrt{2}ax)(x^2+a^2+\sqrt{2}ax).$$

Если многочлен степени n

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\quad(a_n\neq 0)$$

имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то справедливо Р. на множители:

$$P(x)=a_n(x-x_1)\ldots(x-x_n);$$

здесь все множители 1-й степени (линейные). Напр., из того, что многочлен 3-й степени $x^3-6x^2+11x-6$ имеет следующие корни: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ вытекает Р. на множители $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$. Вообще, каждый многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители 1-й или 2-й степени также с действительными коэффициентами. Так, выше было указано разложение: $x^4+a^4=(x^2-\sqrt{2}ax+a^2)(x^2+\sqrt{2}ax+a^2)$. Здесь все множители 2-й степени; при a действительном и неравном нулю они могут быть разложены только на множители с комплексными коэффициентами, напр.:

$$x^2-\sqrt{2}ax+a^2=\left(x-\frac{1-i}{\sqrt{2}}a\right)\left(x-\frac{1+i}{\sqrt{2}}a\right).$$

Среди многочленов от двух или большего числа переменных существуют многочлены сколь угодно высокой степени, к-рые вообще не разлагаются на множители (неприводимые многочлены); таков, напр., многочлен x^n+y при любом натуральном n. См. *Многочлен*, *Неприводимый многочлен*.

3) Р. р а ц и о н а л ь н о й ф у н к ц и и н а э л е м е н т а р н ы е д р о б и — см. *Рациональная функция*.

4) Р. функции в ряд — см. *Тейлора ряд*, *Фурье ряд*.

РАЗЛОЖЕ́НИЕ ЕДИНИ́ЦЫ — однопараметрическое семейство $\{E_\lambda\}$, $-\infty<\lambda<\infty$, проекторов в гильбертовом пространстве H такое, что:

1) $E_\lambda \leqslant E_\mu$, если $\lambda<\mu$;

2) E_λ непрерывен слева: $E_{\lambda-0}=E_\lambda$;

3) $E_\lambda \to \mathbf{0}$ при $\lambda \to -\infty$ и $E_\lambda \to \mathbf{1}$ при $\lambda \to \infty$, где $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — нулевой и единичный операторы в H.

Всякое Р. е. однозначно определяет самосопряжённый оператор A по формуле

$$A=\int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda .$$

РАЗМА́Х выборки — разность между наибольшим и наименьшим значениями результатов наблюдений. Если $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения $F(x)$ и $X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant \ldots \leqslant X_{(n)}$ — соответствующий вариационный ряд, то Р. выборки $X_1, \ldots, X_n$ (или, что то же самое, Р. вариационного ряда $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$) есть случайная величина

$$W_n = X_{(n)} - X_{(1)},$$

где $$X_{(1)}=\min_{1\leqslant k\leqslant n} X_k, \quad X_{(n)}=\max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k.$$

Функция распределения Р. W_n выражается формулой

$$\mathrm{P}\{W_n<y\}=\begin{cases} n\int_{-\infty}^{\infty}[F(x+y)-F(x)]^{n-1}\,dF(x), & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

В математич. статистике Р. W_n используется для оценки квадратичного отклонения. Пусть W_n — Р. выборки $X_1, \ldots, X_n$, где X_k имеют нормальное распределение с неизвестными параметрами (a, σ^2), и $C_n=\mathrm{E}W_n/\sigma$, тогда отношение W_n/C_n представляет собой несмещённую оценку для квадратичного отклонения σ. Размах W_n удобно использовать в этом качестве, если объём выборки n не очень велик ($n<20$), при этом определение Р. выборки производится довольно просто и требует несложных вычислений. Особенно часто этот способ используется при приёмочном статистич. контроле.

РАЗМЕ́РНОСТИ ТЕО́РИЯ — часть топологии, в которой для каждого компакта, а впоследствии и для более общих классов топологических пространств тем или иным естественным образом определяется числовой топологический инвариант — размерность, совпадающий, если X есть полиэдр (в частности, многообразие), с его числом измерений в смысле элементарной или дифференциальной геометрии. Первое общее определение размерности было дано Л. Брауэром (1913) для компактов и даже для более широкого класса полных метрич. пространств. Определение строится по индукции следующим образом. Пустому множеству приписывается размерность -1. В предположении, что определены пространства размерности $\leqslant n$, говорят, что пространство X имеет размерность $\leqslant n+1$, если между любыми двумя непересекающимися замкнутыми множествами A и B пространства X имеется перегородка Ф размерности $\leqslant n$ (при этом перегородкой между множествами A и B в пространстве X наз. такое замкнутое множество Ф этого пространства, что дополнение $X\setminus\Phi$ есть сумма двух непересекающихся открытых множеств C и D, из к-рых одно содержит множество A, а другое — множество B). В 1921 П. С. Урысон и К. Менгер независимо от Л. Брауэра и друг от друга пришли к эквивалентному в случае компактов и даже любых сепарабельных метрич. пространств определению, отличающемуся от брауэровского тем, что одно из двух замкнутых множеств A, B предполагается состоящим из одной точки. Определения размерности в смысле Брауэра и в смысле Урысона и Менгера могут быть сформулированы для любых хаусдорфовых пространств, и определяемые ими топологич. инварианты наз. соответственно большой и малой индуктивной размерностью и обозначаются $\mathrm{Ind}\,X$ и $\mathrm{ind}\,X$, причём всегда $\mathrm{ind}\,X\leqslant\mathrm{Ind}\,X$.

Совершенно иной подход к понятию размерности берёт начало от А. Лебега, высказавшего следующую теорему: n-мерный в смысле элементарной геометрии куб Q^n при любом положительном числе ε может быть покрыт конечным числом замкнутых множеств (даже кубов) диаметра $<\varepsilon$ таким образом, что кратность этого покрытия равна $n+1$, тогда как при достаточно малом $\varepsilon>0$ не существует конечного покрытия куба Q^n, к-рое имеет кратность $<n+1$ и состоит из замкнутых множеств диаметра $<\varepsilon$; при этом кратностью какой-либо (конечной) совокупности множеств наз. такое наибольшее целое число m, что в данной совокупности имеется m множеств с непустым пересечением. Теперь можно теорему Лебега сформулировать так. Число измерений куба Q^n есть такое наименьшее целое число n, для к-рого имеется сколь угодно мелкое (т. е. состоящее из элементов сколь угодно малого диаметра) конечное покрытие куба Q^n кратности $n+1$ замкнутыми множествами. Эта теорема, впервые доказанная лишь Л. Брауэром в той же работе, в к-рой он дал своё определение размерности, приводит к следующему определению. Размерностью $\dim X$ компакта X (определённой посредством покрытий) называют такое наименьшее число n, что при любом $\varepsilon>0$ компакт X имеет конечное покрытие кратности $n+1$, состоящее из замкнутых множеств диаметра $<\varepsilon$. Не меняя содержания этого определения, можно заменить в его формулировке замкнутые множества открытыми.

При определении размерности компакта X применяется понятие диаметра множества, относящееся к метрике, а не к топологии компакта X. Однако доказывается, что определённое так число $\dim X$ тем не менее является топологич. инвариантом компакта X, т. е. что два гомеоморфные между собою компакта имеют одну и ту же размерность $\dim X$.

Открытым покрытием топологич. пространства называют любую совокупность его открытых множеств, дающих в своей сумме всё это пространство. Говорят, что покрытие α' мельче покрытия α, если α' вписано в α, т. е. если каждый элемент покрытия α' является подмножеством хотя бы одного элемента покрытия α. Оказывается, размерность $\dim X$ можно определить так: число $\dim X$ есть такое наименьшее целое число n, что для всякого конечного открытого покрытия пространства X существует вписанное в него открытое покрытие кратности $n+1$. Но это определение, очевидно, может быть сформулировано не только для компактов, а для любых топологич. пространств и позволяет определить для них размерность. Размерность $\dim X$, определённая таким образом для топологич. пространств, позволяет построить содержательную и богатую математич. фактами теорию, по крайней мере, для нормальных пространств (а значит, в частности, и для метризуемых пространств).

Одной из главных проблем Р. т. является выяснение наиболее широких условий, при к-рых имеет место тождество

$$\mathrm{ind}\,X=\mathrm{Ind}\,X=\dim X.$$

Оно верно для всех сепарабельных метризуемых пространств, т. е. для всех нормальных пространств со счётной базой, а также для пространств локально бикомпактных групп. Без предположения сепарабельности для метризуемых пространств можно утверждать лишь справедливость формулы

$$\mathrm{ind}\,X\leqslant\mathrm{Ind}\,X=\dim X,$$

а для бикомпактов — формулы

$$\dim X\leqslant\mathrm{ind}\,X\leqslant\mathrm{Ind}\,X,$$

причём имеются бикомпакты X, для к-рых $\dim X\neq\mathrm{ind}\,X$,

и бикомпакты X, для к-рых

$$\operatorname{ind} X \neq \operatorname{Ind} X.$$

Одной из важнейших теорем Р. т. является т. н. теорема о существенных отображениях, лежащая в основе значительной части всей этой теории. Пусть f — непрерывное отображение (нормального) пространства X на n-мерный шар Q^n с границей S^{n-1}. Пусть $\Phi \subset X$ — прообраз сферы S^{n-1} при этом отображении, $\Phi = f^{-1}S^{n-1}$. Отображение $f: X \to Q^n$ наз. существенным, если всякое непрерывное отображение $g: X \to Q^n$, совпадающее с f во всех точках $x \in \Phi$, есть отображение на весь шар Q^n. Упомянутая теорема утверждает, что нормальное пространство X тогда и только тогда имеет размерность $\dim X \geqslant n$, когда пространство X можно существенно отобразить на n-мерный шар.

Теорема о существенных отображениях лежит в основе т. н. гомологической теории размерности, позволяющей применить к изучению размерности в весьма общих предположениях методы алгебраич. топологии.

● Александров П. С., Пасынков Б. А., Введение в теорию размерности..., М., 1973.
П. С. Александров.

РАЗМЕ́РНОСТЬ, число измерений, фигуры — число, равное единице, если фигура есть линия; равное двум, если фигура есть поверхность; равное трём, если фигура представляет собой тело. С точки зрения аналитич. геометрии Р. фигуры равна числу координат, нужных для определения положения лежащей на этой фигуре точки; напр., положение точки на кривой определяется одной координатой, на поверхности — двумя координатами, в трёхмерном пространстве — тремя координатами. С развитием понятия о многомерных пространствах геометрия начинает заниматься фигурами любой Р. Простейшими фигурами размерности m являются m-мерные многообразия; m-мерное многообразие, расположенное в n-мерном пространстве, задаётся при помощи $n-m$ уравнений (напр., линия, т. е. одномерное многообразие, в трёхмерном пространстве задаётся двумя уравнениями). Положение точки на m-мерном многообразии определяется «криволинейными» координатами (напр., положение точки на сфере определяется её «географич. координатами» — долготой и широтой; аналогично — на торе). Приведённые выше положения справедливы лишь при нек-рых ограничительных предположениях. Действительно, общее определение Р. любого замкнутого ограниченного множества, лежащего в n-мерном евклидовом пространстве, было дано П. С. Урысоном: оказывается, для того чтобы такое множество имело размерность $\leqslant m$, необходимо и достаточно, чтобы оно при любом $\varepsilon > 0$ допускало покрытие замкнутыми множествами, имеющее кратность $\leqslant m+1$. Это определение Р. естественно обобщается на широкие классы топологич. пространств (см. *Размерности теория*).

РАЗМЕЩЕ́НИЕ с повторениями из m элементов по n — конечная последовательность $\bar{a} = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ элементов некоторого множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Если все члены $\bar{a}$ различны, то $\bar{a}$ наз. Р. без повторений. Число всех возможных Р. с повторениями из m по n равно m^n, а без повторений $(m)_n = m(m-1)\ldots(m-n+1)$.

Р. можно рассматривать как функцию φ, заданную на $Z_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ и принимающую значения из A: $\varphi(k) = a_{i_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Элементы A принято называть ячейками (или урнами), а элементы Z_n — частицами (или шарами); φ определяет заполнение различных ячеек различными частицами. Если речь идёт о неразличимых частицах или ячейках, то рассматривают классы Р. Так, если все частицы одинаковы, то два Р., определяемые соответственно функциями φ и ψ, относятся к одному классу, если найдётся подстановка σ множества Z_n такая, что $\varphi(\sigma(k)) = \psi(k)$ для всех $k \in Z_n$. В этом случае число таких классов (или, что то же, число Р. n одинаковых частиц по m различным ячейкам) есть число *сочетаний* с повторениями из n по m.

РАЗМЕЩЕ́НИЯ ЗАДА́ЧА — одна из классических *комбинаторных задач*, в которой требуется определить число $C_{nm}(r)$ способов размещения m различных предметов в n различных ячейках с заданным числом r пустых ячеек. Это число равно

$$C_{nm}(r) = C_n^r \Delta^{n-r} 0^m, \quad r = 0, 1, \ldots, n,$$

где

$$\Delta^k 0^m = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j (k-j)^m.$$

Р. з. тесно связаны с теоретико-вероятностными приложениями.

РА́ЗНОСТИ КОНЕ́ЧНЫЕ — см. *Конечных разностей исчисление.*

РА́ЗНОСТНАЯ ПРОПО́РЦИЯ — то же, что *арифметическая пропорция.*

РА́ЗНОСТНАЯ СХЕ́МА — см. *Разностных схем теория.*

РА́ЗНОСТНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение, содержащее конечные разности искомой функции. Пусть $y(n) = y_n$ — функция целочисленного аргумента $n = 0, \pm 1, \ldots$ и $\Delta^k y_n$ — конечные разности k-го порядка, $k = 1, 2, \ldots, m$. Р. у. наз. уравнение

$$F(n;\ y_n,\ \Delta y_n,\ \ldots,\ \Delta^m y_n) = 0,$$

где y — искомая и F — заданная функции; эквивалентная запись:

$$\Phi(n,\ y_n,\ \ldots,\ y_{n+m}) = 0.$$

Линейное Р. у. имеет вид

$$a_m(n)\, y_{n+m} + a_{m-1}(n)\, y_{n+m-1} + \ldots + a_0(n)\, y_n = f_n, \qquad (1)$$

где $f_n = f(n)$ — заданная функция и $a_k(n)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, — коэффициенты. Если $a_0(n) \neq 0$, $a_m(n) \neq 0$, то число m наз. порядком Р. у.

Теория линейных Р. у. имеет много общего с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Напр., общее решение неоднородного Р. у. (1) представляется в виде суммы к.-л. частного его решения и общего решения однородного Р. у. Полная линейно независимая система решений однородного Р. у. с постоянными коэффициентами строится следующим образом. Отыскиваются корни q_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, характеристич. уравнения

$$a_m q^m + a_{m-1} q^{m-1} + \ldots + a_0 = 0. \qquad (2)$$

Если все корни простые, то функции

$$q_1^n,\ q_2^n,\ \ldots,\ q_m^n$$

образуют полную линейно независимую систему решений. В случае, когда q_k — корень кратности r, линейно независимыми являются решения

$$q_k^n,\ n q_k^n,\ n^2 q_k^n,\ \ldots,\ n^{r-1} q_k^n.$$

Если $q_k = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — простой корень уравнения (2) с действительными коэффициентами, то ему отвечают два линейно независимых действительных решения:

$$\rho^n \cos n\varphi,\ \rho^n \sin n\varphi.$$

Для линейных и нелинейных Р. у. изучено качественное поведение решений при $n \to \infty$ и развита теория устойчивости. В связи с многомерными Р. у. изучаются такие вопросы, как корректность систем Р. у., методы решения, сходимость разностных аппроксимаций к решению исходных дифференциальных уравнений.

См. *Разностных схем теория.*

РА́ЗНОСТНЫЕ МЕ́ТОДЫ — методы приближённого решения дифференциальных уравнений, основанные на замене этих уравнений уравнениями относительно функций дискретного аргумента. См. *Разностных схем теория, Аппроксимация дифференциальной краевой задачи разностной.*

РА́ЗНОСТНЫХ СХЕМ ТЕО́РИЯ — раздел вычислительной математики, изучающий методы приближённого решения дифференциальных уравнений путём их замены конечно-разностными уравнениями (разностными схемами)

Р. с. т. изучает способы построения разностных схем, исследует их корректность и сходимость, разрабатывает численные алгоритмы решения разностных задач. Метод конечных разностей (наз. также методом сеток) является универсальным вычислительным методом, позволяющим эффективно решать сложнейшие задачи математич. физики, включая нелинейные задачи. Отличительной чертой современной Р. с. т. является ориентация на построение и исследование методов, пригодных для решения задач на ЭВМ.

Основные понятия, к-рыми оперирует Р. с. т.,— понятия аппроксимации, устойчивости, сходимости. Пусть в n-мерной области G с границей Γ ищется решение дифференциального уравнения

$$Lu(x)=f(x), \quad x\in G, \tag{1}$$

с дополнительными (граничными, начальными) условиями

$$lu(x)=\mu(x), \quad x\in\Gamma, \tag{2}$$

где L и l — линейные дифференциальные операторы, $f(x)$ и $\mu(x)$ — заданные функции. Предполагается, что в нек-ром классе функций задача (1) — (2) поставлена корректно. В методе конечных разностей область $G\cup\Gamma$ приближённо заменяют дискретным множеством точек — сеткой $G_h\cup\Gamma_h$. Параметр h — шаг сетки, характеризует плотность сетки. Производные, входящие в (1) — (2), аппроксимируются на сетке разностными отношениями. В результате получается система линейных алгебраич. уравнений

$$\left.\begin{aligned} L_hy_h(x)&=\varphi_h(x), \quad x\in G_h,\\ l_hy_h(x)&=\chi_h(x), \quad x\in\Gamma_h,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $y_h(x)$ — искомая сеточная функция, $\varphi_h(x)$ и $\chi_h(x)$ — заданные сеточные функции, L_h и l_h — разностные операторы. Семейство уравнений (3), зависящее от параметра h, наз. разностной схемой.

Пусть множество сеточных функций, заданных на $G_h\cup\Gamma_h$, образует векторное пространство H_h, а операторы L_h, l_h действуют в этом пространстве; в пространствах решений $y_h(x)$ и правых частей $\varphi_h(x)$, $\chi_h(x)$ вводятся нормы $\|\cdot\|_{(1_h)}$, $\|\cdot\|_{(2_h)}$, $\|\cdot\|_{(3_h)}$.

Говорят, что разностная задача (3) поставлена корректно, если для всех достаточно малых h и при любых φ_h, $\chi_h\in H_h$ её решение существует, единственно и для него выполняется оценка

$$\|y_h\|_{(1_h)}\leqslant M\left(\|\varphi_h\|_{(2_h)}+\|\chi_h\|_{(3_h)}\right) \tag{4}$$

с константой M, не зависящей от h. Последнее свойство, означающее равномерную по h непрерывную зависимость решения от входных данных, наз. *устойчивостью разностной схемы*. Оценки вида (4) решения разностной задачи через известные правые части наз. априорными оценками. Получение априорных оценок составляет основу Р. с. т.

Для оценки погрешности решение задачи (3) представляется в виде суммы

$$y_h(x)=u_h(x)+z_h(x),$$

где $u_h(x)$ — проекция решения $u(x)$ задачи (1) — (2) в пространство H_h, $z_h(x)$ — погрешность приближённого решения. Для погрешности $z_h(x)$ справедливы уравнения

$$\left.\begin{aligned} L_hz_h(x)&=\psi_h(x), \quad x\in G_h,\\ l_hz_h(x)&=\nu_h(x), \quad x\in\Gamma_h,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$\psi_h(x)=\varphi_h(x)-L_hu_h(x);\ \nu_h(x)=\chi_h(x)-l_hu_h(x);$$

функции $\psi_h(x)$ и $\nu_h(x)$ наз. погрешностями аппроксимации разностной схемой (3) уравнения (1) и дополнительного условия (2) соответственно. Говорят, что схема (3) аппроксимирует задачу (1) — (2) с m-м порядком аппроксимации, если при $h\to 0$

$$\|\psi\|_{(2_h)}=O(h^m),\ \|\nu\|_{(3_h)}=O(h^m),\ m>0.$$

Схема (3) имеет m-й порядок точности, или сходится со скоростью $O(h^m)$, если

$$\|y_h-u_h\|_{(1_h)}=O(h^m).$$

Справедливо следующее утверждение: если разностная задача (3) поставлена корректно и имеет m-й порядок аппроксимации, то она сходится со скоростью $O(h^m)$.

Требования к разностным схемам. Использование реальных сеток при конечном шаге сетки предъявляет к разностным схемам ряд дополнительных требований. Они сводятся к тому, что разностная схема, помимо обычной аппроксимации и устойчивости, должна хорошо моделировать характерные свойства исходного дифференциального уравнения. Кроме того, разностная схема должна удовлетворять определённым условиям простоты реализации вычислительного алгоритма. Ниже рассматриваются нек-рые из этих дополнительных требований.

Под однородной разностной схемой понимается разностная схема, вид к-рой не зависит ни от выбора конкретной задачи из данного класса, ни от выбора разностной сетки. Во всех узлах сетки для любой задачи из данного класса разностные уравнения имеют один и тот же вид. К однородным разностным схемам относятся, в частности, схемы сквозного счёта для решения уравнений с сильно меняющимися или разрывными коэффициентами. Схемы сквозного счёта не предусматривают явного выделения точек разрыва коэффициентов и позволяют вести вычисления по одним и тем же формулам. Широко используются схемы сквозного счёта при расчётах разрывных решений уравнений газовой динамики.

Требование консервативности разностной схемы означает, что данная разностная схема имеет на сетке такой же закон сохранения, что и исходное дифференциальное уравнение. Регулярным методом получения консервативных однородных схем является метод баланса, сущность к-рого состоит в аппроксимации на сетке интегрального закона сохранения (уравнения баланса), соответствующего данному дифференциальному уравнению. Метод баланса нашёл широкое применение при аппроксимации уравнений с переменными, в том числе и разрывными коэффициентами.

При конструировании разностных схем для уравнений газовой динамики нашёл применение принцип полной консервативности. Для уравнений гиперболич. типа оказалось полезным исследование дисперсионных свойств соответствующих разностных уравнений. Для разностных схем, аппроксимирующих уравнения параболич. типа, используется понятие асимптотич. устойчивости.

Экономичные разностные схемы для многомерных задач математической физики. При решении систем разностных уравнений, аппроксимирующих нестационарные задачи математич. физики с числом пространственных переменных два или более, возникают затруднения, связанные с тем, что число арифметич. операций, необходимых для отыскания решения на новом временном слое, резко возрастает при измельчении сетки. Разностную схему наз. экономичной, если отношение числа действий, необходимых для отыскания решения на новом временном слое, к числу узлов пространственной сетки не зависит от числа узлов сетки. Обычные неявные многомерные разностные схемы не являются экономичными. Наиболее эффективным приёмом построения экономичных разностных схем является метод сведения многомерных задач к нескольким одномерным задачам.

Новые алгоритмы стимулировали и новый подход к основным понятиям теории разностных схем. Напр., оказалось плодотворным понятие суммарной аппроксимации или аппроксимации в слабом смысле. Сформулирован принцип аддитивности, позволяющий строить экономичные разностные схемы, обладающие свойством суммарной аппроксимации.

Методы решения сеточных уравнений. Любой сеточный метод для дифференциальных уравнений приводит к большим системам линейных

алгебраич. уравнений. Напр., в случае многомерных стационарных задач число уравнений достигает порядка 10^4—10^6. Одномерные разностные задачи обычно решают методом прогонки, представляющим собой вариант метода последовательного исключения неизвестных. Наиболее распространёнными методами решения многомерных сеточных уравнений являются итерационные методы. Большое распространение получили неявные двухступенчатые итерационные методы. Наметилась тенденция к использованию прямых (неитерационных) методов решения двумерных стационарных задач.

● Самарский А. А., Теория разностных схем, 2 изд., М., 1983; Годунов С. К., Рябенький В. С., Разностные схемы. Введение в теорию, 2 изд., М., 1977; Марчук Г. И., Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.

А. В. Гулин, А. А. Самарский.

РАЗНОСТЬ — 1) результат *вычитания*.

2) Р. арифметической прогрессии — см. *Арифметическая прогрессия*.

3) Р. множеств A и B — множество всех тех элементов множества A, к-рые не входят в множество B. Р. множеств A и B обозначается символом $A \setminus B$ (или символом $A-B$, или $A \div B$). Иногда термин «Р.» применяют лишь к случаю, когда B является подмножеством множества A. Р. множеств является пустым множеством тогда и только тогда, когда A является подмножеством B, то есть $A \subseteq B$.

РАЗРЕЖЁНИЯ ТОЧКА — см. *Плотности точка*.

РАЗРЕЖЁННАЯ МАТРИЦА — матрица (обычно высокого порядка), имеющая число нулевых элементов столь большое, что оправдывается применение специальных методов обработки. Хранение Р. м. в одной из компактных форм позволяет решать задачи значительно бо́льших размеров по сравнению с методами общего назначения. Способ использования разрежённости очевиден для (итерационных) методов вычислительной линейной алгебры, основной операцией к-рых является умножение матрицы на вектор. Обычно удаётся эффективно использовать ленточную структуру матриц. Для решения линейных систем с разрежёнными матрицами более общего вида разработан ряд алгоритмов. Они базируются на известных прямых методах — методе Гаусса, ортогональных методах — и ставят целью по возможности уменьшить заполнение матрицы (т. е. возникновение новых ненулевых элементов, также требующих хранения в процессе решения задачи). Эти алгоритмы существенно различаются для симметричных положительно определённых, симметричных незнакоопределённых и несимметричных систем.

РАЗРЕШИ́МАЯ ГРУ́ППА — группа, обладающая нормальным рядом подгрупп с абелевыми факторами, то есть такая группа G, в которой имеется цепочка подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n = E, \qquad (*)$$

причём каждая G_i — нормальная подгруппа в G_{i-1}, а факторгруппа G_{i-1}/G_i абелева. Ряд (*) наз. разрешимым рядом группы G.

Всякая подгруппа и всякая факторгруппа Р. г. разрешима. Если в G имеется разрешимая нормальная подгруппа, факторгруппа по к-рой разрешима, то и сама группа G разрешима.

Симметрич. группы S_2, S_3 и S_4 разрешимы, в то время как все другие S_n ($n \geqslant 5$) не разрешимы. Другой пример Р. г.— группа всех верхних треугольных матриц (над произвольным полем). Всякая Р. г. линейных преобразований n-мерного комплексного векторного пространства содержит подгруппу конечного индекса, записывающуюся в нек-ром базисе верхними треугольными матрицами (теорема Ли — Колчина).

Термин «Р. г.» возник в теории Галуа в связи с вопросом о разрешимости алгебраич. уравнений в радикалах. А именно, алгебраич. уравнение разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда его группа Галуа разрешима (см. *Галуа теория*). В частности, из разрешимости групп S_2, S_3 и S_4 следует разрешимость в радикалах всякого уравнения степени, меньшей 5.

РАЗРЕШИ́МАЯ ФО́РМУЛА — такая формула A данной *формальной системы*, что либо она доказуема в этой системе (т. е. является теоремой), либо опровержима (т. е. доказуемо её отрицание $\neg A$).

РАЗРЕШИ́МОЕ МНО́ЖЕСТВО, рекурсивное множество,— множество натуральных чисел, для которого существует *алгоритм*, позволяющий решить для любого данного натурального числа x, принадлежит оно этому множеству или не принадлежит. Более общим является понятие множества, разрешимого относительно другого множества. Множество A наз. разрешимым относительно множества X, если существует алгоритм $\mathfrak{A}$, к-рый применим ко всякому x из X и перерабатывает всякий x из $X \cap A$ в слово «да», а всякий x из $X \setminus A$ — в слово «нет». В этом случае говорят, что алгоритм $\mathfrak{A}$ разрешает множество A относительно X.

Множество является разрешимым тогда и только тогда, когда оно и его дополнение суть перечислимые множества. Дополнение Р. м. разрешимо. Если A и B разрешимы, то их объединение $A \cup B$ и пересечение $A \cap B$ также разрешимы. Множество A разрешимо тогда и только тогда, когда его характеристич. функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

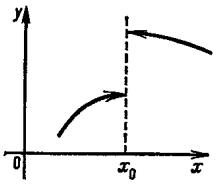
есть вычислимая функция. Существуют перечислимые множества, не являющиеся разрешимыми.

Большинство алгоритмич. проблем, возникающих в математике, формулируется как вопрос о разрешимости того или иного множества.

РАЗРЫВА ТО́ЧКА — точка, в к-рой функция не является непрерывной. В простейшем случае в Р. т. x_0 (рис.) существуют односторонние пределы функции $f(x)$ справа и слева:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0), \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0);$$

тогда x_0 наз. точкой разрыва 1-го рода. Напр., для функций $[x]$ (целой части числа x) точки $x=k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, суть Р. т. 1-го рода.



Разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ наз. скачком функции $f(x)$ в точке x_0. Если скачок равен нулю, то x_0 наз. устранимой точкой разрыва. В этом случае существует предел $\lim_{x \to x_0} f(x)$ и x_0 является Р. т. из-за того, что $f(x_0)$ не равно этому пределу или функция не определена в точке x_0. Тогда разрыв можно устранить, положив $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$; получится непрерывная в точке x_0 функция. Напр., точка $x=0$ является устранимой Р. т. функции $f(x)$, равной 1 при $x \neq 0$ и $f(0) \neq 1$.

Р. т. 1-го рода наз. правильной, если

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

Напр., точка $x=0$ является правильной Р. т. 1-го рода для функции

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -1 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Точка x_0 наз. точкой разрыва 2-го рода функции $f(x)$, если эта функция определена в окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, и хотя бы один из односторонних пределов не существует. Напр., для функций $\frac{1}{x}$, $\sin \frac{1}{x}$ точка $x=0$ является Р. т. 2-го рода.

Монотонная на интервале функция может иметь на этом интервале Р. т. только 1-го рода.

В общем случае, когда x — точка евклидова пространства, x_0 является Р. т. функции $f(x)$, определённой на множестве E, если x_0 — предельная точка множества E и $x_0 \notin E$ или если $x_0 \in E$ и

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in E} f(x) \neq f(x_0),$$

в частности если этот предел не существует. Если этот предел существует, то x_0 наз. устранимой Р. т.

В теории аналитич. функций Р. т. наз. *особыми точками*.

РАЗРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ — функция, не являющаяся непрерывной, т. е. имеющая на рассматриваемом множестве точки разрыва. Предел сходящейся последовательности непрерывных функций может быть Р. ф. Напр.,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} nx = \operatorname{sign} x.$$

Такие Р. ф. в *Бэра классификации* наз. функциями 1-го класса. Теория интегрирования широкого класса Р. ф. (измеримых функций) построена А. Лебегом. Н. Н. Лузин показал, что, изменяя значения измеримой функции на множестве сколь угодно малой меры, можно получить непрерывную функцию.

РАЗРЯД — место, занимаемое цифрой при письменном обозначении числа. В десятичной записи цифры 1-го Р. суть единицы, 2-го — десятки и т. д.

РАНГ (нем. Rang) — 1) Р. квадратичной формы — см. *Квадратичная форма*.

2) Р. матрицы — наивысший из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы. Р. матрицы над полем равен наибольшему числу линейно независимых строк (или столбцов) матрицы (теорема о ранге матрицы). Р. не меняется при элементарных преобразованиях матрицы (при перестановках строк или столбцов, умножении строки или столбца на отличное от нуля число и при сложении строк или столбцов). Подобные матрицы имеют одинаковый Р. Ранг произведения AB матриц A и B не превосходит рангов сомножителей. Если A (или B) — невырожденная квадратная матрица, то Р. AB равен Р. другого сомножителя.

3) Р. линейного отображения — размерность образа линейного отображения. Р. линейного отображения конечномерного векторного пространства равен Р. матрицы этого линейного отображения в произвольном базисе.

РАНГОВОЙ КОРРЕЛЯЦИИ КОЭФФИЦИЕНТ — см. *Корреляционный анализ*.

РАНГОВЫЙ КРИТЕРИЙ — один из критериев проверки статистических гипотез. См. *Непараметрические методы* математической статистики.

РАНДОМИЗАЦИЯ (от англ. random — случайный) — статистическая процедура, в которой решение принимается случайным образом.

РАСКРОЯ ЗАДАЧА — выбор такого размещения заготовок в кусках материала, которое даёт заготовки, как правило, в требуемой комплектности при минимальном расходе материала. В соответствии с особенностями в технологии и организации раскроя различаются математич. модели рационального раскроя для массового и индивидуального производства: для прямых (отрезки, прямоугольники, параллелепипеды) и фигурных заготовок, для случая кусков материала постоянных размеров и форм и с разбросом формы или размещения пороков. В зависимости от отрасли производства и используемого оборудования учитываются ограничения на допустимые виды раскроев. С Р. з. совпадает постановка нек-рых задач размещения грузов в сушильных печах, в вагонах, на палубах судов.

В массовом производстве при поступлении одинаковых кусков материала, если можно перечислить все $i=1, 2, \ldots, N$ доступные способы раскроя одного куска материала на нек-рые из $j=1, \ldots, m$ нужных видов заготовок, Р. з. сводится к решению задачи *линейного программирования*: найти интенсивность применения $x_i \geqslant 0$ каждого из раскроев, при к-рых $\sum_i x_i = \min$ и для каждого j соблюдено условие $\sum_i a_{ij} x_i \geqslant b_j$, где a_{ij} — количество j-х заготовок в i-м раскрое, а b_j — необходимое на одно изделие количество этих заготовок. На практике обычно нельзя перечислить все допустимые раскрои. Упомянутую задачу линейного программирования решают исходя из нек-рого набора допустимых раскроев методом последовательного улучшения плана.

● Канторович Л. В., Залгаллер В. А., Рациональный раскрой промышленных материалов, 2 изд., Новосиб., 1971.

РАСПИСАНИЙ ТЕОРИЯ — раздел *исследования операций*, в котором строятся и анализируются математич. модели календарного планирования (т. е. упорядочения во времени) различных видов целенаправленных действий. Методы Р. т. находят широкое применение при календарном планировании работы промышленных предприятий, построении расписаний учебных занятий, разработке графиков движения транспортных средств, планировании информационно-вычислительных процессов и т. п. Среди причин, вызвавших в 50-х гг. 20 в. появление Р. т., в первую очередь следует отметить всё возрастающую необходимость планирования и управления сложными разработками, включающими большое число взаимосвязанных работ, требующих многочисленных исполнителей и значительных материальных затрат.

В Р. т. в широком смысле естественно выделяются несколько направлений. Так, в теории сетевого планирования рассматриваются задачи оптимального распределения временны́х и материальных ресурсов при выполнении заданного комплекса взаимосвязанных работ. В теории очередей с приоритетами рассматриваются задачи построения оптимальных дисциплин обслуживания случайных потоков требований. В собственно Р. т. основное внимание уделяется детерминированным задачам оптимального распределения и упорядочения требований, обслуживаемых одним или несколькими приборами, при различных предположениях относительно характера обслуживания этих требований.

Многие известные задачи Р. т. могут быть охвачены следующей схемой. На вход обслуживающей системы S, содержащей M приборов, поступает множество $N=\{1, \ldots, n\}$ требований. Требование $k \in N$ поступает в момент времени $d_k \geqslant 0$, длительность его обслуживания прибором l равна t_{kl}, задаётся и желательный срок завершения обслуживания. Каждому требованию k сопоставлена неубывающая действительная функция $\varphi_k(t)$, характеризующая «штраф», к-рый необходимо «заплатить», если обслуживание этого требования завершится в момент времени t. Обычно предполагается, что каждый прибор одновременно обслуживает не более одного требования и каждое требование одновременно обслуживается не более чем одним прибором. Прерывания в обслуживании требований в одних постановках могут допускаться, в других — запрещаться. Цель состоит в построении расписания (календарного плана) обслуживания требований приборами, при к-ром суммарный (или максимальный) штраф за обслуживание минимален. Если каждое требование может быть обслужено любым из M приборов, то S — система с параллельными (а при $t_{kl}=t_k$, $l=1, \ldots, M$, и идентичными) приборами. В общем случае для каждого требования задаётся определённый порядок прохождения приборов (технологич. маршрут), и S наз. системой с последовательными приборами. Если технологич. маршруты одинаковы для всех требований, то S — система поточного типа.

В зависимости от типа обслуживающей системы, характера обслуживания, параметров требований, функций штрафа, критериев оптимальности получается обширный спектр оптимизационных задач, разработка методов решения к-рых и составляет основную цель Р. т. в её традиционном понимании. Задачи Р. т. в подавляющем большинстве являются задачами *дискретного программирования*. Однако специфич. особенности задач Р. т. зачастую позво-

ляют предложить специальные методы, обладающие более высокой эффективностью.

● Танаев В. С., Шкурба В. В., Введение в теорию расписаний, М., 1975; Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В., Теория расписаний, пер. с англ., М., 1975.

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ — раздел кибернетики, разрабатывающий принципы и методы классификации, а также идентификации предметов, явлений, процессов, сигналов, ситуаций — всех тех объектов, которые могут быть описаны конечным набором некоторых признаков или свойств, характеризующих объект.

Описание объекта представляет собой n-мерный вектор, где n — число признаков, используемых для характеристики объекта, причём i-я координата этого вектора равна значению i-го признака, $i=1, \ldots, n$. В описании объекта допустимо отсутствие информации о значении того или иного признака. Если необходимо расклассифицировать предъявленные объекты по нескольким группам (о б р а з а м) только на основе их описаний, причём число групп не обязательно известно, то такая задача Р. о. наз. з а д а ч е й т а к с о н о м и и (о б у ч е н и я б е з у ч и т е л я). Собственно для задач Р. о. (о б у ч е н и я **с у ч и т е л е м**) кроме описания объектов необходимы дополнительные сведения о принадлежности этих объектов к тому или иному классу (образу). Количество классов конечно и задано. Классы могут пересекаться.

Совокупность описаний объектов, для к-рых известны образы, к к-рым они принадлежат, образуют т. н. обучающую последовательность (набор эталонов). Основная задача Р. о. заключается в том, чтобы, исходя из обучающей последовательности, определить класс, к к-рому принадлежит описание нек-рого объекта, подвергаемого классификации или идентификации. К такой схеме приводится любая задача принятия решений, если только процесс принятия решения базируется в основном на изучении ранее накопленного опыта.

Прикладные задачи, решаемые методами Р. о., возникают при идентификации машинописных и рукописных текстов, идентификации фотоизображений, при автоматич. распознавании речи, в медицинской диагностике, при геологич. прогнозировании, прогнозировании свойств химич. соединений, оценке экономических, политических, производственных ситуаций, при классификации социологич. материала и т. п. Для решения этих задач накоплено большое число т. н. эвристич. алгоритмов распознавания, ориентируемых на специфику каждой конкретной задачи. Кроме того, на основе нек-рых интуитивных принципов строятся модели алгоритмов распознавания, т. е. семейства алгоритмов для решения классификационных задач.

РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — то же, что *обобщённая функция*.

РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ в е р о я т н о с т е й — одно из центральных понятий теории вероятностей и математич. статистики. Определение Р. вероятностей равносильно заданию вероятностей всех случайных событий, описывающих нек-рое случайное явление. Р. вероятностей к.-л. действительной случайной величины X, возможные значения

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

к-рой образуют конечную или бесконечную последовательность, задаётся указанием этих значений и соответствующих им вероятностей $\mathsf{P}\{X=x_n\}$:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

(p_n должны быть положительны и в сумме давать единицу). Так, напр., для числа очков, выпадающих на верхней грани при подбрасывании игральной кости, Р. вероятностей задаётся таблицей:

Возможные значения x_n	1	2	3	4	5	6
Соответствующие вероятности p_n	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Р. вероятностей указанного типа наз. д и с к р е т н ы м и. Примерами дискретных Р. вероятностей служат: *биномиальное распределение*, определяемое вероятностями

$$\mathsf{P}\{X=m\}=C_n^m p^m (1-p)^{n-m},\ m=0, 1, \ldots, n,$$

где $n>0$ — целое, $0<p<1$; *Пуассона распределение*, определяемое вероятностями

$$\mathsf{P}\{X=m\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!},\ m=0, 1, \ldots,$$

где $\lambda>0$ (см. также *Геометрическое распределение*, *Паскаля распределение*). Во многих случаях задание Р. вероятностей указанием возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей невозможно. Напр., если случайная величина принимает любые значения из отрезка $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, то Р. вероятностей задаётся указанием вероятностей того, что случайная величина примет значение из любого заданного интервала, принадлежащего отрезку $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, т. к. вероятность каждого отдельного значения может быть равна нулю. Если существует такая функция $p(x)$, что вероятность попадания X в любой интервал (a, b) на прямой равна

$$\mathsf{P}\{a<X<b\}=\int_a^b p(x)\,dx,$$

причём $p(x)\geqslant 0$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx=1,$$

то Р. вероятностей величины X наз. а б с о л ю т н о н е п р е р ы в н ы м, а функция $p(x)$ носит название *плотности вероятности*. В случае *равномерного распределения* на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$p(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant \frac{1}{2},\\ 0, & |x|>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Важнейшее Р. вероятностей н е п р е р ы в н о г о т и п а — *нормальное распределение* с плотностью

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $-\infty<a<\infty$ и $\sigma>0$ (см. также *Коши распределение*, *Максвелла распределение*, *Пирсона распределение*, *Показательное распределение*, *Рэлея распределение*, *Стьюдента распределение*, *Хи-квадрат распределение*). Р. вероятностей не исчерпываются дискретным и непрерывным типами: они могут быть и более сложной природы. Описание Р. вероятностей, пригодное во всех случаях, может быть, напр., достигнуто при помощи *распределения функции*, к-рая для любой случайной величины X при каждом действительном x определяется формулой

$$F(x)=\mathsf{P}\{X<x\}$$

(функция $F(x)$ — монотонно неубывающая, непрерывная слева и такая, что $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$). Вероятность того, что X примет значение из нек-рого интервала $[a, b)$ на прямой, равна

$$\mathsf{P}\{a\leqslant X<b\}=F(b)-F(a).$$

Функция Р. однозначно задаёт соответствующее Р. вероятностей случайной величины.

Часто полное описание Р. вероятностей (напр., при помощи плотности или функции Р.) заменяют заданием небольшого числа числовых характеристик, к-рые указывают, как правило, наиболее типичные (в том или ином отношении) значения случайной величины и степень рассеяния значений случайной величины около нек-рого типичного значения. Из этих характеристик наиболее употребительны *математическое ожидание* (среднее значение) и *дисперсия*. Для случайной величины X с дискретным Р. вероятностей математич. ожидание $\mathsf{E}X$ определяется как

$$\mathsf{E}X=\sum_{n=0}^{\infty} x_n p_n,$$

для величины X с абсолютно непрерывным Р. вероятностей — как

$$\mathsf{E}X=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx$$

при условии, что указанные ряд и интеграл сходятся абсолютно. Дисперсия X, по определению, равна

$$\mathsf{D}X = \mathsf{E}\,(X - \mathsf{E}X)^2.$$

О других числовых характеристиках Р. вероятностей см. в статьях *Вероятное отклонение*, *Квадратичное отклонение*, *Квантиль*, *Медиана*, *Мода*, *Момент*.

Если случайные величины X и Y связаны соотношением $Y=f(X)$, где $f(x)$ — заданная функция, то Р. вероятностей Y может быть выражено через Р. вероятностей X; напр., если X имеет нормальное Р. с параметрами a и σ^2, то $Y=e^X$ имеет т. н. *логарифмически нормальное распределение* с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma(x)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Если Y является линейной функцией от X, т. е., если $Y = aX+b$, то при $a>0$

$$F_Y(x) = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

и в абсолютно непрерывном случае

$$p_Y(x) = \frac{1}{a}\, p_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Помимо функций Р. полную информацию о Р. вероятностей содержат т. н. *производящие функции* и *характеристические функции*. Производящая функция Р. вероятностей случайной величины X с целыми неотрицательными значениями определяется формулой

$$\varphi(t) = \mathsf{E}z^X$$

при каждом фиксированном z, $|z| \leqslant 1$. Характеристич. функция Р. вероятностей произвольной случайной величины X определяется по формуле

$$f(t) = \mathsf{E}e^{itX}$$

для любого действительного t, $-\infty < t < \infty$. Производящие и характеристич. функции однозначно определяют соответствующие Р. вероятностей.

Если $X_1, \ldots, X_n$ — несколько случайных величин, определённых на одном и том же вероятностном пространстве, то говорят о совместном Р. вероятностей величин $X_1, \ldots, X_n$ или о Р. вероятностей случайного вектора $X=(X_1, \ldots, X_n)$ — многомерном Р. вероятностей. Многомерное Р. вероятностей задаётся набором вероятностей вида $\mathsf{P}\{X_1=x_1, \ldots, X_n=x_n\}$ (дискретный тип) или с помощью плотности $p(x_1, \ldots, x_n)$ (непрерывный тип) или же в общем случае функцией Р. Если случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы, то Р. вероятностей $X = (X_1, \ldots, X_n)$ определяется Р. вероятностей отдельных величин X_k, $k=1, \ldots, n$. В ином случае приходится рассматривать условные Р. вероятностей одних величин при фиксированных значениях других и соответствующие числовые характеристики (условные математич. ожидания, условные дисперсии, смешанные моменты). О многомерных Р. вероятностей см. также *Корреляция*, *Регрессия*.

Особое внимание в теории вероятностей уделяется точным и асимптотическим Р. вероятностей сумм случайных величин. Напр., Р. вероятностей суммы двух независимых случайных величин X и Y, к-рые имеют Р. вероятностей с плотностями $p_X(x)$ и $p_Y(x)$, задаётся плотностью

$$p_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x-y)\, p_Y(y)\, dy$$

(формула свёртки). Однако для вычисления Р. вероятностей сумм при большом числе слагаемых явные формулы свёртки практически непригодны, а используются производящие и характеристич. функции, т. к. эти функции при сложении независимых случайных величин перемножаются. Проблемы сходимости Р. вероятностей, в частности Р. вероятностей сумм независимых случайных величин при неограниченном увеличении числа слагаемых, изучаются *предельными теоремами* теории вероятностей (о сходимости биномиального Р. вероятностей к Р. вероятностей Пуассона см. в ст. *Пуассона теорема*, о сходимости к нормальному Р. см. в статьях *Лапласа теорема*, *Ляпунова теорема*).

Важное значение имеют предельные теоремы о Р. вероятностей в математич. статистике. Статистич. аналогом Р. вероятностей служит т. н. эмпирическое распределение. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — результаты наблюдений, к-рые предполагаются независимыми, одинаково распределёнными случайными величинами с функцией Р. вероятностей $F(x)$. Эмпирич. Р. вероятностей характеризуется т. н. эмпирической функцией распределения

$$F_n^*(x) = n_x/n,$$

где n_x — число наблюдений с $X_k<x$, к-рой соответствует т. н. выборочное среднее

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

и выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{X})^2.$$

Эмпирич. Р. и его характеристики используются для приближённого представления теоретич. Р. вероятностей и его характеристик, см. об этом в статьях *Математическая статистика*, *Непараметрические методы* математической статистики, *Статистическая оценка*.

Р. вероятностей объектов, более общих, чем случайные величины и случайные векторы (см., напр., *Случайный элемент*), определяется в рамках понятия вероятностного пространства как общей математич. модели случайного явления. Об этом общем подходе к Р. вероятностей на основе теории меры и об аксиоматич. определении Р. вероятностей см. в ст. *Вероятностей теория*.

А. В. Прохоров, Ю. В. Прохоров.

РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ ВЫ́БОРКИ — см. *Эмпирическое распределение*.

РАСПРЕДЕЛЕ́НИЯ ЗАКО́Н — удобный описательный термин, могущий означать, в зависимости от контекста, распределение вероятностей (напр., какой-либо случайной величины) или соответствующую *распределения функцию*, или *плотность вероятности*.

РАСПРЕДЕЛЕ́НИЯ ФУ́НКЦИЯ случайной величины X — функция действительного переменного x, принимающая при каждом x значение, равное вероятности неравенства $X<x$.

Каждая Р. ф. $F(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $F(x') \leqslant F(x'')$ при $x' < x''$;

2) $F(x)$ непрерывна слева при каждом x;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$

(иногда Р. ф. определяют как вероятность неравенства $X \leqslant x$, и тогда она оказывается непрерывной справа). Каждая функция F, обладающая свойствами 1) — 3), может рассматриваться как Р. ф. нек-рой случайной величины X.

Всякая Р. ф. может быть однозначно представлена в виде суммы

$$F(x) = a_1F_1(x) + a_2F_2(x) + a_3F_3(x),$$

где a_1, a_2, a_3 — неотрицательные числа, сумма к-рых равна 1, а F_1, F_2, F_3 — Р. ф. такие, что $F_1(x)$ абсолютно непрерывна:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} p(z)\, dz,$$

$F_2(x)$ — «ступенчатая функция»:

$$F_2(x) = \sum_{x_k < x} p_k,$$

где x_k — точки скачков $F(x)$, а $p_k>0$ пропорциональны размеру этих скачков; $F_3(x)$ — «сингулярная» компонента — непрерывная функция, производная к-рой почти всюду равна нулю.

Р. ф. наиболее употребительных распределений вероятностей (напр., нормального, биномиального, пуассоновского распределений) табулированы.

Понятие Р. ф. естественным образом распространяется на многомерный случай, но многомерные Р. ф. значительно менее употребительны, чем одномерные.

РАСПРЕДЕЛИ́ТЕЛЬНЫЙ ЗАКО́Н, дистрибутивный закон,— см. *Дистрибутивность.*

РА́ССЕЛА АНТИНО́МИЯ, парадокс Рассела,— открытая Б. Расселом (1902) и независимо Э. Цермело (1908) *антиномия.* См. также *Аксиоматическая теория множеств, Математическая логика.*

РАССЕ́ЯНИЯ ДИАГРА́ММА — см. *Регрессионный анализ.*

РАССТОЯ́НИЕ — геометрическое понятие, содержание которого зависит от того, для каких объектов оно определяется. Р. между двумя точками — длина соединяющего их отрезка прямой. Р. от точки до прямой (или плоскости) — длина отрезка перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую (плоскость). Р. между двумя параллельными прямыми (плоскостями) — длина отрезка общего перпендикуляра к этим прямым (плоскостям). Р. между непересекающимися прямыми в пространстве — Р. между параллельными плоскостями, проведёнными через каждую из этих прямых (т. е. длина отрезка общего перпендикуляра к этим прямым). Об обобщении понятия «Р.» см. в статьях *Многомерная геометрия, Метрическое пространство, Геометрия.*

РАСТЯЖЕ́НИЕ — см. *Сжатие.*

РАСХОДЯ́ЩАЯСЯ ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ — числовая последовательность, не являющаяся сходящейся (см. *Предел последовательности*). Если числовая последовательность содержит две подпоследовательности, сходящиеся к различным пределам, то это — Р. п. Всякая неограниченная числовая последовательность есть Р. п.

РАСХОДЯ́ЩИЙСЯ ИНТЕГРА́Л — интеграл с бесконечными пределами, а также с неограниченной подинтегральной функцией, равный бесконечности или же не имеющий определённого конечного значения. Напр., интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$, определяемый как $\lim\limits_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x}$, расходится, т. к. $\lim\limits_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x} = \lim\limits_{N\to\infty}\ln N = +\infty$, а интеграл $\int_0^\infty \cos x\,dx$ расходится, т. к. $\lim\limits_{N\to\infty}\int_0^N \cos x\,dx$ не существует. См. *Несобственный интеграл, Интеграл, Суммирование* расходящихся рядов и интегралов.

РАСХОДЯ́ЩИЙСЯ РЯД — ряд, последовательность частичных сумм которого не имеет конечного предела. Если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится, напр.:

$$1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots,$$

примером Р. р., общий член к-рого стремится к нулю, может служить гармонич. ряд

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}+\ldots$$

Существуют многочисленные классы Р. р., сходящихся в том или ином обобщённом смысле, так что каждому такому Р. р. можно приписать нек-рую «обобщённую сумму», обладающую важнейшими свойствами суммы сходящегося ряда. См. *Суммирование* расходящихся рядов и интегралов.

РАСШИРЕ́НИЕ поля — см. *Поле.*

РАСШИ́РЕННАЯ КОМПЛЕ́КСНАЯ ПЛО́СКОСТЬ — см. *Бесконечно удалённая точка, Комплексная плоскость.*

РАСЩЕПЛЕ́НИЯ МЕ́ТОД — сеточный метод решения нестационарных задач со многими пространственными переменными, в котором переход от заданного временно́го слоя t_n к новому слою $t_{n+1}=t_n+\tau$ осуществляется за счёт последовательного решения сеточных аналогов родственных нестационарных задач с меньшим числом пространственных переменных. Часто в этом классе методов могут быть найдены такие, что: 1) весь переход от сеточного слоя в момент времени t_n к слою t_{n+1} является достаточно простым и может быть осуществлён при затрате $O(N)$ арифметич. действий, где N — число узлов пространственной сетки; 2) гарантируется абсолютная устойчивость метода; 3) гарантируется приемлемая точность метода (наличие аппроксимации в том или ином смысле). Поэтому Р. м. широко применяются при практич. решении многих многомерных задач математич. физики.

Обычно для задачи с p пространственными переменными переход от t_n к t_{n+1} в Р. м. производится с использованием вспомогательных (дробных) шагов, на к-рых решаются одномерные разностные схемы по направлениям $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Имеются два альтернативных подхода к теории Р. м. В одном из них промежуточные шаги ни в чём существенном не отличаются от целых шагов (локально одномерные схемы, аддитивные схемы). Эти схемы могут трактоваться как обычные разностные схемы для вспомогательного уравнения с сильно осциллирующими по времени коэффициентами, решение к-рого должно быть близко к решению исходной задачи.

Второй же подход в плане анализа устойчивости и сходимости исключает к.-л. дробные шаги из рассмотрения. Сама разностная схема и аппроксимация трактуются традиционным образом и необычность её проявляется лишь в том, что на верхнем слое схемы появляется необычный разностный оператор, наз. расщепляющимся (факторизованным) оператором. Такие схемы, напр., для уравнения теплопроводности можно трактовать как обычные схемы с весом для ε-уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\varepsilon\,\frac{\partial^5 u}{\partial x_1^2\,\partial x_2^2\,\partial t}=f,\ \varepsilon>0.$$

В случае области Ω, составленной из прямоугольников, рядом достоинств в плане устойчивости и аппроксимации обладают разностные схемы с расширенно расщепляющимся оператором.

РА́УСА ТЕОРЕ́МА — теорема, позволяющая для многочлена $P_n(x)$ с действительными коэффициентами (в регулярном случае) определить с помощью схемы Рауса число комплексных корней этого многочлена с положительной действительной частью.

Пусть многочлен $P_n(x)$ записан в виде

$$a_0x^n+b_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+b_1x^{n-3}+\ldots\ (a_0\neq 0).$$

Схемой Рауса этого многочлена наз. система чисел

$$\begin{array}{llll} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots \\ c_0 & c_1 & c_2 & \ldots \\ d_0 & d_1 & d_2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

В этой схеме первые две строки составлены из коэффициентов многочлена $P_n(x)$, а каждая строка, начиная с третьей, получается из двух предыдущих следующим образом: из первой строки вычитается вторая, умноженная на такое число, чтобы первый элемент обратился в нуль. Выбрасывая этот первый нуль, получают искомую строку. Напр., в третьей строке

$$c_i=a_{i+1}-b_{i+1}\frac{a_0}{b_0},\ i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Вся схема содержит $n+1$ строку. Регулярным считается тот случай, когда в схеме Рауса многочлена $P_n(x)$ все числа первого столбца отличны от нуля.

Теорема Рауса. Для многочлена с действительными коэффициентами в регулярном случае число корней, лежащих в правой полуплоскости (т. е. имеющих положительные действительные части), равно числу перемен знака в ряду чисел первого столбца схемы Рауса. В регулярном случае многочлен не может иметь корней, лежащих на мнимой оси. Критерий Рауса: для того чтобы все корни многочлена с действительными коэффициентами имели отрицательные действительные части, необходимо и

достаточно, чтобы все числа первого столбца схемы Рауса были отличны от нуля и имели одинаковые знаки. Эти теоремы были установлены Э. Раусом (1877).

Построение схемы Рауса возможно лишь для многочленов с заданными числовыми коэффициентами. Более широко применим метод, в к-ром используется последовательность определителей Δ_k, построенных из коэффициентов многочлена (см. *Рауса — Гурвица критерий*). При этом аналогом Р. т. будет теорема Рауса — Гурвица: если все определители Δ_k отличны от нуля, то число корней многочлена, лежащих в правой полуплоскости, равно числу перемен знака в ряду чисел

$$a_0,\ \Delta_1,\ \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ \frac{\Delta_3}{\Delta_2},\ \ldots,\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

и многочлен не имеет корней, лежащих на мнимой оси.

● Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, 3 изд., М., 1967.

РАУСА — ГУРВИЦА КРИТЕРИЙ, критерий Гурвица,— необходимое и достаточное условие того, что все корни многочлена

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \qquad (*)$$

с действительными коэффициентами и $a_0>0$ имеют отрицательные действительные части. Такие многочлены наз. устойчивыми или многочленами Гурвица, что связано с применением Р.— Г. к. в теории устойчивости колебательных систем. Этот критерий получен А. Гурвицем в 1895 и является обобщением результатов Э. Рауса (см. *Рауса теорема*). Р.— Г. к. состоит в том, чтобы были положительны все определители Δ_k, $k=1,2,\ldots,n$, составленные из коэффициентов многочлена (*):

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & a_{2k-1}\\ 0 & a_2 & a_4 & \ldots & a_{2k-2}\\ 0 & a_1 & a_3 & \ldots & a_{2k-3}\\ 0 & a_0 & a_2 & \ldots & a_{2k-4}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_k \end{vmatrix} > 0,$$

РАЦИОНА́ЛЬНАЯ КРИВА́Я (от лат. rationalis — разумный) — см. *Алгебраическая геометрия*.

РАЦИОНА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция вида

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)},$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — многочлены:

$$P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n,$$
$$Q(z)=b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_m;$$
$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ b_0,\ b_1,\ \ldots,\ b_m$$

— постоянные, наз. коэффициентами Р. ф., $a_0\neq0$, $b_0\neq0$, n и m — целые неотрицательные числа. В частности, Р. ф. являются *многочлен* (целая рациональная функция) и *дробно-линейная функция*. Можно считать, что многочлены $P(z)$ и $Q(z)$ взаимно простые, т. е. не имеют общих корней (нулей), т. к. в противном случае дробь $\frac{P(z)}{Q(z)}$ можно сократить.

Р. ф. является мероморфной функцией в расширенной комплексной плоскости. Полюсами Р. ф. являются корни её знаменателя и точка $z=\infty$ при $n>m$. Если z_0 — корень многочлена $Q(z)$ кратности k, то z_0 — полюс Р. ф. порядка k; если $n>m$, то точка $z=\infty$ — полюс Р. ф. порядка $n-m$. При $z\to\infty$ имеет место асимптотич. формула

$$R(z)\sim\frac{a_0}{b_0}z^{n-m}.$$

Справедливо обратное утверждение: мероморфная в расширенной комплексной плоскости функция является Р. ф.

Сумма, разность, произведение, частное и суперпозиция (сложная функция) Р. ф. также являются Р. ф. Производная Р. ф.— также Р. ф., причём

$$R'(z)=\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right)'=\frac{P'(z)\,Q(z)-P(z)\,Q'(z)}{Q^2(z)}.$$

Если $z_0\neq\infty$ — полюс Р. ф. $R(z)$ порядка k, то z_0 — полюс Р. ф. $R'(z)$ порядка $k+1$; если $n>m+1$, то $z=\infty$ — полюс функции $R'(z)$ порядка $n-m-1$.

Р. ф. наз. правильной рациональной функцией, если $n<m$. При $n\geqslant m$ Р. ф. можно представить в виде суммы многочлена и правильной Р. ф.:

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=M(z)+\frac{N(z)}{Q(z)},$$

где $M(z)$ — многочлен степени $n-m$, $N(z)$ — многочлен степени, меньшей m. Такое представление однозначно, и многочлены $M(z)$, $N(z)$ обычно находятся с помощью непосредственного деления многочлена $P(z)$ на многочлен $Q(z)$ «уголком». Многочлены $M(z)$, $N(z)$ можно также найти из формулы

$$P(z)=M(z)\,Q(z)+N(z),$$

напр., методом неопределённых коэффициентов.

Правильную Р. ф. можно разложить на элементарные дроби, т. е. представить в виде конечной суммы элементарных дробей. Поэтому любую Р. ф. можно представить в виде конечной суммы многочлена и элементарных дробей. Это разложение имеет вид

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z)}{b_0(z-z_1)^{k_1}\ldots(z-z_s)^{k_s}}=$$
$$=M(z)+\frac{A_1^{(1)}}{z-z_1}+\ldots+\frac{A_{k_1}^{(1)}}{(z-z_1)^{k_1}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{A_1^{(s)}}{z-z_s}+\ldots+\frac{A_{k_s}^{(s)}}{(z-z_s)^{k_s}},$$

где $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_s$ — различные корни многочлена $Q(z)$ кратностей соответственно $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_s$, $k_1+k_2+\ldots+k_s=m$. Коэффициенты этого разложения определяются однозначно и могут быть найдены, напр., методом неопределённых коэффициентов. Коэффициенты $A_l^{(j)}$, $l=1,\ 2,\ \ldots,\ k_j$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ s$, можно также находить по формуле

$$A_l^{(j)}=\frac{1}{(k_j-l)!}\lim_{z\to z_j}\frac{d^{k_j-l}}{dz^{k_j-l}}[R(z)\,(z-z_j)^{k_j}].$$

Разложение Р. ф. на элементарные дроби удобно для отыскания интеграла от Р. ф. Интеграл от Р. ф. равен сумме Р. ф. и логарифмич. функций

$$A_1^{(j)}\ln(z-z_j),\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ s.$$

Если коэффициенты Р. ф. — действительные, то для действительного аргумента $z=x$ её можно разложить на элементарные дроби с действительными коэффициентами вида

$$\frac{A}{(x-a)^k}\ \text{и}\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}.$$

Такое разложение используется при интегрировании Р. ф. действительного аргумента. Тогда интеграл от Р. ф. равен сумме Р. ф. и функций вида

$$A\ln(x-a),\quad A\ln(x^2+px+q),$$
$$A\operatorname{arctg}(ax+b).$$

Р. ф.— частный случай алгебраич. функции. Р. ф. нескольких переменных определяется как дробь, у к-рой числитель и знаменатель — многочлены нескольких переменных.

Ю. В. Сидоров.

РАЦИОНА́ЛЬНОЕ ВЫРАЖЕ́НИЕ — алгебраическое выражение, не содержащее радикалов, напр. a^2+b, $x/(y-z^3)$. Если входящие в Р. в. буквы считать переменными, то Р. в. задаёт *рациональную функцию* от этих переменных.

РАЦИОНА́ЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — см. *Алгебраическая геометрия*.

РАЦИОНА́ЛЬНОЕ ЧИСЛО́ — число, которое может быть представлено в виде дроби m/n, где m и n — целые числа ($n\neq0$). При этом две дроби m_1/n_1 и m_2/n_2 считают равными Р. ч., если $m_1n_2=m_2n_1$. Все целые числа являются рациональными. Отношение порядка между целыми числами распространяется на Р. ч. следующим образом: всякое положительное Р. ч. больше всякого отрицательного Р. ч.

(положительное Р. ч. определяется как отношение двух положительных или двух отрицательных целых чисел); положительное Р. ч. m_1/n_1 больше положительного Р. ч. m_2/n_2, если $m_1n_2>m_2n_1$. Для отрицательных Р. ч. порядок будет обратным порядку противоположных им положительных Р ч.

Для Р. ч. естественным образом определяются операции сложения, вычитания. умножения и деления (кроме деления на 0), таким образом, Р. ч. образуют поле, к-рое обозначается $\mathbb{Q}$. Поле $\mathbb{Q}$ — минимальное поле, содержащее все целые числа. Основные правила действий над Р. ч.:

$$\frac{m}{n}=\frac{km}{kn}\ (k\neq 0);\ \frac{m_1}{n_1}\pm\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2\pm m_2n_1}{n_1n_2};$$

$$\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1m_2}{n_1n_2};\ \frac{m_1}{n_1}:\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2}{n_1m_2}.$$

Р. ч. могут быть представлены конечными или бесконечными периодическими десятичными дробями. Всякое иррациональное число может быть заключено между двумя Р. ч. (значения по недостатку и по избытку), разность между к-рыми сколь угодно мала, т. е. множество Р. ч. является плотным в множестве действительных чисел. Оно, однако, не обладает свойством непрерывности (полноты). Минимальным пополнением множества Р. ч., обладающим свойством непрерывности, служит множество действительных чисел.

РЕАЛИЗА́ЦИЯ (от ср.-век. лат. realis — вещественный, действительный) — 1) Р. случайной функции — то же, что *выборочная функция*.

2) Р. функции формулой — см. *Алгебра логики*.

РЕБРО́ — 1) Р. графа — см. *Граф*.

2) Р. многогранника — сторона его грани.

3) Р. симплекса — см. *Симплекс*.

РЕБРО́ ВОЗВРА́ТА — см. *Линейчатая поверхность*.

РЕГИОМОНТА́НА ФО́РМУЛА — формула тригонометрии, установленная И. Мюллером (Региомонтан; новолат. Regiomontanus — Кёнигсбергский) во 2-й пол. 15 в. См. *Тангенсов теорема*.

РЕГРЕ́ССИИ КОЭФФИЦИЕ́НТ — коэффициент при независимой переменной в уравнении *регрессии*. См. также *Корреляция*.

РЕГРЕ́ССИИ ЛИ́НИЯ — см. *Корреляция*.

РЕГРЕ́ССИИ УРАВНЕ́НИЕ — см. *Регрессия*.

РЕГРЕССИО́ННАЯ СВЯЗЬ — см. *Регрессия*.

РЕГРЕССИО́ННЫЙ АНА́ЛИЗ — раздел математической статистики, объединяющий практические методы исследования регрессионной зависимости между величинами по статистическим данным (см. *Регрессия*). Проблема регрессии в математич. статистике характерна тем, что о распределениях изучаемых величин нет достаточной информации. Цель Р. а. состоит в определении общего вида уравнения регрессии, построении статистич. оценок неизвестных параметров, входящих в уравнение регрессии, и проверке статистич. гипотез о регрессии. При изучении связи между двумя величинами по результатам наблюдений $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ в соответствии с теорией регрессии предполагается, что одна из них Y со значениями y имеет нек-рое распределение вероятностей при фиксированном значении x другой с математич. ожиданием и дисперсией, равными соответственно

$$\mathsf{E}(Y|x)=g(x,\beta)\ \text{и}\ \mathsf{D}(Y|x)=\sigma^2h^2(x),$$

где β обозначает совокупность неизвестных параметров, определяющих функцию $g(x)$, а $h(x)$ есть известная функция x (в частности, тождественно равная 1). Выбор модели регрессии определяется предположениями о форме зависимости $g(x, \beta)$ от x и β. Наиболее естественной с точки зрения единого метода оценки неизвестных параметров β является модель регрессии, линейная относительно β:

$$g(x,\beta)=\beta_0g_0(x)+\ldots+\beta_kg_k(x).$$

Относительно значений переменной x возможны различные предположения в зависимости от характера наблюдений и целей анализа. Для установления связей между величинами в эксперименте используется модель, основанная на упрощённых, но правдоподобных допущениях: величина x является контролируемой величиной, значения к-рой заранее задаются при планировании эксперимента, а наблюдаемые значения Y представимы в виде

$$y_i=g(x_i,\beta)+\varepsilon_i,\ i=1,\ \ldots,\ k,$$

где величины ε_i характеризуют ошибки, независимые при различных измерениях и одинаково распределённые с нулевым средним и постоянной дисперсией σ^2. Случай неконтролируемой переменной x отличается тем, что результаты наблюдений $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ представляют собой выборку из совокупности с нек-рым двумерным распределением вероятностей. И в том и в другом случае Р. а. производится одним и тем же способом, однако интерпретация результатов существенно различается (если обе исследуемые величины случайны, то Р. а. существенно дополняется методами *корреляционного анализа*).

Исследование регрессии производится методами, основанными на принципах средней квадратичной регрессии. Предварительное представление о форме графика зависимости $g(x)$ от x можно получить по расположению на диаграмме рассеяния (наз. также корреляционным полем) точек $(x_i, \overline{y}(x_i))$, где $\overline{y}(x_i)$ — средние арифметические тех значений y, к-рые соответствуют фиксированному значению x_i. Напр., если расположение этих точек близко к прямолинейному, то допустимо использовать в качестве приближения линейную регрессию. Стандартный метод оценки линии регрессии основан на использовании полиномиальной модели ($m\geqslant 1$):

$$g(x,\beta)=\beta_0+\beta_1x+\ldots+\beta_mx^m.$$

Оценка неизвестных коэффициентов регрессии $\beta_0, \ldots, \beta_m$ и неизвестной дисперсии σ^2 осуществляется методом наименьших квадратов. Оценки $\hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_m$ параметров $\beta_0, \ldots, \beta_m$, полученные этим методом, наз. выборочными коэффициентами регрессии, а многочлен

$$\hat{g}(x)=\hat{\beta}_0+\ldots+\hat{\beta}_mx^m$$

определяет т. н. эмпирическую линию регрессии, к-рая служит статистич. оценкой неизвестной истинной линии регрессии. Этот метод в предположении нормальной распределённости результатов наблюдений приводит к оценкам для $\beta_0, \ldots, \beta_m$ и σ^2, совпадающим с оценками наибольшего правдоподобия (см. *Максимального правдоподобия метод*). Оценки, полученные этим методом, оказываются, однако, в нек-ром смысле наилучшими и в случае отклонения от нормальности, если только объём выборки достаточно велик. Если проверяется гипотеза о линейной регрессии, то

$$\hat{\beta}_i=\sum_i(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})/\sum_i(x_i-\bar{x})^2,\ \hat{\beta}_0=\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x},$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — средние арифметич. значений x_i и y_i, и оценка $\hat{g}(x)=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x$ будет несмещённой для $g(x)$, а её дисперсия будет меньше, чем дисперсия любой другой линейной оценки. Проверка точности построенной эмпирической регрессионной зависимости и проверка гипотез о параметрах регрессионной модели наиболее эффективно осуществляются при допущении, что величины y_i нормально распределены. В этом случае построение доверительных интервалов для истинных коэффициентов регрессии $\beta_0, \ldots, \beta_m$ и проверка гипотезы об отсутствии регрессионной связи ($\beta_i=0$, $i=1, \ldots, m$) производятся с помощью критерия Стьюдента.

В более общей ситуации результаты наблюдений $Y_1, \ldots, Y_n$ рассматриваются как независимые случайные величины с одинаковыми дисперсиями и математич. ожиданиями:

$$\mathsf{E}Y_i=\beta_1x_{1i}+\ldots+\beta_kx_{ki},\ i=1,\ \ldots,\ n,$$

где значения x_{ji}, $j=1, \ldots, k$, предполагаются известными. Эта форма линейной модели регрессии является общей в том смысле, что к ней сводятся модели более высоких

порядков по переменным $x_1, \ldots, x_k$. Кроме того, нек-рые нелинейные относительно параметров β модели подходящим преобразованием также сводятся к указанной линейной форме.

Р. а. является одним из наиболее распространённых методов обработки результатов наблюдений при изучении зависимостей в физике, биологии, экономике, технике и других областях. На моделях Р. а. основаны такие разделы математич. статистики, как *дисперсионный анализ* и *планирование экспериментов*; модели Р. а. широко используются в *многомерном статистическом анализе*.

А. В. Прохоров.

РЕГРЕ́ССИЯ (от лат. regressio — обратное движение) — зависимость среднего значения какой-либо величины от некоторой другой величины или от нескольких величин. В отличие от функциональной зависимости $y=f(x)$, когда каждому значению независимой переменной x соответствует одно определённое значение величины y, при регрессионной связи одному и тому же значению x могут соответствовать в зависимости от случая различные значения величины y. Если при каждом значении $x=x_i$ наблюдается n_i значений $y_{i1}, \ldots, y_{in_i}$ величины y, то зависимость средних арифметических

$$\bar{y} = (y_{i1} + \ldots + y_{in_i}) / n_i$$

от x_i и является регрессией в статистич. понимании этого термина. Примером такого рода зависимости служит, в частности, зависимость средних диаметров сосен от их высот; см. табл. в ст. *Корреляция*.

Изучение Р. в теории вероятностей основано на том, что случайные величины X и Y с заданным совместным распределением вероятностей связаны вероятностной зависимостью: при каждом фиксированном значении $X=x$ величина Y является случайной величиной с определённым (зависящим от значения x) условным распределением вероятностей. Р. величины Y по величине X определяется условным математическим ожиданием Y, вычисленным при условии, что $X=x$:

$$\mathsf{E}(Y \mid x) = y(x).$$

Уравнение $y=y(x)$, в к-ром x играет роль «независимой» переменной, наз. уравнением регрессии, а соответствующий график — линией или кривой регрессии величины Y по X; переменная x наз. регрессионной переменной или регрессором. Точность, с к-рой уравнение Р. Y по X отражает изменение Y в среднем при изменении x, измеряется условной дисперсией величины Y, вычисленной для каждого значения $X=x$:

$$\mathsf{D}(Y \mid x) = \sigma^2(x).$$

Если $\sigma^2(x)=0$ при всех значениях x, то можно с достоверностью утверждать, что Y и X связаны строгой функциональной зависимостью. Если $\sigma^2(x)\neq 0$ ни при каком значении x и $y(x)$ не зависит от x, то говорят, что Р. Y по X отсутствует. Аналогичным образом определяется Р. X по Y.

Линии Р. обладают следующим свойством: среди всех действительных функций $f(x)$ минимум математич. ожидания $\mathsf{E}(Y-f(X))^2$ достигается для функции $f(x)=\mathsf{E}(Y|X=x)$, то есть Р. Y по X даёт наилучшее, в указанном смысле, представление величины Y по величине X. Это свойство используется для прогноза Y по X: если непосредственно наблюдается лишь компонента X вектора (X, Y), то в качестве прогнозируемого значения Y используют величину $y(X)$.

Наиболее простым является тот случай, когда регрессия Y по X линейна:

$$\mathsf{E}(Y \mid x) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Коэффициенты β_0 и β_1, наз. коэффициентами регрессии, определяются равенствами

$$\beta_0 = m_Y - \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} m_X, \quad \beta_1 = \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X},$$

где m_X и m_Y — математич. ожидания X и Y, σ_X^2 и σ_Y^2 — дисперсии X и Y, а ρ — коэффициент корреляции между X и Y. Уравнение регрессии при этом выражается формулой

$$y = m_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X).$$

В случае когда совместное распределение X и Y нормально, обе линии Р. $y=y(x)$ и $x=x(y)$ являются прямыми.

В условиях статистич. приложений, когда для точного определения Р. нет достаточных сведений о форме совместного распределения вероятностей, возникает задача приближённого нахождения Р. Решению этой задачи может служить выбор из всех функций $f(x)$, принадлежащих заданному классу, такой функции, к-рая даёт наилучшее представление величины Y в том смысле, что она минимизирует математич. ожидание $\mathsf{E}(Y-f(x))^2$. Найденная функция наз. средней квадратической Р. Простейшим будет случай линейной средней квадратической Р. Если Р. Y по X отлична от линейной, то уравнение

$$y = m_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X)$$

есть линейная аппроксимация истинного уравнения Р.: математич. ожидание $\mathsf{E}(Y-b_0-b_1X)^2$ достигает минимума по b_0 и b_1 при $b_0=\beta_0$ и $b_1=\beta_1$.

В общем случае функция Р. выражается линейной комбинацией тех или иных заданных функций:

$$y(x) = \beta_0\varphi_0(x) + \beta_1\varphi_1(x) + \ldots + \beta_m\varphi_m(x).$$

Наиболее важное значение имеет полиномиальная (параболическая) регрессия, при к-рой

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \ \varphi_1(x) = x, \ \ldots, \ \varphi_m(x) = x^m.$$

Понятие «Р.» применимо и к случайным векторам. В частности, если $(Y, X_1, \ldots, X_k)$ — случайный вектор, имеющий нек-рое распределение вероятностей, то Р. Y по $X=(X_1, \ldots, X_k)$ определяется уравнением

$$y(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{E}(Y \mid X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k).$$

Эта Р. наз. множественной Р. Если

$$y(x_1, \ldots, x_k) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k,$$

то множественная Р. наз. линейной. Эта форма уравнения Р. включает в себя многие типы Р. с одной независимой переменной.

Простым примером Р. Y по X является зависимость между Y и X, к-рая выражается соотношением $Y=y(X)+\delta$, где $y(x)=\mathsf{E}(Y|X=x)$, а случайные величины X и δ независимы. Это представление полезно, когда планируется эксперимент для изучения функциональной связи $y=y(x)$ между неслучайными величинами y и x. Эта же модель Р. используется в приложениях при изучении характера зависимости случайной величины Y от неслучайной величины x.

На практике обычно коэффициенты Р. в уравнении $y=y(x)$ неизвестны и их оценивают по экспериментальным данным (см. *Регрессионный анализ*).

Первоначально термин «Р.» был употреблён Ф. Гальтоном (1886) в теории наследственности в следующем специальном смысле: «возвратом к среднему состоянию» (regression to mediocrity) было названо явление, состоящее в том, что дети тех родителей, рост к-рых превышает среднее значение на a единиц, имеют в среднем рост, превышающий среднее значение меньше чем на a единиц.

● Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; Кендалл М. Дж., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973.

А. В. Прохоров.

РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МЕТОД (от лат. regularis — правильный) — метод построения приближённых решений некорректных задач, состоящий в том, что в качестве искомых решений берутся значения регуляризирующих операторов с учётом приближённого характера исходной информации (см. *Некорректные задачи*). Для определённости ниже рассматривается задача нахождения решений функ-

циональных уравнений $Az=u$, в к-рых z и u — элементы метрич. пространств F и U с расстояниями $\rho_F(,)$ и $\rho_U(,)$.

Пусть вместо точной исходной информации $(\overline{A}, \overline{u})$ даны их приближения $(\tilde{A}, \tilde{u})$. Тогда речь может идти лишь о нахождении приближений к решению исходной задачи. Нельзя в качестве приближения брать точное решение уравнения $\tilde{A}z=\tilde{u}$, т. к. такого решения может не существовать, а если оно и существует, то может быть неустойчивым к малым изменениям исходной информации. Далее для простоты предполагается, что приближённой является лишь правая часть $\tilde{u}$.

Пусть δ — оценка уклонения $\tilde{u}$ от $\overline{u}$, т. е. $\rho_U(\tilde{u}, \overline{u})\leqslant\delta$, и $F_0\subset F$ — заданный класс допустимых решений. Естественно искать приближения к решению задачи среди элементов $z\in F_0$, сопоставимых по точности с исходной информацией, т. е. таких, что $\rho_U(Az, \tilde{u})\leqslant\delta$. Пусть F_δ — множество всех таких элементов из F_0. Но одно лишь требование сопоставимости возможных решений с исходными данными, вообще говоря, не может служить критерием нахождения приближений, устойчивых к исходным данным. Необходим нек-рый принцип отбора сопоставимых по точности с $\tilde{u}$ допустимых решений, формулируемый обычно по смыслу задачи. Он может быть произведён, напр., по принципу выбора из F_δ элемента (функции) минимальной сложности. За меру сложности элемента z принимается значение нек-рого функционала $\Omega[z]$. Так, если элементами z являются непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции $z(s)$ класса W_2^1, то функционал сложности $\Omega[z]$ можно взять, напр., в виде

$$\Omega[z]=\int_a^b\left\{z^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right\}ds$$

и искать, таким образом, функцию $z(s)$ из F_δ, минимизирующую $\Omega[z]$. Если оператор A непрерывный, то эта задача сводится к задаче нахождения элемента (функции) z_α из F_δ, минимизирующего сглаживающий функционал

$$M^\alpha[z, A, \tilde{u}]=\rho_U^2(Az, \tilde{u})+\alpha\Omega[z].$$

Значение параметра α (параметра регуляризации) должно быть согласовано с уровнем погрешности исходных данных. Его определяют, напр., по условию невязки, т. е. из условия $\rho_U(Az_\alpha, \tilde{u})=\delta$, если известно число δ, $\alpha=\alpha(\delta)$; возможны и другие способы определения α. Аналогично решается задача и с приближённо заданным оператором $\tilde{A}$. Возможны и другие формы Р. м. *А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин.*

РЕГУЛЯ́РНАЯ АНАЛИТИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Аналитическая функция.*

РЕГУЛЯ́РНАЯ ПОЛУГРУ́ППА — см. *Полугруппа.*

РЕГУЛЯ́РНАЯ ТО́ЧКА (от лат. regularis — правильный), правильная точка,— математический термин, употребляющийся в различных смыслах.

1) Р. т. линии, поверхности — см. *Дифференциальная геометрия.*

2) Точка x_0 наз. Р. т. разрыва функции $f(x)$, если

$$f(x_0)=\tfrac{1}{2}\{f(x_0+0)+f(x_0-0)\},$$

где $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ — пределы функции соответственно слева и справа.

3) В аналитич. теории дифференциальных уравнений особая точка наз. регулярной для уравнения

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p_1(z)\frac{dw}{dz}+p_2(z)w=0,$$

если она является полюсом порядка не выше k для коэффициентов p_k, $k=1, 2$.

4) Р. т. функции $f(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$ — точка $z_0=x_0+iy_0$, в нек-рой окрестности $|z-z_0|<\rho$ к-рой функция $f(z)$ однозначна и представима в виде ряда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

(c_n — постоянные).

РЕГУЛЯ́РНАЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Аналитическая функция.*

РЕГУЛЯ́РНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — топологическое пространство, в котором для каждой точки x и каждого не содержащего её замкнутого множества A найдутся непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $x\in U$ и $A\subset V$. Регулярными являются вполне регулярные пространства, и в частности нормальные пространства. Если в Р. п. все одноточечные множества замкнуты, то оно наз. T_3-пространством.

РЕГУЛЯ́РНЫЙ МЕ́ТОД СУММИ́РОВАНИЯ — см. *Суммирование.*

РЕГУЛЯ́РНЫЙ ЭЛЕМЕ́НТ — см. *Особая точка* аналитической функции.

РЕЗОЛЬВЕ́НТА (от лат. resolvens, род. падеж resolventis — развязывающий, решающий) — 1) Р. алгебраического уравнения $f(x)=0$ степени n — алгебраическое уравнение $g(y)=0$ с коэффициентами, рационально зависящими от коэффициентов $f(x)$, такое, что знание корней этого уравнения позволяет найти корни данного уравнения $f(x)=0$ в результате решения более простых уравнений, степеней не больших n. Иногда Р. называют само рациональное выражение $y=y(x_1, \ldots, x_n)$.

Напр., для решения уравнения 4-й степени

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

(любое уравнение 4-й степени приводится к такому виду) используют кубич. Р.

$$y^3-2py^2+(p^2-4r^2)y+q^2=0,$$

корни к-рой y_1, y_2, y_3 связаны с корнями x_1, x_2, x_3, x_4 соотношениями $y_1=(x_1+x_2)(x_3+x_4)$, $y_2=(x_1+x_3)(x_2+x_4)$, $y_3=(x_2+x_4)(x_2+x_3)$. Корни y_1, y_2, y_3 определяются с помощью формулы Кардано, что позволяет определить и корни x_1, x_2, x_3, x_4.

Назв. «Р.» ввёл Ж. Лагранж (1808).

2) В теории интегральных уравнений под Р. (разрешающим ядром) уравнения

$$\varphi(s)+\lambda\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt=f(s) \qquad (*)$$

понимают функцию $\Gamma(s, t, \lambda)$ переменных s, t и параметра λ, при помощи к-рой решение уравнения (*) представляют в виде

$$f(s)+\lambda\int_a^b\Gamma(s, t, \lambda)f(t)\,dt,$$

если λ не есть собственное значение уравнения (*), напр. для ядра $K(s, t)=s+t$ резольвентой является функция

$$\Gamma(s, t; \lambda)=\frac{s+t-\left(\frac{s+t}{2}-st-\frac{1}{3}\right)\lambda}{1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12}}.$$

3) Р. линейного оператора A — оператор $R_z=(A-zE)^{-1}$, где E — тождественный оператор.

РЕЗУЛЬТА́НТ (от лат. resultans, род. падеж resultantis — отражающийся) — алгебраическое выражение, применяемое при решении систем алгебраических уравнений любых степеней. Результантом двух многочленов

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$Q_s(x)=b_0x^s+b_1x^{s-1}+\ldots+b_{s-1}x+b_s$$

наз. определитель порядка $n+s$:

$$R(P_n, Q_s)=\begin{vmatrix} a_0 a_1 \ldots a_{n-1} a_n & & & \\ & a_0 \ldots & \ldots a_{n-1} a_n & \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & & a_0\ a_1 \ldots a_{n-1}\ a_n & \\ b_0 b_1 \ldots b_{s-1} b_s & & & \\ & b_0 \ldots & \ldots b_{s-1}\ b_s & \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & & b_0\ b_1 \ldots b_{s-1}\ b_s & \end{vmatrix},$$

где на свободных местах стоят нули; коэффициенты a_0, $a_1,\ldots, a_n$ занимают s строк, а коэффициенты b_0, $b_1,\ldots, b_s$ занимают n строк. Если $a_0\neq 0$ и $b_s\neq 0$, то

$$R(P_n, Q_s)=a_0^s b_s^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}(\alpha_i-\beta_j),$$

где α_1, $\alpha_2,\ldots, \alpha_n$ — корни многочлена $P_n(x)$, а β_1, $\beta_2,\ldots, \beta_s$ — многочлена $Q_s(x)$. Р. равен нулю тогда и только тогда, когда $P_n(x)$ и $Q_s(x)$ обладают общим корнем или же когда их старшие коэффициенты равны нулю. Р. многочлена и его производной с точностью до знака равен *дискриминанту* многочлена.

Пусть дана система двух алгебраич. уравнений степеней n и s с двумя неизвестными x и y:

$$\left.\begin{aligned} P_n(x, y)&=a_0(x)\,y^n+a_1(x)\,y^{n-1}+\ldots+a_n(x)=0,\\ Q_s(x, y)&=b_0(x)\,y^s+b_1(x)\,y^{s-1}+\ldots+b_s(x)=0,\end{aligned}\right\}\quad (*)$$

где $a_i(x)$ и $b_j(x)$ — многочлены от одного неизвестного x. Если положить $x=x_0$, то Р. системы (*) будет определитель $R(P_n, Q_s)$. Число x_0 тогда и только тогда является корнем результанта $R(P_n, Q_s)$, когда или многочлены $P_n(x_0, y)$ и $Q_s(x_0, y)$ имеют общий корень y_0, или оба старших коэффициента $a_0(x_0)$ и $b_0(x_0)$ равны нулю.

Таким образом, для решения системы (*) надо найти все корни результанта $R(P_n, Q_s)$, подставить каждый из этих корней в систему (*) и найти общие корни этих двух уравнений с одним неизвестным y. Кроме того, надо найти общие корни двух многочленов $a_0(x)$ и $b_0(x)$ и также подставить их в систему (*) и проверить, не имеют ли полученные уравнения с одним неизвестным y общих корней. Иными словами, решение системы двух алгебраич. уравнений с двумя неизвестными сводится к решению одного уравнения с одним неизвестным и вычислению общих корней двух уравнений с одним неизвестным (общие корни двух или нескольких многочленов с одним неизвестным являются корнями их наибольшего общего делителя).

РЕКУРРЕ́НТНАЯ ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ (от лат. recurrens, род. падеж recurrentis — возвращающийся) — то же, что *возвратная последовательность*. Термин «рекуррентность» ввёл А. Муавр (1720—30).

РЕКУРРЕ́НТНОЕ СООТНОШЕ́НИЕ, р е к у р р е н т н а я ф о р м у л а,— соотношение вида

$$a_{n+p}=F(n, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+p-1}),$$

к-рое позволяет вычислять любой член последовательности, если заданы её первые p членов. Примеры Р. с.: 1) $a_{n+1}=qa_n$ $(q\neq 0)$ — геометрич. прогрессия; 2) $a_{n+1}=a_n+d$ — арифметич. прогрессия; 3) $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ — последовательность чисел Фибоначчи.

В случае когда Р. с. линейно, последовательность, удовлетворяющая ему, наз. в о з в р а т н о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю.

РЕКУРСИ́ВНАЯ РЕАЛИЗУ́ЕМОСТЬ (от позднелат. recursio — возвращение) — уточнение интуиционистской семантики арифметических суждений на основе понятия частично рекурсивной функции, предложенное С. Клини. Для всякой замкнутой арифметич. формулы F определяется отношение «натуральное число e реализует формулу F», обозначаемое erF. Отношение erF определяется индуктивно в соответствии с построением формулы F.

1) Если F — элементарная формула без свободных переменных, т. е. формула вида $s=t$, где s и t — постоянные термы, то erF тогда и только тогда, когда $e=0$ и значения термов s и t совпадают.

Пусть A и B — формулы без свободных переменных.

2) $er(A\&B)$ тогда и только тогда, когда $e=2^a\cdot 3^b$, где arA, brB.

3) $er(A\vee B)$ тогда и только тогда, когда $e=2^0\cdot 3^a$ и arA или $e=2^1\cdot 3^b$ и brB.

4) $er(A\supset B)$ тогда и только тогда, когда e — гёделев номер такой одноместной частично рекурсивной функции φ, что для любого натурального числа a, если arA, то φ применима к a и $\varphi(a)rB$.

5) $er(\neg A)$ тогда и только тогда, когда $er(A\supset 1=0)$.

Пусть $A(x)$ — формула без свободных переменных, отличных от x; если n — натуральное число, то $\overline{n}$ — терм, изображающий в формальной арифметике число n.

6) $er(\exists xA(x))$ тогда и только тогда, когда $e=2^n\cdot 3^a$ и $arA(\overline{n})$.

7) $er(\forall xA(x))$ тогда и только тогда, когда e — гёделев номер такой общерекурсивной функции f, что для любого натурального n число $f(n)$ реализует $A(\overline{n})$.

Замкнутая формула F наз. р е а л и з у е м о й (обозначение: rF), если существует число e, реализующее F. Если $A(y_1,\ldots, y_m)$ — формула, содержащая свободные переменные $y_1,\ldots, y_m$, то отношение $rA(y_1,\ldots, y_m)$ может рассматриваться как предикат от $y_1,\ldots, y_m$: «формула $A(y_1,\ldots, y_m)$ реализуема». Если формула F выводима из реализуемых формул в интуиционистском арифметич. исчислении, то F реализуема. В частности, всякая формула, доказуемая в интуиционистской арифметике, реализуема. Можно указать такую формулу $A(x)$, что формула $\forall x(A(x)\vee\neg A(x))$ нереализуема. Соответственно, в этом случае формула $\neg\forall x(A(x)\vee\neg A(x))$ реализуема, хотя является классически ложной.

Всякая предикатная формула $\mathfrak{A}$, доказуемая в интуиционистском исчислении предикатов, обладает тем свойством, что каждая арифметич. формула, получающаяся из $\mathfrak{A}$ подстановкой, реализуема. Предикатные формулы, обладающие этим свойством, наз. р е а л и з у е м ы м и. Пропозициональная формула

$$((\neg\neg D\supset D)\supset(\neg\neg D\vee\neg D))\supset(\neg\neg D\vee\neg D),$$

где D обозначает формулу $\neg p\vee\neg q$, реализуема, но невыводима в интуиционистском исчислении высказываний.

РЕКУРСИ́ВНАЯ СХЕ́МА — один из видов *программы схемы*.

РЕКУРСИ́ВНАЯ ФУ́НКЦИЯ — один из наиболее распространённых вариантов математич. уточнения понятия вычислимой арифметической функции, т. е. *вычислимой функции*, аргументы и значения которой — натуральные числа.

Р. ф. являются ч а с т и ч н ы м и функциями, т. е. функциями, не обязательно всюду определёнными. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, часто в качестве синонима используют термин «ч а с т и ч н о р е к у р с и в н ы е ф у н к ц и и». Р. ф., определённые при любых значениях аргументов, наз. о б щ е р е к у р с и в н ы м и ф у н к ц и я м и.

Определению Р. ф. может быть придана следующая форма. Фиксируется небольшое число чрезвычайно простых и с х о д н ы х вычислимых функций: $O(x)=0$, $S(x)=x+1$, $I_m^n(x_1,\ldots, x_n)=x_m$ $(1\leqslant m\leqslant n)$; фиксируется также небольшое число операций над функциями, переводящих вычислимые функции снова в вычислимые: операторы подстановки, примитивной рекурсии и минимизации. Оператор п о д с т а н о в к и сопоставляет функции f от n переменных и функциям $g_1,\ldots, g_n$ от m переменных функцию h от m переменных такую, что для любых натуральных чисел $x_1,\ldots, x_m$

$$h(x_1, \ldots, x_m)\simeq f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_m))$$

(здесь и ниже у с л о в н о е р а в е н с т в о $\simeq$ означает, что оба выражения, связываемые им, осмыслены одновременно и в случае осмысленности имеют одно и то же значение).

Оператор п р и м и т и в н о й р е к у р с и и сопоставляет двум функциям f от n переменных и g от $n+2$ переменных такую функцию h от $n+1$ переменных, что для любых натуральных чисел $x_1,\ldots, x_n$, y

$$h(x_1, \ldots, x_n, 0)\simeq f(x_1, \ldots, x_n),$$

$$h(x_1, \ldots, x_n, y+1)\simeq g(x_1, \ldots, x_n, y, h(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

Оператор м и н и м и з а ц и и сопоставляет функции f

от $n+1$ переменных функцию h от n переменных такую, что для любых натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n, y$

$$h(x_1, \ldots, x_n) = y$$

тогда и только тогда, когда $f(x_1, \ldots, x_n, 0), \ldots, f(x_1, \ldots, x_n, y-1)$ определены и отличны от 0, а $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ определена и равна 0; если же y с указанными свойствами не существует, то значение $h(x_1, \ldots, x_n)$ считается неопределённым. Если функция h получена из функции f с помощью оператора минимизации, то обычно пишут:

$$h(x_1, \ldots, x_n) \simeq \mu y (f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0).$$

Р. ф.— это функции, к-рые можно получить из исходных в результате конечного числа применений операторов подстановки, примитивной рекурсии и минимизации.

Р. ф. уже в силу самого характера своего определения оказываются вычислимыми. В известном смысле верно и обратное: имеются серьёзные основания считать, что математическое по своему характеру понятие рекурсивности является точным эквивалентом несколько расплывчатого представления о вычислимости. Предложение считать вычислимость совпадающей по своему объёму с понятием рекурсивности известно в теории Р. ф. под названием *Чёрча тезиса*. Принятие этого тезиса позволяет придать понятию вычислимой арифметич. функции точный математич. смысл и подвергнуть это понятие изучению при помощи точных методов.

Важную роль в теории Р. ф. играют примитивно рекурсивные функции, т. е. Р. ф., получающиеся из указанных выше исходных функций в результате конечного числа применений одних лишь операторов подстановки и примитивной рекурсии. Они образуют собственную часть класса общерекурсивных функций. В силу теоремы Клини о нормальной форме могут быть указаны такие конкретные примитивно рекурсивные функции U от одной переменной и T_n от $n+2$ переменных, что для любой Р. ф. φ от n переменных найдётся натуральное число e (т. н. гёделев номер функции φ), для к-рого будет иметь место условное равенство

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq U(\mu y (T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y) = 0)).$$

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что для класса Р. ф. от n переменных может быть построена универсальная Р. ф. от $n+1$ переменных, т. е. такая Р. ф. Φ_n, что для любой Р. ф. φ от n переменных и для любых натуральных чисел $x_1, \ldots, x_n$ имеет место условное равенство

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \simeq \Phi_n(e, x_1, \ldots, x_n),$$

где e — гёделев номер функции φ. Это — один из центральных результатов общей теории Р. ф.

Теория Р. ф., являясь частью *алгоритмов теории*, представляет собой разветвлённую математич. дисциплину с собственной проблематикой и с приложениями в других разделах математики. Понятие «Р. ф.» может быть положено в основу конструктивного определения исходных математич. понятий. Широкое применение теория Р. ф. нашла в математич. логике. В частности, понятие примитивно рекурсивной функции лежит в основе первоначального доказательства знаменитой *Гёделя теоремы о неполноте* формальной арифметики, а понятие «Р. ф.» в его полном объёме было использовано С. Клини для интерпретации интуиционистской арифметики (см. *Рекурсивная реализуемость*). Аппарат теории Р. ф. используется также в теории вычислительных машин и программирования.

Исследования показали, что все известные уточнения общего понятия алгоритма, в том числе и Р. ф., взаимно моделируют друг друга и, следовательно, ведут к одному и тому же понятию вычислимой функции, совпадающему с понятием Р. ф. Это обстоятельство служит серьёзным доводом в пользу тезиса Чёрча.

● Клини С. К., Введение в метаматематику, пер. с англ., М., 1957; Успенский В. А., Лекции о вычислимых функциях, М., 1960; Мальцев А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972. *Н. М. Нагорный.*

РЕКУРСИ́ВНО ПЕРЕЧИСЛИ́МОЕ МНО́ЖЕСТВО — то же, что *перечислимое множество*.

РЕКУРСИ́ВНОЕ МНО́ЖЕСТВО — то же, что *разрешимое множество*.

РЕКУРСИ́ВНЫЙ АНА́ЛИЗ — то же, что *конструктивный анализ*.

РЕЛАКСА́ЦИИ МЕ́ТОД (от лат. relaxatio — ослабление), метод ослабления,— метод итерационного решения системы линейных алгебраических уравнений $Ax=b$, элементарный шаг которого состоит в изменении только одной компоненты вектора неизвестных, причём номера изменяемых компонент выбираются в некотором циклическом порядке. Наиболее часто Р. м. используется для решения систем с положительно определённой матрицей A. Если изменение одной компоненты вектора неизвестных x^k осуществляется так, что для нового приближения x^{k+1} квадратичная форма $(A(x^{k+1}-x), (x^{k+1}-x))$ минимизируется, то говорят о полной Р. м. Если же за один элементарный шаг значение квадратичной формы лишь уменьшается, но не минимизируется, то говорят о неполной Р. м.

РЕЛЕ́ЙНО-КОНТА́КТНАЯ СХЕ́МА — математическая модель электротехнических устройств, состоящих из контактов и промежуточных реле (см. ниже), функционирующих в дискретные моменты времени. Р.-к. с. — один из первых классов *управляющих систем*, рассмотренных с математич. точки зрения, а также один из первых вариантов понятия *конечного автомата*.

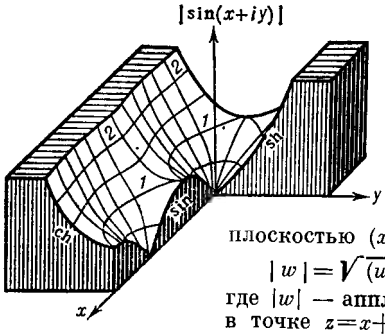
Математически Р.-к. с. представляет собой конечный граф, всем рёбрам и нек-рым выделенным вершинам к-рого приписаны символы из алфавитов

$$x = \{x_1, \bar{x}_1, \ldots, x_n, \bar{x}_n\}, \ Y = \{Y_1, \ldots, Y_m\},$$
$$y = \{y_1, \bar{y}_1, \ldots, y_m, \bar{y}_m\},$$
$$a = \{a_+, a_-, a_1, \ldots, a_s\}$$

следующим образом. Каждой выделенной вершине графа (эти вершины наз. полюсами) приписан символ из алфавита a так, что различным полюсам приписаны различные символы. Множество рёбер графа разбито на три непересекающихся подмножества: R, K_1, K_2. Рёбрам каждого из этих подмножеств приписаны символы из Y, x, y следующим образом. Каждому ребру из R приписан символ из Y, всем рёбрам из R приписаны различные символы, и все символы из Y приписаны рёбрам из R. Каждому ребру множества K_1 (соответственно K_2) приписаны символы из x (соответственно y) так, что каждый символ может быть приписан нескольким рёбрам, нек-рые символы могут быть не приписаны никаким рёбрам. Если множество Y пусто, то пусто и множество K_2. Рёбра, к-рым приписаны символы из x, наз. контактами основных реле; множество всех рёбер, помеченных символами из $Y_i, y_i, \bar{y}_i$, наз. i-м промежуточным реле, $i=1, \ldots, m$; рёбра, помеченные символами из y, наз. контактами промежуточных реле; рёбра, помеченные символами из Y, наз. обмотками.

РЕЛЬЕ́Ф ФУ́НКЦИИ (франц. relief, от лат. relevo — поднимаю), поверхность модуля, аналитический ландшафт,— способ геометрического представления в пространстве функции комплексного переменного

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$



Р. ф.— поверхность над плоскостью (x, y) модуля $|f(z)|$:

$$|w| = \sqrt{(u(x, y))^2 + (v(x, y))^2},$$

где $|w|$ — аппликата, восстановленная в точке $z=x+iy$.

На рисунке изображён рельеф $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y}$

функции $\sin z=\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y$. Иногда на Р. ф. вычерчиваются две системы линий: линии равного модуля, т. е. линии, вдоль к-рых $|w|=\text{const}$, и линии равного аргумента, т. е. линии, вдоль к-рых $\arg w=\text{const}$. Линии $|w|=\text{const}$ снабжены на рис. цифрами, дающими значения $|w|$ на этих линиях.

РЕПЁР (франц. repère — знак, исходная точка) — совокупность линейно независимых векторов, взятых в определённом порядке и отложенных из общего начала. Для векторов в пространстве Р. может служить любая тройка попарно непараллельных одной плоскости векторов $e_1=\overrightarrow{OM}_1$, $e_2=\overrightarrow{OM}_2$, $e_3=\overrightarrow{OM}_3$. Если векторы, составляющие Р., попарно ортогональны, то Р. наз. о р т о г о н а л ь н ы м. Если при этом векторы имеют длину, равную единице, то Р. называют единичным ортогональным (о р т о н о р м и р о в а н н ы м). В общем случае n-мерного векторного пространства Р.— любая совокупность из n линейно независимых векторов $e_1=\overrightarrow{OM}_1$, $e_2=\overrightarrow{OM}_2,\ldots, e_n=\overrightarrow{OM}_n$.

РЕФЛЕКСИ́ВНОСТЬ (ср.-век. лат. reflexivus, букв.— повёрнутый назад) — свойство бинарных отношений, выражающее выполнимость их для пар объектов с совпадающими членами. Отношение R на множестве X наз. р е ф л е к с и в н ы м, если xRx для любого объекта $x\in X$. Типичными и наиболее важными примерами рефлексивных отношений могут служить отношения типа равенства (тождества, эквивалентности, подобия и т. п.): любой предмет равен самому себе, и отношения нестрогого порядка: любой предмет не меньше и не больше самого себя. Всякое бинарное отношение, обладающее свойствами *симметричности* и *транзитивности*, рефлексивно. Поэтому многие употребительные в математике отношения, по определению Р. не обладающие, оказывается естественным доопределить таким образом, чтобы они становились рефлексивными, напр. считать, что каждая прямая или плоскость параллельна самой себе.

РЕША́ЮЩАЯ ФУ́НКЦИЯ, р е ш а ю щ е е п р а в и л о,— то же, что *статистическое решение*.

РЕШЁТКА — совокупность точек пространства с целыми координатами относительно какой-то, вообще говоря, не прямоугольной декартовой системы координат. См. *Многогранник*.

РЕШЁТКА, с т р у к т у р а, — частично упорядоченное множество, в к-ром каждое двухэлементное подмножество имеет как точную верхнюю (sup), так и точную нижнюю (inf) грани. Отсюда вытекает существование этих граней для любых непустых конечных подмножеств.

П р и м е р ы р е ш ё т о к: 1) множество всех подмножеств данного множества, упорядоченное по включению; 2) всякое линейно упорядоченное множество; причём если $a\leqslant b$, то $\sup\{a, b\}=b$, а $\inf\{a, b\}=a$; 3) множество всех подпространств векторного пространства, упорядоченных по включению, где inf — пересечение, а sup — сумма соответствующих подпространств; 4) множество всех неотрицательных целых чисел, упорядоченных по делимости: $a\leqslant b$, если $b=ac$ для нек-рого c. Здесь sup — наименьшее общее кратное, а inf — наибольший общий делитель данных чисел; 5) действительные функции, определённые на отрезке $[0, 1]$, упорядоченные условием $f\leqslant g$, если $f(t)\leqslant g(t)$ для всех $t\in[0, 1]$. Здесь

$$\sup\{f, g\}=u, \text{ где } u(t)=\max\{f(t), g(t)\},$$

а

$$\inf\{f, g\}=v, \text{ где } v(t)=\min\{f(t), g/t\}.$$

Р. может быть также определена как универсальная алгебра с двумя бинарными операциями (они обозначаются $+$ и $\cdot$ или $\cup$ и $\cap$, а также $\vee$ и $\wedge$), удовлетворяющая следующим тождествам:

(1) $a+a=a$,	(1′) $a\cdot a=a$,
(2) $a+b=b+a$,	(2′) $a\cdot b=b\cdot a$,
(3) $(a+b)+c=a+(b+c)$,	(3′) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$,
(4) $a(a+b)=a$;	(4′) $a+a\cdot b=a$.

Связь между этими двумя определениями устанавливается при помощи формул:

$$a+b=\sup\{a, b\},\quad a\cdot b=\inf\{a, b\},$$

и обратно. При этом для любых элементов a и b эквивалентны следующие утверждения: (а) $a\leqslant b$; (б) $ab=a$; (в) $a+b=b$. Понятия изоморфизма Р. как универсальных алгебр и как частично упорядоченных множеств совпадают. Однако произвольное изотонное отображение решётки R в решётку R' не обязано быть гомоморфизмом этих Р. как универсальных алгебр. Частично упорядоченное множество, антиизоморфное Р., есть Р.

Появление понятия «Р.» относится к сер. 19 в. Чётко его сформулировал Р. Дедекинд в работах 1894 и 1897. Термин «lattice», переведённый как «структура», был введён Г. Биркгофом в 1933. В настоящее время в русской терминологии (из-за многозначности слова «структура») он вытеснен переводом «решётка». Исторически роль теории Р. объясняется тем, что многие факты, касающиеся множества идеалов кольца и множества нормальных подгрупп группы, выглядят аналогично и могут быть доказаны в рамках теории *дедекиндовых решёток*. Как самостоятельное направление алгебры эта теория сформировалась в 30-х гг. 20 в. Наиболее важные классы Р., кроме дедекиндовых,— это *полные решётки*, *дистрибутивные решётки* и *булевы алгебры*.

● С к о р н я к о в Л. А., Элементы теории структур, 2 изд., М., 1982; Б и р к г о ф Г., Теория решеток, пер. с англ., М., 1984; Г р е т ц е р Г., Общая теория решеток, пер. с англ., М., 1982.

Л. А. Скорняков.

РИККА́ТИ УРАВНЕ́НИЕ — обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^{\alpha},\qquad (*)$$

где a, b, α — постоянные. Это уравнение впервые исследовалось Я. Риккати (1723); отдельные частные случаи рассматривались раньше. Д. Бернулли (1724—25) установил, что уравнение (*) интегрируется в элементарных функциях, если $\alpha=-2$ или $\alpha=-4k(2k-1)$, k — целое число. Как доказал Ж. Лиувилль (1841), при других значениях α решение уравнения (*) нельзя выразить в квадратурах от элементарных функций; общее решение его может быть записано с помощью цилиндрич. функций.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=P(x)\,y^2+Q(x)\,y+R(x),$$

где $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ — непрерывные функции, наз. о б щ и м Р. у. (в отличие от него уравнение (*) наз. с п е ц и а л ь н ы м Р. у.). При $P(x)\equiv 0$ общее Р. у. является линейным дифференциальным уравнением, при $R(x)=0$ — т. н. *Бернулли уравнением*, к-рые интегрируются в конечном виде. Изучены также другие случаи интегрируемости общего Р.у.

РИ́МАНА ГЕОМЕ́ТРИЯ, э л л и п т и ч е с к а я г е о м е т р и я,— одна из *неевклидовых геометрий*, т. е. геометрическая теория, основанная на аксиомах, требования которых (в значительной части) отличны от требований аксиом *евклидовой геометрии*.

Основными объектами, или элементами, трёхмерной Р. г. являются точки, прямые и плоскости; основные понятия Р.г. суть понятия принадлежности (точки прямой, точки плоскости), порядка (точек на прямой, прямых, проходящих через данную точку в данной плоскости, и т. д.) и конгруэнтности (фигур). Требования аксиом Р. г., касающиеся принадлежности и порядка, полностью совпадают с требованиями аксиом проективной геометрии. Соответственно в Р. г. имеют место, напр., следующие предложения: через каждые две точки проходит одна прямая; каждые две плоскости пересекаются по одной прямой; каждые две прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются (в одной точке); точки на прямой расположены в циклич. порядке (как и прямые, лежащие в одной плоскости и проходящие через одну точку); каждая пара точек прямой определяет на ней два отрезка; прямая, лежащая на пло-

скости, не разделяет эту плоскость (т. е. если прямая a лежит в плоскости α, то любые две точки плоскости α, не лежащие на прямой a, можно соединить отрезком, не пересекая прямой a); плоскость не разделяет пространства. Короче говоря, свойства расположения элементов на плоскости Римана и в пространстве Римана совпадают со свойствами расположения элементов на проективной плоскости и в проективном пространстве. Р. г. существенно отличается от проективной тем, что рассматривает конгруэнтность фигур и вместе с тем измерение геометрич. величин (длин, углов, площадей, объёмов). Таким образом, Р. г. является метрической. Требования аксиом Р. г., касающиеся конгруэнтности, сходны с требованиями соответствующих аксиом евклидовой геометрии: во всяком случае, они обеспечивают движения фигур на плоскости Римана и в пространстве Римана столь же свободные, как на плоскости и в пространстве Евклида. Метрич. свойства плоскости Римана «в малом» совпадают с метрич. свойствами обыкновенной сферы. Точнее: для любой точки плоскости Римана существует содержащая эту точку часть плоскости, изометричная нек-рой части сферы; радиус R этой сферы — один и тот же для всех плоскостей данного пространства Римана. Число $K=1/R^2$ наз. кривизной плоскости Римана (чем меньше K, тем ближе свойства фигур этой плоскости к евклидовым). Свойства плоскости Римана «в целом» отличаются от свойств целой сферы; так, напр., на плоскости Римана две прямые пересекаются в одной точке; на сфере два больших круга, к-рые играют роль прямых в сферич. геометрии, пересекаются в двух точках. Метрич. свойства трёхмерного пространства Римана «в малом» совпадают с метрич. свойствами трёхмерной сферы четырёхмерного евклидова пространства. Точнее: для любой точки пространства Римана существует содержащая эту точку часть пространства, изометричная нек-рой части трёхмерной сферы. Радиус этой сферы совпадает с величиной R, к-рая упоминалась выше. Число $K=1/R^2$ наз. кривизной пространства Римана (чем меньше K по сравнению с размерами данной части пространства, тем ближе свойства фигур в этой части пространства к евклидовым).

Модель плоскости Римана можно получить путём «отождествления» диаметрально противоположных точек обыкновенной сферы. Именно, условившись каждую пару диаметрально противоположных точек нек-рой сферы рассматривать как один объект, называют этот объект «точкой», каждый большой круг той же сферы — «прямой». Тогда свойства принадлежности, порядка и конгруэнтности этих «точек» и «прямых» и составленных из них фигур будут точно соответствовать теоремам двумерной Р. г. Модель трёхмерного пространства Римана получается аналогично путём «отождествления» диаметрально противоположных точек трёхмерной сферы четырёхмерного евклидова пространства (тот же приём, применённый к n-мерной сфере (n+1)-мерного евклидова пространства, даёт модель n-мерного пространства Римана).

По-видимому, первое сообщение о Р. г. сделано Б. Риманом в его лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1854, опубликовано в 1868), где Р. г. рассматривалась как частный случай теории римановых пространств в широком смысле (Р. г. относится к теории пространств постоянной положительной кривизны; см. *Риманово пространство*).

Н. В. Ефимов.

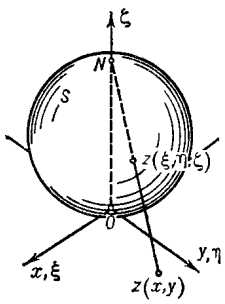
РИ́МАНА ДЗЕ́ТА-ФУ́НКЦИЯ — см. *Дзета-функция.*

РИ́МАНА ИНТЕГРА́Л — обычный определённый *интеграл*. Само определение Р. и. по существу было дано О. Коши (1823), к-рый, однако, применял его к непрерывным функциям. Б. Риман впервые указал (1853, опубликовано в 1868) необходимое и достаточное условие существования определённого интеграла, к-рое в современных терминах может быть выражено так: для существования определённого интеграла функции на нек-ром интервале необходимо и достаточно, чтобы: 1) интервал был конечным, 2) функция была на нём ограниченной, 3) множество точек разрыва функции на этом интервале имело лебегову меру нуль.

РИ́МАНА СФЕ́РА, римано́ва сфе́ра,— одно из возможных геометрических изображений совокупности комплексных чисел, введённое Б. Риманом. Комплексные числа

$$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

можно изображать точками комплексной плоскости с декартовыми координатами x, y или полярными r, φ. В качестве Р. с. можно принять сферу радиуса 1, касающуюся комплексной плоскости, т. е. каждое комплексное число z изображается на Р. с. точкой пересечения луча Nz, соединяющего эту точку с северным полюсом N Р. с. (рис.). Такое отображение наз. *стереографической проекцией*. Число 0 изображается южным полюсом Р. с.; числа с одинаковым аргументом $\varphi=\text{const}$ (лучи комплексной плоскости) изображаются на Р. с. меридианами, а числа с одинаковым модулем $|z|=r=\text{const}$ (окружности комплексной плоскости с центром в начале координат) — параллелями Р. с. Северному полюсу Р. с. не соответствует никакое комплексное число. Поэтому в ряде вопросов удобно дополнить комплексную плоскость воображаемой бесконечно удалённой точкой $z=\infty$ и считать, что она соответствует северному полюсу Р. с.



Если в пространстве ввести прямоугольную систему координат ξ, η, ζ так, что оси ξ и η совпадают соответственно с осями x и y, то связь комплексного числа $z=x+iy$ с координатами изображающей его точки на Р. с. описывается формулами

$$\xi+i\eta=\frac{4z}{4+|z|^2},\quad \zeta=\frac{2|z|^2}{4+|z|^2},\quad z=\frac{r(\xi+i\eta)}{r-\zeta}.$$

Уравнение Р. с. имеет вид

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\zeta=0.$$

РИ́МАНА ТЕ́НЗОР, тензо́р Ри́мана — Кри́стоффеля,— четырежды ковариантный тензор, характеризующий кривизну риманова пространства. Введён Б. Риманом (1861, опубликовано в 1876). См. *Римановa геометрия.*

РИ́МАНА ТЕОРЕ́МА — 1) теорема теории конформных отображений, согласно которой всякую односвязную область D комплексной плоскости z, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга $|w|<1$ комплексной плоскости w, и притом бесконечно многими различными способами. Из Р. т. следует возможность конформного отображения данной односвязной области D плоскости z на заданную односвязную область $f(D)$ плоскости w, если граница каждой из этих областей состоит более чем из одной точки. Установлена Б. Риманом (1851).

2) Теорема об условно сходящихся *рядах*. Доказана Б. Риманом (1854).

РИ́МАНОВА ГЕОМЕ́ТРИЯ — многомерное обобщение геометрии на поверхности, представляющее собой теорию римановых пространств, т. е. таких пространств, где в малых областях приближённо имеет место евклидова геометрия (с точностью до малых высшего порядка сравнительно с размерами области). Р. г. получила своё название по имени Б. Римана, к-рый заложил её основы в 1854.

Понятие о римановой геометрии. Простейший пример риманова пространства представляет любая гладкая поверхность. Действительно, в достаточно малой окрестности любой точки она совпадает (с точностью до величин высшего порядка малости) с касательной плоскостью в этой точке; поэтому в такой окрестности соотношения длин на поверхности будут такими же, как на плоскости (конечно, с точностью до малых величин высшего порядка). Таким образом, в малых областях поверхности имеет место (с

точностью до малых величин высшего порядка) евклидова геометрия.

Напр., при измерениях на участках земной поверхности, малых в сравнении с размерами земного шара, можно с успехом применять обычную планиметрию. Однако результаты измерений на больших участках обнаруживают существенное отклонение от законов планиметрии.

Таким образом, поверхность, рассматриваемая с точки зрения измерений, проводимых на ней, оказывается двумерным пространством, геометрия к-рого (т. н. внутренняя геометрия поверхности), будучи евклидовой в бесконечно малом, в целом не является евклидовой; к тому же, как правило, такое пространство неоднородно по своим геометрич. свойствам. Внутренняя геометрия поверхности есть не что иное, как Р. г. в случае двух измерений, а поверхность, рассматриваемая с точки зрения её внутренней геометрии, есть двумерное риманово пространство.

Перенесение этих понятий на многомерные пространства приводит к общей Р. г. Именно, рассматривается абстрактное пространство n измерений, в к-ром задаётся закон измерения расстояний, совпадающий вблизи каждой точки с обычным евклидовым с точностью до бесконечно малых высшего порядка.

В основе Р. г. лежат три идеи. Первая идея — признание того, что вообще возможна геометрия, отличная от евклидовой, была впервые развита Н. И. Лобачевским. Вторая — это идущее от К. Гаусса понятие внутренней геометрии поверхностей и её аналитич. аппарат в виде квадратичной формы, определяющий линейный элемент поверхности. Третья идея — это понятие об n-мерном пространстве, выдвинутое и разработанное в простейших случаях в 1-й пол. 19 в. рядом геометров. Б. Риман, соединив и обобщив эти идеи, ввёл, во-первых, общее понятие о пространстве как о непрерывной совокупности любого рода однотипных объектов, к-рые служат точками этого пространства. Во-вторых, Б. Риман перенёс на эти абстрактные пространства представление об измерении длин бесконечно малыми шагами, т. е. дал общее понятие о метрике, определяемой формулой

$$ds = f(x^1, \ldots, x^n; dx^1, \ldots, dx^n).$$

Б. Риман специально исследовал метрику, задаваемую формулой (2) (см. ниже), чем и положил начало Р. г.; кроме того, он наметил возможные связи Р. г. со свойствами реального пространства. Таково коротко содержание его лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», прочитанной в 1854 и опубликованной лишь после его смерти, в 1868. Помимо этого Б. Риман в другой работе дал приложение аналитич. аппарата своей теории к задаче о распространении тепла в анизотропном теле. Эта работа также была издана лишь после его смерти, в 1869. Следует отметить, что Р. г. возникла и развивалась в работах Б. Римана в связи с физикой. После опубликования работ Б. Римана его идеи привлекли внимание ряда математиков, к-рые развивали дальше аналитич. аппарат Р. г. и устанавливали в ней новые теоремы геометрич. характера. Были даны также применения Р. г., напр., в механике. Важным шагом было создание Г. Риччи-Курбастро и Т. Леви-Чивита на рубеже 20 в. *тензорного исчисления*, к-рое оказалось наиболее подходящим аналитич. аппаратом для разработки Р. г. Решающее же значение имело применение Р. г. в создании общей теории относительности, к-рое было триумфом не только абстрактной геометрии и её аналитич. аппарата, но и идей о связи геометрии и физики, выдвинутых Н. И. Лобачевским и Б. Риманом. Это привело к бурному развитию Р. г. и её разнообразных обобщений. В настоящее время Р. г. вместе с её обобщениями представляет обширную область геометрии, к-рая продолжает успешно развиваться в разных направлениях.

Определение риманова пространства. К строгому определению риманова пространства можно подойти следующим образом. Положение точки пространства n измерений определяется n координатами $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Евклидово n-мерное пространство характеризуется тем, что в нём определено расстояние между любыми двумя точками X, Y, причём в надлежаще выбранных координатах оно выражается формулой

$$s(X, Y) = \sqrt{(\Delta x^1)^2 + \ldots + (\Delta x^n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x^i)^2},$$

где Δx^i — разности координат точек X, Y. Соответственно риманово пространство характеризуется тем, что в нём в окрестности каждой точки A могут быть введены координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ так, что расстояние между точками X, Y, близкими к A, выражается формулой

$$s(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x^i)^2 + \varepsilon}, \qquad (1)$$

где ε таково, что $\frac{\varepsilon}{s(X, Y)} \to 0$, когда точки X, Y приближаются к A. Отсюда следует, что в произвольных координатах расстояние между близкими точками (x^i) и $(x^i + dx^i)$, или, что то же самое, дифференциал длины дуги кривой, задаётся формулой

$$ds = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i\, dx^j}, \qquad (2)$$

где коэффициенты $g_{ij} = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ суть функции координат (в специальных координатах $ds = \sqrt{\sum_i (dx^i)^2}$, а при переходе к любым координатам сумма $\sum_i (dx^i)^2$ превращается в общего вида положительную квадратичную форму). Обратно, пусть в каждой точке n-мерного пространства R задана положительная квадратичная форма

$$\sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i\, dx^j. \qquad (3)$$

Если определить длину кривой как интеграл от

$$\sqrt{\sum_{i,k} g_{ik}\, dx^i\, dx^k}$$

вдоль этой кривой и расстояние между точками X, Y как минимум (точную нижнюю границу) длин кривых, соединяющих эти точки, то пространство окажется римановым пространством в смысле данного выше определения. Говорят, что форма (3) задаёт м е т р и к у (закон измерения расстояний) риманова пространства; выражение (2) называют л и н е й н ы м э л е м е н т о м ds пространства. Определение длины как интеграла от ds соответствует как бы измерению длин «бесконечно малым» масштабом (как это отметил ещё Б. Риман). Таким образом, риманово пространство можно аналитически определить как такое, в к-ром в каждой точке задана квадратичная форма (3). Возможность преобразования координат обусловливает то, что одно и то же риманово пространство в разных координатах имеет разные выражения этой метрич. формы, однако её величина (вследствие своего геометрич. смысла как квадрата элемента длины дуги) при преобразовании координат от x^i к $\tilde{x}^i$ должна оставаться неизменной:

$$\sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i\, dx^j = \sum_{i,j} \tilde{g}_{ij}\, d\tilde{x}^i\, d\tilde{x}^j.$$

Так как задание самой формы равносильно заданию коэффициентов g_{ij} с указанием этого закона их преобразования, то риманово пространство можно ещё определить как поле дважды ковариантного симметричного ($g_{ij} = g_{ji}$) тензора g_{ij}; его наз. м е т р и ч е с к и м т е н з о р о м. Если при этом допустить, что форма (3) может принимать и отрицательные значения, то получают обобщение Р. г., применяемое в общей теории относительности.

Простейший случай риманова пространства представляет евклидово пространство; к нему примыкают два других типа римановых пространств, в к-рых возможно движение фигур с такой же свободой, как в евклидовом пространстве; при этом под движением понимается преобразование, не меняющее расстояний между точками. Геометрии этих

пространств — это *Лобачевского геометрия* и *Римана геометрия* (не смешивать с общей римановой геометрией; см. *Неевклидовы геометрии*). Таким образом, эти неевклидовы геометрии суть частные случаи Р. г., отвечающие вместе с евклидовой геометрией случаю наибольшей возможной однородности риманова пространства.

Понятия и факты римановой геометрии. 1) Касательное евклидово пространство. По самому определению Р. г., метрика риманова пространства в окрестности каждой точки совпадает (с точностью до бесконечно малых выше 1-го порядка) с евклидовой метрикой. Это позволяет сопоставить с каждой точкой A данного риманова пространства R т. н. касательное евклидово пространство — евклидово пространство E_A, в к-рое отображается какая-то окрестность U точки A так, что относительное искажение расстояний стремится к нулю при приближении к точке A. Аналитически это сводится к следующему: вблизи нек-рой точки A_0 пространства E_A вводятся координаты так, что в них квадрат линейного элемента ds_0^2 евклидова пространства E_A выражается в точке A_0 такой же формой $\sum_{i,j} g_{ij}(A)dx^i dx^j$, какой выражается квадрат линейного элемента риманова пространства R в точке A. Значение понятия касательного евклидова пространства состоит в том, что, поскольку можно пренебречь малыми выше первого порядка, окрестность точки в римановом пространстве можно заменять областью касательного пространства.

2) Длина дуги s кривой $x^i=x^i(t)$ $(i=1, \ldots, n, t_1\leqslant t\leqslant t_2)$ в римановом пространстве R определяется как интеграл

$$S=\int ds=\int \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}\,dx^i\,dx^j}=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt$$

вдоль этой кривой. Если любые две точки пространства R соединимы кривой, то R становится метрич. пространством: расстояние $\rho(X, Y)$ между двумя точками определяется как точная нижняя грань длин кривых, соединяющих эти точки, и наз. внутренней метрикой риманова пространства R.

3) Угол между двумя исходящими из одной точки A кривыми определяется как угол между касательными векторами к кривым в точке A.

4) Объём V n-мерной области G риманова пространства определяется по формуле

$$V=\int\ldots\int_G \sqrt{g}\,dx^1\ldots dx^n,$$

где

$$g=\begin{vmatrix} g_{11}\ldots g_{1n}\\ \ldots\ldots\\ g_{n1}\ldots g_{nn}\end{vmatrix}.$$

5) Геодезические. Линии, к-рые на достаточно малых участках являются кратчайшими из всех кривых с теми же концами, наз. геодезическими, они играют роль прямых в римановом пространстве R. По определению, они являются экстремалями функционала

$$T=\int \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}\,dx^i\,dx^j}$$

и удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0,$$

где Γ^i_{jk} — т. н. символы Кристоффеля, выражающиеся через компоненты метрич. тензора g_{ij} и их первые производные. Через каждую точку риманова пространства в любом направлении проходит геодезическая, и притом единственная.

6) Подпространства. m-мерное подмногообразие (поверхность) риманова пространства задаётся параметрич. уравнениями $x^i=x^i(u^1, \ldots, u^m)$, где $i=1, \ldots, n$; предполагается, что матрица $\left\|\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right\|$ имеет ранг m. Длины кривых на таком подмногообразии выражаются посредством линейного элемента

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^m \gamma_{ij}\,du^i\,du^j,$$

ввиду чего каждое такое подмногообразие можно рассматривать как m-мерное риманово пространство (оно наз. m-мерным подпространством исходного риманова пространства). Этим, в частности, решается вопрос о вычислении объёмов (площадей) m-мерных областей риманова пространства.

7) Основная теорема римановой геометрии. По определению, всякое риманово пространство в бесконечно малом совпадает с евклидовым с точностью до малых выше 1-го порядка (относительно дифференциалов координат). Однако оказывается, что между римановым пространством R и касательным к нему евклидовым пространством в окрестности U_A пек-рой точки A можно установить такое соответствие, при к-ром оба пространства будут совпадать с точностью до малых выше 2-го порядка. Для этого проводят из точки A геодезические во всех направлениях и каждой из них в касательном пространстве E_A сопоставляют луч соответствующего направления, а затем устанавливают такое соответствие этих лучей и геодезических, при к-ром длины дуг геодезических и соответствующих им лучей равны. В достаточно малой окрестности точки A такое соответствие будет взаимно однозначным; оно и является искомым. А именно, если ввести в касательном пространстве декартовы координаты $x^1, \ldots, x^n$ и приписать их значения соответствующим точкам окрестности U_A, то между линейными элементами ds риманова и ds_0 евклидова пространств будет такая связь:

$$ds^2=ds_0^2+\frac{1}{3}\sum_{m,l,k,i} R_{mlki}\left(x^m-x^m_A\right)\left(x^k-x^k_A\right)dx^l\,dx^i+$$
$$+\sum_{m,l,k,i}\varepsilon_{mlki}\left(x^m-x^m_A\right)\left(x^k-x^k_A\right)dx^l\,dx^i,$$

где $\varepsilon_{mlki}\to 0$ при $x^i\to x^i_A$, $i=1, \ldots, n$, откуда следует, что разность $ds-ds_0$ имеет порядок не ниже чем $\sum_i (x^i-x^i_A)^2 ds_0$. Евклидово пространство, поставленное в такое соответствие с римановым, наз. соприкасающимся (в отличие от обычного касательного пространства). Добиться более высокого порядка совпадения за счёт специального выбора соответствия между римановым и евклидовым пространствами в общем случае уже невозможно. Поэтому коэффициенты R_{mlki} характеризуют отличие риманова пространства от евклидова; они являются компонентами т. н. тензора кривизны (или тензора Римана — Кристоффеля), определяемого по формуле

$$R_{mlki}=\sum_s g_{is}\left(\frac{\partial\Gamma^s_{km}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^s_{kl}}{\partial x^m}+\sum_p\left(\Gamma^s_{lp}\Gamma^p_{km}-\Gamma^s_{mp}\Gamma^p_{kl}\right)\right)$$

лишь через g_{ik} и их производные до 2-го порядка.

Тождественное обращение в нуль тензора кривизны необходимо и достаточно для того, чтобы пространство в окрестности каждой точки совпадало с евклидовым (в целом оно может отличаться от него своим строением, подобно тому как боковая поверхность цилиндра отличается от плоскости).

8) Параллельное перенесение. Для всякой гладкой кривой L риманова пространства можно указать отображение её окрестности U_L в евклидово пространство E_L, при к-ром E_L оказывается соприкасающимся пространством во всех точках кривой L. Это позволяет определить понятие параллельного перенесения вектора (и любого тензора) вдоль кривой, а именно: вектор (тензор) параллельно переносится вдоль кривой L, если параллельно переносится соответствующий вектор (тензор) в

евклидовом пространстве E_L, соприкасающемся с римановым вдоль этой кривой. Аналитически параллельное перенесение вектора α^i вдоль кривой $x^i=x^i(t)$ определяется дифференциальным уравнением

$$d\alpha^i+\sum_{k,\,l}\Gamma^i_{kl}\,dx^l\alpha^k=0.$$

Если $\alpha^i=\frac{dx^i}{ds}$, то получается уравнение геодезических; таким образом, геодезические можно определить как кривые, вдоль к-рых касательный к ним вектор переносится параллельно, что углубляет их сходство с прямыми. Результат параллельного перенесения вектора из точки A в точку B зависит, как правило, от кривой AB, вдоль к-рой происходит перенесение,— в этом отсутствии «абсолютного параллелизма» наглядно проявляется отличие риманова пространства от евклидова.

9) Риманова кривизна. Пусть M — точка риманова пространства, F — двумерная поверхность $x^i=x^i(u,\,v)$, проходящая через M, L — простой замкнутый контур на F, проходящий через M, σ — площадь участка поверхности, ограниченного контуром L. Пусть произвольный вектор a^i, касательный к поверхности F (т. е. линейно выражающийся через векторы $\frac{\partial x^i}{\partial u}$, $\frac{\partial x^i}{\partial v}$), перенесён параллельно по L. Тогда составляющая перенесённого вектора, касательная к F, окажется повёрнутой по отношению к a^i на угол φ (положительное направление отсчёта углов должно совпадать с направлением обхода L). При стягивании L в точку M существует предел

$$K=\lim\frac{\varphi}{\sigma},$$

наз. кривизной риманова пространства (римановой кривизной) в данной точке в направлении данной двумерной поверхности; K зависит не от поверхности, а лишь от её направления в точке M, т. е. от направления двумерной плоскости касательного евклидова пространства, содержащей векторы $\frac{\partial x^i}{\partial u}$, $\frac{\partial x^i}{\partial v}$.

Римапова кривизна K связапа с тензором кривизны формулой

$$K=\sum_{m,l,k,j}R_{mikj}x^{ml}x^{kj},$$

где

$$x^{ml}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^m}{\partial u}\frac{\partial x^l}{\partial v}-\frac{\partial x^l}{\partial u}\frac{\partial x^m}{\partial v}\right),$$

причём параметры u, v выбраны так, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\frac{\partial x^i}{\partial u}$, $\frac{\partial x^i}{\partial v}$, равна 1. В двумерном случае K совпадает с гауссовой кривизной.

Если в каждой точке риманова пространства кривизна не зависит от направления двумерной поверхности, то она не меняется и от точки к точке, т. е. пространство имеет постоянную кривизну.

Приложения и обобщения римановой геометрии. 1) Поскольку Р. г. определяется заданием дважды ковариантного симметричного тензора, постольку всякую физич. задачу, сводящуюся к изучению такого тензорного поля, можно формулировать как задачу Р. г. В частности, к тензорным полям такого типа относятся различные физич. величины, характеризующие упругие, оптические, термодинамические, диэлектрические, пьезомагнитные и др. свойства анизотропных тел. Так, задача о теплопроводности анизотропного тела, решённая ещё Б. Риманом (1861), явилась первым приложением Р. г.

2) Развитие Р. г. в связи с общей теорией относительности и механикой сплошных сред породило различные обобщения её предмета, главнейшими из к-рых являются т. н. псевдоримановы пространства. Таково, напр., согласно теории тяготения, многообразие событий (многообразие пространства-времени) — четырёхмерное пространство с заданной на нём знаконеопределённой невырожденной квадратичной формой

$$d\sigma^2=\sum_{i,j}g_{i,j}\,dx^i\,dx^j$$

(коэффициенты такой «метрики», допускающей мнимые расстояния, как раз и характеризуют поле тяготения, играя роль потенциальных функций). Эта форма в каждой точке пространства событий может быть приведена к виду

$$d\sigma^2=dx^2+dy^2+dz^2-dt^2,$$

где x, y, z — пространственные координаты, t — время. Физически такие (т. н. локально галилеевы) системы отсчёта являются свободно падающими в поле тяготения. Однако ввести такую систему на всём многообразии невозможно (поскольку наличие поля тяготения математически выражается в кривизне псевдориманова пространства).

Другой путь обобщения Р. г. связан с рассмотрением более общих законов определения расстояний, задаваемых в виде линейного элемента ds, и более общих законов параллельного перенесения, а также с отказом от требований регулярности.

● Риман Б., Соч., пер. с нем., М.— Л., 1948; Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; Эйзенхарт Л. П., Риманова геометрия, пер. с англ., М., 1948; Схоутен Я. А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965; Громол Д., Клингенберг В., Мейер В., Риманова геометрия в целом, пер. с нем., М., 1971.

А. Д. Александров, Ю. Ф. Борисов.

РИМАНОВА КРИВИЗНА — кривизна риманова пространства. См. *Римапова геометрия.*

РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ — одномерное комплексное аналитическое многообразие. Каждой аналитической функции $f(z)$ комплексного переменного z соответствует Р. п. этой функции, на к-рой данная полная аналитич. функция, вообще говоря, многозначная, может рассматриваться как однозначная аналитич. функция. Р. п. может рассматриваться как ориентируемое вещественное двумерное многообразие. В частности, всякая компактная Р. п. с топологич. точки зрения является замкнутой поверхностью. Обратно, на любой замкнутой поверхности можно (не единственным образом) ввести локальные комплексные координаты, позволяющие рассматривать её как Р. п.

РИМАНОВО ПРОСТРАНСТВО — пространство, в малых областях которого имеет место (с точностью до малых высшего порядка) евклидова геометрия, хотя в целом это пространство может не быть евклидовым. Р. п. названы по имени Б. Римана, пametившего в 1854 основы теории таких пространств (см. *Римапова геометрия*). Простейшими Р. п. являются евклидово пространство и примыкающие к нему два других пространства постоянной кривизны, в к-рых имеет место *Лобачевского геометрия* и *Римана геометрия* (не смешивать последнюю с общими римановыми геометриями). См. также *Дифференциальная геометрия.*

РИМСКИЕ ЦИФРЫ — традиционное название знаковой системы для обозначения чисел, основанной на употреблении особых символов для десятичных разрядов:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Возникла ок. 500 до п. э. у этрусков и использовалась в Древнем Риме; иногда употребляется и в настоящее время. В этой системе натуральные числа записываются при помощи повторения этих цифр. При этом если большая цифра стоит перед меньшей, то они складываются (принцип сложения), если же меньшая — перед большей, то меньшая вычитается из большей (принцип вычитания). Последнее правило применяется только во избежание четырёхкратного повторения одной и той же цифры. Напр., I, X, C ставятся соответственно перед X, C, M для обозначения 9, 90, 900 или перед V, L, D для обозначения 4, 40, 400. Напр., VI=5+1=6, IV=5−1=4 (вместо IIII), XIX=10+10−1=19 (вместо XVIIII), XL=50−10=40 (вместо XXXX), XXXIII=10+10+10+1+1+1=33 и т. д. Выполнение арифметич. действий над многозначными числами в этой записи весьма неудобно.

РИНДА ПАПИРУС — древнеегипетская математическая рукопись; названа по имени её владельца — египтолога Г. Ринда. См. *Папирусы* математические.

РИ́СКА ФУ́НКЦИЯ — см. *Статистических решений теория*.

РИ́ССА ТЕОРЕ́МА: всякий линейный функционал, заданный в пространстве $C[0, 1]$ непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций, выражается с помощью интеграла Стилтьеса по формуле

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\,dg(t),$$

где $g(t)$ — функция с ограниченной вариацией, определяемая по функционалу $f(x)$. Установлена Ф. Риссом (1909).

РИ́ССА — ФИ́ШЕРА ТЕОРЕ́МА — теорема, устанавливающая связь между пространством числовых последовательностей l^2 и пространством функций интегрируемых с квадратом $L^2[a, b]$. Доказана независимо Ф. Риссом (1907) и Э. Фишером (1907). См. *Метрическая теория функций*.

РИ́ТЦА МЕ́ТОД — метод решения задач вариационного исчисления и вообще бесконечномерных вариационных задач, основанный на минимизации функционала на конечномерных подпространствах или многообразиях.

Пусть поставлена задача нахождения точки минимума ограниченного снизу функционала I: $U\to\mathbb{R}$ на сепарабельном банаховом пространстве U. Задаётся нек-рая (т. н. координатная) система элементов $\{\varphi_k\}_1^\infty\subset U$, полная в U, и n-е ритцовское приближение u_n определяется как точка минимума функционала I на линейной оболочке первых n координатных элементов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Вместо координатной системы можно задать последовательность подпространств $U_n\subset U$, не обязательно вложенных друг в друга.

Уравнение $Au=f$ с самосопряжённым положительно определённым оператором A в гильбертовом пространстве H равносильно задаче на минимум функционала

$$\Phi(u)=(Au, u)-(u, f)-(f, u).$$

Пусть H_A — пополнение области определения оператора A по норме, порождённой скалярным произведением $(u, v)_A=(Au, v)$, и пусть $H_n\subset H_A$, $n=1, 2, \ldots$, — конечномерные подпространства. Минимизируя Ф в H_n, получают ритцовское приближение $u_n=P_nu_0$ к решению u_0 уравнения $Au=f$; здесь P_n — ортопроектор в H_A, проектирующий на H_n. Если $\dim H_n=n$ и $\varphi_1^{(n)}, \ldots, \varphi_n^{(n)}$ — базис H_n, то коэффициенты приближения

$$u_n-\sum_{j=1}^n c_j^{(n)}\varphi_j^{(n)}$$

определяются из системы линейных алгебраич. уравнений

$$\sum_{j=1}^n (\varphi_j^{(n)}, \varphi_i^{(n)})_A c_j^{(n)}=(f, \varphi_i^{(n)}),\ i=1, \ldots, n.$$

Р. м. можно использовать и для приближения собственных значений и собственных элементов оператора A, используя их вариационную характеризацию.

Р. м. был предложен В. Ритцем (1908).

РИ́ЧАРДСО́НА ЭКСТРАПОЛЯ́ЦИЯ — метод ускорения сходимости решений разностных задач. Основная идея состоит в исследовании решения $u_h(x)$ сходящейся разностной задачи при фиксированном x как функции параметра h разностной сетки, стремящегося к нулю, в подборе подходящей интерполяционной функции $\chi(h)$, построенной по нескольким значениям решения $u_h(x)$ при различных h, и в вычислении величины $\chi(0)$, являющейся приближённым значением искомого решения $u(x)$ — предела последовательности $u_h(x)$ при $h\to 0$. Метод носит имя Л. Ричардсона (1910), впервые использовавшего его как средство улучшения точности решений разностных задач.

Теоретич. основой применимости метода служит существование разложения вида

$$u_h(x)=u(x)+\sum_{i=1}^{m-1} h^{\beta_i}v_i(x)+h^B\eta_h(x),$$

где $B>\beta_{m-1}>\ldots>\beta_1>0$ и функции v_i не зависят от h, а $\eta_h(x)$ — значения сеточной функции, ограниченные при $h\to 0$.

Чаще всего функция $\chi(h)$ ищется в виде интерполяционного многочлена от h и используется линейная экстраполяция: с помощью m значений $u_h(x)$ в одной точке x для различных параметров $h=h_1, \ldots, h_m$ вычисляется экстраполированное значение $u_H(x)$ по правилу

$$u_H(x)=\sum_{k=1}^m \gamma_k u_{h_k}(x),$$

где веса γ_k определяются из системы уравнений:

$$\sum_{k=1}^m \gamma_k=1;\ \sum_{k=1}^m \gamma_k h_k^{\beta_i}=0,\ i=1, \ldots, m-1.$$

Если среди h_k нет слишком близких значений, то

$$|u_H(x)-u(x)|=O\left(\hbar^B\right),\ \hbar=\max_{1\leqslant k\leqslant m} h_k,$$

т. е. величина $u_H(x)$ сходится к $u(x)$ при $\hbar\to 0$ с порядком B, что больше β_1 — порядка сходимости $u_h(x)$.

Линейная экстраполяция не является единственно возможной. Напр., при рациональной экстраполяции в качестве $\chi(h)$ используются функции вида $\varphi(h^p)/\psi(h^p)$, где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — многочлены от t степени $[(m-1)/2]$ и $[m/2]$ соответственно.

Р. э. удобна для реализации на ЭВМ, поскольку для достижения высокой точности использует многократное решение простых разностных задач (иногда с небольшими модификациями) невысокого порядка аппроксимации, для к-рых разработаны стандартные приёмы решения.

● Марчук Г. И., Шайдуров В. В., Повышение точности решений разностных схем, М., 1979; Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.

РИША́РА АНТИНО́МИЯ — открытая Ж. Ришаром (1905) *антиномия*.

РОБА́СТНОСТЬ (от англ. robust — крепкий, устойчивый)— см. *Статистическая оценка*.

РОД замкнутой поверхности — топологический инвариант замкнутой поверхности, равный числу её ручек (см. *Двумерное многообразие*). Напр., сфера имеет род 0, тор — род 1.

О роде алгебраич. кривой см. в ст. *Алгебраическая кривая*.

РОДРИ́ГА ФО́РМУЛЫ — выражения для производных единичного вектора нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности в случае, когда параметрической сетью на поверхности является сеть линий кривизны. Если $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки M поверхности, R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны в точке M, то Р. ф. могут быть записаны следующим образом:

$$\boldsymbol{n}_u=-\frac{1}{R_1}\boldsymbol{r}_u,\quad \boldsymbol{n}_v=-\frac{1}{R_2}\boldsymbol{r}_v$$

(u и v — параметры вдоль линий кривизны). Эти формулы установлены О. Родригом (1816).

РО́ДСТВЕННОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — см. *Проекция*.

РО́ЗЫ — плоские кривые, уравнения которых в полярных координатах имеют вид

$$\rho=a\sin k\varphi,$$

где a и k — постоянные. Если $k=m/n$ — число рациональное, то Р.— алгебраич. кривая чётного порядка. Порядок

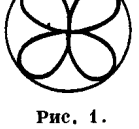


Рис. 1.

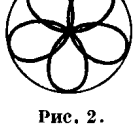


Рис. 2.

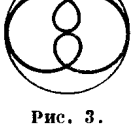


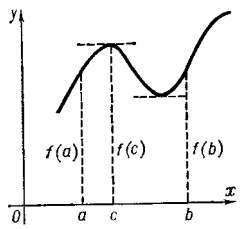
Рис. 3.

этой кривой равен $m+n$, если m и n — нечётные числа, и равен $2(m+n)$, если одно из чисел m или n — нечётное. Вся кривая расположена внутри круга радиуса a, состоит из конгруэнтных лепестков (рис.). Если k — целое, то Р. состоит из k лепестков при k нечётном и из $2k$ лепестков при k чётном. Если $k=m/n$ и m, n — взаимно простые, то

Р. состоит из m лепестков, когда m и n нечётные, и из $2m$ лепестков, если одно из чисел m или n является чётным.

При иррациональном k лепестков бесконечно много, Р. являются гипоциклоидами, если $k>1$, и эпициклоидами, если $k<1$.

РО́ЛЛЯ ТЕОРЕ́МА: если функция $f(x)$ непрерывна на торезке $a\leqslant x\leqslant b$, имеет в каждой внутренней точке определённую производную, а на концах принимает равные значения $f(a)=f(b)$, то её производная $f'(x)$ по меньшей мере один раз обратится в нуль в интервале (a, b), т. е. существует такое c, $a<c<b$, что $f'(c)=0$. Следствие: между двумя последовательными корнями функции имеется хотя бы один корень её производной. Геометрич. смысл Р. т. состоит в том, что на графике (рис.) функции f, удовлетворяющей условиям Р. т., существует такая точка $(c, f(c))$, $a<c<b$, что в ней касательная к графику параллельна оси x. Впервые теорема была получена для алгебраич. многочленов М. Роллем (1690).



РОМБ (греч. ῥόμβος) — плоский четырёхугольник с равными сторонами (рис.). Р. можно рассматривать как частный случай параллелограмма, у к-рого или две смежные стороны равны, или диагонали взаимно перпендикулярны, или диагональ делит угол пополам. Р. с прямыми углами наз. квадратом.

РО́ТОР [от лат. roto — вращаю (сь)] — то же, что *вихрь* векторного поля.

РУБЕ́Ж с е ч е н и я — см. *Дедекиндово сечение*.

РУЛЕ́ТТА (от франц. roulette, букв.— колёсико), к р и в а я к а ч е н и я, — название плоской кривой, рассматриваемой как траектория точки, жёстко связанной с некрой производящей кривой, к-рая катится без скольжения по другой неподвижной (базисной) кривой. Если окружность катится по прямой, Р.— *циклоида* или *трохоида*; если окружность катится по окружности — *циклоидальная кривая*; если гипербола, эллипс или парабола катятся по прямой, Р.— т. н. к р и в ы е Ш т у р м а. Если парабола катится по такой же параболе, Р. её вершины — *Диоклеса циссоида*. Если катящаяся линия — прямая, то Р.— эвольвента базисной кривой. Р. не образуют особого класса кривых: каждая плоская кривая может рассматриваться как Р. многими способами, напр. всякая кривая может быть образована качением прямой по эволюте этой кривой.

РУ́НГЕ ТЕОРЕ́МА — теорема о *приближении функций* комплексного переменного, доказанная К. Рунге (1885).

РУ́НГЕ—КУ́ТТЫ МЕ́ТОД — одношаговый метод численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Основная идея Р.— К. м. была предложена К. Рунге (1885) применительно к уравнениям первого порядка

$$u'=f(t,\ u) \qquad (1)$$

и развита затем В. Куттой (1901) и другими. Первоначально эта идея использовалась для построения явных схем Р.— К. м. в виде

$$y_{j+1}=y_j+\tau\sum_{i=1}^{q}A_ik_i, \qquad (2)$$

где

$$y_{j+\alpha}\cong u(t_j+\alpha\tau),\ k_1=f(t_j,\ y_j),$$

$$k_n=f\left(t_j+\alpha_n\tau,\ y_j+\tau\sum_{m=1}^{n-1}\beta_{nm}k_m\right),\ n=2,\ 3,\ \ldots,\ q,$$

при этом значения параметров A_i, α_n, β_{nm}, $i=1, 2, \ldots, q$; $n=2, 3, \ldots, q$; $m=1, 2, \ldots, n-1$, определялись из требования, чтобы погрешность равенства (2) на точном решении уравнения (1) имела возможно высокий порядок малости в сравнении с шагом τ при произвольных $f(t, u)$ из данного класса.

Наиболее известным среди явных Р.— К. м. является метод 4-го порядка точности:

$$y_{j+1}=y_j+\frac{1}{6}\tau(k_1+2k_2+2k_3+k_4),$$

$$k_1=f(t_j,\ y_j),\ k_2=f\left(t_j+\frac{1}{2}\tau,\ y_j+\frac{1}{2}\tau k_1\right),$$

$$k_3=f\left(t_j+\frac{1}{2}\tau,\ y_j+\frac{1}{2}\tau k_2\right),$$

$$k_4=f(t_j+\tau,\ y_j+\tau k_3).$$

Широкое распространение получили Р.—К. м. с неявным заданием k_i, $i=1, 2, \ldots, q$, в (2). Если, напр., положить

$$k_i=f\left(t_j+\alpha_i\tau,\ y_j+\tau\sum_{m=1}^{q}\beta_{im}k_m\right),$$

то за счёт достигнутого так увеличения числа параметров можно построить (без изменения q) методы более высоких порядков точности. Кроме того, при таком расширении множества Р.— К. м. появляются методы, хорошо ориентированные на случай жёстких дифференциальных систем.

РЭЛЕ́Я РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ, распределение вероятностей случайной величины X, заданное плотностью вероятности

$$p(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

зависящей от параметра $\sigma>0$. Р. р. имеет положительную асимметрию, его мода находится в точке $x=\sigma$. Все моменты Р. р. конечны, математич. ожидание и дисперсия равны соответственно $EX=\sqrt{\pi/2}\sigma$ и $DX=(4-\pi)\sigma^2/2$. При $\sigma=1$ Р. р. совпадает с распределением арифметич. корня из случайной величины, имеющей распределение хи-квадрат с двумя степенями свободы. В любом случае Р. р. может быть интерпретировано как распределение длины вектора, координаты к-рого в декартовой системе координат на плоскости независимы и имеют нормальное распределение с параметрами 0 и σ^2 (см. *Максвелла распределение*). Р. р. находит основное применение в теории стрельбы и статистич. теории связи. Р. р. введено Рэлеем (1880) в связи с задачей сложения гармонич. колебаний.

«РЮКЗА́К», з а д а ч а о р ю к з а к е,— см. *Исследование операций*.

РЯД — бесконечная сумма вида

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

или, короче,

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n. \qquad (1)$$

Слагаемые $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ наз. ч л е н а м и Р., суммы конечного числа членов Р.

$$s_n=u_1+\ldots+u_n,\ n=1,\ 2,\ \ldots,$$

— ч а с т и ч н ы м и с у м м а м и Р. порядка n.

Р. являются важнейшим средством изображения, изучения и приближённого вычисления чисел и функций. Простейшие примеры Р. встречаются уже в элементарной математике — это бесконечные десятичные дроби, напр.

$$0{,}333\ldots=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\ldots,$$

и сумма членов бесконечно убывающей геометрич. прогрессии

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots=\frac{1}{1-q},\ |q|<1. \qquad (2)$$

Многие числа могут быть записаны в виде Р., с помощью к-рых их приближённое значение вычисляется с нужной точностью. Для числа π, напр., имеется Р.

$$\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{2^3\,3}+\frac{3}{2^7\,5}+\frac{5}{2^{10}\,7}+\ldots \qquad (3)$$

или Р.

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots; \qquad (4)$$

для числа e, основания натуральных логарифмов,— Р.

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots; \quad (5)$$

для натурального логарифма ln 2 — Р.

$$\ln=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^3}+\ldots\right).$$

При численных расчётах Р. обычно заменяется конечной суммой s_n его первых n слагаемых. При этом важно иметь оценку погрешности такого приближения (оценку «скорости сходимости» Р.) и целесообразно использовать те Р., у к-рых эти погрешности достаточно быстро стремятся к нулю с ростом n. Напр., в случае Р. (4) оценка погрешности имеет вид $0<e-s_n<1/n!\cdot n$. Для приближённого вычисления числа π выгоднее использовать Р. (3), так как соответствующая погрешность стремится к нулю значительно «быстрее» в сравнении с Р. (4).

Различают Р. ч и с л о в ы е, членами к-рых являются постоянные числа [напр., все Р. (2)—(4)], и ф у н к ц и о н а л ь н ы е, членами к-рых являются функции, напр.,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

Если в функциональном Р. независимым переменным придаются определённые числовые значения, то такой Р. превращается в числовой. Напр., Р. (3) получается из функционального Р. для $2\arcsin x$ при $x=\frac{1}{2}$, Р. (4) — из Р. для $\operatorname{arctg} x$ при $x=1$, Р. (5) — из функционального Р.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

при $x=1$. Когда речь идёт о *сходимости* Р., то имеют в виду именно сходимость числового Р., заданного непосредственно или получающегося из функционального Р. при тех или иных значениях независимых переменных. Решение многих задач математики и её приложений значительно упрощается, если рассматриваемые функции представлять как Р., члены к-рых являются функциями простейшего вида. При выполнении нек-рых условий математич. операции над Р. (сложение, умножение, предельный переход, почленное дифференцирование и интегрирование) совершаются по тем же простым правилам, что и одноимённые операции над конечными суммами.

Числовые ряды. Формально Р. (1) можно определить как пару числовых (действительных или комплексных) последовательностей $\{u_n\}$ и $\{s_n\}$ таких, что $s_n=u_1+\ldots+u_n$, $n=1, 2, \ldots$ Первая последовательность наз. последовательностью членов Р., а вторая — последовательностью его частичных сумм [точнее, s_n наз. ч а с т и ч н о й с у м м о й n-го порядка Р. (1)]. Р. (1) наз. с х о д я щ и м с я, если сходится последовательность его частичных сумм $\{s_n\}$. В этом случае предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n=s$$

наз. с у м м о й Р. и пишется

$$s=\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Таким образом, обозначение (1) применяется как для самого Р., так и для его суммы (если он сходится). Если последовательность частичных сумм не имеет предела, то Р. называется р а с х о д я щ и м с я. Примером сходящегося Р. является Р. (2), расходящегося Р.

$$1-1+1-1+\ldots, \quad (6)$$

частичные суммы к-рого принимают всего два значения 0 и 1. Каждый Р. однозначно определяет последовательность его частичных сумм, и обратно: для любой последовательности $\{s_n\}$ имеется, и притом единственный, Р., для к-рого она является последовательностью его частичных сумм, причём члены u_n этого Р. определяются по формулам $u_1=s_1, \ldots, u_{n+1}=s_{n+1}-s_n$, $n=1, 2, \ldots$ В силу этого изучение Р. эквивалентно изучению последовательностей.

Р. $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ наз. о с т а т к о м п о р я д к а n Р. (1). Если Р. сходится, то каждый его остаток сходится, а если к.-л. остаток Р. сходится, то и сам Р. также сходится. Если остаток порядка n Р. (1) сходится и его сумма равна r_n, то $s=s_n+r_n$.

Если Р. (1) и Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (7)$$

сходятся, то сходится и Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n),$$

наз. с у м м о й р я д о в (1) и (7), причём его сумма равна сумме данных Р. Если Р. (1) сходится и λ — комплексное число, то Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda u_n,$$

наз. п р о и з в е д е н и е м Р. н а ч и с л о λ, также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda u_n=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

Условие сходимости Р., не использующее понятия его суммы, даёт к р и т е р и й К о ш и: для того чтобы Р. (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал такой номер n_ε, что при любом $n>n_\varepsilon$ и любом целом $p\geqslant 0$ выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}u_k\right|<\varepsilon.$$

Отсюда следует, что если Р. (1) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

Обратное неверно: n-й член гармонич. ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

стремится к нулю, однако этот Р. расходится.

Большую роль в теории Р. играют Р. с неотрицательными членами. Для того чтобы такой Р. сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху. Если же он расходится, то

$$\lim_{n\to\infty}s_n=+\infty,$$

поэтому в этом случае пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=+\infty.$$

Для Р. с неотрицательными членами имеется ряд признаков сходимости.

И н т е г р а л ь н ы й п р и з н а к с х о д и м о с т и: если функция $f(x)$ определена при всех $x\geqslant 1$, неотрицательна и убывает, то Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n) \quad (8)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_1^{\infty}f(x)\,dx.$$

С помощью этого признака легко устанавливается, что Р.

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots \quad (9)$$

сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\leqslant 1$.

П р и з н а к с р а в н е н и я: если для двух Р. (1) и (7) с неотрицательными членами существует такая постоянная $c>0$, что $0\leqslant u_n\leqslant cv_n$, то из сходимости Р. (7) следует сходимость Р. (1), а из расходимости Р. (1) — расходимость Р. (7). Обычно для сравнения берётся Р. (9), а в n-м члене заданного Р. выделяется главная часть вида A/n^α. Таким методом сразу получается, что Р. с n-м членом

$$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n^2}+\frac{\varepsilon_n}{n^2},$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$,

сходится, поскольку сходится Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Как следствие признака сравнения получается следующее правило: если

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}u_n=k,\ u_n\geqslant 0,$$

то при $\alpha>1$ и $0\leqslant k<+\infty$ Р. (1) сходится, а при $\alpha\leqslant 1$ и $0<k\leqslant+\infty$ Р. расходится. Так, напр., Р. с n-м членом $u_n=\sin(1/n^2)$ сходится, ибо

$$\lim_{n\to\infty} n^2\sin(1/n^2)=1,\ \alpha=2,$$

а Р. с $u_n=\operatorname{tg}(\pi/n)$ расходится, здесь

$$\lim_{n\to\infty} n\operatorname{tg}(\pi/n)=\pi,\ \alpha=1.$$

Часто оказываются полезными два следствия признака сравнения.

Признак Д'Аламбера: если существует

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}/u_n)=l,\ u_n>0,$$

то при $l<1$ Р. (1) сходится, а при $l>1$ — расходится.

Признак Коши: если существует

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,\ u_n\geqslant 0,$$

то при $l<1$ Р. (1) сходится, а при $l>1$ Р. расходится. При $l=1$, как в случае признака Д'Аламбера, так и в случае признака Коши существуют и сходящиеся и расходящиеся Р.

Важный класс Р. составляют абсолютно сходящиеся ряды: Р. (1) наз. абсолютно сходящимся, если сходится Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|.$$

Если Р. абсолютно сходится, то он и просто сходится. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^{3/2}$$

абсолютно сходится, а Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n$$

сходится, но не абсолютно. Сумма абсолютно сходящихся Р. и произведение абсолютно сходящегося Р. на число являются также абсолютно сходящимися Р. На абсолютно сходящиеся Р. наиболее полно переносятся свойства конечных сумм. Пусть

$$\sum_{m=1}^{\infty}u_m^* \qquad (10)$$

— Р., составленный из тех же членов, что и Р. (1), но взятых, вообще говоря, в другом порядке. Если Р. (1) сходится абсолютно, то Р. (10) также сходится и имеет ту же сумму, что и Р. (1). Если Р. (1) и Р. (7) абсолютно сходятся, то Р., полученный из всевозможных попарных произведений u_mv_n членов этих Р., расположенных в произвольном порядке, также абсолютно сходится, причём если сумма этого Р. равна s, а суммы Р. (1) и (7) равны соответственно s_1 и s_2, то $s=s_1s_2$, т. е. абсолютно сходящиеся Р. можно почленно перемножать, не заботясь о порядке членов. Признаки сходимости для Р. с неотрицательными членами применимы для установления абсолютной сходимости рядов.

Для Р., не абсолютно сходящихся (такие Р. называют также условно сходящимися), утверждение о независимости их суммы от порядка слагаемых неверно. Справедлива теорема Римана: посредством надлежащего изменения порядка членов данного не абсолютно сходящегося Р. можно получить Р., имеющий наперёд заданную сумму, или расходящийся Р. Примером условно сходящегося Р. может служить Р.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots=\ln 2=0{,}693\ldots$$

Если в этом Р. переставить члены так, чтобы за двумя положительными следовал один отрицательный:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots,$$

то его сумма увеличится в 1,5 раза. Существуют признаки сходимости, применимые к не абсолютно сходящимся Р. Напр., признак Лейбница: если

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0,\ u_n\geqslant u_{n+1}>0,$$

то знакочередующийся Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n \qquad (11)$$

сходится. Более общие признаки можно получить, напр., с помощью преобразования Абеля для Р., представленных в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n. \qquad (12)$$

Признак Абеля: если последовательность $\{a_n\}$ монотонна и ограничена, а Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

сходится, то Р. (12) также сходится.

Признак Дирихле — если последовательность $\{a_n\}$ монотонно стремится к нулю, а последовательность частичных сумм Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

ограничена, то Р. (12) сходится. Напр., по признаку Дирихле Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sin n\alpha)/n$$

сходится при всех действительных α.

Иногда рассматриваются Р. вида

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}u_n.$$

Такой Р. наз. сходящимся, если сходятся Р.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n \text{ и } \sum_{n=1}^{+\infty}u_{-n},$$

сумма этих Р. наз. суммой исходного Р.

Р. более сложной структуры являются кратные ряды, т. е. Р. вида

$$\sum_{n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_k=1}^{\infty}u_{n_1n_2\ldots n_k},$$

где $u_{n_1n_2\ldots n_k}$ — заданные числа (вообще говоря, комплексные), занумерованные k индексами $n_1, n_2, \ldots, n_k$, каждый из к-рых независимо от других пробегает натуральный ряд чисел. Простейшие из Р. этого типа — *двойные ряды* ($k=2$).

Для нек-рых числовых Р. удаётся получить простые формулы для величины или оценки их остатка, что весьма важно, напр., при оценке точности вычислений, производимых с помощью Р. Напр., для суммы геометрич. прогрессии (2)

$$r_n=\frac{q^{n+1}}{1-q},\ |q|<1,$$

для Р. (8) при сделанных предположениях

$$\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\,dx<r_n<\int_{n}^{+\infty}f(x)\,dx,$$

а для Р. (11)

$$|r_n|\leqslant u_{n+1}.$$

С помощью нек-рых специальных преобразований иногда удаётся «улучшить» сходимость сходящегося Р. В математике используются не только сходящиеся Р., но и расходящиеся. Для последних вводятся более общие понятия суммы Р. (см. *Суммирование*). Так, напр., расходящийся Р. (6) можно просуммировать определённым способом к $\frac{1}{2}$.

Функциональные ряды. Понятие Р. естественным образом обобщается на случай, когда членами Р. являются функции $u_n = u_n(x)$ (действительные, комплексные или, более общо, функции, значения к-рых принадлежат какому-то метрич. пространству), определённые на нек-ром множестве E. В этом случае ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in E, \tag{13}$$

наз. функциональным рядом. Если Р. (13) сходится в каждой точке множества E, то он наз. сходящимся на множестве E. (Множество E в этом случае наз. *областью сходимости*, см. *Интервал сходимости*, *Круг сходимости*.)

Пример. Р.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$$

сходится на всей комплексной плоскости.

Сумма сходящегося Р. непрерывных, напр. на нек-ром отрезке, функций не обязательно является непрерывной функцией. Условия, при к-рых на функциональные Р. переносятся свойства непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости конечных сумм функций, формулируются в терминах равномерной сходимости Р. Сходящиеся Р. (13) наз. равномерно сходящимися на множестве E, если во всех точках E отклонение частичных сумм Р.

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

при достаточно больших номерах n от суммы Р.

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

не превышает одной и той же сколь угодно малой величины, точнее, каково бы ни было наперёд заданное число $\varepsilon > 0$, существует такой номер n_ε, что

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

для всех номеров $n > n_\varepsilon$ и всех точек $x \in E$. Это условие равносильно тому, что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{E} |r_n(x)| = 0;$$

($r_n(x) = s(x) - s_n(x)$, $\sup\limits_{E} |r_n(x)|$ — верхняя грань $|r_n(x)|$ на E). Напр., Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$$

равномерно сходится на отрезке $[0, q]$ при $0 < q < 1$ и не сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Критерий Коши: для того чтобы Р. (13) равномерно сходился на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер n_ε, что для всех номеров $n > n_\varepsilon$, $p \geqslant 0$ и всех точек $x \in E$ выполнялось неравенство

$$|u_n(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Признак Вейерштрасса: если существует такой сходящийся числовой Р.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

что $|u_n(x)| \leqslant a_n$, $x \in E$, $n = 1, 2, \ldots$, то Р. (13) равномерно сходится на E.

Сумма равномерно сходящегося Р. непрерывных на нек-ром отрезке (или, более общо, на нек-ром топологич. пространстве) функций является непрерывной на этом отрезке (пространстве) функцией. Сумма равномерно сходящегося Р. интегрируемых на нек-ром множестве функций является интегрируемой на этом множестве функцией, и Р. можно почленно интегрировать. Если последовательность частичных сумм Р. интегрируемых функций сходится в среднем к нек-рой интегрируемой функции, то интеграл от этой функции равен сумме Р. из интегралов от членов Р. Интегрируемость в этих теоремах понимается в смысле Римана или Лебега. Для интегрируемых по Лебегу функций достаточным условием возможности почленного интегрирования Р. с почти всюду сходящейся последовательностью частичных сумм является равномерная оценка их абсолютных величин нек-рой интегрируемой по Лебегу функцией. Если члены сходящегося на нек-ром отрезке Р. (13) дифференцируемы на нём, и Р. из их производных сходится равномерно, то сумма Р. также дифференцируема на этом отрезке, и Р. можно почленно дифференцировать.

Понятие функционального Р. обобщается и на случай кратных Р. В различных разделах математики и её приложениях широко используются разложения функций в функциональные Р., прежде всего в *степенные ряды*, *тригонометрические ряды*, и, более общо, в Р. по специальным функциям нек-рых операторов, а также разложение в асимптотич. Р.

Метод разложения в Р. является эффективным методом изучения функций, вычисления и оценок интегралов, решения всевозможных уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных) и т. п. Мощным методом исследования является *гармонический анализ*, основанный на представлении периодич. функций и почти периодич. функций *Фурье рядами*. См. также *Тейлора ряд*, *Лорана ряд*, *Дирихле ряд*, *Асимптотическое разложение*.

Разложение функций в Р. может привести к Р., расходящимся в той области, где функция определена. Существуют общие методы, позволяющие преобразовывать нек-рые такие Р. в сходящиеся (см. *Суммирование*).

Исторический очерк. Простейшие случаи вычисления Р. с конечным числом членов (арифметич. и геометрич. прогрессий) встречаются в египетских папирусах и вавилонских клинописях, относящихся ко 2-му тыс. до н. э.; вавилоняне знали также правило суммирования $\sum_{k=1}^{n} k^2$. Древние греки обогатили учение о простейших Р. новыми предложениями и впервые рассмотрели Р. с бесконечным числом членов (именно убывающие геометрич. прогрессии). Архимед (3 в. до н. э.) применил суммирование геометрич. прогрессии со знаменателем 1/4 к вычислению площади сегмента параболы. В средние века учение о Р. получило незначительное развитие. Европейские учёные 14 в. просуммировали Р. вида $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ для отдельных значений x (при $0 < x < 1$). Особо следует отметить доказательство Н. Оремом (1350) расходимости гармонического ряда

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots,$$

вновь доказанную П. Менголи (1650) и братьями И. и Я. Бернулли в конце 17 в. В 17 в. разработка исчисления бесконечно малых потребовала специальных исследований о Р. Принципиальный шаг вперёд сделал И. Ньютон, в 1665—66 пришедший к идее представления функций степенными Р. и придававший разложениям в Р. огромное значение. Сравнивая степенные Р. с десятичными дробями, он, несколько позднее, писал: «...буквенные бесконечные ряды приносят ту пользу, что всякие сложные выражения... можно с их помощью привести к роду простых количеств... и таким образом с небольшой затратой сил удаётся преодолеть трудности, в другом виде представляющиеся почти неодолимыми» (Ньютон И., Математические работы, М.—Л., 1937, с. 25—26). Применяя нек-рые действия над Р. и открытое им в 1665 разложение функции $(1+x)^m$ для любого действительного m, И. Ньютон получил разложения $\ln(1+x)$, e^x, $\arcsin x$, $\sin x$, $\cos x$. Тогда же он открыл приём разложения неявных функций по дроб-

ным степеням аргумента (т. н. параллелограмм Ньютона). У И. Ньютона степенные Р. становятся важнейшим средством вычисления и выражения функций, а также интегрирования функций и обыкновенных дифференциальных уравнений. Р. для $\ln(1+x)$ был найден независимо и впервые опубликован в 1668 Н. Меркатором. Такое же применение, как у И. Ньютона, получили степенные Р. у Г. Лейбница, первым открытием к-рого в этой области были разложение $\operatorname{arctg} x$ и Р. для

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

(1673, опубликовано в 1682). Многие разложения функций в ряды получены также Дж. Грегори (1671). Заслуживает упоминания достаточный признак сходимости знакочередующегося Р., сообщённый Г. Лейбницем в одном письме (1714).

В 18 в. область применяемых в анализе Р. расширилась. В 1715 Б. Тейлор опубликовал общую формулу разложения функции в степенной Р. (ряд Тейлора), включая разложение в окрестности значения $x=0$. Впрочем, эти разложения были известны ранее И. Ньютону и Дж. Грегори, к-рые их не опубликовали. Огромное число работ по Р. принадлежит Л. Эйлеру: разложения различных функций в Р., вычисление сумм Р. вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}$ (1734, опубликовано в 1740) и др., применение Р. с комплексными членами (1748), определение в форме Р. новых типов функций, преобразование Р. в непрерывные дроби и бесконечные произведения и т. д. Существенно новым у Л. Эйлера было применение Р. к исследованию свойств представляемых ими функций и к теории чисел.

Наряду с разложениями функций в степенные Р. в 18 в. появляются новые важные типы разложений. В 1748 Л. Эйлер вводит тригонометрич. Р., вскоре получившие приложения в его работах по небесной механике и особенно в работах Д. Бернулли (1753, опубл. в 1755) по математич. физике, а также в работах Ж. Д'Аламбера (1754) и А. Клеро (1754, опубл. в 1759) и других по небесной механике. От работ А. Лежандра (1783, опубл. в 1786) и П. Лапласа (1782, опубл. в 1785) по теории притяжения эллипсоида ведут начало разложения в Р. по сферическим функциям.

Рост применения Р. не сопровождался в 18 в. исследованиями их общих свойств. Учёные полагали, что любая изучаемая в анализе функция разложима (за исключением, быть может, отдельных значений аргумента) в ряд Тейлора. Это ошибочное мнение разделял и Ж. Лагранж, к-рый впервые (1797) вывел одно из выражений для остаточного члена формулы Тейлора, но считал, что этот остаток, вообще говоря, стремится к нулю с ростом числа членов формулы. Многие математики во главе с Л. Эйлером считали законным применение к бесконечным Р. функций и чисел всех операций, к-рые применимы к конечным многочленам, и свободно пользовались расходящимися Р. Против этого возражало меньшинство, напр. Ж. Д'Аламбер (1768) и С. Е. Гурьев (1796). В изучении сходимости Р. в 18 в. были сделаны только частные открытия, к-рым не придавали особого значения, напр. интегральный признак сходимости (К. Маклорен, 1742; О. Коши, 1821), признак Д'Аламбера в не вполне корректной формулировке (1768). Сам термин «сходящийся Р.» (введённый применительно к бесконечным последовательностям Дж. Грегори в 1668) относился обычно в ту эпоху к Р., общий член к-рого стремится к нулю. Во взглядах Л. Эйлера на природу расходящихся Р. (термин Н. Бернулли, 1712), особенно полно высказанных в 1755, и в его приёмах их суммирования (напр., преобразование Эйлера, служащее также для улучшения сходимости сходящихся Р.; следует заметить, что это преобразование применял в своих рукописях И. Ньютон) содержалось значительное предвосхищение более строгих теорий, развитых в кон. 19 в.—нач. 20 в. Однако, несмотря на отдельные ценные открытия, сделанные с помощью расходящихся Р., некритич. пользование последними, приводившее к парадоксам и прямым противоречиям, вызывало в нач. 19 в. серьёзные возражения, и на нек-рое время расходящиеся Р. были почти полностью исключены из математики. Учёные 18 в.— Дж. Стирлинг (1730), Л. Эйлер (1732, опубл. в 1739) — успешно применили также разложения в асимптотич. Р., свойства к-рых были глубоко изучены в кон. 19 в. (А. Пуанкаре, 1886, и др.).

Только в нач. 19 в. Р. перестают быть лишь средством исследования и становятся сами объектом изучения. Построение теории Р. явилось одним из главных моментов проведённой в 1-й пол. 19 в. реформы математич. анализа. В 1812 К. Гаусс проводит тщательное исследование сходимости гипергеометрич. ряда. Б. Больцано формулирует в 1817 необходимое и достаточное условие сходимости Р., независимо полученное О. Коши (1821). В 1821 О. Коши, применяя метод пределов, закладывает основы общей теории сходимости Р. Он формулирует современное определение суммы сходящегося Р., вводит понятие абсолютной и условной сходимости, анализирует операции над Р., доказывает нек-рые достаточные признаки сходимости Р., устанавливает область сходимости степенного Р. для действительных и комплексных значений аргумента, впервые приступает к изучению двойных Р. В 1823 О. Коши показывает различие между сходимостью ряда Тейлора и его сходимостью к данной функции. Работы О. Коши оказали большое влияние на дальнейшие исследования по теории Р., в к-рых отчётливо выявились как сходства, так и различия в свойствах конечных сумм и бесконечных Р. Теорию Р. значительно обогатил Н. Абель, в частности, впервые давший полное исследование условий сходимости биномиального Р. (1826). П. Дирихле нашёл необходимое и достаточное условие независимости суммы сходящегося Р. от порядка его членов (1837), Б. Риман — теорему о перестановке членов в условно сходящемся Р. (1854). Новые достаточные признаки сходимости Р. были получены Й. Раабе (1832), Э. Куммером (1835) и Н. И. Лобачевским (1834), В. П. Ермаковым (1870). Понятие равномерной сходимости, неизвестное ещё О. Коши (чем и вызваны были нек-рые ошибочные теоремы этого учёного), ввели Дж. Стокс (1847) и Л. Зейдель (1848), а затем оно получило широкое применение у К. Вейерштрасса, к-рому принадлежат важные исследования о представимости функций рядами многочленов (1885); он установил также достаточный признак равномерной сходимости Р. В 1911 Д. Ф. Егоров доказал, что произвольный сходящийся в нек-рой области функциональный Р. (членами к-рого являются измеримые функции) будет равномерно сходиться, если из области исключить нек-рое множество точек произвольно малой меры.

В кон. 19 в.— нач. 20 в. создаётся теория суммирования расходящихся Р., в разработке к-рой приняли участие Э. Чезаро (1880), Э. Борель (1895 и последующие годы), Г. Ф. Вороной (1901, опубликовано в 1902), Л. Фейер (1904) и др.

● Маркушевич А. И., Ряды. Элементарный очерк, 3 изд., М., 1957; Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; 2 изд., ч. 2, М., 1980; Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев, А. П. Юшкевич.

С

САМОПЕРЕСЕЧЕ́НИЯ ТО́ЧКА кривой, узловая точка, — см. *Особая точка* кривой.

САМОПРИКОСНОВЕ́НИЯ ТО́ЧКА кривой — см. *Особая точка* кривой.

САМОСОПРЯЖЁННАЯ МА́ТРИЦА — то же, что *эрмитова матрица*.

САМОСОПРЯЖЁННОЕ ЛИНЕ́ЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — линейное преобразование евклидова или унитарного пространства, совпадающее со своим сопряжённым линейным преобразованием. В евклидовом пространстве С. л. п. наз. также симметрическим, в унитарном пространстве — эрмитовым. Необходимое и достаточное условие самосопряжённости линейного преобразования конечномерного пространства состоит в том, что его матрица в произвольном ортонормированном базисе совпадает с сопряжённой матрицей, т. е. является симметрич. матрицей (в евклидовом случае) или эрмитовой (в унитарном случае). Собственные значения С. л. п. действительны (даже в унитарном случае), а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Линейное преобразование конечномерного пространства L является самосопряжённым тогда и только тогда, когда в L существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов. В этом базисе С. л. п. записывается действительной диагональной матрицей.

С. л. п. A наз. неотрицательным (или положительно полуопределённым), если скалярное произведение $(Ax, x)\geqslant 0$ для любого вектора x, и положительно определённым, если $(Ax, x)>0$ для любого вектора $x\neq 0$. Для неотрицательности (положительной определённости) нек-рого С. л. п. в конечномерном пространстве необходимо и достаточно, чтобы все его собственные значения были неотрицательны (соответственно положительны) или чтобы соответствующая ему матрица была положительно полуопределённой (соответственно положительно определённой) эрмитовой матрицей.

С. л. п. называют также *самосопряжённым оператором*, в особенности в случае, когда пространство L бесконечномерно.

САМОСОПРЯЖЁННЫЙ ОПЕРА́ТОР — линейный оператор A, определённый на линейном всюду плотном множестве $D(A)$ гильбертова пространства H и совпадающий со своим сопряжённым оператором A^*, т. е. такой, что $D(A)=D(A^*)$ и

$$(Ax,\ y)=(x,\ Ay) \qquad (*)$$

для любых $x, y\in D(A)$. Если A — ограниченный С. о., то он определён на всём пространстве H. Спектр С. о. A не пуст и лежит на действительной оси.

СВЁРТКА ФУ́НКЦИЙ $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — функция

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y)\, f_2(y)\, dy.$$

С. ф. $f_1(x)$ и $f_2(x)$ обозначают f_1*f_2. Если f_1 и f_2 являются плотностями вероятности независимых случайных величин X и Y, то f_1*f_2 есть плотность вероятности случайной величины $X+Y$. Если $F_k(x)$ — преобразование Фурье функции $f_k(x)$, то есть

$$F_k(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_k(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda,$$

то $F_1(x)F_2(x)$ является преобразованием Фурье функции f_1*f_2. Это свойство С. ф. находит важные приложения в теории вероятностей (см. *Характеристическая функция*). Аналогичным свойством обладает С. ф. и относительно преобразования Лапласа, что находит широкие приложения в операционном исчислении. Операция свёртывания функций коммутативна и ассоциативна, то есть $f_1*f_2=f_2*f_1$ и $f_1*(f_2*f_3)=(f_1*f_2)*f_3$.

СВЁРТЫВАНИЕ тензоров — см. *Тензорное исчисление*.

СВЁРТЫВАНИЯ АКСИО́МА — см. *Аксиоматическая теория множеств*.

СВОБО́ДНАЯ ПЕРЕМЕ́ННАЯ — см. *Переменная*.

СВОБО́ДНАЯ УНИВЕРСА́ЛЬНАЯ А́ЛГЕБРА многообразия $\mathfrak{A}$ — алгебра F из многообразия $\mathfrak{A}$, обладающая следующим свойством: любое отображение системы свободных образующих этой алгебры в любую алгебру A из $\mathfrak{A}$ продолжается до гомоморфизма $F\to A$. См. *Универсальная алгебра*.

СВОБО́ДНОЕ ВХОЖДЕ́НИЕ переменной — вхождение переменной в формулу, не являющееся *связанным вхождением*.

СВОБО́ДНЫЙ ВЕ́КТОР, вектор, — множество всех параллельных между собой, одинаково направленных и имеющих одинаковую длину отрезков. Начальная точка (точка приложения) С. в. может быть выбрана произвольно. С. в. являются, напр., скорость движения материальной точки.

СВОДИ́МОСТЬ — то же, что *трансляция* в теории вычислимых функций и теории алгоритмов.

СВЯЗА́ННАЯ ПЕРЕМЕ́ННАЯ — см. *Переменная*.

СВЯЗА́ННОЕ ВХОЖДЕ́НИЕ переменной — вхождение переменной y в формулу A, которое является вхождением в квантор $\forall y$ или $\exists y$, либо в область действия хотя бы одного из этих кванторов. См. *Предикатов исчисление*.

СВЯЗА́ННЫЙ ВЕ́КТОР — вектор, начало которого фиксировано. С. в. является, напр., сила, приложенная к нек-рой точке упругого тела.

СВЯ́ЗКА — двупараметрическое семейство линий на плоскости или поверхностей в пространстве, линейно зависящее от параметров. Пусть F_1, F_2, F_3 — функции двух переменных, из к-рых ни одна не является линейной комбинацией двух других. Семейство линий на плоскости, определяемых уравнением

$$\lambda_1F_1+\lambda_2F_2+\lambda_3F_3=0 \qquad (*)$$

при всевозможных значениях параметров λ_1, λ_2, λ_3 (исключая случай $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$), представляет собой С. Уравнение (*) фактически зависит от двух параметров (от двух отношений $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3$). Аналогично составляется уравнение С. поверхностей в пространстве. Три уравнения $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ дают три элемента С. (три линии или три поверхности), к-рые определяют всю С. Напр., С. прямых — множество всех прямых, проходящих через одну точку (x_1, y_1, z_1).

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n},$$

С. плоскостей — множество всех плоскостей, проходящих через одну точку.

СВЯ́ЗНОЕ МНО́ЖЕСТВО — множество в топологическом пространстве, состоящее как бы из одного куска, т. е. такое, что при любом его разбиении на два непересекающихся непустых подмножества одно из них содержит предельную точку другого. Другими словами, множество связно, если оно не содержит собственного подмножества, к-рое является одновременно открытым и замкнутым. С. м. будут отрезок, окружность, лемниската, круг, шар. Гипербола не является С. м. Объединение С. м., имеющих непустое пересечение, связно. Множество связно тогда и только тогда, когда всякая непрерывная функция пере-

ходит от одного значения к другому, принимая все промежуточные значения.

Открытое С. м. наз. о б л а с т ь ю. Компактное С. м. наз. к о н т и н у у м о м. Множество, не являющееся связным, наз. н е с в я з н ы м.

СВЯ́ЗНОСТЬ — понятие дифференциальной геометрии, возникшее в связи с понятием *параллельного перенесения*. С.— определённый тип связей (сопоставления) геометрич. образов, относящихся к различным точкам рассматриваемого пространства. С. характеризуется геометрич. свойствами преобразований касательных пространств от точки к точке, напр. т. н. аффинная С. определяется аффинным отображением касательных пространств, и при этом геометрич. образы сравниваются по их аффинным свойствам. Обобщение понятия аффинной С. приводит к понятию пространства со С. относительно любой группы Ли.

СВЯ́ЗНОСТЬ — свойство топологического пространства, состоящее в том, что его нельзя представить в виде объединения двух отделённых друг от друга частей.

СГЛА́ЖИВАЮЩИЙ ФУНКЦИОНА́Л — см. *Регуляризации метод*.

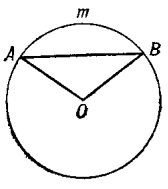
СГУЩЕ́НИЯ ТО́ЧКА — то же, что *предельная точка*.

СДВИГ — 1) аффинное преобразование плоскости, при к-ром все точки (рис.) нек-рой прямой l остаются на месте, а все точки прямой, отстоящей от l на расстоянии 1, сдвигаются на вектор k, параллельный прямой l; точки прямой, отстоящей от l на расстоянии a, сдвигаются на вектор ak. Аналитически (когда l — ось Ox) С. может быть задан в декартовых прямоугольных координатах (x, y) формулами

$$x' = x + ky, \quad y' = y.$$

При С. сохраняются площади и ориентация. Аналогично определяется С. в пространстве. 2) То же, что *параллельный перенос*.

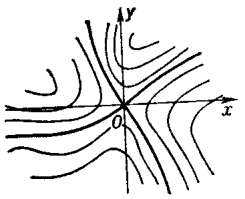
СЕГМЕ́НТ (лат. segmentum — отрезок, полоса, от seco — режу, рассекаю) — 1) С. н а п л о с к о с т и — плоская фигура, заключённая между кривой и её хордой. Площадь С. круга AmB (рис.) находится как разность площадей сектора $OAmB$ и треугольника OAB.



2) С. в п р о с т р а н с т в е — часть тела, ограниченная плоскостью и отсекаемым ею куском поверхности. О С. шара см. в ст. *Шаровой сегмент*.

3) С.— то же, что о т р е з о к, или з а м к н у т ы й п р о м е ж у т о к; см. *Интервал и сегмент*.

СЕДЛО́ — особая точка дифференциального уравнения 1-го порядка. В окрестности С. имеются четыре интегральные кривые (с е п а р а т р и с ы), к-рые входят в особую точку; между ними располагаются интегральные кривые типа гипербол (рис.). Картина интегральных кривых в окрестности С. напоминает линии уровня гиперболич. параболоида, имеющего форму С.; отсюда название особой точки, предложенное А. Пуанкаре.



СЕДЛОВА́Я ТО́ЧКА — 1) точка гладкой поверхности, вблизи которой поверхность лежит по разные стороны от своей касательной плоскости. Если С. т. является точкой двукратно непрерывно дифференцируемой поверхности, то её гауссова кривизна в этой точке неположительна.

2) С. т.— см. *Антагонистическая игра*, *Выпуклое программирование*, *Матричная игра*, *Минимакса принцип*.

СЕ́КАНС [лат. secans, здесь — секущая (прямая), от seco — режу, рассекаю] — 1) одна из *тригонометрических функций*; обозначение: sec.

2) С. о с т р о г о у г л а в прямоугольном треугольнике называют отношение гипотенузы к катету, прилежащему к этому углу.

СЕКСТИЛЛИО́Н (франц. sextillion) — число, изображаемое единицей с 21 нулём, т. е. число 10^{21}. В нек-рых странах С. наз. число 10^{36}.

СЕ́КТОР (лат. sector, букв.— рассекающий, от seco — режу, рассекаю) — 1) С. н а п л о с к о с т и — плоская фигура, ограниченная двумя полупрямыми, исходящими из внутренней точки фигуры, и дугой контура. С. круга — фигура, ограниченная двумя радиусами и дугой, на к-рую они опираются. Площадь С. круга равна $S = lr/2$ или $S = \pi r^2\alpha/360^\circ$, где l — длина дуги, α — соответствующий этой дуге центральный угол в градусах и r — радиус круга.

2) С. в п р о с т р а н с т в е — часть тела, ограниченная конич. поверхностью, вершина к-рой находится внутри тела, и вырезаемой частью поверхности тела. О С. шара см. в ст. *Шаровой сектор*.

СЕКУ́НДА (от лат. secunda divisio — второе деление) — единица измерения плоских углов, равная 1/3600 градуса или 1/60 минуты; обозначается знаком $''$.

СЕКУ́ЩИХ МЕ́ТОД — метод вычисления нулей непрерывных функций. Пусть в $[a, b]$ содержится нуль α непрерывной функции $f(x)$, x_0, x_1 — различные точки этого отрезка. Итерационная формула С. м.:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{(f(x_{k-1}) - f(x_k))/(x_{k-1} - x_k)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Если последовательность $\{x_k\}$ сходится, то обязательно к нулю функции $f(x)$.

Иногда С. м. называют метод с итерационной формулой

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{(f(x_k) - f(x_0))/(x_k - x_0)}, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (*)$$

Другое название метода (*) — м е т о д л о ж н о г о п о л о ж е н и я, или regula falsi.

См. также *Интерполирование*.

СЕ́МИИНВАРИА́НТ (от лат. semi- — полу-, наполовину и invarians, род. падеж invariantis — неизменяющийся), к у м у л я н т,— одна из числовых характеристик распределения вероятностей случайной величины. С е м и и н в а р и а н т ы определяются как коэффициенты $\varkappa_k$ в разложении логарифма характеристич. функции $\varphi(t)$ случайной величины X в ряд по степеням t:

$$\ln \varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varkappa_k}{k!} (it)^k,$$

или, более точно, если абсолютный момент порядка k случайной величины X существует, то производные функции $\ln \varphi(t)$ до порядка k непрерывны в нек-рой окрестности точки $t = 0$ и величина

$$\varkappa_k = (-1)^k \left.\frac{d^k \ln \varphi(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$$

наз. с е м и и н в а р и а н т о м п о р я д к а k случайной величины X.

С. связаны с моментами простыми соотношениями. В общем случае С. $\varkappa_k$ является многочленом от моментов порядка $l \leqslant k$, в частности $\varkappa_1$ равен математич. ожиданию $\mathsf{E}X$, $\varkappa_2$ — дисперсии $\mathsf{D}X$, $\varkappa_3$ — центральному третьему моменту $\mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^3$. Из свойств характеристич. функций следует, что при сложении независимых случайных величин их соответствующие С. складываются (это свойство и послужило главной причиной их введения).

СЕ́МИИНВАРИА́НТ л и н и и в т о р о г о п о р я д к а — см. *Линия второго порядка*.

СЕ́МИИНВАРИА́НТ п о в е р х н о с т и в т о р о г о п о р я д к а — см. *Поверхность второго порядка*.

СЕПАРА́БЕЛЬНОЕ ПРОСТРА́НСТВО (франц. séparable, от лат. separabilis — отделимый) — топологическое пространство, содержащее счётное *всюду плотное множество*. Пространство со счётной базой сепарабельно, обратное неверно.

СЕПАРАТРИ́СА (от лат. separatrix — разделяющая, разъединяющая) — см. *Особая точка* дифференциального уравнения, *Седло*.

СЕПТИЛЛИО́Н (франц. septillion) — число, изображаемое единицей с 24 нулями, т. е. число 10^{24}. В нек-рых странах С. наз. число 10^{42}.

СЕ́РИЙ СХЕ́МА, схема серий случайных величин,— см. *Больших чисел закон*.

СЕРПИ́НЬСКОГО КРИВА́Я, ковёр Серпиньского,— пример канторовой кривой, содержащей подмножество, гомеоморфное любой наперёд заданной канторовой кривой. Построена В. Серпиньским (1916).

СЕРРЕ́—ФРЕНЕ́ ФО́РМУЛЫ — формулы дифференциальной геометрии; см. *Френе формулы*.

СЕТЕВА́Я МОДЕ́ЛЬ — информационная модель реализации некоторого комплекса взаимосвязанных работ, рассматриваемая как ориентированный граф без контуров, отображающий естественный порядок выполнения этих работ во времени; может содержать некоторые дополнительные характеристики (напр., время, стоимость, ресурсы), относящиеся к отдельным работам и (или) к комплексу в целом. С. м. имеют различные формы представления: графическую, цифровую, табличную, а также получаемую с помощью разнообразных технич. средств (напр., механич. моделей, электрич. цепей), к-рые эквивалентны в смысле содержащейся в них информации. Наибольшее распространение получили графич. представление С. м. на плоскости, наз. сетевым графиком, и цифровое представление, что обусловлено наглядностью первого и удобством для анализа сетей с помощью ЭВМ второго представления.

С. м. лежат в основе методов *сетевого планирования* и управления, а также календарного планирования.

СЕТЕВО́Е ПЛАНИ́РОВАНИЕ, сетевые методы планирования и управления, — совокупность методов, использующих сетевую модель как основную форму представления информации об управляемом комплексе работ. Использование С. п. позволяет повысить качество планирования и управления при реализации комплекса работ, напр. даёт возможность чётко координировать деятельность всех сторон (организаций), участвующих в реализации, выделять наиболее важные задачи, определять сроки реализации, а также координировать план его реализации.

Построение сетевой модели комплекса работ сводится к отображению в виде специального ориентированного графа множества стадий (событий) и естественного порядка (вообще говоря, частичного) самих работ комплекса (операций), а также нек-рой необходимой числовой информации (включающей, напр., время выполнения каждой операции, ресурсы).

С. п. используют как для решения отдельных достаточно сложных задач планирования и управления, так и в качестве основы при построении специального класса систем организации управления, к-рые наз. системами сетевого планирования и управления (СПУ).

СЕ́ТОК МЕ́ТОД — собирательное название группы приближённых методов решения дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Применительно к дифференциальным уравнениям с частными производными термин «С. м.» используется в качестве синонима терминов «метод конечных разностей» и «разностный метод». С. м.— один из наиболее распространённых приближённых методов решения задач, связанных с дифференциальными уравнениями. Широкое применение С. м. объясняется его большой универсальностью и сравнительной простотой реализации на ЭВМ.

СЕЧЕ́НИЕ — см. *Дедекиндово сечение*.

СЖА́ТИЕ — аффинное преобразование плоскости, при котором все точки (рис.) некоторой прямой l остаются на месте, а все точки, расположенные на расстоянии a до этой прямой, переходят в точки на расстоянии ka. При $k>1$ С. наз. растяжением. Аналитически (когда l — ось Ox) С. может быть задано в декартовых прямоугольных координатах (x, y) формулами

$$x'=x, \quad y'=ky.$$

Аналогично определяется С. в пространстве.

СЖА́ТИЯ ЛИ́НИЯ, стрикционная линия,— см. *Линейчатая поверхность*.

СЖА́ТЫХ ОТОБРАЖЕ́НИЙ ПРИ́НЦИП — см. *Сжимающих отображений принцип*.

СЖИМА́ЮЩИХ ОТОБРАЖЕ́НИЙ ПРИ́НЦИП, сжатых отображений принцип,— теорема, утверждающая существование и единственность неподвижной точки множества при некотором специальном («сжимающем») отображении его в себя. Произвольное отображение A метрич. пространства M в себя, к-рое каждой точке x из M сопоставляет нек-рую точку $y=Ax$ из M, порождает в пространстве M уравнение

$$Ax=x. \qquad (*)$$

Действие отображения A на точку x можно интерпретировать как перемещение её в точку $y=Ax$. Точка x наз. неподвижной точкой отображения A, если выполняется равенство (*). Таким образом, вопрос о разрешимости уравнения (*) является вопросом о нахождении неподвижных точек отображения A.

Отображение A метрич. пространства M в себя наз. сжимающим, если существует такое положительное число $\alpha<1$, что для любых точек x и y из M выполняется неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y),$$

где $\rho(u, v)$ — расстояние между точками u и v метрич. пространства M.

С. о. п. утверждает, что каждое сжимающее отображение полного метрич. пространства в себя имеет, и притом только одну, неподвижную точку. Кроме того, для любой начальной точки x_0 из M последовательность $\{x_n\}$, определяемая рекуррентными соотношениями

$$x_n=Ax_{n-1}, \quad n=1, 2, \ldots,$$

имеет своим пределом неподвижную точку x отображения A. При этом справедлива следующая оценка погрешности:

$$\rho(x_n, x) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, Ax_0).$$

С. о. п. позволяет единым методом доказать теоремы о существовании и единственности решений дифференциальных, интегральных и других уравнений. В условиях применимости С. о. п. решение может быть с наперёд заданной точностью вычислено *последовательных приближений методом*.

С помощью определённого выбора полного метрич. пространства M и построения отображения A эти задачи сводят предварительно к уравнению (*), а затем находят условия, при к-рых отображение A оказывается сжимающим.

«СИБИ́РСКИЙ МАТЕМАТИ́ЧЕСКИЙ ЖУРНА́Л» — научный журнал Сибирского отделения АН СССР. Издаётся в Новосибирске с 1960. Выходит 6 номеров в год. Публикует оригинальные статьи по всем разделам математики. Тираж (1987) ок. 1050 экз.

СИГНАТУ́РА (ср.-век. лат. signatura, букв.—знак, подпись, от лат. signo — указываю, обозначаю).

1) С. квадратичной формы — разность между положительным и отрицательным индексами инерции этой квадратичной формы.

2) С. алгебраической системы (алгебры) — см. *Алгебраическая система*, *Многосновная алгебра*.

3) С. языка — совокупность предикатных и функциональных символов и предметных констант данного *формализованного языка*. См. также *Элементарная теория*.

СИ́ГНУМ (от лат. signum — знак) — функция действительного аргумента

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

(другое обозначение sign x). Введена Л. Кронекером (1878).

СИЛЬВЕ́СТРА КРИТЕ́РИЙ — установленный Дж. Сильвестром критерий положительной определённости квадратичной формы. См. *Положительно определённая квадратичная форма.*

СИЛЬВЕ́СТРА ТЕОРЕ́МА — то же, что закон инерции *квадратичных форм*; установлена Дж. Сильвестром (1852).

СИ́ЛЬНАЯ ПРОИЗВО́ДНАЯ, производная Фреше,— см. *Производная* отображения.

СИ́ЛЬНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИА́Л, дифференциал Фреше,— см. *Дифференциал.*

СИМВОЛИ́ЧЕСКАЯ ЛО́ГИКА — иногда употребляемое название *математической логики*, связанное с тем, что в математической логике более широко, чем в традиционной, для выражения логических связей и высказываний применяются символы.

СИММЕТРИ́ЧЕСКАЯ ГРУ́ППА n-й степени — группа всех подстановок n объектов с операцией умножения подстановок. С. г. обозначается S_n; она содержит $n!$ элементов. Подстановки с чётным числом инверсий образуют в С. г. подгруппу A_n, совпадающую с коммутантом С. г. Эта подгруппа содержит $n!/2$ элементов, она наз. знакопеременной или полусимметрической. Для всех n, кроме $n=4$, знакопеременная группа A_n — единственный нормальный делитель в симметрич. группе S_n.

Всякая конечная группа изоморфна нек-рой подгруппе симметрич. группы для нек-рого n. Рассматриваются также бесконечные симметрич. группы — группы всех взаимно однозначных отображений нек-рого бесконечного множества на себя.

СИММЕТРИ́ЧЕСКАЯ МА́ТРИЦА — квадратная матрица, в которой любые два элемента, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой, т. е. матрица $A=\| a_{ik} \|_1^n$, совпадающая со своей транспонированной матрицей:

$$a_{ik} = a_{ki},\ i,\ k = 1,\ \ldots,\ n.$$

Действительная С. м. порядка n имеет ровно n действительных собственных значений (с учётом кратности). В ортонормированном базисе евклидова пространства такие матрицы служат матрицами симметрич. преобразований (см. *Самосопряжённое линейное преобразование*). Если A и B — С. м. одного порядка, то $A+B$ — С. м., а произведение AB есть С. м. тогда и только тогда, когда $AB=BA$.

СИММЕТРИ́ЧЕСКАЯ ПОЛУГРУ́ППА на множестве M — совокупность всех преобразований множества M, рассматриваемая относительно операции суперпозиции преобразований. См. *Полугруппа.*

СИММЕТРИ́ЧЕСКАЯ РА́ЗНОСТЬ — одна из операций над элементами в *булевой алгебре.*

СИММЕТРИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция нескольких переменных, не изменяющаяся при любых перестановках переменных. С. ф. являются, напр., $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ или $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2x_3$, «функция голосования», к-рая характеризуется тем, что её аргументы принимают лишь два значения: 1 («за») и 0 («против»), а сама функция равна 1, если больше половины её аргументов равны 1, и 0 в противном случае. Тривиальными примерами С. ф. являются константы и функции одной переменной.

К С. ф. относятся *симметрические многочлены.* Всякая рациональная С. ф. является отношением двух симметрич. многочленов.

СИММЕТРИ́ЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕ́Н — многочлен f, являющийся симметрической функцией от своих переменных, т. е. инвариантный при любых перестановках переменных:

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_n) = f(\pi(x_1),\ \ldots,\ \pi(x_n)).$$

Важнейшие примеры С. м.— элементарные симметрические многочлены

$$s_k(x_1,\ \ldots,\ x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$

и степенные суммы, т. е. многочлены

$$P_k(x_1,\ \ldots,\ x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k,$$

к-рые связаны с элементарными С. м. формулами Ньютона

$$p_l - s_1 p_{l-1} + s_2 p_{l-2} - \ldots + (-1)^l s_l = 0,\ 1 \leqslant l \leqslant n-1,$$

$$p_{n+l} - s_1 p_{n+l-1} + s_2 p_{n+l-2} - \ldots + (-1)^n s_n p_l = 0,\ l \geqslant 0.$$

Эти формулы позволяют последовательно выражать s_k через p_m, и обратно. Элементарные С. м. от корней произвольного многочлена одного переменного со старшим коэффициентом 1 с точностью до знака совпадают с остальными коэффициентами этого многочлена (см. *Виета теорема*).

Основная теорема о С. м. утверждает, что каждый С. м. является многочленом от элементарных С. м., причём представим в этом виде единственным образом.

Кососимметрическим, или знакопеременным, многочленом наз. многочлен, не изменяющийся при чётных перестановках переменных и меняющий знак при нечётных. Любой кососимметрич. многочлен представим в виде $\Delta_n g$, где g есть С. м., а

$$\Delta_n = \Pi_{i<j}(x_i - x_j).$$

СИММЕТРИ́ЧЕСКИЙ ОПЕРА́ТОР — то же, что *эрмитов оператор.*

СИММЕТРИ́ЧЕСКИЙ ТЕ́НЗОР — см. *Тензорное исчисление.*

СИММЕТРИ́ЧЕСКОЕ ЛИНЕ́ЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — см. *Самосопряжённое линейное преобразование.*

СИММЕТРИ́ЧНОСТЬ — свойство бинарных отношений, выражающее независимость выполнимости отношения для какой-либо пары объектов от порядка, в котором эти объекты входят в пару: отношение R наз. симметричным, если для любых x и y из xRy следует yRx. Примерами симметричных отношений служат отношения типа равенства (тождества, эквивалентности, подобия), отношения толерантности (сходства, соседства и т. п.). Отношение R наз. антисимметричным, если из xRy при $x \neq y$ следует отрицание yRx, т. е. если из xRy и yRx непременно следует $x=y$; таковы, напр., отношения строгого порядка, отношение включения между множествами и т. п.

СИММЕТРИ́Я (от греч. συμμετρία — соразмерность) — 1) симметрия (в узком смысле), или (зеркальное) отражение относительно плоскости α в пространстве (относительно прямой a на плоскости),— преобразование пространства (плоскости), при к-ром каждая точка M переходит в точку M' такую, что отрезок MM' перпендикулярен плоскости α (прямой a) и делится ею пополам. Плоскость α (прямая a) наз. плоскостью (осью) C.

Зеркальное отражение — пример ортогонального преобразования, изменяющего ориентацию (в отличие от собственного движения). Любое ортогональное преобразование можно осуществить последовательным выполнением конечного числа зеркальных отражений — этот факт играет существенную роль в исследовании С. геометрич. фигур.

2) Симметрия (в широком смысле) — свойство геометрич. фигуры Ф, характеризующее нек-рую правильность формы Ф, неизменность её при действии движений и зеркальных отражений. Точнее, фигура Ф обладает С. (симметрична), если существует нетождественное ортогональное преобразование, переводящее эту фигуру в себя. Совокупность всех ортогональных преобразований, совмещающих фигуру Ф с самой собой, является группой.

Так, плоская фигура, преобразующаяся в себя при зеркальном отражении, симметрична относительно прямой — оси a С. (рис. 1); здесь группа С. состоит из двух элементов.

С. относительно точки O (центральная С.) — преобразование плоскости, при к-ром каждая точка M переходит в точку M' такую, что отрезок MM' проходит через точку O и делится ею пополам (рис. 2).

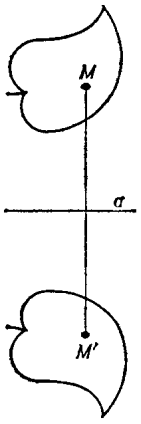


Рис. 1. Плоская фигура, симметричная относительно прямой a; точка M преобразуется в M' при зеркальном отражении относительно a.

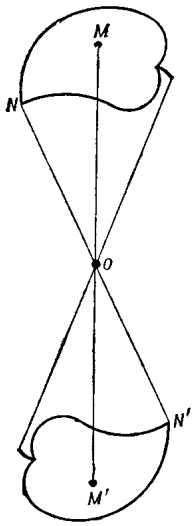


Рис. 2. Плоская фигура, симметричная относительно точки O; точки M и N преобразуются в точки M' и N' так, что $OM = OM'$ и $ON = ON'$.

Если фигура Ф на плоскости такова, что повороты относительно к.-л. точки O на угол $360°/n$, n — целое число $\geqslant 2$, переводят её в себя, то Ф обладает С. n-го порядка относительно точки O — центра С. Примером таких фигур являются правильные многоугольники (рис. 3); группа С. здесь — т. н. циклич. группа n-го порядка. Окружность

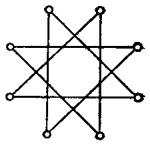


Рис. 3. Звездчатый правильный многоугольник, обладающий симметрией восьмого порядка относительно своего центра.

обладает С. бесконечного порядка (поскольку совмещается с собой поворотом на любой угол).

Произведение симметрий плоскости относительно двух параллельных прямых есть параллельный перенос; относительно двух пересекающихся прямых - вращение вокруг точки пересечения осей С. Произведение С. относи-

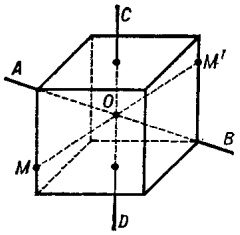


Рис. 4. Куб, имеющий прямую AB осью симметрии третьего порядка, прямую CD — осью симметрии четвёртого порядка, точку O — центром симметрии. Точки M и M' куба симметричны как относительно осей AB и CD, так и относительно центра O.

тельно нек-рой прямой и параллельного переноса в направлении этой прямой наз. симметрией переноса.

В пространстве простейшими С. являются центральная С., осевая С. и С. переноса.

а) В случае центральной симметрии (инверсии) относительно точки O фигура Ф совмещается сама с собой после последовательных зеркальных отражений от трёх взаимно перпендикулярных плоскостей, другими словами, точка O — середина отрезка, соединяющего симметричные точки Ф.

б) В случае осевой симметрии, или С. относительно прямой n-го порядка, фигура накладывается на себя вращением вокруг нек-рой прямой (оси С.) на угол $360°/n$. Напр., куб имеет прямую AB осью С. третьего порядка, а прямую CD — осью С. четвёртого порядка (рис. 4); вообще, правильные и полуправильные многогранники симметричны относительно ряда прямых. Расположение, количество и порядок осей С. играют важную роль в кристаллографии.

в) Фигура, накладывающаяся на себя последовательным вращением на угол $360°/2k$ вокруг прямой AB и зеркальным отражением в плоскости, перпендикулярной к ней, имеет зеркально-осевую С. Прямая AB, наз. зеркально-поворотной осью С. порядка $2k$, является осью С. порядка k (рис. 5). Зеркально-осевая С. порядка 2 равносильна центральной С.

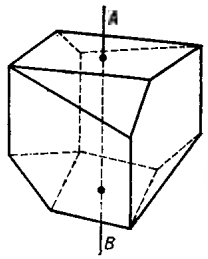


Рис. 5. Многогранник, обладающий зеркально-осевой симметрией; прямая AB — зеркально-поворотная ось четвёртого порядка.

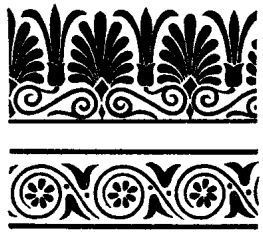


Рис. 6. Фигуры, обладающие симметрией переноса; верхняя фигура имеет также бесконечное множество вертикальных осей симметрии (второго порядка), т. е. плоскостей зеркального отражения.

г) В случае симметрии переноса фигура накладывается на себя переносом вдоль нек-рой прямой (оси переноса) на к.-л. отрезок. Напр., фигура с единственной осью переноса обладает бесконечным множеством плоскостей С. (поскольку любой перенос можно осуществить двумя последовательными зеркальными отражениями от плоскостей, перпендикулярных оси переноса) (рис. 6). Фигуры, имеющие несколько осей переноса, играют важную роль при исследовании кристаллич. решёток.

В искусстве С. получила распространение как один из видов гармоничной композиции. Она свойственна произведениям архитектуры (являясь непременным качеством, если не всего сооружения в целом, то его частей и деталей — плана, фасада, колонн, капителей и т. д.) и декоративно-прикладного искусства. С. используется так-

Рис. 7. Бордюр, накладывающийся на себя или переносом на нек-рый отрезок вдоль горизонтальной оси, или зеркальным отражением относительно той же оси и переносом вдоль неё на отрезок, вдвое меньший.

же в качестве основного приёма построения бордюров и орнаментов (плоских фигур, обладающих соответственно одной или несколькими С. переноса в сочетании с зеркальными отражениями) (рис. 7 и 8).

Комбинации С., порождённые зеркальными отражениями и вращениями (исчерпывающие все виды С. геометрич. фигур), а также переносами, представляют интерес и являются предметом исследования в различных областях

естествознания. Напр., винтовая С., осуществляемая поворотом на нек-рый угол вокруг оси, дополненным переносом вдоль той же оси, наблюдается в расположении листьев у растений (рис. 9). С. конфигурации молекул, сказывающаяся на их физич. и химич. характеристиках, имеет значение при теоретич. анализе строения соединений, их свойств и поведения в различных реакциях. Наконец, в физич. науках вообще, помимо уже указанной геометрич. С. кристаллов и решёток, приобретают важное значение представления о С. в общем смысле. Так, симметричность физич. пространства-времени, выражающаяся в его однородности и изотропности позволяет установить т. н. законы сохранения; обобщённая С. играет существенную роль в образовании атомных спектров и в классификации элементарных частиц.

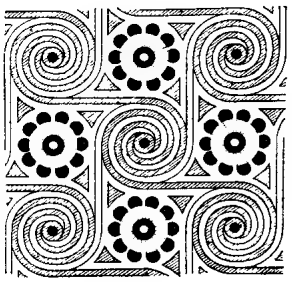


Рис. 8. Орнамент; осью переноса является любая прямая, соединяющая центры двух каких-либо завитков.

3) Симметрия (в общем смысле) означает инвариантность структуры математического (или физического) объекта относительно его преобразований. Определение совокупности преобразований, оставляющих без изменения все структурные соотношения объекта, т. е. определение группы G его автоморфизмов, стало руководящим принципом современной математики и физики, позволяющим глубоко проникнуть во внутреннее строение объекта в целом и его частей.

Рис. 9. Фигура, обладающая винтовой симметрией, к-рая осуществляется переносом вдоль вертикальной оси, дополненным вращением вокруг неё на 90°.

Поскольку такой объект можно представить элементами нек-рого пространства P, наделённого соответствующей характерной для него структурой, постольку преобразования объекта являются преобразованиями P. Таким образом получается представление группы G в группе преобразований P (или просто в P), а исследование С. объекта сводится к исследованию действия G на P и отысканию инвариантов этого действия. Точно так же С. физич. законов, управляющих исследуемым объектом и обычно описывающихся уравнениями, к-рым удовлетворяют элементы пространства P, определяется действием G на такие уравнения.

Так, напр., если нек-рое уравнение линейно на векторном пространстве P и остаётся инвариантным при преобразованиях нек-рой группы G, то каждому элементу g из G соответствует линейное преобразование T_g в векторном пространстве R решений этого уравнения. Соответствие $g \to T_g$ является линейным представлением G, и знание всех таких её представлений позволяет устанавливать различные свойства решений, а также помогает находить во многих случаях (из «соображений симметрии») и сами решения. Этим, в частности, объясняется необходимость для математики и физики развитой теории линейных представлений групп.

● Вейль Г., Симметрия, пер. с англ., М., 1968; Вигнер Е., Этюды о симметрии, пер. с англ., М., 1971. *М. И. Войцеховский.*

СИМПЛЕКС (от лат. simplex — простой) — простейший выпуклый многогранник данного числа измерений n. При $n=3$ трёхмерный С. представляет собой произвольный, в том числе неправильный, тетраэдр. Под двумерным С. понимают произвольный треугольник, а под одномерным — отрезок. Нульмерный С. есть просто одна точка; n-мерный С. имеет $n+1$ вершин, не принадлежащих ни к какому $(n-1)$-мерному подпространству того евклидова пространства (с числом измерений n или больше), в к-ром лежит данный С. Обратно, всякие $n+1$ точек евклидова n-мерного пространства $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant n$, не лежащие ни в каком подпространстве менее n измерений, однозначно определяют n-мерный С. с вершинами в заданных точках $e_0, e_1, \ldots, e_n$; он может быть определён как выпуклое замыкание совокупности заданных $n+1$ точек, т. е. как пересечение всех выпуклых тел пространства $\mathbb{R}^m$, содержащих эти точки. Если в пространстве $\mathbb{R}^m$ дана система декартовых координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$, в к-рой вершина e_i, $i=0, 1, \ldots, n$, имеет координаты $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)}$, то С. с вершинами $e_0, e_1, \ldots, e_m$ состоит из всех точек пространства, координаты к-рых имеют вид

$$x_k = \mu^{(0)} x_k^{(0)} + \mu^{(1)} x_k^{(1)} + \ldots + \mu^{(n)} x_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где $\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(n)}$ суть произвольные неотрицательные числа, дающие в сумме 1. По аналогии со случаем $n=3$ можно сказать, что все точки С. с данными вершинами получаются, если в эти вершины поместить произвольные неотрицательные массы (из к-рых, по крайней мере, одна отлична от нуля) и взять центр тяжести этих масс (дополнительное требование, чтобы сумма всех масс равнялась 1, исключает лишь случай, когда все массы — нулевые).

Любые $r+1$ вершин, $0 \leqslant r \leqslant n-1$, взятые из числа данных $n+1$ вершин n-мерного С., определяют нек-рый r-мерный С.— r-мерную грань данного С. Нульмерные грани С. суть его вершины, одномерные грани наз. рёбрами.

СИМПЛЕКС-МЕТОД — см. *Линейное программирование.*

СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГРУППА — см. *Классическая группа.*

СИМПЛИЦИАЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС — см. *Комплекс.*

СИМПСОНА ФОРМУЛА, формула парабол,— частный случай квадратурной формулы Ньютона — Котеса, в к-рой берутся три узла:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]. \qquad (1)$$

Часто применяется составная С. ф.

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\{f(a)+f(b)+2[f(x_2)+f(x_4)+\ldots$$
$$\ldots+f(x_{n-2})]+4[f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1})]\}, \qquad (2)$$

где $h=(b-a)/n$, $x_j=a+jh$, $j=0, 1, 2, \ldots, n$, и n — чётное. Формулу (2) также называют С. ф. Формулы (1), (2) точны для многочленов степени 3. Если $f(x)$ имеет непрерывную производную 4-го порядка на $[a, b]$, то погрешность $R(f)$ формулы (2) — разность между левой и правой частями приближённого равенства (2) — имеет вид

$$R(f) = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(\mathrm{IV})}(\xi),$$

где ξ — нек-рая точка из промежутка $[a, b]$.

С. ф. названа по имени Т. Симпсона, к-рый получил её в 1743. Формула была известна ранее, напр. Дж. Грегори (1668).

СИМУЛА-67 (SIMULA — сокращение от слов SIMUlation LAnguage, англ. simulation — моделирующий, language — язык) — *программирования язык*, предназначенный для программного моделирования сложных систем. Разработан в 60-х гг. (в Норвегии). Является расширением языка *алгол*-60. Основным понятием С.-67 является класс объектов — сочетание нек-рого типа данных и способов их обработки. Блочная структура языка позволяет вводить иерархию объектов, переходя от частного их класса к более общему. Разработка С.-67 повлияла на формирование понятия абстрактного типа данных для языков программирования.

● Дал У.-И., Мюрхауг Б., Нюгорд К., СИМУЛА-67— универсальный язык программирования, пер. с англ., М., 1969.

СИНГУЛЯРНАЯ МАТРИЦА (от лат. singularis — отдельный, особый) — то же, что *вырожденная матрица.*

СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ — интегральное уравнение с ядром, обращающимся в бесконечность в области интегрирования так, что соответствующий несобственный интеграл, содержащий неизвестную функцию, расходится и заменяется своим главным значением

по Коши. Примером С. и. у. может служить следующее уравнение с т. н. ядром Гильберта:

$$a\varphi(s)+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,dt=f(s),$$

решением к-рого является функция

$$\varphi(s)=\frac{a}{a^2+b^2}f(s)-\frac{b}{2\pi(a^2+b^2)}\int_0^{2\pi}f(t)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,dt+$$
$$+\frac{b^2}{2\pi a(a^2+b^2)}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt,\ a\neq 0,\ a^2+b^2\neq 0,$$

где первый интеграл также понимается в смысле главного значения по Коши.

Хорошо изученным общим классом С. и. у. являются уравнения с ядром Коши вида

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(z)}{z-t}\,dz+\int_L K(t,\ z)\varphi(z)\,dz=f(t),\ (*)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ — заданные непрерывные функции точки t пути интегрирования L (к-рый может состоять из конечного числа гладких самонепересекающихся замкнутых или незамкнутых кривых с непрерывной кривизной) в комплексной плоскости; сингулярный интеграл

$$I\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(z)}{z-t}\,dz$$

понимается как предел при $\varepsilon\to 0$ интеграла $I_\varepsilon\varphi$ по пути L_ε, к-рый получается из L после удаления симметричной относительно точки t дуги длины 2ε. Ядро $K(t;\ z)$ предполагается принадлежащим к одному из тех классов, к-рые рассматриваются в теории несингулярных интегральных уравнений. К С. и. у. вида (*) приводят многие задачи теории аналитич. функций, теории упругости, гидродинамики и др.

С. и. у. впервые (нач. 20 в.) встретились в исследованиях А. Пуанкаре (по теории приливов) и Д. Гильберта (по краевым задачам).

● Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения в математической физике, 3 изд., М., 1968.

СИНГУЛЯ́РНЫЙ ИНТЕГРА́Л — 1) С. и.— одно из средств представления функций; под С. и. понимают интеграл вида

$$f_n(x)=\int_a^b K_n(x,\ t)\,f(t)\,dt,$$

который при $n\to\infty$ сходится (при тех или иных ограничениях на функцию f) к порождающей его функции $f(x)$; функция $K_n(x,\ t)$ называется ядром С. и. Начало систематич. исследованию С. и. положил А. Лебег (1909). С. и. возникли в связи с представлением и приближением функций того или иного класса посредством более простых функций (гладких функций, полиномов и т. п.).

2) С. и.— то же, что *несобственный интеграл*.

СИНО́НИМ (от греч. συνώνυμος — одноимённый) — см. *Имя*.

СИ́НТЕЗА ЗАДА́ЧА (от греч. σύνθεσις — соединение, составление) в теории автоматов — задача построения автомата с наперёд заданным поведением или функционированием (см. также *Автоматов теория*).

СИ́НУС — 1) С.— одна из *тригонометрических функций*; обозначение: sin. Индийские математики С. обозначали словом «джива» (букв.— тетива лука). Арабы переделали этот термин в «джиб», к-рый в дальнейшем превратился в «джайб» — обиходное слово араб. языка, означающее изгиб, пазуха, складка одежды, что соответствует лат. слову sinus.

2) С. острого угла в прямоугольном треугольнике называют отношение катета, лежащего против этого угла, к гипотенузе.

СИ́НУС АМПЛИТУ́ДЫ — одна из *эллиптических функций* Якоби.

СИ́НУС ГИПЕРБОЛИ́ЧЕСКИЙ — одна из *гиперболических функций*.

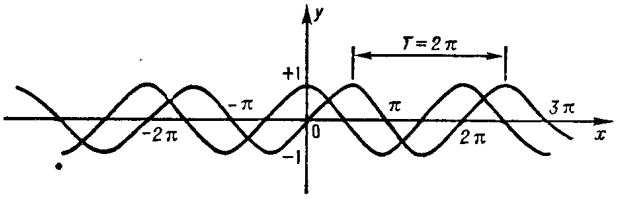
СИ́НУС-ВЕ́РЗУС (лат. sinus versus, букв.— обращённый синус) — тригонометрическая функция аргумента α, применявшаяся как самостоятельная функция до 17 в. и в настоящее время весьма мало употребительная. Обозначение: sin vers α; С.-в. угла α равен $1-\cos\alpha$.

СИ́НУСОВ ТЕОРЕ́МА — теорема тригонометрии, устанавливающая соотношения между сторонами a, b, c произвольного треугольника и синусами противолежащих им углов A, B, C:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

где R — радиус описанного круга.

СИНУСО́ИДА — график функции $y=\sin x$ (рис.). Непрерывная кривая с периодом $T=2\pi$. Точки пересечения с



осью Ox — точки $(k\pi,\ 0)$, $k=0,\ 1,\ \ldots$; они же — точки перегиба с углом $\pm\pi/4$ наклона к оси Ox, экстремумы $((k+1/2)\pi,\ (-1)^k)$.

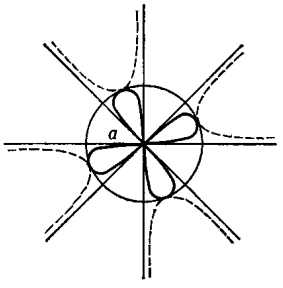
График функции $y=\cos x=\sin(x+\pi/2)$ — к о с и н у с о и д а — представляет собой С., сдвинутую влево на $\pi/2$. Точки пересечения косинусоиды с осью Ox — точки $((k+1/2)\pi,\ 0)$; экстремумы $(k\pi,\ (-1)^k)$.

Многие колебательные процессы описываются периодич. функцией вида $y=a\sin(bx+c)$, где a, b и c — постоянные. График этой функции (т. н. о б щ а я с и н у с о и д а) по сравнению с графиком функции $y=\sin x$ (о б ы к н о в е н н а я с и н у с о и д а) вытянут вдоль оси Oy в $|a|$ раз, сжат вдоль оси Ox в b раз, сдвинут влево на отрезок c/b и, при $a<0$ зеркально отражён относительно оси Ox; период $T=2\pi/b$, точки пересечения с осью Ox — точки $\left(\frac{k\pi}{b}-\frac{c}{b},\ 0\right)$; экстремумы $\left(\frac{(k+1/2)\pi-c}{b},\ (-1)^k a\right)$.

СИНУСОИДА́ЛЬНАЯ СПИРА́ЛЬ, с и н у с - с п и р а л ь,— плоская кривая, уравнение которой в полярных координатах имеет вид

$$\rho^m=a^m\sin m\varphi\ \text{ или }\ \rho^m=a^m\cos m\varphi,$$

где m — постоянная. Если m рационально, С. с.— алгебраич. кривая. Форма кривой зависит от значения m. При положительном m С. с. располагается внутри круга радиуса a и проходит через полюс. При $m=p/q$ (p и q — взаимно простые числа) С. с. имеет p осей симметрии, проходящих через полюс; при целом $m>0$ С. с. состоит из m лепестков и имеет в полюсе кратную точку. При дробном m С. с. состоит из p лепестков, к-рые могут перекрывать друг друга, образуя новые кратные точки. При целом отрицательном m С. с. не проходит через полюс и имеет $|m|$ бесконечных ветвей. При $m=1$ С. с.— окружность, при $m=-1$ — прямая, при $m=2$ — лемниската Бернулли, при $m=-2$ — равнобочная гипербола, при $m=\frac{1}{2}$ — кардиоида, при $m=-\frac{1}{2}$ — парабола, при $m=4$ С. с. изображена на рисунке сплошной линией, при $m=-4$ — пунктирной. Инверсия С. с. относительно полюса даёт С. с. с заменой m на $-m$.



СИ́НУС-ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — то же, что *Фурье преобразование* нечётной функции.

СИСТЕМАТИ́ЧЕСКАЯ ОШИ́БКА — см. *Наблюдений обработка*, *Наименьших квадратов метод*, *Ошибок теория*.

СКАЛЯ́Р (от лат. scalaris — ступенчатый), с к а л я р н а я в е л и ч и н а,— величина, каждое значение которой может быть выражено одним (как правило, действи-

тельным) числом, напр. длина, площадь, температура. Термин «скалярный» ввёл У. Гамильтон (1843).

СКАЛЯ́РНАЯ МА́ТРИЦА — см. *Диагональная матрица.*

СКАЛЯ́РНОЕ ПО́ЛЕ — функция точки некоторого пространства, значениями которой являются действительные числа (см. *Векторный анализ*). Примеры С. п.: поле температуры внутри тела, поле плотности.

СКАЛЯ́РНОЕ ПРОИЗВЕДЕ́НИЕ, внутреннее произведение, (a, b) векторов a и b пространства или плоскости — произведение их модулей на косинус угла φ между ними:

$$(a, b) = |a|\,|b| \cos\varphi, \text{ если } a \neq 0,\ b \neq 0,$$
$$(a, b) = 0, \text{ если } a = 0, \text{ или (и) } b = 0;$$

другие обозначения: ab, $a \cdot b$. За φ принимается угол между векторами, не превосходящий π.

Свойства С. п.:

$$(a, b) = (b, a),\ (a, b+c) = (a, b) + (a, c),$$
$$\lambda(a, b) = (\lambda a, b) = (a, \lambda b).$$

Если $a \perp b$, то $(a, b) = 0$. С. п.

$$(a, a) = a^2 = |a|^2$$

наз. скалярным квадратом вектора a. Если в ортонормированном базисе векторы a и b имеют координаты $\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\{b_1, b_2, b_3\}$, то

$$(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Понятие «С. п.» обобщается на многомерные векторные пространства: это — действительное или комплексное число (x, y), сопоставляемое элементам x и y векторного пространства, такое, что:

1) $(x, x) = 0$ в том и только в том случае, если $x = 0$,
2) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$,
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
4) $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Следствием является соотношение $(x, x) \geqslant 0$.

Примеры С. п.:

1) $(x, y) = \sum x_i \overline{y_j}$ (С. п. в l_2),

2) $(f, g) = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$ (С. п. в L_2),

3) $(x, y) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)y(t)\,dt.$

Векторное пространство со С. п. наз. n-мерным евклидовым пространством или предгильбертовым пространством. Полное относительно нормы $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ предгильбертово пространство наз. гильбертовым пространством.

Понятие «С. п.» и название введены У. Гамильтоном (1853); под названием «внутреннее произведение» его употреблял Г. Грассман (1844). Обозначение (a, b) С. п. векторов a и b впервые встречается у О. Хенричи (1903); $a \cdot b$ — у Дж. Гиббса (1881).

СКАЧО́К функции — см. *Разрыва точка.*

СКО́БКИ — знаки ( ), [ ], { } и т. п., употребляемые, напр., для обозначения порядка выполнения математических действий.

СКОЛЬЗЯ́ЩИЙ ВЕ́КТОР — множество равных между собой векторов, расположенных на одной прямой. С. в. является, напр., сила, приложенная к твёрдому телу.

СКРЕ́ЩИВАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫ́Е — прямые в пространстве, не лежащие в одной плоскости.

Углом между С. п. наз. любой из углов между двумя параллельными им прямыми, проходящими через произвольную точку пространства. Если a и b — направляющие векторы С. п., то косинус угла между С. п. выражается формулой

$$\cos\varphi = \pm \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|}.$$

Общим перпендикуляром двух С. п. наз. прямая, пересекающая каждую из прямых и им перпендикулярная. Для любых двух С. п. существует единственный общий перпендикуляр. Уравнения (как линии пересечения двух нек-рых плоскостей) общего перпендикуляра к двум С. п. $r = r_1 + at_1$ и $r = r_2 + bt_2$ имеют вид

$$((r - r_1),\ a,\ [a, b]) = 0,$$
$$((r - r_2),\ b,\ [a, b]) = 0.$$

Расстоянием между С. п. наз. длина отрезка общего перпендикуляра к этим двум прямым, концы к-рого лежат на этих прямых (или расстояние между параллельными плоскостями, в к-рых лежат С. п.). Расстояние d между С. п. выражается формулой

$$d = \frac{|((r_1 - r_2),\ a,\ b)|}{|[a, b]|}.$$

СЛА́БАЯ ПРОИЗВО́ДНАЯ, производная Гато,— см. *Производная* отображения.

СЛА́БАЯ ТОПОЛО́ГИЯ — см. *Функциональный анализ.*

СЛА́БЫЙ ДИФФЕРЕНЦИА́Л, дифференциал Гато,— см. *Дифференциал.*

СЛАВЯ́НСКИЕ ЦИ́ФРЫ — цифровое значение славянских азбук. Так, для кириллицы:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
А	В	Г	Д	Є	S	Ζ	Н	Θ
10	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**
І	К	Л	М	Ν	Ѯ	О	П	Ч
100	**200**	**300**	**400**	**500**	**600**	**700**	**800**	**900**
Р	С	Т	Ѹ	Ф	Х	Ѱ	Ѡ	Ц

Для обозначения чисел над буквами ставился специальный знак ҃ титло (иногда над каждой буквой, иногда только над первой или же над всем числом). При записи чисел, больших 10, цифры писались слева направо в порядке убывания десятичных разрядов (однако иногда для чисел от 11 до 19 единицы записывались ранее десяти). Для обозначения тысяч перед числом их (слева внизу) ставился особый знак ⁄. Так, напр.:

В҃ І҃ — «веди», «и» — 12,

К҃ В҃ — «како», «веди» — 22,

Р҃ N҃ S҃ — «рцы», «наш», «зело» — 156,

Ζ҃ В҃ — «земля», «веди» — 7002,

Т҃ К҃ А҃ — «твердо», «како», «аз» — 320001.

Для обозначения и наименования высших десятичных разрядов (более 10^3) существовали две системы: «малое число» и «великое число»; в последнюю систему входили числа до 10^{49} или даже 10^{50} («боле сего несть человеческому уму разумевати»):

		малое число	великое число
Ⓐ	*тьма*	10^4	10^6
Ⓐ	*легион*	10^5	10^{12}
Ⓐ	*леондр*	10^6	10^{24}
Ⓐ	*ворон (вран)*	10^7	10^{48}
Ⓐ	*колода*	10^8	10^{49} (или 10^{50})

С. ц. до 18 в. были основным цифровым обозначением в России.

СЛЕД квадратной матрицы — сумма диагональных элементов матрицы. С. матрицы $A=||a_{ik}||_1^n$ обозначается $\mathrm{tr}A$ (от англ. trace — след) или $\mathrm{Sp}A$ (от нем. Spur — след); таким образом,

$$\mathrm{tr}\,A=a_{11}+\ldots+a_{nn}.$$

Если A и B — матрицы одного порядка над полем K и $\alpha\in K$, то

$$\mathrm{tr}\,(A+B)=\mathrm{tr}\,A+\mathrm{tr}\,B,$$

$$\mathrm{tr}\,AB=\mathrm{tr}\,BA,\ \mathrm{tr}\,\alpha A=\alpha\,\mathrm{tr}\,A.$$

Подобные матрицы имеют одинаковый след. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A и каждое собственное значение выписано столько раз, какова его кратность над алгебраически замкнутым полем, то

$$\mathrm{tr}\,A=\lambda_1+\ldots+\lambda_n.$$

СЛО́ВО — конечная последовательность букв некоторого алфавита. Напр., ряд знаков

слововалфавите

является С. в алфавите, состоящем из букв

е, т, и, в, а, ф, л, о, с.

Для удобства к рассмотрению допускается п у с т о е С., то есть С., не содержащее ни одной буквы. Оно является С. в любом алфавите. С. в алфавите A индуктивно определяются следующими правилами: а) пустое С. считается С. в алфавите A; б) если объект P оказался С. в алфавите A, а ξ является буквой этого алфавита, то объект $P\xi$ также считается С. в алфавите A. Индуктивная характеризация С. делает оправданным применение правила индукции для доказательства утверждений типа всеобщности о С. в данном алфавите.

С. представляет собой достаточно общий тип конструктивного объекта, и в силу этого обстоятельства понятие С. играет важную роль в конструктивной математике.

О С. в теории информации см. в ст. *Код*.

СЛОЖЕ́НИЕ — арифметическое действие. Результатом С. чисел a и b является число, наз. с у м м о й чисел a и b (слагаемых) и обозначаемое $a+b$. При С. выполняются переместительный (коммутативный) закон: $a+b=b+a$ и сочетательный (ассоциативный) закон: $(a+b)+c=a+(b+c)$. Помимо С. чисел рассматривают действия, также называемые С., над различными другими математическими объектами (С. многочленов, векторов, матриц и т. д.). К операциям, не подчиняющимся переместительному и сочетательному законам, термин «С.», как правило, не применяют.

СЛОЖЕ́НИЕ ВЕРОЯ́ТНОСТЕЙ — см. *Вероятностей теория*.

СЛО́ЖНАЯ СИСТЕ́МА — см. *Кибернетика*.

СЛО́ЖНАЯ СТАТИСТИ́ЧЕСКАЯ ГИПО́ТЕЗА — см. *Статистическая гипотеза*.

СЛО́ЖНАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция от функции. Если величина y является функцией от u, то есть $y=f(u)$, а u, в свою очередь, функцией от x, то есть $u=\varphi(x)$, то y является С. ф. от x, то есть $y=f[\varphi(x)]$, определённой для тех значений x, для к-рых значения $\varphi(x)$ входят в множество определения функции $f(u)$. В таком случае говорят, что y является С. ф. независимого аргумента x, а u — промежуточным аргументом. Иными словами, С. ф.— это результат композиции (суперпозиции) функций $\varphi(x)$ и $f(u)$.

Напр., если $y=u^2$, $u=\sin x$, то $y=\sin^2 x$ для всех значений x. Если же, напр., $y=\sqrt{u}$, $u=\sin x$, то $y=\sqrt{\sin x}$, причём, если ограничиваться действительными значениями функции, С. ф. y как функция x определена только для таких значений x, для к-рых $\sin x\geqslant 0$, то есть для $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$, где $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Производная С. ф. равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу. Это правило (цепное правило) распространяется на С. ф. с двумя, тремя и т. д. промежуточными аргументами: если $y=f(u_1)$, $u_1=\varphi_1(u_2)$, $\ldots$, $u_{k-1}=\varphi_{k-1}(u_k)$, $u_k=\varphi_k(x)$, то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du_1}\cdot\frac{du_1}{du_2}\cdots\frac{du_{k-1}}{du_k}\cdot\frac{du_k}{dx}.$$

СЛО́ЖНОЕ ОТНОШЕ́НИЕ — то же, что *двойное отношение*.

СЛО́ЖНОСТЬ АЛГОРИ́ТМА — величина, характеризующая длину описания алгоритма или громоздкость процессов его применения к исходным данным.

С л о ж н о с т ь о п и с а н и я алгоритма зависит от выбора того или иного способа задания алгоритмов. Если такой способ зафиксирован, то С. а. чаще всего понимают как сложность записи алгоритма, к-рая, в свою очередь, может определяться различными способами. Это может быть длина записи, количество встречающихся в ней символов или выражений определённого типа и т. п. Под сложностью описания *Тьюринга машины* обычно понимают число её внутренних состояний и внешних символов. Иногда в качестве характеристики сложности машины Тьюринга используют число команд в программе данной машины. Сложность *нормального алгорифма* определяется как длина его изображения, т. е. длина слова, полученного выписыванием друг за другом всех формул подстановки в том порядке, в каком они встречаются в схеме данного алгоритма, причём между формулами вставляется специальная разделительная буква.

Сложность процесса применения алгоритма к исходным данным наз. с л о ж н о с т ь ю в ы ч и с л е н и й. Процесс вычисления зависит от исходного объекта, к к-рому применяется алгоритм. Поэтому сложность вычислений данного алгоритма есть функция, сопоставляющая каждому объекту из области применимости данного алгоритма число, характеризующее сложность процесса применения этого алгоритма к данному объекту. Такая функция наз. с и г н а л и з и р у ю щ е й. Наиболее важные характеристики сложности работы алгоритма — длительность алгоритмич. процесса во времени и объём промежуточных результатов. Для машины Тьюринга с и г н а л и з и р у ю щ а я в р е м е н и — число тактов работы машины при преобразовании исходного слова в результат; с и г н а л и з и р у ю щ а я п а м я т и (или ё м к о с т и) — количество ячеек ленты, в к-рых хотя бы раз побывала головка машины Тьюринга при работе над исходным словом. Для нормальных алгорифмов сигнализирующая времени — число применений формул подстановки при работе данного алгоритма над исходным словом; сигнализирующая ёмкости — максимальная длина слов, появляющихся в процессе применения алгоритма к данному слову.

Изучение С. а. началось в 60-х гг. 20 в. Этот раздел теории алгоритмов имеет важное теоретич. и практич. значение. Разрабатываемые методы оценки сложности алгоритмов позволяют находить наиболее эффективные способы вычисления арифметич. функций. В терминах сложности вычислений удаётся уточнить и исследовать многие проблемы, возникающие в связи с нахождением оптимального алгоритма для решения конкретных задач. Развивается аксиоматич. подход к изучению сложности алгоритмов и вычислений.

● Трахтенброт Б. А., Сложность алгоритмов и вычислений, Новосиб., 1967.

СЛО́ЖНЫЙ ПРОЦЕ́НТ — см. *Процент*.

СЛУЧА́ЙНАЯ ВЕЛИЧИ́НА — одно из основных понятий теории вероятностей. В самом общем смысле С. в.— это нек-рая переменная величина, принимающая в зависимости от случая те или иные значения с определёнными вероятностями. Так, напр., число очков, выпадающее на верхней грани игральной кости, представляет собой С. в., принимающую значения 1, 2, 3, 4, 5, 6 с вероятностями $^1/_6$ каждое. Строгое математич. определение С. в. как измеримой функции, заданной на нек-ром вероятностном пространстве, даётся в рамках общепринятой аксиоматики теории вероятностей: именно, для вероятностного пространства (Ω, A, P) с л у ч а й н о й в е л и ч и н о й наз.

любая однозначная действительная функция $X(\omega)$, определённая для $\omega\in\Omega$ и такая, что для всех действительных значений x множество $\{\omega : X(x)<x\}$ принадлежит σ-алгебре A (см. *Вероятностей теория*). Важнейшей характеристикой С. в. служит её распределение вероятностей. Если различные значения С. в. X образуют конечную или бесконечную последовательность, то распределение вероятностей С. в. X задаётся указанием этих значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и соответствующих им вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, то есть вероятностей всех случайных событий $\{X=x_k\}$. С. в. указанного типа наз. дискретными. Во всех других случаях распределение вероятностей задаётся указанием для каждого действительного значения x вероятности $\mathsf{P}\{X<x\}$ или каждого интервала (a, b) значений С. в. X вероятности $\mathsf{P}\{a<X<b\}$. Важную роль играют С. в., для к-рых определена такая неотрицательная функция $p(x)$ на прямой, что для любого интервала (a, b)

$$\mathsf{P}\{a<X<b\}=\int_a^b p(x)\,dx \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx=1.$$

С. в. этого типа наз. непрерывными, а функция $p(x)$ наз. плотностью вероятности. Наиболее полную информацию о распределении С. в. дают *распределения функция* и *характеристическая функция* С. в. Ряд общих свойств распределения вероятностей С. в. в достаточной степени описывается небольшим количеством числовых характеристик, среди к-рых наиболее употребительны *математическое ожидание* (среднее значение) $\mathsf{E}X$ и *дисперсия* $\mathsf{D}X$ С. в. X. Кроме указанных характеристик также используются *момент*, *медиана*, *квантили*, *семиинварианты* и т. п. Значениями С. в. могут быть не только действительные числа, но и векторы, комплексные числа и др. объекты. Обобщением понятия С. в. служит понятие *случайного элемента* какого-либо функционального пространства.

А. В. Прохоров.

СЛУЧА́ЙНАЯ ВЫБОРКА — см. *Выборка*.

СЛУЧА́ЙНАЯ ОШИ́БКА — см. *Наблюдений обработка*, *Наименьших квадратов метод*, *Ошибок теория*.

СЛУЧА́ЙНАЯ ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ, временно́й ряд,— *случайная функция*, заданная на множестве всех целых чисел или целых положительных чисел, или *случайный процесс* с дискретным временем.

СЛУЧА́ЙНАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция $X(t)$ произвольного аргумента t, $t\in T$, значения которой при любом t являются случайной величиной с определённым *распределением* вероятностей. С. ф. может принимать числовые значения или, более общо, значения из к.-л. векторного пространства. Если множество T значений t конечно, то С. ф. представляет собой конечный набор *случайных величин*, к-рый можно рассматривать как одну многомерную случайную величину (случайный вектор). Из числа С. ф. с бесконечным T наиболее изучен важнейший частный случай, когда t принимает числовые значения и интерпретируется как время; соответствующая С. ф. $X(t)$ тогда наз. *случайным процессом* (если t пробегает лишь целочисленные значения, то также и случайной последовательностью или временны́м рядом). Если же значениями аргумента t являются точки из нек-рой области многомерного пространства, то С. ф. наз. случайным полем. Типичными примерами С. ф., отличных от случайных процессов, являются поля скорости, давления и температуры турбулентного течения жидкости или газа, а также значения высоты взволнованной морской поверхности или поверхности к.-л. шероховатой пластинки.

Математич. теория С. ф. совпадает с теорией распределений вероятностей в функциональном пространстве значений функции $X(t)$; эти распределения могут задаваться набором конечномерных распределений вероятностей для совокупностей случайных величин $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$, отвечающих всевозможным конечным подмножествам $t_1, t_2, \ldots, t_n$ точек множества T, или же характеристическим функционалом, представляющим собой математич. ожидание случайной величины $e^{il[X(t)]}$, где $l[X(t)]$ — линейный функционал от $X(t)$ общего вида. Значительное развитие получила теория однородных случайных полей, являющихся частным классом С. ф., обобщающим класс *стационарных случайных процессов*.

СЛУЧА́ЙНОЕ БЛУЖДА́НИЕ — случайный процесс специального вида, исторически связанный с моделью перемещения частицы под действием нек-рого случайного механизма в произвольном фазовом пространстве. Обычно рассматривается С. б., порождаемое суммами взаимно независимых одинаково распределённых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ или цепями Маркова. Пусть $S_0=0$, $S_n=X_1+\ldots+X_n$, тогда последовательность координат (n, S_n), $n=0,1,2, \ldots$, описывает траекторию С. б. Основные черты общих С. б. можно охарактеризовать на примере простейшего случайного блуждания, порождаемого схемой испытаний Бернулли. Описание С. б. принято в терминах частицы, к-рая движется («блуждает») по точкам вида k (k — целое) оси x. Движение начинается в момент $t=0$, и положение частицы меняется только в дискретные моменты времени 0, 1, 2, ... На каждом шаге координата частицы увеличивается или уменьшается на величину 1 с вероятностями p и $q=1-p$, соответственно, независимо от предшествующего движения. Обычно С. б. изображают геометрически, беря ось t за ось абсцисс, а ось x — за ось ординат. Пусть X_j — случайная величина, равная величине перемещения частицы на j-м шаге, т. е. $X_j=1$ с вероятностью p и $X_j=-1$ с вероятностью q. Тогда X_1, ..., X_n, ... образуют последовательность независимых бернуллиевских случайных величин (схема Бернулли). Координата блуждающей частицы в момент n равна сумме $S_n=X_1+\ldots+X_n$. Можно по аналогии определить С. б. по точкам вида kh ($h>0$) такое, что координата частицы увеличивается или уменьшается на величину h в дискретные моменты времени 0, Δt, $2\Delta t$, ... ($\Delta t>0$). График такого С. б. даёт наглядное представление о поведении нарастающих сумм случайных величин, причём многие характерные закономерности сохраняются и для сумм значительно более общих случайных величин. Классич. интерпретация такого С. б.— это изменение капитала одного из игроков в задаче о разорении. Обычно С. б., как одномерное, так и его многомерное обобщение, используют для приближённого описания процессов диффузии и броуновского движения частиц. С. б. является примером *марковского процесса*, многие С. б. могут быть описаны как *Маркова цепи* или *ветвящиеся процессы*. Однако при анализе С. б. возникает ряд специфич. задач, напр.: распределение максимума последовательности сумм, распределение первого момента достижения нек-рой точки, возвращение траектории в начало координат. Пусть блуждание начинается из нуля (при $h=1$, $\Delta t=1$). Тогда вероятность хотя бы одного возвращения в нуль равна 1 при $p=q=\frac{1}{2}$ (симметричный случай) и меньше 1 при $p\neq q$. При $p>q$ или $p<q$ частица уходит с вероятностью 1 в $+\infty$ или $-\infty$ соответственно. В симметричном случае время до N-го возвращения в нуль растёт как N^2, а среднее число возвращений за $2n$ шагов растёт как $\sqrt{n}$. Отсюда можно сделать парадоксальный вывод: в симметричном С. б. промежутки между последовательными возвращениями в нуль оказываются поразительно длинными. Кроме того, значения доли времени, к-рое траектория проводит выше оси абсцисс, близкие к $\frac{1}{2}$, оказываются наименее вероятными. Точное утверждение даётся т. н. законом арксинуса.

Часто рассматривают С. б. с отражающими или поглощающими границами. Наличие в точке поглощающего экрана проявляется в том, что по достижении этой точки частица перестаёт двигаться. При наличии в точке $k+\frac{1}{2}$ отражающего экрана частица с вероятностью q переходит из k в $k-1$ и с вероятностью $p=1-q$ остаётся на месте.

Основным средством вычисления вероятностей поглощения и достижения тех или иных точек служат разностные уравнения. Предельным переходом С. б. сводится к процессам диффузии. Пусть, напр., $p=q=1/2$, $\Delta t=1/N$, $h=1/\sqrt{N}$, тогда при $N\to\infty$ многие вероятности, вычисленные в схеме С. б., стремятся к аналогичным вероятностям для процесса броуновского движения. Для более полного описания предельных соотношений необходимо совершить переход от дискретного процесса нарастающих сумм к непрерывному случайному процессу (см. *Винеровский процесс*).

Схема С. б. оказывается очень удобной для наглядного объяснения общих закономерностей поведения сумм случайных величин. С. б. возникают как в теоретич. задачах, так и в приложениях теории вероятностей, таких, напр., как последовательный статистич. анализ, теория массового обслуживания.

● Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, пер. с англ., т. 1–2, М., 1984.

А. В. Прохоров.

СЛУЧА́ЙНОЕ ПО́ЛЕ — *случайная функция*, заданная на множестве точек какого-то многомерного пространства.

СЛУЧА́ЙНОЕ СОБЫ́ТИЕ — одно из основных понятий теории вероятностей. С. с. наз. событие, наступление или ненаступление к-рого в нек-ром испытании (эксперименте) зависит от ряда случайных факторов и для к-рого постулируется определённая вероятность его наступления при данных условиях. Наличие у С. с. A определённой вероятности p проявляется в поведении его частоты $\frac{m}{n}$ в n повторных испытаниях, к-рые происходят в неизменных условиях; при больших n частота $\frac{m}{n}$ оказывается близкой к p в смысле, указываемом законом больших чисел. В рамках аксиоматики теории вероятностей основой вероятностной модели нек-рого эксперимента служит вероятностное пространство (Ω, A, P), где Ω — пространство элементарных событий (множество исходов данного эксперимента), A — σ-алгебра подмножеств Ω, P — вероятность, определённая для элементов класса A как неотрицательная, нормированная, аддитивная функция множества. С. с. наз. подмножества Ω, являющиеся элементами класса A. С. с. Ω наз. достоверным, а событие $\varnothing$ (пустое множество) — невозможным. Операции над С. с. соответствуют операциям над множествами. Вероятностью С. с. A наз. значение $P(A)$ функции множеств P.

СЛУЧА́ЙНЫЕ ЧИ́СЛА — числа, которые могут рассматриваться как значения независимых одинаково распределённых случайных величин. Как правило, имеются в виду значения случайных величин с равномерным распределением в промежутке (0, 1) или приближения к таким значениям, имеющие конечное число цифр в своём представлении. В таком узком смысле С. ч. (равномерно распределённые С. ч.) можно определить как числа, составленные из случайных цифр. Случайные цифры в m-ичной системе счисления являются результатами независимых испытаний с m равновероятными исходами (каждому исходу соответствует одна из m цифр и вероятность $1/m$). Для построения С. ч. с нек-рым заданным распределением производится подходящее преобразование равномерно распределённых С. ч.

Использование С. ч. было связано с техникой случайного выбора в математич. статистике и теории игр. Роль С. ч. значительно возросла в связи с возникновением *статистических испытаний метода*. Источником С. ч. первоначально служили результаты переписи населения, тиражные таблицы и другие таблицы чисел, полученные экспериментальным путём (напр., с помощью рулетки). Первые специальные таблицы С. ч. были составлены в 1927 для процедуры случайного выбора при планировании эксперимента. В настоящее время (1987) самая большая опубликованная таблица С. ч. содержит 1 000 000 случайных цифр. В дальнейшем в связи с задачами моделирования на ЭВМ были созданы специальные экспериментальные устройства-датчики или генераторы С. ч. В настоящее время большая часть расчётов по методу статистич. испытаний на ЭВМ производится с использованием т. н. псевдослучайных чисел (п. с. ч.) — чисел, получаемых по к.-л. формуле (алгоритму) и имитирующих С. ч. в том смысле, что их свойства близки к свойствам С. ч. Последовательности п. с. ч. α_n обычно получают на ЭВМ с помощью алгоритмов, среди к-рых наибольшее распространение получил т. н. метод вычетов, напр. в таком виде: $u_0=1, u_n\equiv u_{n-1}\cdot 5^{2p+1} \pmod{2^m}$, $\alpha_n=u_n\cdot 2^{-m}$. Получаемые последовательности п. с. ч. имеют период, что существенно отличает их от последовательностей С. ч. Алгоритмы получения п. с. ч. ещё недостаточно исследованы, но при расчётах на ЭВМ метод п. с. ч. обладает рядом преимуществ, в частности свойства последовательности п. с. ч. можно исследовать путём пробных вычислений, а все другие способы приводят каждый раз к новым последовательностям С. ч.

СЛУЧА́ЙНЫЙ ВЕ́КТОР — см. *Случайная функция*.

СЛУЧА́ЙНЫЙ ГРАФ — вероятностная модель, предназначенная для изучения частотных характеристик различных параметров графов. Под С. г. обычно понимается нек-рый класс графов $\mathcal{G}=\{G\}$, на к-ром задано распределение вероятностей. Произвольный конкретный граф G из $\mathcal{G}$ наз. реализацией С. г.

СЛУЧА́ЙНЫЙ ПРОЦЕ́СС, вероятностный, или стохастический, процесс,— процесс изменения во времени состояния какой-либо системы в соответствии с вероятностными закономерностями. Характеристики С. п. в любой момент времени являются случайными величинами с определённым распределением вероятностей. Одним из выразительных примеров С. п. служит физич. процесс броуновского движения. Многие важные процессы в природе и на производстве являются примерами С. п.: турбулентные течения жидкостей и газов, распространение радиоволн при наличии помех, движение транспортных потоков и др.

С. п. обычно представляют как однопараметрич. семейство случайных величин $X(t)$, $t\in T$. Параметр t принимает произвольные действительные значения из подмножества T прямой $\mathbb{R}$ и обычно называется временем. Как правило, $X(t)$ — числовая функция времени t; если же значения $X(t)$ являются векторами, то соответствующий С. п. наз. многомерным. Возможные значения $X(t)$ определяют состояния системы (состояния С. п.) в любой момент времени t, к-рые могут быть схематически представлены как точки нек-рого фазового пространства (пространства состояний). С. п. $X(t)$ описывается совокупностью совместных распределений вероятностей величин $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ для всевозможных моментов времени $t_1, \ldots, t_n$ при любом $n>0$, к-рые наз. конечномерными распределениями С. п. $X(t)$. Теория С. п. является наиболее развитой ветвью общей теории *случайных функций* произвольного аргумента (понятие С. п. исторически связано с временно́й интерпретацией параметра t; если же t — вектор, то говорят о случайном поле).

В теории С. п. выделены основные классы и подклассы С. п., описывающие различные области применения. С. п. классифицируют прежде всего по строению фазового пространства, к-рое может быть дискретным и непрерывным, и по характеру изменения аргумента t (дискретное или непрерывное время). С. п. с дискретным временем (t принимает целочисленные значения) наз. также случайной последовательностью или временным рядом.

Более содержательна классификация С. п. по зависимости между значениями $X(t)$ в различные моменты времени t. В первую очередь выделяются 1) С. п. с независимыми значениями: при любых t_1 и t_2, $t_1\neq t_2$, случайные величины $X(t_1)$ и $X(t_2)$ независимы; 2) С. п. с независимыми приращениями: для любых непересекающихся интервалов времени $[t_1', t_2']$ и $[t_1'', t_2'']$, $t_2'<t_1''$, случайные величины $X(t_2')-X(t_1')$ и

$X(t_2'')-X(t_1'')$ независимы; 3) С. п. с марковским свойством, или свойством отсутствия последействия (см. *Марковский процесс*): условное распределение $X(t_1)$, $t_0<t_1$, при условии, что заданы все значения $X(t)$ при $t\leqslant t_0$, зависит только от $X(t_0)$, иными словами, состояние С. п. $X(t)$ в любой момент t_0 определяет распределение вероятностей, относящееся к будущему процесса; 4) *стационарные случайные процессы*: вероятностные характеристики С. п. неизменны во времени, в частности при любых t и s случайные величины $X(t)$ и $X(t+s)$ имеют одинаковое распределение; случайные величины $(X(t_1), X(t_2))$ и $(X(t_1+s), X(t_2+s))$ имеют одинаковые совместные распределения и т. д. (среди стационарных случайных процессов особую роль играют т. н. гауссовские процессы, у к-рых все конечномерные распределения вероятностей являются нормальными распределениями); 5) мартингалы: условное математич. ожидание $X(t)$ при условии, что известно поведение процесса до момента $s<t$, равно $X(s)$.

Способы описания и анализа С. п. разнообразны и приспособлены к тем или иным классам; напр., в теории марковских С. п. используются методы решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, в теории стационарных С. п.— методы функционального анализа.

Зарождение теории С. п. связано с работами А. А. Маркова по изучению последовательностей зависимых испытаний — *Маркова цепей* (пример С. п. с дискретным множеством состояний и дискретным временем). Наиболее значительные результаты теории С. п. относятся к двум важнейшим общим направлениям — марковские и стационарные С. п. (см. также *Ветвящийся процесс, Винеровский процесс, Пуассоновский процесс*). Выделен широкий класс С. п., для к-рых эффективно решаются задачи интерполяции и экстраполяции (см., напр., *Случайных процессов прогнозирование*). К новейшим направлениям теории С. п. относится изучение процессов, нек-рыми параметрами к-рых можно управлять; цель управления состоит в максимизации (минимизации) среднего значения к.-л. определённой характеристики. В рамках теории С. п. решается большинство задач теории массового обслуживания.

● Вентцель А. Д., Курс теории случайных процессов, М., 1975; Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; Розанов Ю. А., Введение в теорию случайных процессов, М., 1972. *А. В. Прохоров.*

СЛУЧА́ЙНЫЙ ПРОЦЕ́СС БЕЗ ПОСЛЕДЕ́ЙСТВИЯ — то же, что *марковский процесс*; см. также *Вероятностей теория.*

СЛУЧА́ЙНЫЙ ЭЛЕМЕ́НТ — обобщение понятия случайной величины. Термин «С. э.» был введён, по-видимому, М. Фреше (1948), отмечавшим, что развитие теории вероятностей и расширение области её приложений привели к необходимости перейти от схем, где (случайные) исходы опыта могут быть описаны числом или конечным набором чисел, к схемам, где исходы опыта представляют собой, напр., ряды, функции, кривые, преобразования.

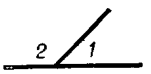
Впоследствии термин «С. э.» стал употребляться в основном применительно к выбранным «случайным образом» элементам какого-либо топологич. векторного пространства, в первую очередь гильбертовых и банаховых пространств. Точное определение, напр. С. э. X в банаховом пространстве B, напоминает определение случайной величины. Пусть (Ω, S, P) — нек-рое вероятностное пространство, B — банахово пространство, B^* — сопряжённое к B пространство. Отображение $X=X(\omega)$ пространства Ω элементарных событий ω в B наз. случайным элементом, если всякий непрерывный линейный функционал $x^*(X(\omega))$ оказывается при этом случайной величиной, т. е. S-измеримой функцией.

На С. э. могут быть распространены основные понятия теории вероятностей, такие, как характеристич. функция, математич. ожидание, ковариация и т. п.

СЛУЧА́ЙНЫХ ПРОЦЕ́ССОВ ПРОГНОЗИ́РОВАНИЕ, экстраполирование случайных процессов,— предсказание значения случайного процесса в некоторый будущий момент времени по наблюдённым значениям этого процесса (или, более общо, какого-либо статистически с ним связанного процесса, напр. суммы прогнозируемого процесса с искажающими наблюдения случайными помехами, т. е. с «шумом») в прошлом и настоящем. Практически во всех представляющих интерес ситуациях предсказываемое значение процесса $X(t)$ в момент $t=t_1$ не может быть точно определено по имеющимся данным наблюдений и можно лишь добиваться, чтобы случайная ошибка прогноза $\Delta=X(t_1)-X_1(t_1)$ [где $X_1(t_1)$ — предсказанное значение $X(t_1)$] в среднем была бы по возможности наименьшей. В теории С. п. п. оптимальным (наилучшим) обычно считается прогноз, для к-рого минимально математич. ожидание квадрата ошибки Δ; такой оптимальный прогноз совпадает с условным математич. ожиданием случайной величины $X(t_1)$ при условии, что наблюдаемые величины, по к-рым строится прогноз, принимают фиксированные (известные из наблюдений) значения. Большое место в теории С. п. п. занимает теория оптимального линейного С. п. п., посвящённая методам нахождения линейной функции от данных наблюдений такой, что для неё средний квадрат её отклонения от $X(t_1)$ меньше, чем для всех других линейных функций; в ряде практически важных случаев такое оптимальное линейное С. п. п. совпадает с общим оптимальным С. п. п.

Общая теория оптимального линейного С. п. п. для стационарных случайных процессов была разработана А. Н. Колмогоровым и Н. Винером. Большое развитие получила также теория оптимального (и линейного, и общего нелинейного) прогнозирования процессов, являющихся компонентами марковских случайных процессов.

СМЕ́ЖНЫЕ УГЛЫ — углы, у которых одна сторона общая, а другие стороны лежат на одной прямой (на рис. углы 1 и 2 — смежные).



СМЕ́ЖНЫЙ КЛАСС группы по подгруппе — см. *Подгруппа.*

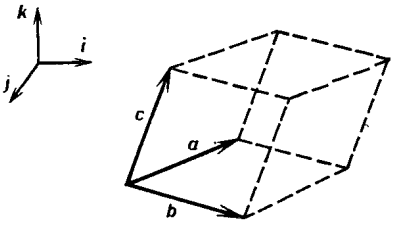
СМЕ́ШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕ́НИЕ (a, b, c) векторов a, b, c — скалярное произведение вектора a на векторное произведение векторов b и c:

$$(a, b, c)=(a, [b, c]).$$

С. п. обладает свойствами:

$$(a, b, c)=(b, c, a)=(c, a, b)=-(b, a, c)=$$
$$=-(c, b, a)=-(a, c, b),$$

$(a, b, c)=0$, если $a=0$ или (и) $b=0$, или (и) $c=0$, или a, b, c компланарны. С. п. численно равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах a, b, c, взятому со знаком плюс, если тройка a, b, c ориентирована так же, как тройка координатных векторов i, j, k, и со знаком минус в противоположном случае. Если в ортонормированном базисе векторы a, b, c имеют координаты



$$\{a_1, a_2, a_3\}, \{b_1, b_2, b_3\}, \{c_1, c_2, c_3\},$$

то

$$(a, b, c)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

СМЕ́ШАННОЕ ЧИСЛО́ — число, имеющее целую и дробную части, напр. $2\frac{2}{3}$, $-6\frac{7}{8}$.

СМЕ́ШАННЫЕ ВЫЧИСЛЕ́НИЯ — обобщённый способ исполнения программ для ЭВМ или абстрактных вычислителей, при котором изменению подвержены не только данные, обрабатываемые программой, но и сама программа.

С. в., преобразующие программу p и её данные d в программу p' с данными d', наз. корректными, если

$$\mathrm{Sem}\,(p,\ d)=\mathrm{Sem}\,(p',\ d'),$$

где $\mathrm{Sem}\,(p,\ d)$ — семантич. значение программы p для её данных d. Важным частным случаем С. в. являются т. н. частичные вычисления над не полностью заданными аргументами программы. Пусть программа $p\,(\mathrm{x},\ \mathrm{y})$ вычисляет функцию φ от этих же аргументов (x — значение переменной x). Частичным вычислением $M\,(P, X, Y)$, где P — программы, X — заданная часть аргументов с их значениями, Y — незаданная (свободная) часть аргументов, наз. отображение $M: P\times X\times Y\to P\times Y$, удовлетворяющее следующим свойствам:

$$M\,(p,\ (x,\ y),\ \varnothing)=\textbf{выдать}\ \varphi\,(x,\ y);$$
$$M\,(p,\ \varnothing,\ (\mathrm{x},\ \mathrm{y}))=p\,(\mathrm{x},\ \mathrm{y});$$
$$M\,(p,\ x,\ \mathrm{y})=p_x\,(\mathrm{y}),$$

где **выдать** $\varphi(x,\ y)$ — вырожденная программа «выдачи» константы, равной значению $\varphi(x,\ y)$, а $p_x(\mathrm{y})$ — т. н. остаточная программа, вычисляющая функцию φ_x, удовлетворяющую тождеству $\varphi_x(y)\ \ \varphi(x,\ y)$. Функция φ_x и программа p_x наз. также проекциями (специализациями, конкретизациями) соответственно функции φ и программы p на заданную часть x своих аргументов.

С. в. — одно из основных понятий *программирования теоретического*. Существование примитивно-рекурсивного частичного вычислителя, строящего для любой $(m+n)$-местной вычислимой функции её вычислимую проекцию на первые m её аргументов, является фундаментальной теоремой в теории рекурсивных функций (так наз. s-m-n-теорема). Понятие *трансляции* с одного языка программирования на другой непосредственно связано с частичными вычислениями. В прикладном программировании С. в. выступают как методологич. основа систематич. специализации универсальных многопараметрич. программ к особым условиям их применения, что позволяет находить эффективные частные алгоритмы без утраты общего знания, заложенного в универсальном алгоритме решения класса задач.

СМЕ́ШАННЫЙ ТЕ́НЗОР — см. *Тензорное исчисление*.

СНО́БОЛ — *программирования язык*, предназначенный для обработки текстовой информации. Разработан в 60-х гг. в США. Основным понятием С. является строка, к-рая представляет собой произвольную последовательность букв, цифр и других символов. В языке предусмотрены различные операции над строками: их формирование, поиск вхождения в строку определённой последовательности символов, замена или удаление строки и другой подстановки. Наиболее характерной операцией в С. является операция сопоставления строки с образцом (особым выражением, к-рое задаёт ожидаемую структуру строки). При удачном сопоставлении происходит расчленение её на подслова, к-рые присваиваются др. переменным или замещаются на др. слова. Программа на С. имеет вид последовательности таких команд, как присваивание, передача управления по метке, ввод, вывод и др. Однородные данные в языке объединяются в векторы и таблицы, произвольные данные — в наборы с поименованными элементами.

● Грисуолд Р., Поудж Дж., Полонский И., Язык программирования СНОБОЛ-4, пер. с англ., М., 1980.

СО́БСТВЕННАЯ ФУ́НКЦИЯ, фундаментальная функция, характеристическая функция, — понятие математического анализа. При решении многих задач математич. физики (в теории колебаний, теплопроводности и т. д.) возникает необходимость в нахождении не равных тождественно нулю решений однородных линейных дифференциальных уравнений $L(y)=\lambda y$, удовлетворяющих тем или иным краевым условиям. Такие решения называют С. ф. задачи, а соответствующие значения λ — собственными значениями. Если дифференциальное уравнение с соответствующими краевыми условиями — самосопряжённое, то его собственные значения действительны, а С. ф., соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Если дифференциальное уравнение рассматривается на конечном отрезке и его коэффициенты не имеют на этом отрезке особенностей, то множество С. ф. счётно (задача имеет дискретный спектр); знание С. ф. и соответствующих собственных значений позволяет тогда при нек-рых условиях получить решение задачи в виде ряда по С. ф. (см. *Фурье метод*). Если же уравнение рассматривается на бесконечном промежутке или его коэффициенты имеют особенности, то может существовать континуум С. ф., и вместо разложения в ряд получается разложение в интеграл по С. ф., аналогичное представлению в виде интеграла Фурье. В этом случае говорят, что задача имеет непрерывный спектр.

В теории интегральных уравнений С. ф. ядра $K(x,\ y)$ называют функцию, удовлетворяющую при нек-ром значении λ уравнению

$$\int_a^b K\,(x,\ y)\,\varphi\,(y)\,dy-\lambda\varphi\,(x).$$

Всякое симметрич. непрерывное ядро имеет С. ф. В этом случае всякая функция, представимая в виде

$$\int_a^b K\,(x,\ y)\,h\,(y)\,dy,$$

может быть разложена в ряд по С. ф. Если ядро имеет особенности или задано в бесконечной области, то может также возникнуть непрерывный спектр.

Наиболее общим образом С. ф. можно определить как *собственные векторы* линейных операторов в линейных функциональных пространствах. В квантовой механике С. ф. оператора, отвечающего к.-л. физич. величине, соответствуют состояниям системы, в к-рых данная физич. величина имеет определённое значение.

СО́БСТВЕННОЕ ЗНАЧЕ́НИЕ, собственное число, характеристическое число, характеристический корень, линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в векторном пространстве V, — число λ, для которого существует ненулевой вектор x этого пространства такой, что $\mathcal{A}x=\lambda x$; вектор x при этом наз. собственным вектором оператора $\mathcal{A}$. Так, С. з. дифференциального оператора $L(y)$ с заданными краевыми условиями служат такие числа λ, при к-рых уравнение $L(y)=\lambda y$ имеет ненулевое решение, удовлетворяющее этим краевым условиям. Напр., если оператор $L(y)$ имеет вид $-y''$, то его С. з. при краевых условиях $y(0)=y(\pi)=0$ служат числа вида $\lambda_n=n^2$, где n — натуральное число, т. к. уравнению

$$-y''=n^2y \qquad (1)$$

с указанными краевыми условиями удовлетворяют функции $y_n=\sin nx$, если же $\lambda_n\neq n^2$ ни при каком натуральном n, то уравнению (1) при тех же краевых условиях удовлетворяет только функция $y\,(x)\equiv 0$. К изучению С. з. линейных операторов приводят многие задачи математики, механики и физики (аналитич. геометрии и алгебры, теории колебаний, квантовой механики и т. д.). См. также *Собственная функция*, *Собственный вектор*.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем k. Каждое С. з. оператора $\mathcal{A}$ (обычно называемого в этом случае линейным преобразованием) является корнем *характеристического многочлена*

$$\det\,(A-\lambda E), \qquad (2)$$

где A — матрица линейного преобразования $\mathcal{A}$ в нек-ром базисе, E — единичная матрица. Обратно, любой корень характеристич. многочлена, принадлежащий полю k, является С. з. линейного преобразования $\mathcal{A}$. Корни характеристич. многочлена (2) наз. также собственными значениями матрицы A. Кратность λ как корня характеристич. многочлена наз. алгебраич. кратностью (или просто кратностью) С. з. λ. Если кратность С. з. равна 1, то С. з. наз. простым. Совокупность $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_r$ всех С. з. с учётом их кратностей наз. спектром матрицы A, а также линей-

ного преобразования $\mathcal{A}$. Каждая матрица порядка n над алгебраически замкнутым полем k имеет n С. з., если каждое считать столько раз, какова его кратность. Сумма всех С. з. матрицы равна сумме диагональных элементов, т. е. следу матрицы. Подобные матрицы имеют одинаковые С. з. Если λ — С. з. матрицы A, то λ^p — С. з. матрицы A^p, p — натуральное число. С. з. сопряжённых матриц над полем комплексных чисел комплексно сопряжены. Матрица невырождена тогда и только тогда, когда все её С. з. отличны от нуля. Все С. з. эрмитовых и действительных симметрич. матриц действительны. Все С. з. ортогональных и унитарных матриц по модулю равны единице.

Геометрической кратностью С. з. λ наз. размерность собственного подпространства

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$$

(где $\mathcal{E}$ — тождественное преобразование), принадлежащего С. з. λ. Геометрич. кратность С. з. не превосходит его алгебраич. кратности. Линейное преобразование n-мерного пространства диагонализируемо (т. е. существует базис, в к-ром матрица линейного преобразования диагональна) тогда и только тогда, когда спектр преобразования $\mathcal{A}$ состоит из n элементов, причём алгебраич. кратность каждого С. з. равна его геометрич. кратности. В частности, для диагонализируемости линейного преобразования достаточно, чтобы оно имело n различных С. з.

Задача вычисления всех С. з. наз. полной проблемой С. з. Существует ряд задач, где достаточно указать границы, в к-рых лежат С. з. (напр., при изучении устойчивости процессов), или найти С. з., близкие к известному числу (напр., при изучении резонанса). Такого рода задачи наз. частичной проблемой С. з.

СО́БСТВЕННОЕ ПОДМНО́ЖЕСТВО — подмножество N непустого множества M, не совпадающее с самим этим множеством, т. е. строго содержащееся в нём; обозначается $N \subset M$.

СО́БСТВЕННОЕ ЧИСЛО́ матрицы — то же, что *собственное значение* матрицы; употребляется для матриц над числовыми полями.

СО́БСТВЕННЫЙ ВЕ́КТОР линейного преобразования $\mathcal{A}$ векторного пространства L — ненулевой вектор x из векторного пространства L (над полем k), для к-рого существует λ из k такое, что

$$\mathcal{A}x = \lambda x. \qquad (*)$$

Элемент λ в этом равенстве наз. *собственным значением* линейного преобразования $\mathcal{A}$, а x — С. в., принадлежащим собственному значению λ. С. в. порождает одномерное инвариантное подпространство линейного преобразования $\mathcal{A}$. Если λ — собственное значение, то все векторы x, удовлетворяющие условию (*), образуют ненулевое подпространство L_λ в L, наз. собственным подпространством, принадлежащим собственному значению λ, к-рое совпадает с ядром $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})$ линейного преобразования $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — тождественное преобразование. Если A — матрица линейного преобразования $\mathcal{A}$ в нек-ром базисе, то координатные столбцы X векторов из L_λ в том же базисе — это решения системы линейных уравнений $(A-\lambda E)X=0$ (здесь E — единичная матрица). Любое линейное преобразование конечномерного пространства L над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел (и, вообще, над любым алгебраически замкнутым полем) имеет хотя бы один С. в., однако линейное преобразование действительного векторного пространства может не иметь ни одного С. в. Напр., таков поворот евклидовой плоскости на любой угол, не кратный π. Матрица линейного преобразования диагональна тогда и только тогда, когда базис пространства L состоит из С. в. Однако такой базис не обязательно существует даже над полем комплексных чисел. Простейшим примером такого преобразования является линейное преобразование с матрицей $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

Собственный вектор квадратной матрицы A порядка n над полем k — собственный вектор линейного преобразования координатного пространства k^n, определяемого этой матрицей.

СОВЕРШЁННАЯ ДИЗЪЮНКТИ́ВНАЯ НОРМА́ЛЬНАЯ ФО́РМА — см. *Алгебра логики.*

СОВЕРШЁННАЯ КОНЪЮНКТИ́ВНАЯ НОРМА́ЛЬНАЯ ФО́РМА — см. *Алгебра логики.*

СОВЕРШЁННОЕ МНО́ЖЕСТВО — замкнутое множество, не имеющее изолированных точек, т. е. совпадающее с множеством всех своих предельных точек. Классич. примером нигде не плотного С. м. является *канторово множество*. Всякое непустое С. м. евклидова пространства имеет мощность континуума.

СОВЕРШЁННОЕ ЧИСЛО́ — целое положительное число, равное сумме всех своих правильных (т. е. меньших этого числа) делителей. Напр., числа $6=1+2+3$ и $28=1+2+4+7+14$ являются совершенными. Ещё Евклидом (3 в. до н. э.) было указано, что чётные С. ч. можно получить из формулы $2^{p-1}(2^p-1)$ при условии, что p и 2^p-1 есть числа простые. Таким путём было найдено (1987) 27 чётных С. ч. До сих пор неизвестно ни одного нечётного С. ч. и вопрос о существовании их остаётся открытым; известно лишь, что нечётных С. ч. нет в интервале от 1 до 10^{50}.

СОВМЕ́СТНАЯ СИСТЕ́МА — система уравнений, к-рая обладает хотя бы одним решением.

СОВМЕ́СТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЯ — общий термин, относящийся к распределению нескольких случайных величин, заданных на одном и том же вероятностном пространстве. См. *Распределение* вероятностей.

СОВМЕЩЕ́НИЕ СОБЫТИЙ — см. *Вероятностей теория.*

СОГЛА́СИЯ КРИТЕ́РИЙ — см. *Статистических гипотез проверка.*

СОИЗМЕРИ́МЫЕ И НЕСОИЗМЕРИ́МЫЕ ВЕЛИЧИ́НЫ — две однородные величины (напр., длины или площади), обладающие или, соответственно, не обладающие *общей мерой*. Примерами несоизмеримых величин могут служить длины диагонали и стороны квадрата или площади круга и квадрата, построенного на радиусе. Если величины соизмеримы, то их отношение выражается рациональным числом, отношение же несоизмеримых величин — иррациональным. Поэтому если в совокупности однородных величин принять одну за единицу, то величины, соизмеримые с ней, будут выражаться рациональными числами, а величины несоизмеримые — иррациональными. Открытие несоизмеримых величин составляет одну из важнейших заслуг древнегреческих математиков.

СОЛЕНОИДА́ЛЬНОЕ ПО́ЛЕ (от греч. $\sigma\omega\lambda\acute{\eta}\nu$ — трубка и $\varepsilon\tilde{\iota}\delta\circ\varsigma$ — вид), трубчатое поле, — векторное поле, не имеющее источников, то есть дивергенция которого равна нулю. Пример С. п. — магнитное поле, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{b}=0$, где $\boldsymbol{b}$ — вектор магнитной индукции. См. также *Векторный анализ.*

Слово «соленоидальный» ввёл А. Ампер, термин «С. п.» принадлежит У. Томсону (лорду Кельвину).

СОМНО́ЖИТЕЛЬ — см. *Умножение.*

СООБЩЕ́НИЕ в теории информации — всякий носитель информации. Понятие С. в теории информации имеет существенно вероятностный характер: каждый источник информации (или источник С.) задаётся перечислением возможных С. и соответствующих им вероятностей. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — возможные С., а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — соответствующие вероятности. Тогда количество информации в С. x_i принимают равным $\log_2 \frac{1}{p_i}$. Среднее количество информации в С. данного источника (его энтропия), т. е. сумма

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 \frac{1}{p_i},$$

является важнейшей характеристикой источника. Именно величина энтропии определяет возможности передачи и хранения С., производимых источником.

Пример. Пусть источником С. являются результаты N последовательных измерений с точностью до 0,1 нек-рой физич. величины, равномерно распределённой в интервале от нуля до единицы. Тогда, если указывать число десятых (с недостатком), возможными результатами отдельного измерения будут числа 0, 1, . . ., 9. Вероятность появления каждого из них равна 0,1. С. в данном примере представляется N-членными последовательностями цифр. Вероятность каждого С. равна $(0{,}1)^N$. Количество информации в каждом С. и энтропия источника равны $N \log_2 10 = 3{,}32\,N$ *двоичной единицы*. Можно сказать, что источником С. в этом примере является случайная последовательность десятичных знаков (цифр) длины N. Именно такую форму случайных последовательностей знаков (или, более общим образом, форму случайных процессов) имеют источники С., рассматриваемые в теории информации.

При изучении конкретных типов С., таких, как письменная речь, телеграфные, телефонные или телевизионные сигналы, обычно строится та или иная приближённая вероятностная модель источника С. Так, с достаточной для целей теории информации точностью в качестве модели русской письменной речи может быть принята т. н. сложная цепь Маркова. Для непрерывных С. в качестве моделей используются стационарные случайные процессы. Построение подобных моделей опирается на обширные статистич. данные, касающиеся рассматриваемых процессов.

Ю. В. Прохоров.

СООТВЕ́ТСТВИЕ, бинарное отношение, между двумя множествами A и B — произвольное подмножество R *декартова произведения* $A \times B$.

Если $a \in A$, $b \in B$ и $(a, b) \in R$, то пишут также $R(a, b)$ или aRb. Если $R = \varnothing$ — пустое множество, то С. наз. пустым, а если $R = A \times B$, то С. наз. полным.

Пусть $R \subseteq A \times B$. Областью определения $\mathrm{Dom}R$ наз. множество элементов $a \in A$, для каждого из к-рых найдётся хотя бы один элемент $b \in B$ такой, что aRb. Областью значений, или образом, $\mathrm{Im}R$ соответствия R наз. множество элементов $b \in B$, для каждого из к-рых найдётся хотя бы один элемент $a \in A$ такой, что aRb. Соответствие R наз. всюду определённым, если $\mathrm{Dom}R = A$, и сюръективным, если $\mathrm{Im}R = B$.

Для каждого $a \in A$ множество элементов $b \in B$ таких, что aRb, наз. образом a относительно R и обозначается $\mathrm{im}_R a$. Прообразом элемента $b \in B$ относительно R наз. множество элементов $a \in A$ таких, что aRb; прообраз обозначается $\mathrm{coim}_R b$. Ясно, что

$$\mathrm{Im}\,R = \bigcup_{a \in A} \mathrm{im}_R a, \quad \mathrm{Dom}\,R = \bigcup_{b \in B} \mathrm{coim}_R b.$$

Каждое С. однозначно определяет функцию $a \to \mathrm{im}_R a$, к-рая отображает множество A в множество подмножеств B. Обратно, всякая функция f из A в множество подмножеств B определяет нек-рое С. $R(f)$: $aR(f)b$ тогда и только тогда, когда $b \in f(a)$. Указанные сопоставления взаимно однозначны, что позволяет рассматривать С. как частично определённые многозначные функции.

Для конечных множеств A и B широко используются матричное и графовое представления С. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ и $R \subseteq A \times B$. Соответствию R сопоставляется матрица размера $n \times m$, строки к-рой помечены элементами из A, столбцы — элементами из B, а на пересечении строки a_i и столбца b_j стоит 1, если $a_i R b_j$, и 0 в противном случае. Напр.,

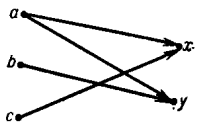
$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{x, y\},$$
$$R = \{(a, x), (a, y), (b, y), (c, x)\}.$$

Тогда R сопоставляется матрица

	x	y
a	1	1
b	0	1
c	1	0

Каждая матрица подобного вида однозначно определяет С. между A и B.

При графовом представлении элементы множеств A и B изображаются точками на плоскости. Обычно эти точки обозначаются теми же символами, что и соответствующие элементы. Точки a и b соединяются направленной дугой от a к b, если aRb. Напр., С. $R = \{(a, x), (a, y), (b, y), (c, x)\}$ изобразится следующим ориентированным графом:



Всякое С. $R \subseteq A \times B$ устанавливает т. н. соответствие Галуа между подмножествами множества A и подмножествами множества B. Именно, если $X \subseteq A$, то через $\Gamma(X)$ обозначается пересечение $\bigcap_{a \in X} \mathrm{im}_R a$; аналогично, для $Y \subseteq B$ вводится множество $\Gamma^{-1}(Y) = \bigcap_{b \in Y} \mathrm{coim}_R B$. Пусть $X^* = \Gamma^{-1}(\Gamma(X))$, $Y^* = \Gamma(\Gamma^{-1}(Y))$, тогда

$$X \subseteq X^*, \; Y \subseteq Y^*;$$

из $X_1 \subseteq X_2$ следует $\Gamma(X_1) \supseteq \Gamma(X_2)$;
из $Y_1 \subseteq Y_2$ следует $\Gamma^{-1}(Y_1) \supseteq \Gamma^{-1}(Y_2)$;
$X^{**} = X^*$;
$Y^{**} = Y^*$.

Подмножество $X \subseteq A$ ($Y \subseteq B$) наз. замкнутым, если $X = X^*$ ($Y = Y^*$). Соответствие Галуа устанавливает биективное С. между замкнутыми подмножествами в A и B.

Поскольку С. между A и B являются подмножествами одного и того же множества $A \times B$, можно говорить об их объединении, пересечении и дополнении. Таким образом, все С. между A и B образуют булеву алгебру, изоморфную булевой алгебре С. между B и A. Этот изоморфизм задаётся с помощью операции инволюции, или обращения, С.: если $R \subseteq A \times B$, то инволюция $R^{\#}$ состоит из таких пар (b, a), что $(a, b) \in R$. Иногда вместо $R^{\#}$ пишут R^{-1}. Ясно, что $R^{\#\#} = R$.

Помимо теоретико-множественных операций для С. вводится операция умножения. Если $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, то произведение RS состоит из таких пар (a, c), для к-рых найдётся элемент $b \in B$ такой, что $(a, b) \in R$, $(b, c) \in S$. Умножение С. ассоциативно и обладает следующими свойствами: если $R_1 \subseteq R_2$, то $R_1 S \subseteq R_2 S$; $(RS)^{\#} = S^{\#} R^{\#}$. Кроме того, специальные С.— отношения тождества, или диагонали, Δ_A, состоящие из всех пар (a, a), $a \in A$, играют роль единиц для умножения С. Именно, если $R \subseteq A \times B$, то $\Delta_A R = R = R \Delta_B$.

Для всякого С. R выполнено включение $R \subseteq RR^{\#}R$. Если вместо включения выполняется равенство, то С. наз. дифункциональным. С. $R \subseteq A \times B$ наз. функциональным, если $RR^{\#} \supseteq \Delta_A$ и $R^{\#}R \subseteq \Delta_B$. Функциональные С.— это в точности графики функций из A в B. Всякое С. R представимо в виде $R = F^{\#}G$, где F, G — функциональные С.

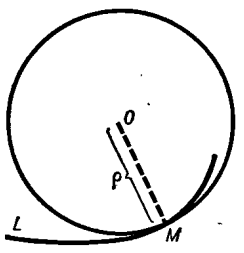
Пусть $R \subseteq A \times A$. Соответствие R наз.: a) рефлексивным, если $R \supseteq \Delta_A$; b) симметричным, если $R = R^{\#}$; c) антисимметричным, если $R \cap R^{\#} \subseteq \Delta_A$; d) асимметричным, если $R \cap R^{\#} = \varnothing$; e) транзитивным, если $R^2 \subseteq R$. Отношение R наз.: a) предпорядком, если оно рефлексивно и транзитивно; b) порядком, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично; c) толерантностью, если оно рефлексивно и симметрично; d) эквивалентностью, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Если R — эквивалентность, то множество A распадается на непересекающиеся классы эквивалентных элементов, или на классы эквивалентности. Множество классов эквивалентности наз. фактормножеством множества A по отношению R. Всякое дифункциональное С. $R \subseteq A \times B$ задаёт на своих областях определения и значений отношения эквивалентности, фактормножества по к-рым равномощны.

В определении С. можно считать A и B однотипными математич. структурами, для к-рых можно построить декартово произведение с той же структурой, и считать R подструктурой декартова произведения $A\times B$. Тогда получаются определения С. между группами, кольцами, векторными пространствами и т. п. *М. Ш. Цаленко.*

СОПРИКАСА́ЮЩАЯСЯ КРИВА́Я — см. *Соприкосновение.*

СОПРИКАСА́ЮЩАЯСЯ ОКРУ́ЖНОСТЬ в точке M кривой L — окружность (рис.), имеющая с L в точке M касание порядка $n\geqslant 2$ (см. *Соприкосновение*). Если кривизна кривой L в точке M равна нулю, то С. о. вырождается в прямую. Т. к. порядок касания L и С. о. в точке M не ниже двух, то С. о. воспроизводит ход кривой вблизи точки касания с точностью до малых 3-го порядка по сравнению с размерами участка кривой. На рисунке изображено обычное (порядок касания кривой и С. о. равен двум) взаимное расположение кривой и её С. о.: кривая пронизывает С. о. в точке соприкосновения. Радиус С. о. наз. радиусом кривизны кривой L в точке M, а центр С. о.— центром кривизны. Если кривая L — плоская и задана уравнением $y=f(x)$, то радиус С. о. определяется формулой



$$\rho=\left|\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right|.$$

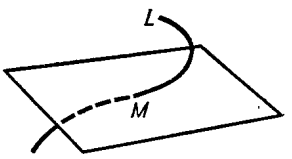
Если кривая L — пространственная и задана уравнениями $x=x(u)$, $y=y(u)$, $z=z(u)$, то радиус С. о. определяется формулой

$$\rho=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}}.$$

Иногда С. о. наз. соприкасающимся кругом. См. также *Дифференциальная геометрия.*

Термин «С. о.» введён Г. Лейбницем (1686).

СОПРИКАСА́ЮЩАЯСЯ ПЛО́СКОСТЬ в точке M кривой L — плоскость, имеющая с L в точке M касание порядка $n\geqslant 2$ (см. *Соприкосновение*). С. п. может быть также определена как предел переменной плоскости, проходящей через три точки кривой L, когда эти точки стремятся к точке M. С механич. точки зрения С. п. может быть охарактеризована как плоскость ускорений: при произвольном движении материальной точки по кривой L вектор ускорения лежит в С. п. Обычно кривая, кроме исключительных случаев, пронизывает свою С. п. в точке соприкосновения. Если кривая L задана уравнениями $x=x(u)$, $y=y(u)$, $z=z(u)$, то уравнение С. п. имеет вид



$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0,$$

где X, Y, Z — текущие координаты, а x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' вычисляются в точке соприкосновения; если все три коэффициента при X, Y, Z в уравнении С. п. исчезают, то С. п. делается неопределённой (может совпадать с любой плоскостью, проходящей через касательную). См. также *Дифференциальная геометрия.*

Термин «С. п.» введён И. Бернулли (1728).

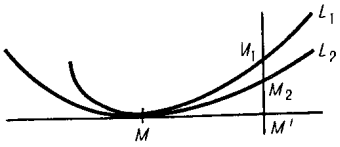
СОПРИКАСА́ЮЩАЯСЯ СФЕ́РА в точке M кривой L — сфера, имеющая с L в точке M касание порядка $n\geqslant 3$ (см. *Соприкосновение*). С. с. может быть также определена как предел переменной сферы, проходящей через четыре точки кривой L, когда эти точки стремятся к точке M. Если ρ — радиус кривизны кривой L в точке M, а σ — кручение, то формула для вычисления радиуса С. с. имеет вид

$$R=\sqrt{\rho^2+\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2}$$

(ds — дифференциал дуги кривой L).

СОПРИКАСА́ЮЩИЙСЯ КРУГ — см. *Соприкасающаяся окружность.*

СОПРИКОСНОВЕ́НИЕ кривой L_2 с кривой L_1 в данной точке M — геометрическое понятие, означающее (рис.), что L_2 имеет с L_1 в точке M касание максимального порядка по сравнению с любой кривой из некоторого заранее данного семейства кривых $\{L_2\}$, включающего L_2. Порядок касания кривых L_2 и L_1 считается равным n, если отрезок M_2M_1 есть величина $(n+1)$-го порядка малости по отношению к отрезку M_1M' (см. рис., где отрезок M_2M_1 перпендикулярен к общей касательной кривых L_2 и L_1 в точке M). Таким образом, среди всех кривых семейства $\{L_2\}$ С. с кривой L_1 имеет та кривая, к-рая наиболее тесно прилегает к L_1 (для неё отрезок M_2M_1 имеет максимальный порядок малости). Кривая семейства $\{L_2\}$, к-рая имеет С. с кривой L_1 в данной её точке M, наз. соприкасающейся кривой данного семейства в указанной точке кривой L_1. Напр., *соприкасающейся окружностью* в точке M кривой L_1 является окружность, к-рая в этой точке имеет с L_1 максимальный порядок касания по сравнению с любой другой окружностью.



Аналогично вышеизложенному определяется понятие соприкосновения поверхности S_2, принадлежащей данному семейству поверхностей $\{S_2\}$, с какой-нибудь кривой L_1 (или с поверхностью S_1) в нек-рой её точке M (в этих случаях порядок касания определяется также аналогично предыдущему; следует только вместо касательной прямой MM', изображённой на рисунке, рассматривать касательную плоскость поверхности S_2 в точке M). См. *Соприкасающаяся плоскость, Соприкасающаяся сфера.*

СОПРЯЖЁННАЯ МА́ТРИЦА, эрмитово сопряжённая матрица, с данной (прямоугольной или квадратной) матрицей $A=\|a_{ik}\|$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел — матрица A^*, каждый элемент a^*_{ik} которой комплексно сопряжён с элементом a_{ki} матрицы A, то есть $a^*_{ik}=\overline{a_{ki}}$. С. м. совпадает с комплексно сопряжённой транспонированной матрицей:

$$A^*=(\overline{A^{\top}}).$$

Свойства С. м.:

$$(A+B)^*=A^*+B^*,\ (\lambda A)^*=\bar{\lambda}A^*,$$
$$(AB)^*=B^*A^*,\ (A^*)^{-1}=(A^{-1})^*.$$

С. м. соответствуют сопряжённым между собой *линейным отображениям* унитарных пространств в ортонормированных базисах.

СОПРЯЖЁННАЯ ПОДГРУ́ППА — см. *Сопряжённый элемент.*

СОПРЯЖЁННОЕ ЛИНЕ́ЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ к линейному преобразованию $\mathcal{A}$ — линейное преобразование $\mathcal{A}^*$ евклидова (или унитарного) пространства L такое, что для любых векторов x и y из L имеет место равенство скалярных произведений

$$(\mathcal{A}x,\ y)=(x,\ \mathcal{A}^*y).$$

С. л. п.— частный случай понятия сопряжённого *линейного отображения.* Преобразование $\mathcal{A}^*$ определяется по $\mathcal{A}$ единственным образом. Если L конечномерно, то для всякого $\mathcal{A}$ существует С. л. п. $\mathcal{A}^*$, причём его матрица B в базисе $e_1, \ldots, e_n$ связана с матрицей A линейного преобразования $\mathcal{A}$ в том же базисе соотношением

$$B=G^{-1}A^*G,$$

где A^* — сопряжённая с A матрица, а G — матрица Грама базиса $e_1, \ldots, e_n$.

В евклидовом пространстве линейное преобразование $\mathcal{A}$ и его сопряжённое $\mathcal{A}^*$ имеют одинаковые характеристич. многочлены, равные определители, следы, одинаковые собственные значения. В унитарном пространстве их характеристич. многочлены, определители, следы, собственные значения комплексно сопряжены.

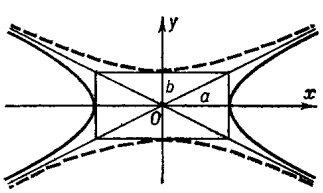
СОПРЯЖЁННОЕ ПРОСТРАНСТВО к векторному пространству X — векторное пространство X^*, состоящее из непрерывных линейных функционалов на X.

СОПРЯЖЁННОЕ ЧИСЛО, комплексно сопряжённое число, к комплексному числу $z=a+bi$ — комплексное число $\bar{z}=a-bi$. С. ч. z и $\bar{z}$ являются корнями квадратного уравнения $z^2-2az+a^2+b^2=0$ с действительными коэффициентами. Сумма и произведение С. ч. действительны. При замене каждого слагаемого (соответственно сомножителя) сопряжённым с ним числом получается число, сопряжённое с суммой (соответственно с произведением), т. е. $\bar{z}_1+\bar{z}_2=\overline{z_1+z_2}$; $\bar{z}_1\bar{z}_2=\overline{z_1z_2}$. Кроме того, $\frac{1}{\bar{z}}=\overline{\frac{1}{z}}$.

Если z является корнем многочлена с действительными коэффициентами, то и сопряжённое с ним число является корнем того же многочлена и имеет ту же кратность, что и z.

С. ч., сопряжённое алгебраическое число, к алгебраическому числу α — число, являющееся корнем канонического неприводимого многочлена числа α. См. *Алгебраическое число.*

СОПРЯЖЁННЫЕ ГИПЕРБОЛЫ — две гиперболы, которые в одной и той же системе прямоугольных координат при одних и тех же значениях a и b определяются уравнениями



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

и

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

(сплошная и пунктирная кривые на рис.). С. г. имеют общие асимптоты. Действительная ось каждой из них есть мнимая ось другой и наоборот.

СОПРЯЖЁННЫЕ ДИАМЕТРЫ центральной линии второго порядка — два диаметра, каждый из которых делит пополам хорды этой линии, параллельные другому. При параллельном проектировании эллипса в окружность его С. д. проектируются в пару взаимно перпендикулярных диаметров окружности.

СОПРЯЖЁННЫЕ ФУНКЦИИ — функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ двух действительных переменных x и y, связанные в некоторой области D комплексной плоскости $z=x+iy$ уравнениями Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если выписанные производные непрерывны, то С. ф. u и v являются соответственно действительной и мнимой частями аналитич. функции $f(z)=u+iv$, и, следовательно, С. ф. u и v суть гармонич. функции в D. Заданием одной гармонич. функции, напр. $u(x, y)$, в односвязной области D определяется с точностью до постоянного слагаемого сопряжённая с ней гармонич. функция $v(x, y)$, а тем самым и аналитич. функция $f(z)$. Напр.:

$$f(z)=2u\left(\frac{z+\bar{z}_0}{2}, \frac{z-\bar{z}_0}{2i}\right)-u(x_0, y_0)+iC,$$

где $z_0=x_0+iy_0$ — нек-рая точка области D, $\bar{z}_0=x_0-iy_0$, C — произвольная действительная постоянная. Так если $u=2xy$, D — вся плоскость, $z_0=0$, то

$$f(z)=-iz^2+iC,\ v(x, y)=\mathrm{Re}\, f(z)=y^2-x^2.$$

СОПРЯЖЁННЫЙ ОПЕРАТОР — линейный оператор A^*, действующий из векторного пространства Y^*, сопряжённого пространству Y, в векторное пространство X^*, сопряжённое пространству X, такой, что для любого линейного функционала φ из Y' выполнено $A'\varphi(y)=\varphi(Ax)$.

Если $X=Y=H$ — гильбертово пространство и A — ограниченный оператор, то С. о. A^* определяется соотношением $(Ax, y)=(x, A^*y)$ для любых $x, y\in H$.

СОПРЯЖЁННЫЙ ЭЛЕМЕНТ к элементу x группы G — элемент $x'=g^{-1}xg$, где g — некоторый элемент из G. Для С. э. используется также степенное обозначение: $x'=x^g$. Множество $M^g=\{x^g | x\in M\}$, где g — нек-рый фиксированный элемент из G, наз. сопряжённым с множеством M в группе G. В частности, подгруппа U наз. сопряжённой к подгруппе V, если $U=V^g$ для нек-рого g из G. Для нормальной подгруппы H имеет место равенство $H=H^g$, где g — любой элемент из G.

СОПРЯЖЁННЫХ ГРАДИЕНТОВ МЕТОД — метод решения системы линейных алгебраических уравнений $Ax=b$ с положительно определённой матрицей A. Это — прямой и итерационный метод одновременно: при любом начальном приближении он сходится за конечное число итераций.

В С. г. м. решение x^* находится в виде линейной комбинации A — ортогональных (т. е. ортогональных относительно скалярного произведения $(x, y)=x^{\top}Ay$) векторов $s_1, s_2, \ldots, s_n$, определяемых процессом A-ортогонализации невязок $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ последовательных приближений $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Расчётные формулы С. г. м. даются следующими рекуррентными соотношениями: если x_0 — начальное приближение, то

$$\left.\begin{aligned} &r_0=b-Ax_0,\ s_1=r_0,\\ &x_i=x_{i-1}+\alpha_i s_i,\ \alpha_i=(s_i, r_{i-1})/(s_i, As_i),\\ &r_i=r_{i-1}-\alpha_i As_i,\ s_{i+1}=r_i-\beta_i s_i,\\ &\beta_i=(r_i, As_i)/(s_i, As_i). \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Процесс заканчивается при нек-ром $k\leqslant m$, m — порядок системы, для к-рого $r_k=0$; при этом $x_k=x^*$. С. г. м. решает задачу минимизации функционала $\varphi(x)=(Ax, x)-2(b, x)$, эквивалентную исходной. Значения x_i С. г. м. совпадают с получаемыми в итерационном процессе $x_{-1}=x_0$, $x_{i+1}=x_i+\alpha_i(Ax_i-b)+\beta_i(x_i-x_{i-1})$ при $i>0$, где α_i, β_i всякий раз определяются из условия минимума величины $\varphi(x_{i+1})$. Такой способ получения x_i более трудоёмок, но существенно более устойчив к вычислительной погрешности.

СОРТ — см. *Многоосновная алгебра.*

СОСТАВНАЯ НОМОГРАММА — см. *Номография.*

СОСТАВНОЕ ИСПЫТАНИЕ — см. *Вероятностей теория.*

СОСТАВНОЕ ЧИСЛО — натуральное число, не являющееся простым, т. е. имеющее делители, отличные от единицы и самого себя; напр., 4, 18, 105 суть С. ч. Всякое С. ч. можно единственным способом представить в виде произведения простых множителей. См. *Делимость.*

СОСТОЯТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА — статистическая оценка параметра распределения вероятностей, обладающая тем свойством, что при увеличении числа наблюдений вероятность отклонений оценки от оцениваемого параметра на величину, превосходящую некоторое заданное число, стремится к нулю. Точнее, если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые результаты наблюдений, распределение к-рых зависит от неизвестного параметра θ, и при каждом n функция $T_n=T_n(X_1, \ldots, X_n)$ является оценкой θ, построенной по первым n наблюдениям, то оценка T_n наз. состоятельной, если при $n\to\infty$ для каждого произвольного числа $\varepsilon>0$ и любого допустимого значения θ

$$\mathsf{P}\{|T_n-\theta|>\varepsilon\}\to 0$$

(т. е. T_n сходится к θ по вероятности). Напр., любая несмещённая оценка T_n параметра θ (или оценка с $\mathsf{E}T_n\to 0$), дисперсия к-рой стремится к нулю с ростом n, является С. о. параметра θ. Так, выборочное среднее

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

и выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

суть С. о. соответственно математич. ожидания и дисперсии нормального распределения.

Состоятельность, являющаяся желательной характеристикой всякой статистич. оценки, имеет отношение лишь к асимптотич. свойствам оценки и слабо характеризует качество оценки при конечном объёме выборки в практич. задачах. Существуют критерии, позволяющие выбрать из числа всевозможных С. о. нек-рого параметра ту, к-рая обладает нужными качествами. См. *Статистическая оценка.*

Понятие «С. о.» впервые было предложено Р. Фишером (1922).

СОФИЗМ (от греч. σόφισμα — уловка, выдумка, головоломка) — см. *Антиномия.*

СОФОКУСНЫЕ КРИВЫЕ, конфокальные кривые,— линии второго порядка, имеющие общие фокусы.

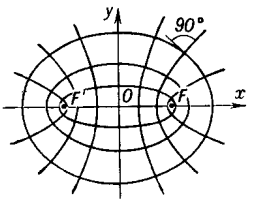


Рис. 1.

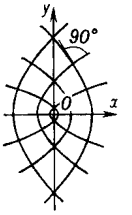


Рис. 2.

Если F и F' — две данные точки плоскости, то через каждую точку плоскости проходит один эллипс и одна гипербола, имеющие F и F' своими фокусами (рис. 1). Каждый эллипс ортогонален любой софокусной с ним гиперболе, т. е. пересекается с ней (в четырёх точках) под прямым углом. Всё множество софокусных эллипсов и гипербол в надлежащей системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1, \qquad (*)$$

где c — расстояние фокусов от начала координат, а λ — переменный параметр. При $\lambda > c^2$ уравнение (*) определяет эллипс, при $0 < \lambda < c^2$ — гиперболу (при $\lambda < 0$ — мнимую линию второго порядка).

Если один из фокусов стремится к бесконечности, то в пределе получаются два семейства софокусных парабол (рис. 2); любые две параболы, относящиеся к разным семействам, также ортогональны друг другу.

Софокусные эллипсы и гиперболы составляют на плоскости координатную сеть системы эллиптич. координат, софокусные параболы - координатную сеть системы параболич. координат.

СОХОЦКОГО ТЕОРЕМА: аналитическая функция во всякой окрестности существенно особой точки принимает значения, сколь угодно близкие к любому наперёд заданному комплексному числу. С. т. была открыта Ю. В. Сохоцким (1868) и одновременно с ним Ф. Казорати.

СОЧЕТАНИЕ из m элементов по n — подмножество мощности n некоторого исходного конечного множества мощности m. Число С. из m элементов по n, обозначаемое C_m^n или $\binom{m}{n}$, равно

$$\frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

С.— это класс эквивалентности *размещений* из m элементов по n, при этом два размещения объёма n из данного m-элементного множества считаются эквивалентными, если они состоят из одних и тех же элементов, взятых одно и то же число раз. Класс эквивалентности размещений с повторениями наз. сочетанием с повторениями. Число С. с повторениями из m по n равно $\binom{m+n-1}{n}$.

СОЧЕТАТЕЛЬНЫЙ ЗАКОН, ассоциативный закон,— см. *Ассоциативность.*

СОЮЗНЫЕ УРАВНЕНИЯ — то же, что *транспонированные уравнения.*

СПЕКТР (от лат. spectrum — представление, образ) — 1) С. матрицы — см. *Собственное значение* матрицы. 2) С. оператора — совокупность чисел λ, для к-рых оператор $A - \lambda E$ (где A — данный линейный оператор, а E — единичный оператор) не имеет всюду определённого ограниченного обратного оператора. Понятие С. о. есть обобщение понятия совокупности собственных значений матрицы. См. также *Спектральный анализ* линейных операторов.

СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА — см. *Функциональный анализ.*

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ — см. *Стационарный случайный процесс.*

СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ — см. *Стационарный случайный процесс.*

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ — 1) С. р. линейного оператора — представление линейного оператора в виде линейной комбинации операторов проектирования (или интеграла по семейству операторов проектирования), удовлетворяющее определённым условиям. Изучение С. р. и их возможных обобщений для различных типов операторов составляет основное содержание спектрального анализа линейных операторов.

2) С. р. случайной функции — разложение случайной функции (в частности, случайного процесса) в ряд или интеграл по той или иной системе функций такое, что коэффициенты этого разложения представляют собой взаимно некоррелированные случайные величины. Наиболее известный класс С. р. случайных функций — представления стационарных случайных процессов $X(t)$ в виде интеграла Фурье — Стилтьеса

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dZ(\lambda),$$

где $Z(\lambda)$ — случайная функция с некоррелированными приращениями. Существование такого С. р. показывает, что стационарный случайный процесс всегда можно рассматривать как наложение некоррелированных друг с другом гармонич. колебаний различных частот со случайными фазами и амплитудами. С. р. аналогичного вида, но с заменой гармонич. колебаний n-мерными плоскими волнами имеет место и для однородных случайных полей в n-мерном пространстве.

Другой тип С. р. случайных функций — это разложение случайного процесса $X(t)$, заданного на конечном отрезке оси [или, более общо, случайной функции $X(t)$, заданной на ограниченной области n-мерного пространства], в ряд

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, Z_k \varphi_k(t),$$

где $\varphi_k(t)$ и λ_k — собственные функции и собственные значения интегрального оператора в функциональном пространстве с ядром, равным корреляционной функции случайного процесса (или функции) $X(t)$, а Z_k, $k = 1, 2, \ldots$,— последовательность попарно некоррелированных случайных величин единичной дисперсии.

С. р. специального вида имеют место также для однородных и изотропных случайных полей на пространствах с группой преобразований, отличных от евклидова пространства.

3) С. р. функции — разложение функции в ряд по собственным функциям некоторого линейного оператора (напр., конечноразностного, дифференциального или интегрального), действующего в функциональном пространстве, или одно из возможных обобщений такого разложения. Частным случаем С. р. является разложение функции, заданной на конечном отрезке, в ряд Фурье (т. е. гармонич. анализ колебаний), а также разложения по другим известным полным системам функций. В случае линейного оператора A, имеющего непрерывный спектр, собственные функции, понимаемые в обычном смысле, не существуют; тем не менее и здесь весьма часто удаётся определить эти функции (но только они уже не будут яв-

ляться элементами того функционального пространства, в к-ром действует оператор A) и задать С. р. широкого класса функций как разложение в интеграл по системе функций, зависящей от непрерывно изменяющегося аргумента (пример С. р. этого типа — разложение в интеграл Фурье). Для несамосопряжённых операторов A наряду с собственными функциями приходится рассматривать ещё и цепочки функций, присоединённых к собственным функциям; однако и для таких операторов в функциональных пространствах во многих случаях удаётся доказать теорему о полноте всех собственных и присоединённых функций и получить С. р. широкого класса функций по всевозможным собственным и присоединённым функциям оператора A.

СПЕКТРА́ЛЬНЫЙ АНА́ЛИЗ линейных операторов — обобщение теории собственных значений и собственных векторов матриц (т. е. линейных преобразований в конечномерном пространстве) на бесконечномерный случай. В теории колебаний изучается движение системы с n степенями свободы в окрестности положения устойчивого равновесия, к-рое описывается системой линейных дифференциальных уравнений вида $\ddot{x}+Ax=0$, где x есть n-мерный вектор отклонений обобщённых координат системы от их равновесных значений, а A — симметрическая положительно определённая матрица. Такое движение может быть представлено в виде наложения n гармонич. колебаний (т. н. нормальных колебаний) с круговыми частотами, равными корням квадратным из всевозможных собственных значений λ_k матрицы A. Нахождение нормальных колебаний системы здесь сводится к нахождению всех собственных значений λ_k и собственных векторов x_k матрицы A. Совокупность всех собственных значений матрицы называют её спектром. Если матрица A — симметрическая, то её спектр состоит из n действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (нек-рые из них могут совпадать друг с другом), а сама матрица с помощью перехода к новой системе координат может быть приведена к диагональному виду, т. е. отвечающее ей линейное преобразование A в n-мерном пространстве (т. н. самосопряжённое преобразование) допускает специальное представление — т. н. спектральное разложение вида

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E_k,$$

где $E_1, \ldots, E_n$ — операторы проектирования на взаимно перпендикулярные направления собственных векторов $x_1, \ldots, x_n$. Несимметрическая же матрица A (к-рой отвечает несамосопряжённое линейное преобразование) имеет, вообще говоря, спектр, состоящий из комплексных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, и может быть преобразована лишь к более сложной, чем диагональная, жордановой форме, отвечающей представлению линейного преобразования A, более сложному, чем описанное выше обычное спектральное разложение.

При изучении колебаний около состояния равновесия систем с бесконечным числом степеней свободы (напр., однородной или неоднородной струны) задачу о нахождении собственных значений и собственных векторов линейного преобразования в конечномерном пространстве приходится распространить на нек-рый класс линейных преобразований (т. е. линейных операторов) в бесконечномерном векторном пространстве. Во многих случаях (включая, в частности, и случай колебания струны) соответствующий оператор может быть записан в виде действующего в пространстве функций $f(x)$ интегрального оператора A, так что

$$Af = \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy,$$

где $K(x, y)$ — заданная на квадрате $a \leqslant x, y \leqslant b$ непрерывная функция двух переменных, удовлетворяющая условию симметрии $K(x, y)=K(y, x)$. В этих случаях оператор A всегда имеет полную систему попарно ортогональных собственных функций φ_k, к-рым отвечает счётная последовательность действительных собственных значений λ_k, составляющих в своей совокупности спектр оператора A. Если рассматривать функции, на к-рые действует оператор A, как векторы гильбертова пространства, то действие A будет, как и в случае конечномерного самосопряжённого преобразования, сводиться к растяжению пространства вдоль системы взаимно ортогональных осей φ_k с коэффициентами растяжения λ_k (при $\lambda_k<0$ такое растяжение имеет смысл растяжения с коэффициентом $|\lambda_k|$, объединённого с зеркальным отражением), а сам оператор A здесь снова будет иметь спектральное разложение вида

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k E_k,$$

где E_k — операторы проектирования на направления φ_k.

С. а., развитый первоначально для интегральных операторов с симметричным ядром $K(x, y)$, определённым и непрерывным в нек-рой ограниченной области, был затем в рамках общей теории операторов распространён на многие другие типы линейных операторов (напр., на интегральные операторы с ядром, имеющим особенность или заданным в неограниченной области, дифференциальные операторы в пространствах функций одного или нескольких переменных и т. д.), а также на абстрактно заданные линейные операторы в бесконечномерных векторных пространствах. Оказалось, однако, что такое распространение связано с существенным усложнением С. а., так как для многих линейных операторов собственные значения и собственные функции, понимаемые в обычном смысле, вообще не существуют. Поэтому в общем случае спектр приходится определять не как совокупность собственных значений оператора A, а как совокупность тех значений λ, для к-рых оператор $(A-\lambda E)^{-1}$, где E — единичный оператор, не существует или определён лишь на неплотном множестве или является неограниченным оператором. Все собственные значения оператора принадлежат его спектру и в совокупности образуют дискретный (точечный) спектр; остальную часть спектра часто называют непрерывным спектром оператора [иногда же непрерывным спектром называют лишь совокупность тех λ, при к-рых оператор $(A-\lambda E)^{-1}$ определён на плотном множестве элементов пространства, но не ограничен, а все точки спектра, не входящие ни в дискретный, ни в непрерывный спектр, называют остаточным спектром].

Наиболее разработан С. а. самосопряжённых линейных операторов в гильбертовом пространстве (обобщающих симметрич. матрицы) и унитарных линейных операторов в том же пространстве (обобщающих унитарные матрицы). Самосопряжённый оператор A в гильбертовом пространстве всегда имеет чисто действительный спектр (дискретный, непрерывный или смешанный) и допускает спектральное разложение вида

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda), \qquad (*)$$

где $E(\lambda)$ — т. н. разложение единицы (отвечающее оператору A), т. е. семейство проекционных операторов, удовлетворяющее специальным условиям. Точками спектра в данном случае являются точки роста операторной функции $E(\lambda)$; в случае чисто дискретного спектра все они являются скачками $E(\lambda)$, так что здесь

$$E(\lambda) = \sum_{\lambda_k < \lambda} E_k$$

и спектральное разложение $(*)$ сводится к разложению

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k E_k.$$

Унитарный оператор в гильбертовом пространстве имеет спектр, расположенный на окружности $|\lambda|=1$, и допускает спектральное разложение родственного $(*)$ вида, но с заменой интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$ интегрированием по этой окружности. Изучен также специальный класс нормальных операторов в гильбертовом пространстве, представимых в аналогичном представлению $(*)$ виде, но где

уже интегрирование в правой части распространено на более общее множество точек λ комплексной плоскости, представляющее собой спектр A.

С. а. функции — обобщение гармонич. анализа, то же самое, что и *спектральное разложение* функции.

● Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2 изд., М., 1966; Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, пер. с франц., М., 1970; Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, пер. с англ., ч. 2, Спектральная теория, М., 1966; ч. 3, Спектральные операторы, М., 1974.

Н. Я. Виленкин, С. В. Фомин.

СПЕЦИА́ЛЬНАЯ ЛИНЕ́ЙНАЯ ГРУ́ППА (от лат. specialis — особый, особенный) — то же, что *унимодулярная группа*. См. также *Классическая группа*.

СПЕЦИА́ЛЬНАЯ ОРТОГОНА́ЛЬНАЯ ГРУ́ППА — см. *Классическая группа*, *Ортогональное преобразование*.

СПЕЦИА́ЛЬНАЯ УНИТА́РНАЯ ГРУ́ППА — см. *Классическая группа*.

СПЕЦИА́ЛЬНЫЕ ФУ́НКЦИИ — часто встречающиеся в различных задачах математической физики функции, не выражающиеся, как правило, через *элементарные функции* и представляемые с помощью специальных рядов или интегралов. Основные С. ф. являются решениями нек-рых специальных линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами; таковы *гипергеометрическая функция*, *сферические функции*, *цилиндрические функции* и др. Важную роль среди С. ф. играют также такие *трансцендентные функции*, как *гамма-функция*, *дзета-функция*, *интегральный логарифм*, *интеграл вероятности*, *интегральный синус* и *интегральный косинус*, *эллиптические функции* и др.

● Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979.

СПИНО́Р (от англ. spin — вращаться) — математическая величина, характеризующаяся особым законом преобразования при переходе от одной системы координат к другой. С. применяются в различных вопросах квантовой механики, в теории представлений групп, в топологии и т. д. Так, при изучении явления спина электрона было обнаружено, что существуют физич. величины, не принадлежащие к ранее изученным известным типам (напр., эти величины могут быть определены лишь с точностью до знака, т. к. при повороте системы координат на 2π вокруг нек-рой оси все компоненты этих величин меняют знак). Такие величины в математике были рассмотрены ещё в 1913 Э. Картаном в его исследованиях по теории представлений групп вращений многомерных пространств. Они же были вновь открыты в 1929 Б. ван дер Варденом в связи с исследованиями по квантовой механике. Он назвал эти величины спинорами.

С. валентности 1 задаются двумя комплексными числами (ξ^1, ξ^2), причём в отличие, напр., от тензоров, для к-рых различные совокупности чисел задают различные тензоры, для С. считают, что совокупности (ξ^1, ξ^2) и $(-\xi^1, -\xi^2)$ определяют один и тот же С. При повороте системы координат трёхмерного евклидова пространства на угол θ вокруг оси с направляющими косинусами $\cos\chi_1$, $\cos\chi_2$, $\cos\chi_3$ компоненты С. преобразуются по формулам

$$\xi^{1'}=\alpha\xi^1+\beta\xi^2, \quad \xi^{2'}=\gamma\xi^1+\delta\xi^2,$$

где

$$\alpha=\lambda+i\mu, \ \beta=\nu+i\rho, \ \gamma=-\bar{\beta}, \ \delta=\bar{\alpha},$$
$$\lambda=\cos\theta/2,$$
$$\mu=\sin\frac{\theta}{2}\cos\chi_1, \quad \nu=\sin\frac{\theta}{2}\cos\chi_2,$$
$$\rho=\sin\frac{\theta}{2}\cos\chi_3.$$

В частности, при повороте системы координат на угол 2π, возвращающем её в исходное положение, компоненты С. меняют знак, что объясняет тождественность С. (ξ^1, ξ^2) и $(-\xi^1, -\xi^2)$.

К С. относят и величины, компоненты к-рых $(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2)$ комплексно сопряжены с компонентами С. (ξ^1, ξ^2). Матрица преобразования этих величин имеет вид

$$\sigma=\begin{Vmatrix}\bar{\alpha} & \bar{\beta}\\ \bar{\gamma} & \bar{\delta}\end{Vmatrix}.$$

Наряду с введёнными выше контравариантными компонентами ξ^1, ξ^2 спинора можно ввести ковариантные компоненты ξ_1, ξ_2, положив $\xi_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta}\xi^\beta$, где $\varepsilon_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{Vmatrix}$ (как всегда, по повторяющимся индексам производится суммирование). Иными словами, $\xi^2=\xi_1$, $\xi^1=-\xi_2$. Ковариантные компоненты преобразуются матрицей

$$\begin{Vmatrix}\delta & -\gamma\\ -\beta & \alpha\end{Vmatrix}.$$

При вращениях эта матрица совпадает с матрицей σ, т. е. при вращениях ковариантные компоненты С. преобразуются как компоненты комплексно сопряжённого С.

С. валентности r наз. совокупность 2^r комплексных чисел $a^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r}$, определённых с точностью до знака, к-рая при переходе от одной системы координат к другой преобразуется как произведение r компонент спиноров первой валентности, т. е. как $\xi^{\lambda_1}\xi^{\lambda_2}\ldots\xi^{\lambda_r}$. Спинорная алгебра строится аналогично тензорной алгебре.

СПИРА́ЛЬ (франц. spirale, от лат. spira, греч. σπεῖρα — виток) — плоская кривая, к-рая обычно обходит вокруг одной (или нескольких) точки, приближаясь или удаляясь от неё.

Среди С. выделяют алгебраич. С. и псевдоспирали. Алгебраические спирали — С., уравнения к-рых в полярных координатах являются алгебраическими относительно переменных ρ и φ. К алгебраич. С. относятся: *гиперболическая спираль*, *архимедова спираль*, *Галилея спираль*, *Ферма спираль*, *параболическая спираль*, *жезл*.

Псевдоспирали — С., натуральные уравнения к-рых могут быть записаны в виде $r=as^m$, где r — радиус кривизны, s — длина дуги. При $m=1$ псевдоспираль является *логарифмической спиралью*, при $m=-1$ — *Корню спиралью*, при $m=1/2$ — эвольвентой окружности.

СПЛА́ЙН, сплайн-функция,— функция $s_m(\Delta_n; x)$, определённая на отрезке $[a, b]$, совпадающая на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, образованных сеткой $\Delta_n: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, с нек-рыми алгебраич. многочленами степени не выше m и имеющая на $[a, b]$ непрерывную $(m-1)$-ю производную. Для С. справедливо представление

$$s_m(\Delta_n; x)=P_{m-1}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}c_k(x-x_k)_+^m,$$

где c_k — действительные числа, $P_{m-1}(x)$ — многочлен степени не выше $m-1$ и $(x-t)_+^m=[\max(0, x-t)]$. Точки $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ наз. узлами С. Если С. $s_m(\Delta_n; x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную $(m-k)$-ю производную $(k\geqslant 1)$, а $(m-k+1)$-я производная в узлах С. разрывна, то говорят, что он имеет дефект k.

С. применяются для *интерполирования* функций, построения приближённых решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

СПРЯМЛЯ́ЕМАЯ КРИВА́Я — кривая, имеющая конечную длину. При этом длиной кривой линии наз. предел последовательности длин ломаных, вписанных в эту линию, при условии, что длина наибольшего звена ломаной стремится к нулю. Этот предел всегда существует, но может оказаться бесконечным; тогда кривую наз. неспрямляемой.

СПРЯМЛЯ́ЮЩАЯ ПЛО́СКОСТЬ — плоскость, проходящая через касательную и бинормаль в данной точке M пространственной кривой L. Огибающая семейства С. п. данной кривой L наз. спрямляющей поверхностью кривой L. Линия L на этой поверхности является геодезической; спрямляющая поверхность — развёртывающаяся, при развёртывании её на плоскость линия L, будучи геодезической, превращается в прямую, т. е. «спрямляется» (этим и объясняется наименование «С. п.»).

СПУ́СКА ме́тод — метод решения задачи минимизации

$$f(x^*)=\min_x f(x),$$

где f — нек-рая функция переменного $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Итерационная последовательность $\{x^k\}$ С. м. вычисляется по формуле

$$x^{k+1}=x^k+\alpha_k g^k,$$

где g^k — вектор, указывающий нек-рое направление убывания функции f в точке x^k, а α_k — итерационный параметр, величина к-рого указывает длину шага в направлении g^k. Если функция f дифференцируема и x^k не является её точкой экстремума, то вектор g^k должен удовлетворять неравенству

$$(f'(x^k),\ g^k)<0, \qquad (*)$$

где $f'(x^k)$ — градиент функции f в точке x^k.

Если f — достаточно гладкая функция (напр., дважды непрерывно дифференцируемая) и последовательность векторов $\{g^k\}$ удовлетворяет неравенству (*), то существует такая последовательность $\{\alpha_k\}$, что

$$f(x^0)>f(x^1)>\ldots>f(x^k)>\ldots.$$

При определённых ограничениях на функцию f и способ выбора параметров $\{\alpha_k\}$ и векторов g^k последовательность $\{x^k\}$ сходится к решению x^* исходной задачи.

К С. м. относятся *градиентный метод*, *наискорейшего спуска метод*.

● Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, 2 изд., М., 1977; Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах, М., 1975.

СРАВНЕ́НИЕ — соотношение между двумя целыми числами a и b, означающее, что разность $a-b$ этих чисел делится на заданное целое число m, называемое м о д у л е м С.; пишется

$$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m).$$

Напр., $2\equiv 8\ (\mathrm{mod}\ 3)$, т. к. $2-8$ делится на 3. С. обладают многими свойствами, аналогичными свойствам равенств. Напр., слагаемое, находящееся в одной части С., можно перенести с обратным знаком в другую часть, т. е. из $a+b\equiv c\ (\mathrm{mod}\ m)$ следует, что $a\equiv c-b\ (\mathrm{mod}\ m)$. С. с одним и тем же модулем можно складывать, вычитать, умножать, т. е. из

$$a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)\ \text{и}\ c\equiv d\ (\mathrm{mod}\ m)$$

следует, что

$$a+c\equiv b+d\ (\mathrm{mod}\ m),\quad a-c\equiv b-d\ (\mathrm{mod}\ m),$$
$$ac\equiv bd\ (\mathrm{mod}\ m).$$

Далее, обе части С. можно умножать на одно и то же целое число, обе части С. можно разделить на их общий делитель, если последний взаимно прост с модулем. Если же наибольший общий делитель числа, на к-рое делятся обе части С., и модуля m есть d, то после деления получают С. по модулю m/d. В теории чисел рассматриваются методы решения различных С., т. е. методы отыскания целых чисел, удовлетворяющих С. того или иного вида. Если число x является решением нек-рого С. по модулю m, то любое число вида $x+km$ (k — целое число) также является решением этого С. Совокупность чисел вида $x+km$ ($k=\ldots,-1, 0, 1, \ldots$) наз. к л а с с о м по модулю m. Решения С. по модулю m, принадлежащие к одному и тому же классу по модулю m, не считаются различными, так что числом решений С. по модулю m наз. число решений, принадлежащих различным классам по модулю m. С. 1-й степени с одним неизвестным всегда может быть приведено к виду $ax\equiv b\ (\mathrm{mod}m)$. Оно не имеет решений, если b не делится на наибольший общий делитель a и m, обозначаемый d, и имеет d решений, если b делится на d. Теория *квадратичных вычетов* и *степенных вычетов* по модулю m есть теория С. вида соответственно $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$ и $x^n\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$. Понятие С. для целых чисел может быть обобщено, а именно: можно говорить о сравнимости двух элементов кольца по идеалу.

СРАВНЕ́НИЯ ПРИ́ЗНАК с х о д и м о с т и — признак сходимости числового *ряда*.

СРЕДИ́ННОЕ ОТКЛОНЕ́НИЕ — то же, что *вероятное отклонение*.

СРЕ́ДНЕЕ, с р е д н е е з н а ч е н и е,— числовая характеристика группы чисел или функций.

Средним для данной группы чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ наз. нек-рое число, заключённое между наименьшим и наибольшим из них. Наиболее употребительными С. являются:

а р и ф м е т и ч е с к о е с р е д н е е

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},$$

г е о м е т р и ч е с к о е с р е д н е е

$$g=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$

г а р м о н и ч е с к о е с р е д н е е

$$h=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}},$$

к в а д р а т и ч н о е с р е д н е е

$$s=\sqrt{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2):n}.$$

Если все числа x_i, $i=1, 2, \ldots, n$, положительны, то можно для любого $\alpha\neq 0$ определить с т е п е н н о е с р е д н е е

$$s_\alpha=\left(\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha+\ldots+x_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha},$$

частными случаями к-рого являются арифметич., гармонич. и квадратичное С.: именно, s_α равняется $\bar{x}$, h и s соответственно при $\alpha=1$, -1 и 2. При $\alpha\to 0$ степенное С. s_α стремится к геометрич. С.: $s_0=g$. Если $\alpha<\beta$, то

$$s_\alpha\leqslant s_\beta;$$

в частности,

$$h\leqslant g\leqslant\bar{x}\leqslant q.$$

Указанные выше С. могут быть получены из формулы

$$s=f^{-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\right],$$

где $f^{-1}(\eta)$ — функция, обратная к $f(\xi)$ при соответствующем подборе функции $f(\xi)$. Так, арифметич. С. получается, если $f(\xi)=\xi$, геометрич. С.— если $f(\xi)=\log\xi$, гармонич. С.— если $f(\xi)=1/\xi$, квадратичное С.— если $f(\xi)=\xi^2$.

Наряду со степенными С. рассматриваются в з в е ш е н н ы е с т е п е н н ы е с р е д н е е

$$S_\alpha=\left(\frac{p_1x_1^\alpha+p_2x_2^\alpha+\ldots+p_nx_n^\alpha}{p_1+p_2+\ldots+p_n}\right)^{1/\alpha},$$

в частности при $\alpha=1$

$$S=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n},$$

к-рые переходят в обыкновенные степенные С. при $p_1=p_2=\ldots=p_n$.

Рассматривают также *арифметико-геометрические средние*.

С р е д н и м з н а ч е н и е м ф у н к ц и и наз. нек-рое число, заключённое между наименьшим и наибольшим её значениями. В дифференциальном и интегральном исчислении имеется ряд «теорем о среднем», устанавливающих существование таких точек, в к-рых функция или её производная получает то или иное среднее значение. Наиболее важной теоремой о С. в дифференциальном исчислении является теорема Лагранжа (теорема о конечном приращении): если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b), то существует точка c, принадлежащая интервалу (a, b), такая, что $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$. В интегральном исчислении наиболее важной теоремой о С. является следующая: если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $\varphi(x)$ сохраняет постоянный знак, то существует точка c из интервала (a, b) такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=f(c)\int_a^b\varphi(x)\,dx.$$

В частности, если $\varphi(x)=1$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a).$$

Вследствие этого под средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ обычно понимают величину

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Аналогично определяется среднее значение функции нескольких переменных в нек-рой области.

СРЕ́ДНЕЕ ЗНАЧЕ́НИЕ случайной величины — то же, что *математическое ожидание* случайной величины.

СРЕ́ДНЕЕ КВАДРАТИ́ЧНОЕ ОТКЛОНЕ́НИЕ — то же, что *квадратичное отклонение*.

СРЕ́ДНЕЕ ПРОПОРЦИОНА́ЛЬНОЕ между двумя положительными числами — *геометрическое среднее* этих чисел.

СРЕ́ДНИЙ РИСК — см. *Статистических решений теория*.

СРЕ́ДНЯЯ КРИВИЗНА́ — одна из мер искривления поверхности в окрестности какой-либо её точки, равная полусумме главных кривизн. Если E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, а L, M, N — коэффициенты её второй квадратичной формы, то средняя кривизна H вычисляется по формуле

$$2H = \frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}.$$

Равенство нулю С. к. в каждой точке поверхности означает, что поверхность является минимальной поверхностью.

СРЕ́ДНЯЯ ЛИ́НИЯ — 1) С. л. треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника (третью сторону называют основанием). С. л. треугольника параллельна основанию и равна его половине; площади частей треугольника, на к-рые делит его С. л., относятся как 1 : 3. 2) С. л. трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции. С. л. трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме.

СТАНДА́РТНАЯ СХЕ́МА (англ. standard) — класс операторных *программ схем*.

СТАНДА́РТНОЕ ОТКЛОНЕ́НИЕ — то же, что *квадратичное отклонение*.

СТАТИ́СТИКА (нем. Statistik, от итал. stato, позднелат. status — государство) — функция от результатов наблюдений.

СТАТИ́СТИКА критерия — см. *Статистических гипотез проверка*.

СТАТИСТИ́ЧЕСКАЯ ГИПО́ТЕЗА — предположительное суждение о вероятностных закономерностях, которым подчиняется изучаемое случайное явление. Как правило, С. г. определяет значения параметров распределения вероятностей или непосредственно его вид и свойства. С. г. наз. простой, если она определяет единственный закон распределения; в ином случае С. г. наз. сложной и может быть представлена как множество простых С. г. Напр., гипотеза о том, что распределение вероятностей, к-рому подчиняются данные результаты наблюдений, является нормальным распределением с математич. ожиданием $a \geqslant a_0$ и дисперсией $\sigma^2=\sigma_0^2$, будет сложной, составленной из простых гипотез $\{a=a^*,\ a^* \in [a_0, \infty);\ \sigma^2=\sigma_0^2\}$ (a_0 и σ_0^2 — заданные числа). См. *Статистических гипотез проверка*, *Непараметрические методы* математической статистики.

СТАТИСТИ́ЧЕСКАЯ ОЦЕ́НКА — некоторая функция от результатов наблюдений, предназначенная для статистического оценивания неизвестных характеристик и параметров распределения вероятностей. Выделяется случай, когда распределение вероятностей принадлежит к.-л. известному семейству, зависящему от конечного числа параметров; о методах непосредственной С. о. функциональных характеристик распределения вероятностей, напр. неизвестной функции распределения или его плотности, см. *Непараметрические методы* математической статистики. Напр., если результаты наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, имеющие одно и то же нормальное распределение с неизвестным математич. ожиданием a, то выборочное среднее — среднее арифметическое результатов наблюдений —

$$\overline{X}_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$$

и выборочная медиана

$$\mu_n = \mu_n(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} X_{(m)} \text{ при } n=2m+1, \\ \frac{1}{2}[X_{(m-1)}+X_{(m)}] \text{ при } n=2m, \end{cases}$$

где $X_{(m)}$ — элементы вариационного ряда, соответствующего результатам наблюдений $X_1, \ldots, X_n$, являются С. о. неизвестного параметра a. Такие С. о., приводящие в конкретном случае к числовому значению параметра, наз. точечными.

В дальнейшем рассматриваются лишь точечные С. о.; о С. о., выраженных целым множеством значений, см. в ст. *Интервальная статистическая оценка*. В качестве С. о. к.-л. параметра θ распределения вероятностей естественно выбирать такую функцию $\theta_n^*(X_1, \ldots, X_n)$ от результатов наблюдений $X_1, \ldots, X_n$, к-рая в нек-ром определённом смысле близка к истинному значению параметра. Принимая к.-л. меру «близости» С. о. к значению оцениваемого параметра, можно сравнивать различные оценки. Обычно мерой близости С. о. к истинному значению параметра служит величина среднего значения квадрата ошибки

$$\mathsf{E}_\theta(\theta_n^*-\theta)^2 = \mathsf{D}_\theta\theta_n^* + (\theta-\mathsf{E}_\theta\theta_n^*)^2$$

(выражающаяся через математич. ожидание оценки $\mathsf{E}_\theta\,\theta_n^*$ и её дисперсию $\mathsf{D}_\theta\,\theta_n^*$, вычисленные по распределению, зависящему от неизвестного значения θ). В классе всех *несмещённых оценок* θ_n^* (для к-рых $\mathsf{E}_\theta\,\theta_n^* \equiv \theta$ при всех θ) наилучшими с этой точки зрения будут С. о., имеющие при заданном n минимальную возможную дисперсию при всех θ (такие С. о. наз. также эффективными). Указанная выше С. о. $\overline{X}_n$ для параметра a нормального распределения является наилучшей несмещённой оценкой, поскольку дисперсия любой другой несмещённой С. о. параметра a^* удовлетворяет неравенству $\mathsf{D}_a a^* \geqslant \mathsf{D}_a\overline{X}_n = \sigma^2/n$, где σ^2 — дисперсия исходного нормального распределения. В конкретных случаях отыскание наилучших С. о. облегчается с помощью *достаточных статистик*, т. к. наилучшую несмещённую оценку нужно искать в классе С. о., зависящих только от достаточной статистики.

Имея в виду построение С. о. для больших значений n, изучают также асимптотич. свойства С. о. Естественно, напр., предполагать, что вероятность отклонений θ_n^* от истинного значения параметра θ, превосходящих к.-л. заданное число, будет стремиться к нулю при $n\to\infty$. С. о. с таким свойством наз. *состоятельными оценками*. Несмещённые С. о., дисперсия которых стремится к нулю при $n\to\infty$, являются состоятельными. Асимптотич. сравнение С. о. производят по отношению их асимптотич. дисперсий. Так, среднее арифметическое $\overline{X}_n$ в приведённом выше примере наилучшая и, следовательно, асимптотически наилучшая С. о. для параметра a, тогда как выборочная медиана μ_n, являющаяся также несмещённой оценкой, не является асимптотически наилучшей, т. к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathsf{D}\overline{X}_n}{\mathsf{D}\mu_n} = \frac{2}{\pi} < 1$$

(тем не менее использование μ_n имеет свои положительные стороны; напр., если истинное распределение не является в точности нормальным, а несколько отличается от него, то дисперсия $\overline{X}_n$ может резко возрасти, а дисперсия μ_n остаётся почти той же, т. е. μ обладает свойством, называемым прочностью или робастностью).

Одним из распространённых общих методов получения С. о. параметров распределения является метод моментов,

к-рый заключается в приравнивании определённого числа выборочных моментов соответствующим моментам исходного распределения, к-рые суть функции от неизвестных параметров, и решении полученных уравнений относительно этих параметров. Хотя метод моментов часто удобен в практич. отношении, однако С. о., найденные при его использовании, вообще говоря, не являются асимптотически наилучшими. Более важным с теоретич. точки зрения представляется *максимального правдоподобия метод*, к-рый приводит к оценкам, являющимся при нек-рых общих условиях асимптотически наилучшими; близок к последнему методу и *наименьших квадратов метод*.

Теория точечных С. о. не даёт возможности сделать заключение о «точности» таких оценок. В этом отношении С. о. неизвестных параметров существенно дополняются результатами интервального оценивания с помощью *доверительных интервалов*.

С. о. является вариантом более общего понятия статистич. решения (см. *Статистических решений теория*). В рамках этого понятия рассматриваются байесовские и минимаксные С. о.

● Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973. *А. В. Прохоров.*

СТАТИСТИ́ЧЕСКИЙ АНА́ЛИЗ случайных процессов — раздел математической статистики, посвящённый методам обработки и использования статистических данных, относящихся к случайным процессам. Значение $x(t)$ случайного процесса $X(t)$, получаемое в ходе одного испытания, наз. реализацией (иначе — выборочной функцией, или траекторией) процесса $X(t)$; данные о $X(t)$, используемые при С. а. этого процесса, обычно представляют собой сведения о значениях одной или нескольких реализаций $x(t)$ в течение определённого промежутка времени или же о значениях к.-л. величин, связанных с процессом $X(t)$ (напр., о значениях реализаций процесса $Y(t)$, являющегося суммой $X(t)$ и нек-рого «шума» $N(t)$, созданного внешними помехами и ошибками измерения значений $X(t)$).

Весьма важный с точки зрения приложений класс задач С. а. случайных процессов представляют собой задачи обнаружения сигнала на фоне шума, играющие большую роль при радиолокации. С математич. точки зрения эти задачи сводятся к проверке статистич. гипотез: здесь по наблюдённым значениям нек-рой функции требуется заключить, справедлива ли гипотеза о том, что эта функция является реализацией суммы шума $N(t)$ и интересующего наблюдателя сигнала $X(t)$, или же справедлива гипотеза о том, что она является реализацией одного лишь шума $N(t)$. В случаях когда форма сигнала $X(t)$ не является полностью известной, задачи обнаружения часто включают в себя и задачи статистич. оценки неизвестных параметров сигнала; так, напр., в задачах радиолокации очень важна задача об оценке времени появления сигнала, определяющего расстояние до объекта, породившего этот сигнал.

Задачи статистич. оценки параметров возникают и тогда, когда по данным наблюдений за значениями процесса $X(t)$ в течение определённого промежутка времени требуется оценить значения к.-л. параметров распределения вероятностей случайных величин $X(t)$ или же, напр., оценить значение в фиксированный момент времени $t=t_1$ самого процесса $X(t)$ (в предположении, что t_1 лежит за пределами интервала наблюдений за этим процессом) или значение $y(t_1)$ к.-л. вспомогательного процесса $Y(t)$, статистически связанного с $X(t)$ (см. *Случайных процессов прогнозирование*).

Наконец, ряд задач С. а. относится к числу задач на непараметрич. методы статистики; так обстоит дело, в частности, когда по наблюдениям за течением процесса $X(t)$ требуется оценить нек-рые функции, характеризующие распределения вероятностей значений этого процесса (напр., плотность вероятности величины $X(t)$ или корреляционную функцию $\mathsf{E}X(t)X(s)$ процесса $X(t)$, или, в случае стационарного случайного процесса $X(t)$, его спектральную плотность $f(\lambda)$).

При решении задач С. а. случайных процессов всегда необходимо принять те или иные специальные предположения о статистич. структуре процесса $X(t)$, т. е. ограничить класс рассматриваемых случайных процессов. Очень ценным с точки зрения С. а. является допущение о том, что рассматриваемый процесс $X(t)$ является стационарным случайным процессом; при этом допущении, зная значения единственной реализации $x(t)$ в течение конечного промежутка времени $0\leqslant t\leqslant T$, можно уже получить целый ряд статистич. выводов о вероятностных характеристиках процесса $X(t)$. В частности, среднее арифметическое значение

$$\overline{x}_T=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

в случае стационарного случайного процесса $X(t)$ при весьма широких условиях является состоятельной оценкой математич. ожидания $\mathsf{E}X(t)=m$ (т. е. $\overline{x}_T$ сходится при $T\to\infty$ к истинному значению оцениваемой величины m); аналогично этому выборочная корреляционная функция

$$B_T^*(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^{T-\tau} x(t)\,x(t+\tau)\,d\tau,$$

где $\tau>0$, при широких условиях является состоятельной оценкой корреляционной функции

$$B(\tau)=\mathsf{E}X(t)\,X(t+\tau).$$

Однако преобразование Фурье функции $B_T^*(\tau)$ — т. н. периодограмма $I_T(\lambda)$ процесса $X(t)$ уже не представляет собой состоятельной оценки спектральной плотности $f(\lambda)$, являющейся преобразованием Фурье функции $B(\tau)$; при больших значениях T периодограмма $I_T(\lambda)$ ведёт себя крайне нерегулярно и при $T\to\infty$ она не стремится ни к какому пределу. Поэтому С. а. случайных процессов включает в себя ряд специальных приёмов построения состоятельных оценок спектральной плотности $f(\lambda)$ по наблюдённым значениям одной реализации стационарного процесса $X(t)$, большинство из к-рых основано на использовании сглаживания периодограммы процесса по сравнительно узкой полосе частот λ.

При исследовании свойств оценок вероятностных характеристик стационарных случайных процессов очень полезными оказываются дополнительные допущения о природе $X(t)$ (напр., допущение о том, что все конечномерные распределения значений процесса $X(t)$ являются нормальными распределениями). Большое развитие получили также исследования по С. а. случайных процессов, в к-рых предполагается, что изучаемый процесс $X(t)$ является марковским процессом того или иного типа или компонентой многомерного марковского процесса, или компонентой многомерного процесса, удовлетворяющего определённой системе стохастических дифференциальных уравнений.

● Андерсон Т., Статистический анализ временных рядов, пер. с англ., М., 1976; Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н., Статистика случайных процессов, М., 1974; Бриллинджер Д., Временные ряды. Обработка данных и теория, пер. с англ., М., 1980. *А. М. Яглом.*

СТАТИСТИ́ЧЕСКИЙ ИНСТИТУ́Т международный (ISI — International Statistical Institute) — международная организация, занимающаяся развитием и усовершенствованием статистических методов и их применением в различных областях знаний. Основан в 1885. Организационная работа С. и. выполняется Постоянным бюро, к-рое находится в Гааге. В составе С. и. (на 1 янв. 1987) 1404 действительных членов из 80 стран, 8 почётных членов (один из них — А. Н. Колмогоров) — специалисты в области социально-экономич. и математич. статистики, а также руководители национальных статистич. учреждений и организаций. Каждые 2 года С. и. проводит сессии, на к-рых заслушиваются и обсуждаются научные сообщения по проблемам различных отраслей статистики. Первая сессия состоялась в Риме в 1887, 46-я — в 1987 в Токио. Материалы сессий С. и. печатаются в «Бюллетенях

ституте». Статьи по отдельным проблемам статистики (в основном математической) и текущая информация о научной жизни публикуются в журнале «Международное статистическое обозрение». До 1-й мировой войны 1914 - 18 С. и. был центром международной статистики, занимался сбором и обработкой статистич. данных отдельных стран, готовил рекомендации по сопоставимости данных. В 1919—33 он осуществлял эту деятельность параллельно с органами Лиги Наций. С созданием статистич. аппарата ООН С. и. полностью переключился на вопросы статистич. теории и методологии. Ин-т готовит кадры статистиков для развивающихся стран. Для осуществления целей С. и. учреждён ряд секций: Международная Ассоциация региональных и городских статистиков (в 1957), *Бернулли общество* по математич. статистике и теории вероятностей (с 1963), Международная ассоциация статистич. вычислений (с 1977).

СТАТИСТИ́ЧЕСКИЙ КРИТЕ́РИЙ — см. *Статистических гипотез проверка.*

СТАТИСТИ́ЧЕСКИЙ МЕ́ТОД — см. *Математическая статистика.*

СТАТИСТИ́ЧЕСКИХ ГИПО́ТЕЗ ПРОВЕ́РКА — один из основных разделов математической статистики, объединяющий методы проверки соответствия статистических данных некоторой статистической гипотезе (гипотезе о вероятностной природе данных). Процедуры С. г. п. позволяют принимать или отвергать статистич. гипотезы, возникающие при обработке или интерпретации результатов наблюдений во многих практически важных разделах науки и производства, связанных со случайным экспериментом. Правило, в соответствии с к-рым принимается или отклоняется данная гипотеза, наз. статистическим критерием. Построение критерия определяется выбором подходящей функции $T=T(X_1, \ldots, X_n)$ от результатов наблюдений $X_1, \ldots, X_n$, к-рая служит мерой расхождения между опытными и гипотетич. значениями. Эта функция, являющаяся случайной величиной, наз. статистикой критерия, при этом предполагается, что распределение вероятностей T может быть вычислено при допущении, что проверяемая гипотеза верна, и что это распределение не зависит от характеристик гипотетич. распределения. По распределению статистики T находится критическое значение T_0 такое, что если гипотеза верна, то вероятность неравенства $T>T_0$ равна α, где α — заранее заданный уровень значимости (область значений $(x_1, \ldots, x_n)$, для к-рых $T(x_1, \ldots, x_n)>T_0$, область отклонения гипотезы H_0, наз. критической областью). Если в конкретном случае обнаружится, что $T>T_0$, то считается, что расхождение значимо, и гипотеза отвергается, тогда как появление значения $T\leqslant T_0$ не противоречит гипотезе. Такого рода критерии, наз. критериями значимости, используются как для проверки гипотез о параметрах распределения, так и гипотез о самих распределениях. В частном случае, когда проверяется согласие между выборочным и гипотетич. распределениями, пользуются термином критерий согласия.

Пусть, напр., проверяется гипотеза о том, что независимые результаты наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ подчиняются нормальному распределению со средним значением $a=a_0$ при известной дисперсии σ^2. При этом арифметическое среднее $\overline{X}=(X_1+\ldots+X_n)/n$ результатов наблюдений распределено нормально с математич. ожиданием $a=a_0$ и дисперсией σ^2/n, а величина $\sqrt{n}\frac{\overline{X}-a_0}{\sigma}$ распределена нормально с параметрами (0, 1). Полагая

$$T=\sqrt{n}\,\frac{|\overline{X}-a_0|}{\sigma},$$

можно найти связь между T_0 и α по таблицам нормального распределения. Напр., при гипотезе $a=a_0$ событие $T>1{,}96$ имеет вероятность 0,05. Правило, в соответствии с к-рым гипотеза $a=a_0$ объявляется неверной при $T>1{,}96$, будет приводить к ложному отбрасыванию этой гипотезы в среднем в 5 случаях из 100, в к-рых она верна. Если же $T\leqslant 1{,}96$, то это ещё не означает, что гипотеза подтверждается, т. к. указанное неравенство с большой вероятностью может выполняться при a, близких к a_0. Следовательно, при использовании предложенного критерия можно лишь утверждать, что результаты наблюдений не противоречат гипотезе $a=a_0$. Если дисперсия σ^2 неизвестна, то вместо данного критерия для проверки гипотезы $a=a_0$ можно воспользоваться *Стьюдента критерием*, основанным на статистике

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a_0}{s},$$

к-рая включает несмещённую оценку дисперсии

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2$$

и подчинена распределению Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Для проверки гипотезы о неизвестном значении σ^2 используется *хи-квадрат критерий*. При выборе статистики T всегда явно или неявно высказывают гипотезы, альтернативные проверяемой гипотезе.

Напр., при проверке гипотезы $a=a_0$ с известным σ^2 вместо $\sqrt{n}\,\frac{|\overline{X}-a_0|}{\sigma}$ следует взять $T=\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a_0}{\sigma}$, если заранее известно, что $a\geqslant a_0$, т. е. отклонение гипотезы $a=a_0$ влечёт принятие гипотезы $a>a_0$.

При решении вопроса о принятии или отклонении к.-л. гипотезы H_0 с помощью любого критерия, основанного на результатах наблюдения, могут быть допущены ошибки двух типов. Ошибка «первого рода» совершается тогда, когда отвергается верная гипотеза H_0. Ошибка «второго рода» совершается в том случае, когда гипотеза H_0 принимается, а на самом деле верна не она, а к.-л. альтернативная гипотеза H_1. Естественно требовать, чтобы критерий для проверки данной гипотезы приводил возможно реже к ошибочным решениям. Обычная процедура построения наилучшего критерия для простой гипотезы заключается в выборе среди всех критериев с заданным уровнем значимости α (вероятность ошибки 1-го рода) такого, к-рый имел бы наименьшую вероятность ошибки 2-го рода (или, что то же самое, наибольшую вероятность отклонения гипотезы, когда она неверна). Последняя вероятность (дополняющая до единицы вероятность ошибки 2-го рода) наз. мощностью статистического критерия. В случае когда альтернативная гипотеза H_1 простая (см. *Статистическая гипотеза*), наилучшим будет критерий, к-рый имеет наибольшую мощность среди всех других критериев с заданным уровнем значимости α (наиболее мощный статистический критерий). Если альтернативная гипотеза H_1 сложная, напр. зависит от параметра, то мощность критерия будет функцией, определённой на классе простых альтернативных гипотез, составляющих H_1, т. е. будет функцией параметра. Критерий, имеющий наибольшую мощность при каждой альтернативной гипотезе из класса H_1, наз. равномерно наиболее мощным статистическим критерием, однако следует отметить, что такой критерий существует лишь в немногих специальных ситуациях. В задаче проверки простой гипотезы о среднем значении нормальной совокупности $a=a_0$ против сложной альтернативной гипотезы $a>a_0$ равномерно наиболее мощный критерий существует, тогда как при проверке той же гипотезы против альтернативы $a\neq a_0$ его нет. Поэтому часто ограничиваются поиском равномерно наиболее мощных критериев в тех или иных специальных классах (инвариантных, несмещённых и т. п. критериев).

Теория С. г. п. позволяет с единой точки зрения трактовать задачи математич. статистики, связанные с проверкой гипотез (оценка различия между средними значениями, проверка гипотезы постоянства дисперсии, проверка гипотез независимости, проверка гипотез о распределениях и т. п.). Идеи *последовательного статистического ана-*

лиза, применённые к С. г. п., указывают на возможность связать решение о принятии или отклонении гипотезы с результатами последовательно проводимых наблюдений (в этом случае число наблюдений, на основе к-рых по определённому правилу принимается решение, не фиксируется заранее, а определяется в ходе эксперимента). Основные задачи С. г. п. могут быть сформулированы в рамках *статистических решений теории*.

● Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; Леман Э., Проверка статистических гипотез, пер. с англ., 2 изд., М., 1979; Нейман Ю., Вводный курс теории вероятностей и математической статистики, пер. с англ., М., 1968.

А. В. Прохоров.

СТАТИСТИ́ЧЕСКИХ ИСПЫТА́НИЙ МЕ́ТОД — численный метод решения математических задач, основанный на моделировании случайных величин или процессов и последующем построении статистич. оценок для искомых величин. Другое название С. и. м.— *Монте-Карло метод* — в большей степени относится к модификациям С. и. м. Универсальность С. и. м. как метода вычислительной математики определяется возможностью его использования для решения задач, не связанных со случайностью. Это достигается построением вспомогательных вероятностных моделей, куда в качестве параметров входят подлежащие определению постоянные величины.

Простейшая схема С. и. м. такова. Для определения неизвестной величины a подыскивается случайная величина X, математич. ожидание к-рой равно a. Если $X_1, \ldots, X_N$ независимы и одинаково распределены так же, как X, то при достаточно большом N по закону больших чисел среднее арифметическое этих величин

$$\frac{1}{N}(X_1+\ldots+X_N)$$

будет приближённо равно a:

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i-a\right|>\varepsilon\right\}\to 0$$

при $\varepsilon>0$ и $N\to\infty$. Этот факт указывает способ расчёта a путём моделирования случайной величины X. С помощью центральной предельной теоремы можно получить оценку погрешности. Эта погрешность стремится к нулю с ростом N и, напр., с большой вероятностью не превосходит $3\sigma/\sqrt{N}$, где $\sigma^2=\mathsf{D}X$. Таким образом, напр., представляют многомерный интеграл в виде математич. ожидания функционала от случайного процесса, к-рый затем моделируется. Известны вероятностные модели для вычисления интегралов, для решения интегральных уравнений, систем линейных алгебраич. уравнений, краевых задач для эллиптич. уравнений, для оценки собственных значений линейных операторов и т. д.

Моделирование случайных величин с заданными распределениями, как правило, осуществляется путём преобразования одного или нескольких независимых значений случайной величины α, распределённой равномерно в интервале (0, 1). Последовательности «выборочных» значений α обычно получают на ЭВМ с помощью теоретико-числовых алгоритмов; такие числа наз. п с е в д о с л у ч а й н ы м и. Более подробно о моделировании случайных величин см. в ст. *Статистическое моделирование*.

Если в расчёте по С. и. м. моделируются случайные величины, определяемые конкретным содержанием изучаемого явления, то такой расчёт часто бывает неэффективным. Эта неэффективность обычно проявляется в слишком большой величине погрешности (дисперсии) оценок искомых величин. Разработано много способов уменьшения дисперсии указанных оценок в рамках С. и. м. В частности, можно выбрать более подходящую вероятностную модель.

● Ермаков С. М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы, 2 изд., М., 1975; Полляк Ю. Г., Вероятностное моделирование на ЭВМ, М., 1971.

СТАТИСТИ́ЧЕСКИХ РЕШЕ́НИЙ ТЕО́РИЯ — теория, позволяющая с единой точки зрения охарактеризовать основные разделы математической статистики, такие, как теория проверки статистических гипотез, теория статистического оценивания (точечного и интервального), последовательный статистический анализ, планирование экспериментов и т. д. Главным понятием С. р. т. является понятие *статистического решения* (р е ш а ю щ е г о п р а в и л а, или р е ш а ю щ е й ф у н к ц и и), принимаемого по результатам наблюдений. Пусть, напр., результаты наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ — взаимно независимые одинаково распределённые случайные величины, распределение вероятностей к-рых принадлежит нек-рому заданному семейству P_θ, зависящему от параметра θ, $\theta\in\Theta$. Основная задача С. р. т. состоит в отыскании статистич. решения — функции $d=d(x)$, к-рая каждому результату наблюдений $x=(x_1, \ldots, x_n)$ приписывает решение $d(x)$ о значении параметра θ (область определения $d(x)$ — множество значений X, область значений — множество допустимых решений D). Для сравнения достоинств того или иного статистич. решения и выбора наилучшего статистич. решения из возможных сравнивают последствия использования различных решений, для чего вводят в рассмотрение неотрицательную ф у н к ц и ю п о т е р ь $L(\theta, d(X))$, характеризующую численные значения убытка от принятия решения $d(X)$, $X=(X_1, \ldots, X_n)$ из множества D, в случае когда истинное распределение есть P_θ. Решение d может быть, напр., действительным числом — оценкой параметра θ, может состоять в указании доверительного интервала, накрывающего значение θ, может соответствовать принятию или отклонению нек-рой гипотезы о значении θ; в каждом случае выбор функции потерь связан с конкретным содержанием задачи. Напр., можно выбрать функцию $L(\theta, d)=\lambda(\theta)W(|\theta-d|)$, где $W(t)$ — строго возрастающая функция $t>0$. Рассматривают математич. ожидание функции потерь

$$R(\theta, d)=\mathsf{E}_\theta(L/\theta, d(X)),$$

вычисленное в предположении, что истинное распределение X есть P_θ, и наз. его ф у н к ц и е й р и с к а или с р е д н и м р и с к о м, для решения d. Естественно считать статистич. решение $d^*=d^*(x)$ наилучшим, если средний риск $R(\theta, d^*)$ не превышает $R(\theta, d)$ для любого $\theta\in\Theta$ и любого статистич. решения $d(x)$. Однако такое статистич. решение с равномерно минимальным риском в большинстве задач отсутствует, в связи с чем приходится прибегать к сужению класса допустимых статистич. решений или к упорядочению множества функций риска. Один из способов упорядочения связан с б е й е с о в с к и м п о д х о д о м, к-рый основан на предположении, что параметр исходного семейства распределений является случайной величиной Θ с известным (априорным) распределением Π. Тогда для каждого решения d выполняется средний риск $\mathsf{E}_\Pi R(\Theta, d)$ по распределению Π, и наилучшим решением считается d^*, для к-рого средний риск $\mathsf{E}_\Pi R(\Theta, d^*)$ равен $\inf_d \mathsf{E}_\Pi R(\Theta, d)$; этот риск наз. б е й е с о в с к и м, а d^* наз. б е й е с о в с к и м с т а т и с т и ч е с к и м р е ш е н и е м. Другой подход в С. р. т., наз. м и н и м а к с н ы м, заключается в сравнении $\sup_\theta R(\theta, d)$ для всех возможных решений d и выборе в качестве наилучшего решения d^{**}, для к-рого

$$\sup_\theta R(\theta, d^{**})=\inf_d \sup_\theta R(\theta, d);$$

полученное решение d^{**} и его риск наз. м и н и м а к с н ы м и. С точки зрения планирования эксперимента, напр., естественным является подход, при к-ром объём выборки (число наблюдений) не фиксируется заранее, а определяется в ходе эксперимента. Этот подход, лежащий в основе последовательного статистич. анализа, включается также в С. р. т.— результаты последовательно проводимых наблюдений служат основой принятия решений о продолжении эксперимента или об окончании его, в последнем случае принимается конкретное статистич. решение о параметрах исходного распределения.

В С. р. т. с наибольшей полнотой раскрывается смысл таких важных свойств статистич. оценок и статистич. кри-

териев, как несмещённость, эффективность, инвариантность, достаточность и т. д.

С. р. т. обязана своим происхождением отчасти теории игр, отчасти обобщению классич. теории проверки статистич. гипотез в рамках последовательного статистич. анализа. Основная заслуга в создании С. р. т. принадлежит А. Вальду (1947—50).

● Ченцов Н. Н., Статистические решающие правила и оптимальные выводы, М., 1972; Де Гроот М., Оптимальные статистические решения, пер. с англ., М., 1974. *А. В. Прохоров.*

СТАТИСТИ́ЧЕСКОЕ МОДЕЛИ́РОВАНИЕ — моделирование случайных величин или процессов для численного решения математич. задач. При этом искомые величины (связанные или не связанные со случайностью) представляют вероятностными характеристиками к.-л. случайного явления; это явление моделируют, после чего нужные характеристики приближённо определяют с помощью статистич. обработки «наблюдений» модели (см. *Статистических испытаний метод*).

Пусть, напр., требуется рассчитать потоки тепла в нагреваемой тонкой металлич. пластине, на краях к-рой поддерживается нулевая температура. Распределение тепла описывается тем же уравнением, что и расплывание пятна краски в слое жидкости. Поэтому моделируют плоское броуновское движение частиц «краски» по пластине, следя за их положениями в моменты $k\tau$, $k=0, 1, 2\ldots$ Приближённо принимают, что за малый интервал τ частица перемещается на шаг h равновероятно во всех направлениях. Каждый раз направление выбирается случайным образом независимо от всего предыдущего. Соотношение между τ и h определяется коэффициентом теплопроводности. Движение начинается в источнике тепла и кончается при первом достижении края («краска» налипает на край). Поток $Q(c)$ тепла через участок c границы измеряется количеством налипшей краски. При общем количестве N частиц согласно закону больших чисел такая оценка даёт случайную относительную ошибку порядка $1/\sqrt{N}$ (и систематич. ошибку порядка h из-за дискретности выбранной модели). Искомую величину представляют математич. ожиданием числовой функции f от случайного исхода ω:

$$\mathsf{E}f(\omega) = \int f(\omega)\, dp,$$

т. е. интегралом по вероятностной мере p. На оценку

$$\mathsf{E}f(\omega) \approx [f(\omega_1) + \ldots + f(\omega_N)]/N,$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_N$ — смоделированные исходы, можно смотреть как на квадратурную формулу для указанного интеграла со случайными узлами ω_k и случайной погрешностью R_N. Обычно принимают

$$|R_N| \leqslant 3\sqrt{\mathsf{D}f/N},$$

считая бо́льшую погрешность пренебрежимо маловероятной; дисперсия $\mathsf{D}f$ может быть оценена в ходе наблюдений.

В разобранном выше примере $f(\omega)=1$, когда траектория кончается на c; иначе $f(\omega)=0$. Дисперсия

$$\mathsf{D}f = [1 - Q(c)]\, Q(c) \leqslant 1/4.$$

Интеграл берётся по пространству ломаных со звеньями постоянной длины; он может быть выражен через кратные интегралы.

Проведение каждого «эксперимента» распадается на две части: «розыгрыш» случайного исхода ω и последующее вычисление функции $f(\omega)$. Когда пространство всех исходов и вероятностная мера p слишком сложны, розыгрыш проводится последовательно в несколько этапов (см. пример). Случайный выбор на каждом этапе проводится с помощью случайных чисел, напр., генерируемых к.-л. физич. датчиком; употребительна также их арифметич. имитация — псевдослучайные числа. Аналогичные процедуры случайного выбора используются в математич. статистике и теории игр.

Численные методы, основанные на С. м., широко применяются для решения на ЭВМ многих задач вычислительной математики. Они удобны своей универсальностью, как правило, не требуют большого объёма памяти. Недостаток — большие случайные погрешности, слишком медленно убывающие при увеличении числа экспериментов. Поэтому разработаны приёмы преобразования моделей, позволяющие понижать разброс наблюдаемых величин и объём модельного эксперимента.

● Ермаков С. М., Михайлов Г. А., Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982. *Н. Н. Ченцов.*

СТАТИСТИ́ЧЕСКОЕ ОЦЕ́НИВАНИЕ — совокупность методов математической статистики для приближённого определения неизвестных распределений вероятностей (или к.-л. их характеристик) по результатам наблюдений. В наиболее распространённом случае результаты наблюдений образуют последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ независимых случайных величин (или векторов), имеющих одно и то же (неизвестное) распределение вероятностей с функцией распределения $F(x)$. Обычно предполагают, что функция $F(x)$ принадлежит к.-л. известному семейству, к-рое зависит от конечного числа параметров, и определению подлежат лишь значения самих этих параметров (напр., значительная часть теории, особенно в многомерном случае, развита в предположении, что неизвестное распределение является нормальным распределением, у к-рого все параметры или к.-л. часть их неизвестны, или что $F(x)$ полностью неизвестна).

Два основных вида С. о.— т. н. точечное оценивание и интервальное оценивание с помощью доверительных интервалов. В первом случае в качестве приближённого значения для неизвестной характеристики выбирают к.-л. одну функцию от результатов наблюдений, во втором — указывают интервал значений, с высокой вероятностью «накрывающий» неизвестное значение этой характеристики. О С. о. параметров см. *Статистическая оценка* и *Интервальная статистическая оценка*.

Разработаны методы С. о. и для случая, когда результаты наблюдений X_n зависимы, и для случая, когда индекс n заменяется непрерывно меняющимся аргументом t, т. е. для случайных процессов. В частности, широко используется С. о. таких характеристик случайных процессов, как корреляционная функция и спектральная функция (см. *Статистический анализ случайных процессов*). Разработаны также методы С. о. для случая, когда объём выборки n не фиксируется заранее, а определяется в процессе наблюдения (см. *Последовательный статистический анализ*). В связи с задачами *регрессионного анализа* был развит метод непараметрич. последовательного С. о.— *стохастическая аппроксимация*. В наиболее общей форме методы С. о. рассматриваются в *статистических решений теории*.

● Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; Закс Ш., Теория статистических выводов, пер. с англ., М., 1975. *Ю. В. Прохоров.*

СТАТИСТИ́ЧЕСКОЕ РЕШЕ́НИЕ, решающее правило, решающая функция,— название решения, принимаемого в математической статистике на основе результатов наблюдений к.-л. явления, подчиняющегося вероятностным закономерностям, к-рые не полностью известны. Обычно предполагается, что соответствующее распределение вероятностей зависит от неизвестного параметра θ, к-рое оценивается по результатам наблюдений $X_1, \ldots, X_n$. Напр., при обеззараживании воды хлорированием количество добавляемого хлора зависит от среднего числа θ бактерий в единице объёма, однако значение θ неизвестно и оценивается по результатам $X_1, \ldots, X_n$ подсчёта численности бактерий в n независимо выбранных единицах объёма воды при допущении (в простейшей модели), что независимые случайные величины X_k имеют одинаковое распределение Пуассона с неизвестным математич. ожиданием θ; С. р.— решение о количестве добавляемого хлора — будет функцией от к.-л. статистич. оценки θ^* параметра θ. Последняя должна выбираться с учётом риска нежелательных последствий как недооценки θ (недостаточное обеззараживание воды), так и завышенной оценки θ (ухудшение вкуса воды от чрезмерного добавления хлора).

Точная математич. формулировка понятий, касающихся С. р. и способов их сравнения, рассматривается *статистических решений теорией.* *Ю. В. Прохоров.*

СТАЦИОНА́РНЫЙ СЛУЧА́ЙНЫЙ ПРОЦЕ́СС (от лат. stationaris — неподвижный) — специальный класс случайных процессов, часто встречающийся в приложениях теории вероятностей к различным разделам естествознания и техники. Случайный процесс $X(t)$ наз. стационарным, если все его вероятностные характеристики не меняются с течением времени t (так что, напр., распределение вероятностей величины $X(t)$ при всех t является одним и тем же, а совместное распределение вероятности величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$ зависит только от t_2-t_1, т. е. распределения пар величин $\{X(t_1),\ X(t_2)\}$ и $\{X(t_1+s),\ X(t_2+s)\}$ одинаковы при любых t_1, t_2 и s, и т. д.).

Схема С. с. п. с хорошим приближением описывает многие реальные явления, сопровождающиеся неупорядоченными флуктуациями. Так, напр., пульсации силы тока или напряжения в электрич. цепи (электрич. «шум») можно рассматривать как С. с. п., если цепь находится в стационарном режиме, т. е. если все её макроскопич. характеристики и все условия, вызывающие протекание через неё тока, не меняются во времени; пульсации скорости в точке турбулентного течения представляют собой С. с. п., если не меняются общие условия, порождающие рассматриваемое течение (т. е. течение является установившимся), и т. д. Эти и другие примеры С. с. п., встречающиеся в физике (в частности, гео- и астрофизике), механике и технике, стимулировали развитие исследований в области теории С. с. п.; при этом существенными оказались также и некрые обобщения понятия С. с. п. (напр., понятия случайного процесса со стационарными приращениями заданного порядка, обобщённого С. с. п. и однородного случайного поля).

В теории С. с. п. основную роль играют моменты распределений вероятностей значений процесса $X(t)$ и особенно моменты первых двух порядков: среднее значение С. с. п. $\mathsf{E}X(t)=m$ и корреляционная функция С. с. п. $\mathsf{E}X(t_1)X(t_2)=B(t_2-t_1)$ (выражающаяся через дисперсию величин $X(t)$ и коэффициент корреляции между $X(t_1)$ и $X(t_2)$). Во многих исследованиях вообще изучаются только те свойства С. с. п., к-рые полностью определяются одними лишь характеристиками m и $B(\tau)$ (т. н. корреляционная теория или теория второго порядка С. с. п.). В этой связи случайные процессы $X(t)$, имеющие постоянное среднее значение $m=\mathsf{E}X(t)$ и корреляционную функцию $B(t_2,\ t_1)=\mathsf{E}X(t_1)X(t_2)$, зависящую только от t_2-t_1, часто называются С. с. п. в широком смысле (в отличие от ранее определённых случайных процессов, все характеристики к-рых не меняются с течением времени, эти процессы в таком случае называются С. с. п. в узком смысле).

Большое место в теории С. с. п. занимают спектральные рассмотрения, опирающиеся на разложение С. с. п. $X(t)$ и его корреляционной функции $B(\tau)$ в интеграл Фурье или Фурье — Стилтьеса. Основную роль при этом играет теорема Хинчина, согласно к-рой корреляционная функция С. с. п. $X(t)$ всегда может быть представлена в виде

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}dF(\lambda), \qquad (1)$$

где $F(\lambda)$ — монотонно неубывающая функция λ; если же $B(\tau)$ достаточно быстро убывает при $|\tau|\to\infty$ (как это чаще всего и бывает в приложениях при условии, что под $X(t)$ понимается на самом деле разность $X(t)-m$), то интеграл Стилтьеса в правой части (1) обращается в обычный интеграл Фурье:

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}f(\lambda)\,d\lambda, \qquad (2)$$

где $f(\lambda)=F'(\lambda)$ — неотрицательная функция. Функция $F(\lambda)$ наз. спектральной функцией С. с. п. $X(t)$, а функция $f(\lambda)$ — его спектральной плотностью. Сам процесс $X(t)$ допускает спектральное разложение вида

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}dZ(\lambda), \qquad (3)$$

где $Z(\lambda)$ — случайная функция с некоррелированными приращениями, а интеграл понимается как предел в среднем квадратичном соответствующей последовательности интегральных сумм. Разложение (3) даёт основание рассматривать любой С. с. п. $X(t)$ как наложение некоррелированных друг с другом гармонич. колебаний различных частот со случайными амплитудами и фазами. При этом спектральная функция $F(\lambda)$ и спектральная плотность $f(\lambda)$ определяют распределение средней энергии входящих в состав $X(t)$ гармонич. колебаний по спектру частот λ, в связи с чем в прикладных исследованиях функция $f(\lambda)$ частот наз. также спектром мощности (или спектром энергии) С. с. п. $X(t)$.

Выделение понятия С. с. п. и получение первых относящихся к нему математич. результатов являются заслугой Е. Е. Слуцкого и А. Я. Хинчина и относятся к кон. 20-х и нач. 30-х гг. 20 в.

● Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, 2 изд., М., 1977; Розанов Ю. А., Стационарные случайные процессы, М., 1963; Яглом А. М., Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., 1981.*

А. М. Яглом.

СТЕКЛО́ВА ФУ́НКЦИЯ — функция, определяемая для данной функции $f(x)$ равенством

$$\Phi(x,\ h)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

где h настолько мало, что интервал $(x,\ x+h)$ лежит в области определения функции $f(x)$. С. ф. применяются для сглаживания данной функции, т. к. если функция $f(x)$ непрерывна, то $\Phi(x,\ h)$ имеет на одну производную больше, чем $f(x)$. При этом $\lim \Phi(x,\ h)=f(x)$, то есть С. ф. могут применяться для приближения непрерывных функций более гладкими. Если функция $f(x)$ интегрируема, то функция $\Phi(x,\ h)$ непрерывна. С. ф. введены В. А. Стекловым (1907) и применялись им для решения многих вопросов в математич. физике. С. ф. могут быть определены и для нескольких переменных.

СТЕПЕ́ННАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция

$$y=x^a,$$

где a — постоянное число. Если a — целое число, то С. ф. $y=x^a$ — частный случай *рациональной функции.* В частности, $y=x$ — линейная функция, $y=x^2$ — квадратичная функция, $y=x^n$, где n — натуральное число, — целая рациональная функция (многочлен), $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ — дробно-линейная функция. При комплексных значениях x и a С. ф. $y=x^a$ неоднозначна, если a — нецелое число.

Степенная функция действительного аргумента. При фиксированных x и a число x^a является *степенью.*

При $x>0$ С. ф. x^a определена и положительна для любого действительного a. При $x\leqslant 0$ С. ф. x^a определена в следующих случаях:

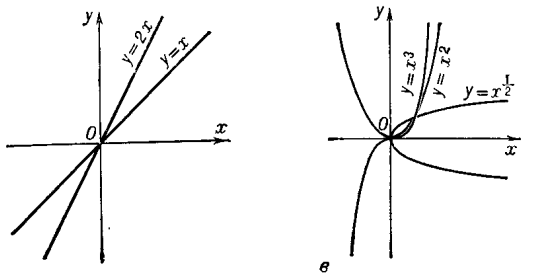
а) С. ф. x^a при $x=0$ определена и равна нулю, если $a>0$, и не определена, если $a<0$. С. ф. $x^0\equiv 1$ при $x\neq 0$; 0^0 определённого смысла не имеет.

б) Если n — натуральное число, то С. ф. x^n определена при всех x, а С. ф. $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ определена при $x\neq 0$.

в) С. ф. $x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$, где n — нечётное натуральное число, определена и отрицательна при $x<0$. Однако иногда удобно считать, что и в этом случае С. ф. $x^{1/n}$ определена только при $x\geqslant 0$. Аналогичные соглашения принимаются и для С. ф. $x^{m/n}$, когда m/n — несократимая дробь.

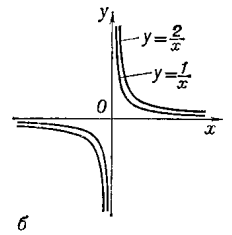
Свойства С. ф. x^a обычно рассматриваются при $x>0$, хотя многие из них справедливы и при $x\leqslant 0$, напр., когда a — натуральное число.

График (рис. 1) С. ф. $y=x^n$, где n — натуральное число, при $n=1$ представляет собой прямую линию (рис. 1, *а*), при $n\geqslant 2$ — п а р а б о л у n-г о п о р я д к а (рис. 1, *в*). Если n чётное, кривая симметрична относительно оси Oy и имеет в начале координат минимум; если n нечётное,



а *в*

Рис. 1. Графики функции $y=x^n$: *а*) при $n=1$; *б*) при $n=1/2$; 2; 3; *в*) при $n=-1$.



б

кривая симметрична относительно начала координат, в к-ром имеет точку перегиба.

Кривая $y=ax^n$ получается из кривой $y=x^n$ растяжением по оси Oy в $|a|$ раз и при $a<0$ — зеркальным отражением относительно оси Ox.

График С. ф. $y=\frac{1}{x^n}=x^{-n}$, где n — натуральное число, представляет собой к р и в у ю г и п е р б о л и ч е с к о г о т и п а (рис. 1, *б*). При $x=0$ — разрыв. Оси координат — асимптоты; кривая асимптотически приближается к оси Ox тем быстрее, а к оси Oy тем медленнее, чем больше n. График С. ф. симметричен относительно оси Oy при n чётном и относительно начала координат при n нечётном.

График С. ф. $y=x^{1/n}$, где n — натуральное число, — парабола n-го порядка, симметричная графику С. ф. $y=x^n$ относительно биссектрисы $y=x$ (рис. 1, *в*).

График С. ф. $y=x^{m/n}$ — кривая, проходящая через точки (0,0) и (1,1) и касающаяся в начале координат оси Ox (при $m/n>1$) или оси Oy (при $m/n<1$); если n чётное, кривая симметрична относительно оси Ox (функция двузначна); если m чётное, — относительно оси Oy, если m и n — оба нечётные, кривая симметрична относительно начала координат, в к-ром имеет точку перегиба.

График С. ф. $y=x^{-m/n}$ — кривая гиперболич. типа. При $x=0$ — разрыв. Оси координат — асимптоты; кривая асимптотически приближается к оси Ox тем быстрее, а к оси Oy тем медленнее, чем больше $|m/n|$. Симметрия относительно осей или начала координат зависит от чётности и нечётности m и n.

С. ф. x^a при $x>0$ непрерывна, монотонна (возрастает, если $a>0$; убывает, если $a<0$), бесконечно дифференцируема и в окрестности каждой точки x_0 может быть разложена в ряд Тейлора. При этом

$$(x^a)'=ax^{a-1},$$

$$\int x^a\,dx=\begin{cases}\frac{x^{a+1}}{a+1}+C & \text{при } a\neq -1,\\ \ln|x|+C & \text{при } a=-1,\end{cases}$$

$$x^a \sum_{n=0}^{\infty} C_a^n x_0^{a-n}(x-x_0)^n \text{ при } |x-x_0|<|x_0|,$$

где C_a^n — биномпальные коэффициенты.

Степенная функция w комплексного переменного $z=x+iy$. Для комплексных z и a С. ф. w определяется формулой

$$w=z^a=e^{a\operatorname{Ln} z}=e^{a(\ln|z|+\operatorname{Arg} z)},$$

где $\ln|z|$ — однозначная действительная функция, $\operatorname{Arg} z$ — многозначная функция (см. *Логарифмическая функция*).

С. ф. $w=z^a$ однозначна только при целых значениях a. Если $a=m/n$ — несократимая дробь, то С. ф. $w=z^{m/n}$ n-значна. В остальных случаях С. ф. $w=z^a$ бесконечнозначна. Если a — действительное число, то все значения С. ф. находятся по формуле

$$z^a=|z|^a e^{ia\operatorname{Arg} z}.$$

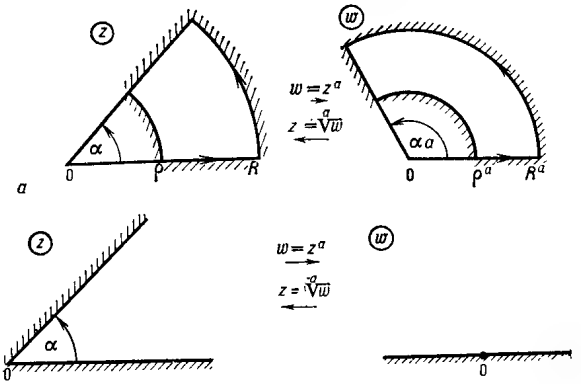
С. ф. $w=z^a$ аналитична в области $0<|z|<\infty$. Если $a=m/n$ — несократимая дробь, то точки $z=0$ и $z=\infty$ являются алгебраич. точками ветвления порядка n С. ф. $z^{m/n}$. Если a — действительное иррациональное число или $\operatorname{Im} a\neq 0$, то точки $z=0$ и $z=\infty$ являются логарифмич. точками ветвления С. ф. z^a. В области $|\arg z|<\pi$ С. ф. z^a распадается на однозначные регулярные ветви. При этом различных ветвей ровно n, если $a=m/n$ — несократимая дробь, и бесконечное число различных ветвей, если a не является действительным рациональным числом.

Аналитич. С. ф. $w=z^a$ является совокупностью элементов, к-рые в окрестности каждой точки $z\neq 0,\infty$ могут быть представлены в виде

$$w=z^a=z_0^a\sum_{n=0}^{\infty} C_a^n z_0^{-n}(z-z_0)^n,$$

$$|z-z_0|<|z_0|,$$

где z_0^a — все значения функции z^a в точке z_0. Эти элементы связаны между собой: любой из них можно получить из любого другого в результате аналитич. продолжения по кривой, не проходящей через точки $z=0,\infty$.



а *б*

Рис. 2. Конформные отображения функцией $w=z^a$: *а*) кольцевого сектора на кольцевой сектор; *б*) угла на полуплоскость.

Отображение С. ф. $w=z^a$ при действительном a переводит лучи $\arg z=\alpha$ в лучи $\arg w=\alpha a$, окружности $|z|=\rho$ — в окружности $|w|=\rho^a$.

С. ф. $w=z^a$ (точнее, её регулярная ветвь) при действительном a конформно отображает кольцевой сектор $0<\arg z<\alpha$, $\rho<|z|<R$ на кольцевой сектор $0<\arg w<\alpha a$, $\rho^a<|w|<R^a$, где $0<\alpha\leqslant 2\pi$, $0<\alpha a\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\rho<R\leqslant\infty$ (рис. 2, *а*). В частности, С. ф. $w=z^{\pi/\alpha}$ конформно отображает угол $0<\arg z<\alpha$, где $0<\alpha\leqslant 2\pi$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$ (рис. 2, *б*). Примеры отображений С. ф. z^2 и $\sqrt{z}$ см. в статье *Квадратный трёхчлен*. *Ю. В. Сидоров.*

СТЕПЕННО́Е СРЕ́ДНЕЕ n п о л о ж и т е л ь н ы х ч и с е л $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — число

$$s_\alpha=\left[(x_1^\alpha+x_2^\alpha+\ldots+x_n^\alpha):n\right]^{1/\alpha},\quad \alpha\neq 0.$$

СТЕПЕННО́Й ВЫЧЕТ п о м о д у л ю m — целое число a, для к-рого при заданном целом $n>1$ сравнение

$$x^n\equiv a\pmod m$$

разрешимо. Если это сравнение не разрешимо, то число a наз. н е в ы ч е т о м степени n по модулю m. При $n=2$ С. в. наз. *квадратичным вычетом*, при $n=3$ — к у б и ч е с к и м, при $n=4$ — б и к в а д р а т и ч н ы м.

СТЕПЕННО́Й РЯД — функциональный ряд вида

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

где коэффициенты a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... — комплексные числа, не зависящие от комплексного переменного z. Областью сходимости С. р. является, вообще говоря, открытый круг $D=\{z:|z|<R\}$ с центром в точке $z=0$. Этот круг наз. кругом сходимости С. р., а его радиус R — радиусом сходимости С. р. В частных случаях круг сходимости может вырождаться в точку $z=0$ (в этом случае $R=0$; пример: $1+1!\cdot z+2!\cdot z^2+\ldots+n!\cdot z^n+\ldots$) или совпадать со всей комплексной плоскостью $\left(R=\infty;\ \text{пример: } 1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots\right)$. Для действительных z круг сходимости превращается в т. н. интервал сходимости на действительной оси. Радиус сходимости С. р. выражается через его коэффициенты по формуле Коши — Адамара

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Во всех точках круга сходимости С. р. сходится абсолютно; в граничных точках этого круга (в точках окружности $|z|=R$) С. р. может как сходиться, так и расходиться, примеры: $1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots$, $R=1$, расходится в каждой точке окружности $|z|=1$;

$$1+\frac{z}{1^2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{n^2}+\ldots,\quad R=1,$$

ряд абсолютно сходится во всех точках окружности $|z|=1$. В любой внешней точке круга сходимости ($|z|>R$) С. р. расходится. Внутри круга сходимости сумма С. р. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ является аналитич. функцией; производные любого порядка функции $f(z)$ можно получить почленным дифференцированием данного ряда, при этом сам С. р. совпадает с рядом Тейлора своей суммы.

СТЕ́ПЕНЬ числа, n-я степень числа (при натуральном n) — произведение n сомножителей, равных этому числу. Обозначение С.

$$a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\text{ раз}},$$

здесь a наз. основанием, а n — показателем степени. С. a^2 наз. квадратом, a^3 — кубом (a^2 — площадь квадрата, a^3 — объём куба со стороной a). Основные действия над С. даются формулами:

$$a^na^m=a^{n+m};\quad a^n:a^m=a^{n-m};\quad (a^n)^m=a^{nm}.$$

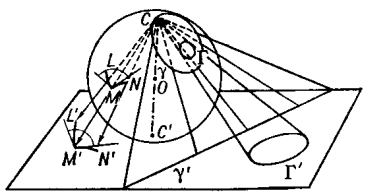
Дальнейшие обобщения С.: нулевая $a^0=1$ (при $a\neq0$); отрицательная $a^{-n}=1/a^n$; дробная $a^{n/m}=\sqrt[m]{a^n}$ и С. с иррациональным показателем $a^{\alpha}=\lim_{r_n\to\alpha}a^{r_n}$, где r_n — произвольная последовательность рациональных чисел, стремящаяся к α. Рассматриваются также С. с комплексными основанием и показателем: по определению

$$z^u=e^{u\operatorname{Ln}z}.$$

Все указанные выше правила действий справедливы и для обобщённых С.

СТЕРАДИА́Н (от греч. στερεός — телесный, объёмный, пространственный и *радиан*) — телесный угол, вырезающий на сфере, описанной вокруг вершины угла, поверхность, площадь которой равна квадрату радиуса сферы. С. принимается за единицу измерения телесных углов. Обозначается ср. Полная сфера образует телесный угол, равный 4π ср.

СТЕРЕОГРАФИ́ЧЕСКАЯ ПРОЕ́КЦИЯ (от греч. στερεός — объёмный, пространственный и γράφω — пишу) — соответствие между точками сферы и плоскости, получаемое следующим образом: из некоторой точки C на сфере (центра С. п.) другие точки сферы проектируются лучами на плоскость, перпендикулярную радиусу сферы OC и не проходящую через C (см. рис.; обычно эту плоскость проводят или через центр O сферы, или через точку C' — конец диаметра сферы CC'). При этом каждая точка M сферы, отличная от C, перейдёт в пек-рую точку M' плоскости; такое соответствие будет взаимно однозначным, если исключить из сферы сам центр проекции C, к-рому никакая точка плоскости не соответствует, или дополнить плоскость воображаемой бесконечно удалённой точкой ∞ и считать, что центр С. п. C взаимно однозначно соответствует точке ∞.



Основные свойства С. п.: 1) окружностям на сфере соответствуют окружности на плоскости (на рис. окружности Γ соответствует окружность Γ′), причём окружностям, проходящим через центр С. п., соответствуют на плоскости прямые линии (окружности бесконечно большого радиуса; на рис. γ и γ′); 2) соответствие, устанавливаемое С. п., является конформным, т. е. сохраняет углы; напр., угол LMN на сфере равен углу $L'M'N'$ на плоскости.

СТЕРЕОМЕ́ТРИЯ (от греч. στερεός — объёмный, пространственный и μετρέω — измеряю) — часть элементарной геометрии, в которой изучаются пространственные фигуры, в отличие от *планиметрии*, где рассматриваются фигуры, лежащие в плоскости.

СТЁРМЕРА МЕ́ТОД — см. *Штёрмера метод*.

СТИЛТЬЕСА ИНТЕГРА́Л — обобщение понятия определённого интеграла, предложенное в 1894 Т. Стилтьесом и состоящее в том, что вместо предела обычных интегральных сумм $\sum f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ рассматривается предел сумм $\sum f(\xi_i)[\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})]$, где «интегрирующая функция» $\varphi(x)$ есть функция с ограниченной вариацией. Если $\varphi(x)$ дифференцируема, то С. и. выражается через обычный интеграл в предположении, что последний существует:

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)=\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx,$$

СТИ́РЛИНГА РЯД — асимптотическое разложение логарифма *гамма-функции*. Предложен (1730) Дж. Стирлингом.

СТИ́РЛИНГА ФО́РМУЛА — асимптотическое равенство, позволяющее находить приближённые значения факториалов $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$ и гамма-функции при больших значениях n и имеющее вид

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^ne^{-n}e^{\theta(n)},$$

где $|\theta(n)|\leqslant\frac{1}{12n}$. Иначе говоря, имеют место асимптотические равенства

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\,n^ne^{-n},\quad n\longrightarrow\infty;$$

$$\Gamma(z+1)\approx\sqrt{2\pi n}\,z^ze^{-z},\quad \operatorname{Re}z\longrightarrow+\infty,$$

означающие, что при $n\to\infty$ или $\operatorname{Re}z\to+\infty$ отношение левой и правой частей стремится к единице.

Относительная ошибка при вычислении $n!$ меньше $e^{1/12n}-1$ и, т. о., стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Напр., при $n=10$ С. ф. даёт $n!\approx3598700$, тогда как точное значение $10!=3628800$; относительная ошибка в данном случае составляет менее 1 %. С. ф. названа по имени Дж. Стирлинга (1730), к-рый впервые дал асимптотическое разложение логарифма гамма-функции, т. н. ряд Стирлинга, из к-рого получается С. ф. Независимо от Дж. Стирлинга С. ф. получил также А. Муавр (1730).

СТИ́РЛИНГА ЧИСЛО́ 1-го рода — число $S(n,k)$, определяемое равенством

$$x(x-1)\ldots(x-n+1)=\sum_{k=0}^{n}S(n,k)\,x^k,$$

С. ч. 2-го рода — число

$$\sigma(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n.$$

Числа $S(n, k)$ и $\sigma(n, k)$ открыты Дж. Стирлингом. См. также *Комбинаторный анализ.*

СТОК векторного поля — точка, в которой *дивергенция* отрицательна.

СТО́КСА ФО́РМУЛА — формула преобразования криволинейного интеграла по замкнутому контуру L в поверхностный интеграл по поверхности Σ, ограниченной контуром L. С. ф. имеет вид

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_\Sigma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+$$
$$+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx,$$

причём направление обхода контура L должно быть согласовано с ориентацией поверхности Σ. В векторной формуле С. ф. приобретает вид

$$\iint_L \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\iint_\Sigma \boldsymbol{n}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}\,ds,$$

где $\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$, $d\boldsymbol{r}$ — элемент контура L, ds — элемент поверхности Σ, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к этой поверхности. Физич. смысл С. ф. состоит в том, что циркуляция векторного поля по контуру L равна потоку вихря поля через поверхность Σ. С. ф. предложена Дж. Стоксом (1854).

СТОХАСТИ́ЧЕСКАЯ АППРОКСИМА́ЦИЯ (от греч. στοχαστικός — умеющий угадывать, проницательный) — метод решения широкого класса задач статистического оценивания, при котором каждое следующее значение статистической оценки получается в виде основанной лишь на новом наблюдении поправки к уже построенной оценке. С. а. относится к непараметрическим последовательным методам оценивания (см. *Последовательный статистический анализ*, *Непараметрические методы* математической статистики). Основными чертами, обусловившими популярность С. а. в теоретич. и прикладных работах, явились её непараметрич. характер (применимость при весьма скудной информации об объекте наблюдения) и рекуррентность (простота пересчёта оценки при поступлении нового результата наблюдений). Одна из первых процедур С. а. (1951) для нахождения корня θ уравнения регрессии $R(x)=\alpha$ в ситуации, когда каждое измеренное значение y_k функции $R(x)$ в точке x_k содержит случайную ошибку, даётся формулой

$$x_{k+1}=x_k+a_k(y_k-\alpha).$$

При нек-рых условиях на функцию $R(x)$, последовательность a_k, стремящуюся к нулю, и на характер случайных ошибок доказано, что $x_k\to\theta$ при увеличении k. Позже метод С. а. был применён и для решения других задач: отыскания максимума функции регрессии, оценки неизвестных параметров распределения по наблюдениям и др. На основе изучения предельного распределения нормированной разности $x_k-\theta$ построены асимптотически наилучшие процедуры С. а., в к-рых последовательность a_k нужно выбирать зависящей от наблюдений.

С. а. используется во многих прикладных задачах теории управления, обучения, в задачах техники, биологии, медицины.

СТОХАСТИ́ЧЕСКАЯ ЗАДА́ЧА — см. *Исследование операций.*

СТОХАСТИ́ЧЕСКАЯ МА́ТРИЦА — квадратная матрица $P=\|p_{ij}\|$, у которой элементы суть неотрицательные действительные числа и сумма элементов каждой строки равна единице:

$$p_{ij}\geqslant 0,\quad \sum_i p_{ij}=1,\quad i,\ j=1,\ 2,\ \ldots$$

Неотрицательная матрица P n-го порядка является С. м. тогда и только тогда, когда единичный n-мерный вектор $(1,\ 1,\ \ldots,\ 1)$ есть собственный вектор, соответствующий собственному значению 1 матрицы P. Абсолютные величины собственных значений С. м. не превышают единицы. С. м. $P=\|p_{ij}\|$, удовлетворяющая дополнительному условию $\sum_i p_{ij}=1$ при всех j, наз. дважды стохастической матрицей. С. м. имеют большое значение в теории вероятностей, именно, любую С. м. можно рассматривать как матрицу переходных вероятностей цепи Маркова.

СТОХАСТИ́ЧЕСКИЙ ПРОЦЕ́СС — то же, что *случайный процесс.*

СТОХАСТИ́ЧЕСКОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — раздел математического программирования, посвящённый исследованию стохастических экстремальных задач, т. е. задач, в которых условия допустимости и (или) целевая функция зависят от случайных параметров. Такие задачи возникают при моделировании процессов принятия решений, в к-рых входная информация (или по крайней мере её часть) носит вероятностный характер. В виде задач С. п. формулируются многие задачи оптимального планирования, управления и проектирования. К задачам С. п. сводятся также нек-рые экстремальные задачи математич. статистики.

В задаче С. п. целевая функция $f(x,\ \omega)$ и ограничения

$$g_i(x,\ \omega)\leqslant 0,\quad i=1,\ \ldots,\ m, \qquad (*)$$

зависят от вектора случайных параметров ω (здесь вектор x принадлежит нек-рому множеству G). При этом $f(x,\ \omega)$ и $g_i(x,\ \omega)$ при любом фиксированном значении $x\in G$ являются случайными величинами. Максимизации (минимизации) в задачах С. п. обычно подлежит нек-рая характеристика случайной функции $f(x,\ \omega)$, напр. её математич. ожидание. Способы учёта случайности в ограничениях $(*)$ приводят к различным классам задач С. п. Напр., в нек-рых постановках точка $x\in G$ считается допустимой, если неравенства $(*)$ (или каждое из них) выполняются с вероятностью, не меньшей $1-p$ при нек-ром $p\in[0,\ 1)$.

Содержательная классификация задач С. п. определяется также и тем, считается ли допустимым решением задачи детерминированный вектор x или вектор-функция $x(\omega)$, значения к-рой зависят от реализации случайных параметров. В первом случае задачу наз. задачей перспективного С. п., во втором — задачей оперативного С. п. Такие названия связаны с тем, что в задачах перспективного С. п. допустимое (оптимальное) решение выбирается до получения информации о реализации случайных параметров. В задачах оперативного С. п. допустимое (оптимальное) решение выбирается в виде нек-рого решающего правила-инструкции и может быть найдено лишь после получения информации о реализации случайных параметров.

Рассматриваются также такие постановки задач С. п., в к-рых допустимым решением является распределение вероятностей на нек-ром множестве детерминированных векторов или на множестве вектор-функций от случайных параметров (решения в смешанных стратегиях). Особое место среди задач С. п. занимают двухэтапные задачи, в к-рых допустимое решение состоит из детерминированного вектора — плана и вектор-функции — правила корректировки плана после реализации и наблюдения случайных параметров. Аналогично определяются многоэтапные задачи.

Методы решения задач С. п. существенно зависят от вида задачи и свойств функций распределения, определяющих множество допустимых решений и целевую функцию. При определённых условиях удаётся построить детерминированную экстремальную задачу, эквивалентную исходной, которая наз. детерминированным эквивалентом. Если детерминированный эквивалент является задачей линейного или выпуклого программирования, решение задачи С. п. можно получить методами линейного (соответственно выпуклого) программирования. Подобные подходы наз. непрямыми методами С. п. В отличие от них прямыми методами С. п. наз. методы, использующие по существу стохастич. характер задачи и основанные на информации о значениях (распределениях) её случайных параметров. См. также *Исследование операций.*

● Ермольев Ю. М., Ястремский А. И., Стохастические модели и методы в экономическом планировании, М., 1979; Юдин Д. Б., Задачи и методы стохастического программирования, М., 1979.

Л. М. Абрамов.

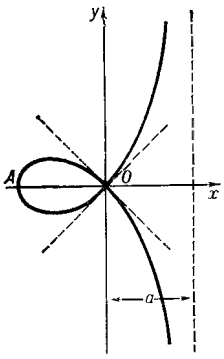
СТРАТЕ́ГИЯ (греч. στρατηγία, от στρατός — войско и ἄγω — веду) в теории игр — способ действия игрока или коалиции действия, возможный в соответствии с правилами игры. См. *Игр теория*.

СТРЕЛЬБЫ МЕ́ТОД — численный метод решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, основанный на некоторой специальной параметризации задачи. См. *Пристрелки метод*.

СТРИКЦИО́ННАЯ ЛИ́НИЯ (от лат. strictio — сжатие), линия сжатия,— см. *Линейчатая поверхность*.

СТРО́ГИЙ ПОРЯ́ДОК — см. *Порядка отношение*.

СТРОФО́ИДА (от греч. στρόφος — кручёная лента и εἶδος — вид) — плоская алгебраическая кривая 3-го порядка (рис.). Уравнение в прямоугольных координатах:



$$y^2 = x^2\frac{a+x}{a-x},$$

в полярных координатах:

$$\rho = -a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi};$$

симметрична относительно оси Ox. Узловая точка в начале координат (касательные $y=\pm x$). Асимптота $x=a$. Вершина $A(-a, 0)$. Площадь петли $S_1 = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{2}$. Площадь между С. и асимптотой $S_2 = 2a^2 + \frac{\pi a^2}{2}$.

Впервые кривую исследовал Э. Торричелли (1645).

СТРУКТУ́РА (лат. structura — строение, расположение) — 1) С. математическая — родовое название, объединяющее понятия, общей чертой которых является то, что они применимы к множествам, природа элементов которых не определена. Чтобы определить С., задают отношения, в к-рых находятся элементы множества (типовая характеристика С.), а затем постулируют, что данные отношения удовлетворяют условиям — аксиомам С. 2) С.— то же, что *решётка*.

СТРУКТУ́РА ДА́ННЫХ — класс однородных математических объектов, ориентированный на эффективное представление данных в некотором классе задач, подлежащих решению на ЭВМ. Напр., употребительными С. д. являются конечные последовательности однотипных или разнотипных элементов (массивы, кортежи, записи, списки и т. д.), таблицы (двумерные массивы, матрицы и т. д.) и деревья.

Понятие С. д. близко к понятию типа данных в языке программирования. Задание С. д. обычно происходит с помощью фиксированных в языке способов построения, исходя из конечного числа базовых С. д. или типов данных, таких, как целые числа, логические значения, литеры, действительные числа в их машинном представлении. К широко употребляемым способам построения С. д. относятся образование последовательности (массива) из элементов заданного типа и образование кортежа (записи) с компонентами заданных типов. Графовые С. д. (списковые структуры) в языках программирования обычно строятся с помощью указателей (ссылок). Важным способом построения С. д. является рекурсивное определение с помощью системы равенств.

Те или иные С. д. строятся или выбираются из соображений естественности представления данных или эффективности решения задачи. Напр., деревья удобны для представления часто встречающихся иерархич. структур. С другой стороны, специальные виды деревьев (бинарные, сбалансированные и др.) применяются для быстрого поиска данных. Часто решение задачи опирается на нек-рые заданные операции, и разработка С. д. для такой задачи ориентирована на эффективное выполнение этих операций. Важным требованием, предъявляемым к С. д. в программировании, является эффективность их машинного представления (экономное расходование памяти и быстрый доступ к компонентам структуры).

С. д., используемые в программировании, отличаются разнообразием; постоянно вводятся новые С. д., и само понятие С. д. постепенно расширяется.

СТРУКТУ́РНАЯ ЛИНГВИ́СТИКА — см. *Математическая лингвистика*.

СТЬЮДЕНТА КРИТЕ́РИЙ — статистический критерий, основанный на *Стьюдента распределении* и используемый для проверки гипотез о средних значениях нормальных распределений. Пусть результаты наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ — взаимно независимые нормально распределённые случайные величины с неизвестными параметрами a и σ^2. Для проверки гипотезы $a=a_0$ в соответствии со С. к. предлагается статистика

$$t_{n-1} = \sqrt{n}\frac{\overline{X}-a_0}{s},$$

где

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\overline{X})^2.$$

При условии, что гипотеза $a=a_0$ справедлива, статистика t_{n-1} имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы. Поэтому при заданном уровне значимости α гипотеза $a=a_0$ принимается, если

$$\left|\sqrt{n}\frac{\overline{X}-a_0}{s}\right| \leqslant t_\alpha,$$

где t_α находится из соотношения

$$\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha} s_{n-1}(t)\,dt = 1-\varepsilon$$

по плотности $s_{n-1}(t)$ распределения Стьюдента; в ином случае отклоняется в пользу альтернативной гипотезы $a\neq a_0$. Если заранее известно, что $a\geqslant a_0$, то гипотеза $a=a_0$ будет отклоняться в пользу гипотезы $a>a_0$ при

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}-a_0}{s} > t_\alpha,$$

где

$$\int_{0}^{t_\alpha} s_{n-1}(t)\,dt = 1-\alpha,$$

и приниматься в противоположном случае. При этом С. к. будет равномерно наиболее мощным критерием уровня α среди всех критериев проверки гипотезы $a=a_0$ относительно альтернативных гипотез $a>a_0$.

С. к. используется также как критерий однородности двух нормальных выборок. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — две последовательности взаимно независимых результатов наблюдений, причём величины X_i имеют нормальное распределение с параметрами a_1 и σ^2, а Y_j — нормальное распределение с параметрами a_2 и σ^2. Гипотеза однородности формулируется как гипотеза равенства средних значений $a_1=a_2$. Если параметр σ^2 неизвестен, то в качестве оценки общей дисперсии σ^2 принимается

$$s^2 = \frac{ns_1^2+ms_2^2}{n+m-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\overline{Y})^2}{n+m-2}.$$

Тогда статистика

$$t = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n}-\frac{s_2^2}{m}}},$$

где

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j,$$

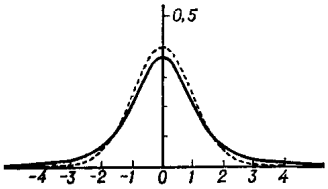
$$s_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$s_2^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(Y_j-\overline{Y})^2,$$

имеет распределение Стьюдента с $n+m-2$ степенями свободы в предположении, что гипотеза $a_1=a_2$ справедлива. Соответствующий С. к. строится стандартным образом.

Впервые С. к. был применён в 1908 У. Госсетом, известным под псевдонимом Стьюдент. *А. В. Прохоров.*

СТЬЮДЕНТА РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ, t-распределение, с n степенями свободы — распределение вероятностей случайной величины T, заданное плотностью вероятности (рис.)



Плотность распределения Стьюдента при $n=3$. Пунктиром показана кривая нормальной плотности, $a=0$, $\sigma=1$.

$$s_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\quad -\infty<x<\infty,$$

где $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функция. При $n=1$ С. р. совпадает с *Коши распределением*. Функция распределения С. р. выражается формулой

$$S_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{x}\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}du.$$

С. р. унимодально и симметрично относительно точки $x=0$. Все моменты порядка r конечны при $r<n$: при $r=2k+1$ они равны 0, при $r=2k$ равны

$$\mathsf{E}T^{2k}=\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)\,n^k}{(n-2)(n-4)\ldots(n-4k)}.$$

Математич. ожидание $\mathsf{E}T_n$ при $n>1$ равно 0, дисперсия при $n>2$ равна $\mathsf{D}T=n/(n-2)$.

С. р. с n степенями свободы определяется как распределение отношения $T=X/Y$ независимых случайных величин X и Y, где X подчиняется нормальному распределению с параметрами 0 и 1, а nY^2 имеет *хи-квадрат распределение* с n степенями свободы. Важная роль С. р. в математич. статистике объясняется следующим фактом: если случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и одинаково нормально распределены с $\mathsf{E}X_k=a$ и $\mathsf{D}X_k=\sigma^2$, то при любых действительных a и $\sigma>0$ отношение

$$t_{n-1}=\sqrt{n}\,(\overline{X}-a)/s,$$

где

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \text{ и } s^2=\frac{1}{n-1}(X_i-\overline{X})^2,$$

подчиняется С. р. с $n-1$ степенями свободы. Это свойство было впервые использовано У. Госсетом (Стьюдентом) для решения построения критерия для проверки гипотезы о том, что математич. ожидание a нормального распределения равно заданному числу a_0 в случае, когда дисперсия σ^2 неизвестна (см. *Стьюдента критерий*). В условиях этой задачи С. р. используется также при построении *доверительного интервала* для неизвестного значения a.

● Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983. *А. В. Прохоров.*

СТЮАРТА ТЕОРЕ́МА — одна из теорем о метрических соотношениях *треугольника*. Теорему сформулировал М. Стюарт (1746). Возможно, что она была открыта Архимедом (3 в. до н. э.).

СУА́Н-ПАН — китайские *счёты*, *абак*.

СУБГАРМОНИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ (от лат. sub — под и греч. ἁρμονικός — соразмерный, гармонический) — функция $f=f(x_1, \ldots, x_n)$ от $n\geqslant 2$ действительных переменных $x_1, \ldots, x_n$, непрерывная вместе с производными 1-го и 2-го порядка в нек-рой области D и удовлетворяющая в D неравенству

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\geqslant 0.$$

Если $\Delta f=0$ всюду в D, то f — гармонич. функция в D. Таким образом, понятие С. ф. можно рассматривать как обобщение понятия гармонич. функции. При $n=1$ условие $\Delta f\geqslant 0$ принимает вид $\frac{d^2f}{dx^2}\geqslant 0$, т. е. С. ф. одного переменного есть выпуклая функция. Поэтому понятие С. ф. можно рассматривать также как распространение понятия выпуклой функции на случай любого числа переменных. Так, напр., подобно тому как всякая дуга графика выпуклой функции лежит не выше хорды, соединяющей её концы, всякая ограниченная нек-рым контуром часть поверхности $z=f(x, y)$, где $f(x, y)$—С. ф. двух переменных, лежит ниже проходящей через тот же контур поверхности $z=F(x, y)$, где $F(x, y)$ — гармонич. функция (отсюда назв. «субгармоническая», т. е. «подгармоническая»).

Приведённое выше определение предполагает, что функция f имеет непрерывные частные производные 2-го порядка. От этого ограничения освобождаются, непосредственно постулируя отмеченное только что свойство графика С. ф. располагаться ниже графика гармонич. функции.

Супергармоническая функция (от лат. super — над) — функция, удовлетворяющая неравенству $\Delta f\leqslant 0$. Если f — супергармонич. функция, то $-f$ есть С. ф. и наоборот. Классич. примеры суб- и супергармонич. функций: для $n=2$ логарифмич. потенциал

$$u(x_1, x_2)=\iint_D \rho_D(\xi, \eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi)^2+(x_2-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta$$

и для $n=3$ ньютоновский потенциал

$$v(x_1, x_2, x_3)=\iiint_T \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x_1-\xi)^2+(x_2-\eta)^2+(x_3-\zeta)^2}},$$

где ρ — плотность масс или зарядов. Эти функции внутри областей D и T удовлетворяют соответственно уравнениям Пуассона $\Delta u=-2\pi\rho$ и $\Delta v=-4\pi\rho$ и, следовательно, являются супергармоническими при $\rho\geqslant 0$ и С. ф. при $\rho\leqslant 0$. Другой важный пример С. ф. при $n=2$ это $|f(z)|$ и $\ln|f(z)|$, где $f(z)$ — аналитич. функция комплексного переменного $z=x_1+ix_2$.

Простейшие свойства С. ф.: 1) сумма двух С. ф. есть С. ф.; 2) произведение С. ф. на положительное число есть С. ф.; 3) верхняя огибающая конечного числа С. ф. $w=\max\{u_1, \ldots, u_n\}$ есть С. ф.; 4) равномерно сходящаяся последовательность С. ф. сходится к С. ф.; 5) принцип максимума: С. ф., отличная от тождественной постоянной, не может достигать максимума нигде внутри области определения; 6) монотонно убывающая последовательность С. ф. сходится к С. ф.

СУБМАРТИНГА́Л — см. *Мартингал*.

СУЖДЕ́НИЕ — то же, что *высказывание*.

СУЖЕ́НИЕ оператора — см. *Оператор*.

СУ́ММА (от лат. summa — итог, общее количество) — 1) С.— результат сложения величин (чисел, функций, векторов, матриц и т. д.). С. чисел a и b обозначается $a+b$. Для обозначения С. n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ применяется символ $\sum$:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{1}^{n}a_i.$$

Знак $\sum$ для С. ввёл Л. Эйлер (1755).

2) С. бесконечно убывающей геометрической прогрессии — см. *Геометрическая прогрессия*.

3) С. векторов — см. *Векторная алгебра*.

4) С. множеств — то же, что *объединение* множеств.

5) С. операторов — см. *Оператор*.

6) С. ряда — см. *Ряд*.

7) С. событий — см. *Вероятностей теория*.

СУММИ́РОВАНИЕ рядов, последовательностей, интегралов — вычисление соответственно сумм рядов, пределов последовательностей, значений интегралов. Термин «С.» обозначает и само определение суммы ряда (предела последовательности, значения интеграла), когда в обычном определении эти значения не существуют, т. е. ряд (последовательность, интеграл) расходится.

Расходящиеся ряды часто встречаются на практике, они могут получаться при перемножении условно сходящихся рядов, при разложении функций в ряд Фурье, при дифференцировании и интегрировании функциональных рядов и т. д. Расходящиеся ряды и интегралы встречаются, напр., в теории электромагнитного поля и др. разделах современной физики. Во многих случаях для расходящихся рядов можно найти сумму в обобщённом смысле, обладающую нек-рыми основными свойствами обычной суммы сходящегося ряда. Обычно требуется, чтобы из того, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется к S, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ суммируется к T, следовало бы, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)$ суммируется к $\lambda S+\mu T$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируется к $S-a_0$. Кроме того, чаще всего рассматриваются регулярные методы С., то есть методы, суммирующие каждый сходящийся ряд к его обычной сумме. В большинстве методов С. расходящийся ряд рассматривается, в известном смысле, как предел нек-рого сходящегося ряда. А именно, каждый член ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

умножается на нек-рый множитель $\lambda_n(t)$ так, чтобы после умножения получился сходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda_n(t) \qquad (2)$$

с суммой $\sigma(t)$. При этом множители $\lambda_n(t)$ выбираются так, чтобы при каждом фиксированном n предел $\lambda_n(t)$ при нек-ром непрерывном или дискретном изменении параметра t равнялся 1. Тогда члены (2) стремятся к соответствующим членам ряда (1). Если при этом $\sigma(t)$ имеет предел, то этот предел наз. обобщённой суммой данного ряда (1), соответствующей данному выбору множителей (или данному методу С.). Напр., если положить $\lambda_n(t)=1$ при $n\leqslant t$ и $\lambda_n(t)=0$ при $n>t$ и брать $t\to\infty$, то получится обычное понятие суммы ряда; при $\lambda_n(t)=t^n$ для $t<1$ и $t\to 1$ получается метод суммирования Абеля — Пуассона. Часто фиксируется не результат умножения членов ряда на $\lambda_n(t)$, а соответствующие изменения частичных сумм ряда. Напр., в методе суммирования Чезаро средних арифметических полагают

$$S=\lim_{m\to\infty}\sigma_m,$$

где

$$\sigma_m=\frac{1}{m+1}(S_0+\ldots+S_m),\quad S_k=a_0+\ldots+a_k.$$

Этот метод соответствует выбору $\lambda_n(m)=(m-n+1)/(m+1)$ при $n\leqslant m$ и $\lambda_n(m)=0$ при $n>m$. Если положить

$$A_n^0=S_n,\quad A_n^k=A_0^{k-1}+\ldots+A_n^{k-1},$$

$$E_n^0=1,\quad E_n^n=E_0^{k-1}+\ldots+E_n^{k-1},$$

то в случае, когда существует $\lim_{n\to\infty}(A_n^k/E_n^k)=A$, говорят, что ряд суммируется к A методом Чезаро k-го порядка. Рассматриваются и методы Чезаро дробного порядка. С ростом k возрастают возможности метода Чезаро, т. е. расширяется множество рядов, суммируемых этим методом. Всякий ряд, суммируемый методом Чезаро какого-либо порядка, суммируется и методом Абеля—Пуассона и притом к той же сумме. Напр., ряд $1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$ суммируется методом Абеля—Пуассона к значению $^1/_2$, т. к.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}t^n=\frac{1}{1+t},\quad \lim_{t\to 1}\frac{1}{1+t}=\frac{1}{2}.$$

Метод Чезаро даёт то же значение, т. к.

$$S_{2n}=1,\quad S_{2n+1}=0,\quad S_{2n}=(n+1)/(2n+1),$$
$$\sigma_{2n+1}={}^1/_2,\quad \lim_{k\to\infty}\sigma_k={}^1/_2.$$

Методы Чезаро и Абеля—Пуассона применяются в теории тригонометрич. рядов для нахождения функции по её ряду Фурье, т. к. ряд Фурье любой непрерывной функции суммируется к этой функции методом Чезаро 1-го порядка, а тем самым и методом Абеля—Пуассона. Г. Ф. Вороной предложил метод С., частными случаями к-рого являются все методы Чезаро: пусть $p_n\geqslant 0$, $p_0=0$, $P_n=p_0+p_1+\ldots+p_n$, тогда обобщённой суммой ряда, по Вороному, наз. предел

$$\lim_{m\to\infty}\frac{p_m s_0+\ldots+p_0 s_m}{P_m}.$$

Метод суммирования Вороного регулярен, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{P_n}=0.$$

Теория С. расходящихся интегралов аналогична теории С. расходящихся рядов. Напр., если интеграл

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

расходится и существует предел

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N\left(1-\frac{x}{N}\right)^{\lambda} f(x)\,dx=A,$$

то говорят, что первый интеграл суммируем к A методом Чезаро порядка λ.

● Харди Г., Расходящиеся ряды, пер. с англ., М., 1951.

Н. Я. Виленкин.

СУММИ́РУЕМАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция, к которой приложимо введённое А. Лебегом понятие интеграла, т. е. для которой интеграл Лебега, взятый по данному множеству, конечен. Функции эти, наз. также интегрируемыми по Лебегу, необходимо должны быть измеримыми (по Лебегу). Функция с суммируемым квадратом — измеримая функция, квадрат к-рой есть С. ф.

СУПЕРГАРМОНИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ (от лат. super — над и греч. ἁρμονικός — соразмерный, гармонический) — см. *Субгармоническая функция.*

СУПЕРМАРТИНГА́Л — см. *Мартингал.*

СУПЕРПОЗИ́ЦИЯ ФУ́НКЦИЙ, композиция функций,— составление из двух функций *сложной функции.*

СУПРЕ́МУМ (лат. supremum — наивысшее) — верхняя грань множества E действительных чисел; обозначается $\sup E$.

СУ́СЛИНСКОЕ МНО́ЖЕСТВО, A-множество,— понятие *дескриптивной теории множеств*, введённое М. Я. Суслиным (1917).

СУЩЕ́СТВЕННО ОСО́БАЯ ТО́ЧКА однозначной аналитической функции $f(z)$ — такая точка z_0 комплексной плоскости, в которой не существует ни конечного, ни бесконечного предела

$$\lim_{z\to z_0} f(z).$$

Примеры: точка $z_0=0$ является С. о. т. для функций $e^{1/z}$ и $z\sin\frac{1}{z}$; точка $z_0=\infty$ — С. о. т. для функций e^z, $\cos z$, $\sin z$.

Изолированная С. о. т. z_0 характеризуется тем, что в её окрестности функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n},$$

в к-ром среди коэффициентов $a_{-1}, a_{-2}, \ldots$ имеется бесконечно много, отличных от нуля. Неизолированной С. о. т. является, напр., предельная точка полюсов $z_0=\infty$ для таких функций, как $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$.

Поведение функции в окрестности С. о. т. описывается *Сохоцкого теоремой*. Её обобщением является т. н. большая *Пикара теорема*. *Е. Д. Соломенцев.*

СУЩЕ́СТВЕННОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ — см. *Размерности теория.*

СУЩЕСТВОВА́НИЯ КВА́НТОР — логическая операция, служащая для образования высказываний и высказывательных форм с помощью оборота «существует такое x, что»; обозначения: $\exists x$, $(\exists x)$. Подробнее см. в ст. *Квантор.*

СФЕ́РА (от греч. σφαῖρα — шар, мяч) — замкнутая поверхность, все точки которой одинаково удалены от одной точки (центра С.). Отрезок, соединяющий центр С. с какой-либо её точкой (а также его длина), наз. р а д и у с о м С. Площадь поверхности С. $S=4\pi R^2$, где R — радиус С. Часть пространства, ограниченная С. и содержащая её центр, наз. ш а р о м; объём шара $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. С точки зрения аналитич. геометрии С. является центральной поверхностью 2-го порядка, уравнение к-рой в прямоугольной системе координат имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

здесь a, b, c — координаты центра С. О геометрии и тригонометрии на С. см. в ст. *Сферическая геометрия* и *Сферическая тригонометрия.*

СФЕРИ́ЧЕСКАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ — математическая дисциплина, изучающая геометрические образы, находящиеся на сфере, подобно тому как планиметрия изучает геометрические образы, находящиеся на плоскости.

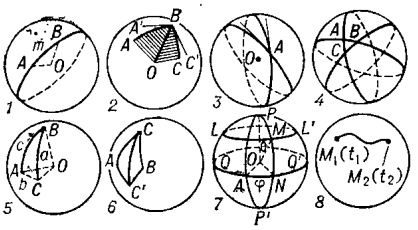
Всякая плоскость, пересекающая сферу, даёт в сечении нек-рую окружность; если секущая плоскость проходит через центр O сферы, то в сечении получается т. н. б о л ь ш о й к р у г. Через каждые две точки A и B на сфере (рис., *1*), кроме случая диаметрально противоположных точек, можно провести единственный большой круг. Большие круги сферы являются её геодезич. линиями и потому в С. г. играют роль, аналогичную роли прямых в планиметрии. Однако в то время как любой отрезок прямой является кратчайшим между его концами, дуга большого круга на сфере будет кратчайшей лишь в случае, когда она короче дополнительной дуги. Во многих других отношениях С. г. также отлична от планиметрии; так, напр., в С. г. не существует параллельных геодезических: два больших круга всегда пересекаются, и притом в двух точках.

Длину отрезка AB на сфере, т. е. дугу AmB (рис., *1*) большого круга, измеряют соответствующим, пропорциональным ей, центральным углом AOB. Угол ABC (рис., *2*), образованный на сфере дугами больших кругов, измеряют углом $A'BC'$ между касательными к соответствующим дугам в точке пересечения B или двугранным углом, образованным плоскостями OBA и OBC.

При пересечении двух больших кругов на сфере образуется четыре с ф е р и ч е с к и х д в у у г о л ь н и к а (рис., *3*). Сферич. двуугольник определяется заданием своего угла. Площадь сферич. двуугольника определяется по формуле $S=2R^2A$, где R — радиус сферы, A — угол двуугольника, выраженный в радианах.

Три больших круга, не пересекающиеся в одной паре диаметрально противоположных точек, образуют на сфере восемь с ф е р и ч е с к и х т р е у г о л ь н и к о в (рис., *4*). Зная элементы (углы и стороны) одного из них, легко определить элементы всех остальных. Поэтому обычно рассматривают соотношения между элементами лишь одного треугольника, притом того, все стороны к-рого меньше половины большого круга (такие треугольники называют эйлеровыми). Стороны a, b, c сферич. треугольника измеряются плоскими углами трёхгранного угла $OABC$ (рис., *5*), углы A, B, C треугольника — двугранными углами того же трёхгранного угла. Свойства сферич. треугольников во многом отличаются от свойств треугольников на плоскости (прямолинейных треугольников). Так, к известным трём случаям равенства прямолинейных треугольников для треугольников на сфере добавляется ещё четвёртый: два треугольника равны, если равны их соответствующие углы (на сфере не существует подобных треугольников).

Равными треугольниками считаются те, к-рые могут быть совмещены после передвижения по сфере. Отсюда следует, что равные сферич. треугольники имеют равные



элементы и одинаковую ориентацию. Треугольники, имеющие равные элементы и различную ориентацию, наз. с и м м е т р и ч н ы м и; таковы, напр., треугольники $AC'C$ и BCC' (рис., *6*).

Во всяком сферич. треугольнике (эйлеровом) каждая сторона меньше суммы и больше разности двух других: сумма всех сторон всегда меньше 2π. Сумма углов сферич. треугольника всегда меньше 3π и больше π. Разность $s-\pi=\varepsilon$, где s — сумма углов сферич. треугольника, наз. сферическим избытком. Площадь сферич. треугольника определяется по формуле $S=R^2\varepsilon$, где R — радиус сферы. О соотношении между углами и сторонами сферич. треугольника см. в ст. *Сферическая тригонометрия.*

Положение каждой точки на сфере вполне определяется заданием двух чисел: эти числа (координаты) можно определить, напр., следующим образом. Фиксируются (рис., *7*) нек-рый большой круг QQ' (э к в а т о р), одна из двух точек пересечения диаметра PP' сферы, перпендикулярного к плоскости экватора, с поверхностью сферы, напр. P (п о л ю с), и один из больших полукругов PAP', выходящих из полюса (н у л е в о й м е р и д и а н). Большие полукруги сферы, выходящие из P, наз. м е р и д и а н а м и, малые её круги (напр., LML'), параллельные экватору, — п а р а л л е л я м и. В качестве одной из координат точки M на сфере принимается угол $\theta=POM$ (п о л я р н о е р а с с т о я н и е), в качестве второй — угол $\varphi=AON$ между нулевым меридианом и меридианом, проходящим через точку M (д о л г о т а, отсчитываемая против часовой стрелки).

Введение координат на сфере позволяет проводить исследование сферич. фигур аналитич. методами геометрии. Так, два уравнения

$$\theta=f(t),\quad \varphi=g(t)$$

или одно уравнение

$$F(\theta,\ \varphi)=0$$

между координатами θ и φ определяют нек-рую линию на сфере. Длина L дуги M_1M_2 этой линии вычисляется по формуле

$$L=\int_{t_1}^{t}\sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2+\left(\sin f\,\frac{dg}{dt}\right)^2}\,dt,$$

где t_1 и t_2 — значения параметра t, соответствующие концам M_1 и M_2 дуги M_1M_2 (рис., *8*). *В. И. Битюцков.*

СФЕРИ́ЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕ́ТРИЯ — математическая дисциплина, изучающая зависимости между углами и сторонами сферических треугольников. Пусть A, B, C — углы и a, b, c — противолежащие им стороны сферич. треугольника ABC (рис. 1). Углы и стороны сферич. тре-

угольника связаны следующими основными формулами С. т.:

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}, \qquad (1)$$

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A, \qquad (2)$$

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a, \qquad (2_1)$$

$$\sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A, \qquad (3)$$

$$\sin A\cos b=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos a; \qquad (3_1)$$

в этих формулах стороны a, b, c измеряются соответствующими центральными углами (см. *Сферическая геометрия*), длины этих сторон равны соответственно aR, bR, cR, где R — радиус сферы. Меняя обозначения углов (и сторон) по правилу круговой перестановки: $A\to B\to C\to A$ ($a\to b\to c\to a$), можно написать другие формулы С. т., аналогичные указанным. Формулы С. т. позволяют по любым трём элементам сферич. треугольника определить три остальные (решить треугольник).

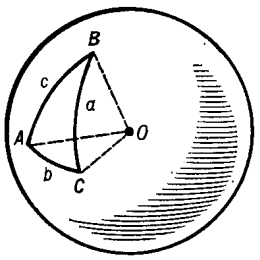


Рис. 1.

Для прямоугольных сферич. треугольников ($A=90°$, a — гипотенуза, b, c — катеты) формулы С. т. упрощаются, напр.:

$$\sin b=\sin a\sin B, \qquad (1')$$

$$\cos a=\cos b\cos c, \qquad (2')$$

$$\sin a\cos B=\cos b\sin c. \qquad (3')$$

Для получения формул, связывающих элементы прямоугольного сферич. треугольника, можно пользоваться следующим мнемонич. правилом (правилом Непера): если заменить катеты прямоугольного сферич. треугольника их дополнениями и расположить элементы треугольника (исключая прямой угол A) по кругу (рис. 2) в том порядке, в каком они находятся в треугольнике (т. е. следующим образом: B, a, C, $90°-b$, $90°-c$), то косинус каждого элемента будет равен произведению котангенсов прилежащих или произведению синусов неприлежащих элементов. Напр., $\cos a=\sin(90°-c)\sin(90°-b)$ или, после преобразования, $\cos a=\cos b\cos c$ [формула (2')].

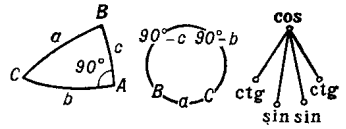


Рис. 2.

При решении задач удобны следующие формулы Деламбра, связывающие все шесть элементов сферич. треугольника:

$$\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(B-C)=\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(b+c),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}(B-C)=\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(b-c),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}(B+C)=\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(b+c),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}(B+C)=\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(b-c);$$

из этих формул легко получаются *неперовы аналогии*.

Формулы С. т. находят широкое применение в сферич. астрономии. При решении многих задач сферич. астрономии в зависимости от требуемой точности часто оказывается достаточным использование приближённых формул: 1) для малых сферич. треугольников (т. е. таких, стороны к-рых малы по сравнению с радиусом сферы) можно пользоваться формулами плоской тригонометрии; 2) для узких сферич. треугольников (т. е. таких, у к-рых одна сторона, напр. a, мала по сравнению с другими) применяют следующие формулы:

$$A\approx\frac{a\sin B}{\sin c}, \qquad (1'')$$

$$a\cos B\approx c-b \qquad (3'')$$

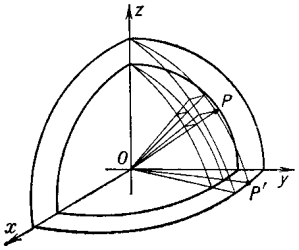
или более точные формулы:

$$A\approx\frac{a\sin B}{\sin c}+\frac{a^2}{2}\frac{\sin 2B\cos c}{\sin^2 c}, \qquad (1''')$$

$$a\cos B\approx c-b+\frac{a^2}{2}\frac{\sin^2 B}{\operatorname{tg} c}. \qquad (3''')$$

С. т. возникла значительно раньше плоской тригонометрии. Свойства прямоугольных сферич. треугольников, выражаемые формулами (1')—(3'), и различные случаи их решения были известны ещё Менелаю (1 в.) и Птолемею (2 в.). Насирэддин Туси (13 в.) систематически рассмотрел все случаи решения косоугольных сферич. треугольников, впервые указав решение в двух труднейших случаях. Основные формулы косоугольных сферич. треугольников были найдены Абу-ль-Вефа (10 в.) [формула (1)], Региомонтаном (сер. 15 в.) [формулы типа (2)], Ф. Виетом (2-я пол. 16 в.) [формулы типа (2_1)] и Л. Эйлером (18 в.) [формулы типа (3) и (3_1)]. Л. Эйлер (1753 и 1779) дал всю систему формул С. т. *В. И. Битюцков.*

СФЕРИ́ЧЕСКИЕ КООРДИНА́ТЫ — числа ρ, θ и φ, связанные с прямоугольными координатами x, y и z формулами



$$x=\rho\cos\varphi\sin\theta,$$

$$y=\rho\sin\varphi\sin\theta,$$

$$z=\rho\cos\theta,$$

где $0\leqslant\rho<\infty$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Координатные поверхности (рис.): концентрич. сферы с центром O ($\rho=OP=$ =const); полуплоскости, проходящие через ось Oz ($\varphi=\angle xOP'$); круговые конусы с вершиной O и осью Oz ($\theta=\angle zOP=$const). Система С. к. ортогональная.

Коэффициенты Ламе:

$$L_\rho=1,\quad L_\varphi=\rho\sin\theta,\quad L_\theta=\rho.$$

Элемент площади:

$$ds=\sqrt{\rho^2\sin^2\theta\,(d\rho\,d\varphi)^2+\rho^2\,(d\rho\,d\theta)^2+\rho^4\sin^2\theta\,(d\varphi\,d\theta)^2}.$$

Элемент объёма:

$$dV=\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}.$$

Обобщёнными С. к. наз. числа u, v и w, связанные с прямоугольными координатами x, y и z формулами

$$x=au\cos v\sin w,\quad y=bu\sin v\sin w,$$

$$z=cu\cos w,$$

где $0\leqslant u<\infty$, $0\leqslant v<2\pi$, $0\leqslant w\leqslant\pi$, $a>b$, $b>0$. Координатные поверхности: эллипсоиды ($u=$const), полуплоскости ($v=$const) и эллиптич. конусы ($w=$const).

С. к. издавна употреблялись в астрономии; формулы, связывающие С. к. с прямоугольными координатами, приведены Ж. Лагранжем (1773), название «С. к.» предложил Р. Бальтцер (1882).

СФЕРИ́ЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕ́НЫ — то же, что *Лежандра многочлены*.

СФЕРИ́ЧЕСКИЕ ФУ́НКЦИИ — специальные функции, применяемые для изучения физических явлений в пространственных областях, ограниченных сферическими поверхностями, и для решения физических задач, обладающих сферической симметрией. С. ф. являются решениями дифференциального уравнения

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+l\,(l+1)\right]Y(\theta,\varphi)=0,$$

получающегося при разделении переменных в уравнении Лапласа в сферич. координатах r, θ, φ. Общий вид решения:

$$Y_l(\theta,\varphi)=\sum_{m=-l}^{l}a_m Y_l^m(\theta,\varphi)=\sum_{m=-l}^{l}a_m P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi},$$

где a_m — постоянные, $P_l^m(\cos\theta)$ — присоединённые функции Лежандра степени l и порядка m, определяемые ра-

венством

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n}{dx^m},$$

где P_n — многочлены Лежандра.

Характерным примером многочисленных приложений С. ф. к вопросам математич. физики и механики является применение их в теории потенциала. Пусть $\sigma=\sigma(\theta, \varphi)$ — поверхностная плотность распределения массы по сфере радиуса R с центром в начале координат; если σ можно разложить в ряд по С. ф. $\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi)$, сходящийся равномерно на поверхности сферы, то потенциал, соответствующий этому распределению масс, в каждой точке (r, θ, φ), внешней относительно данной сферы, равен

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2n+1}\frac{R^{n+2}}{r^{n+1}}Y_n(\theta, \varphi),$$

а в каждой точке, внутренней по отношению к сфере, равен

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2n+1}\frac{r^n}{R^{n-1}}Y_n(\theta, \varphi).$$

Общий член каждого из этих двух рядов представляет собой *шаровую функцию* соответственно степени $n-1$ и n.

С. ф. были введены А. Лежандром и П. Лапласом в кон. 18 в.

СФЕРИ́ЧЕСКИЙ ДВУУГО́ЛЬНИК — см. *Сферическая геометрия*.

СФЕРИ́ЧЕСКИЙ ИЗБЫТОК — превышение суммы углов сферического треугольника сверх 180°, т. е. сверх суммы углов прямолинейного треугольника на плоскости. Сумма углов треугольника, образованного тремя геодезич. линиями на поверхности с положительной кривизной, т. е. на выпуклой поверхности, всегда больше двух прямых и равна

$$\pi+\iint K\,dS,$$

где K — гауссова кривизна поверхности, а dS — элемент её площади. С. и. треугольника, образованного большими кругами на сфере (шаре) с радиусом R, равен

$$\varepsilon=\frac{S}{R^2},$$

где S — площадь треугольника.

СФЕРИ́ЧЕСКИЙ ТРЕУГО́ЛЬНИК — фигура, образованная дугами трёх больших кругов, соединяющих попарно три какие-нибудь точки на сфере. О свойствах С. т. и соотношениях между его элементами (углами и сторонами) см. в статьях *Сферическая геометрия*, *Сферическая тригонометрия*.

СФЕРИ́ЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ поверхности S — непрерывное отображение S на сферу P единичного радиуса, определяемое по параллельности касательных плоскостей в соответствующих точках поверхности и сферы (С. о. является также отображением по параллельности нормалей). Площадь s' сферич. образа области G поверхности S не меняется при изгибаниях S. Это обстоятельство позволяет рассматривать число s' как внутреннюю меру искривлённости области G (площадь s' рассматривается со знаком в зависимости от направления обхода её границы). Если существует предел K отношения s' к s (s — площадь G), когда область G стягивается к нек-рой точке M на поверхности S, то он также не меняется при изгибаниях S и поэтому является внутренней характеристикой искривлённости S в точке M. Это число K наз. г а у с с о в о й к р и в и з н о й поверхности S в точке M. С. о. поверхности играет важную роль в изучении свойств поверхностей.

Понятие «С. о.» введено Л. Эйлером (1782, опубл. 1786).

СФЕРИ́ЧЕСКОЕ ПО́ЛЕ, ц е н т р а л ь н о е п о л е,— 1) С. п. в е к т о р н о е — поле $\boldsymbol{a}(M)$, в котором существует такая точка O, что все векторы $\boldsymbol{a}(M)$ лежат на прямых, проходящих через O, и их длина зависит только от расстояния r точки M до точки O, то есть $\boldsymbol{a}(M)=f(r)\boldsymbol{r}^0$, где $\boldsymbol{r}^0$ — единичный вектор прямой. Примеры векторного С. п.: силовое поле, образованное точечным зарядом, поле ньютоновского тяготения материальной точки.

2) С. п. с к а л я р н о е — поле $\varphi(M)$, в к-ром существует такая точка O, что $\varphi(M)$ зависит только от расстояния r точки M до точки O, то есть $\varphi(M)=f(r)$. Пример скалярного С. п.— поле распределения температуры в изотропном однородном теле при точечном источнике тепла.

СФЕРО́ИД — сжатый *эллипсоид* вращения.

СХО́ДА ТО́ЧКА — перспективное изображение бесконечно удалённых точек пространства. См. *Перспектива*.

СХОДИ́МОСТИ СКО́РОСТЬ — характеристика итерационного метода, позволяющая судить о зависимости погрешности метода на n-й итерации от числа n. Напр., если $\|z^n\| \leqslant q^n\|z^0\|$, где $\|z^n\|$ — норма погрешности на n-й итерации, а $q<1$, то говорят, что метод сходится со скоростью геометрич. прогрессии со знаменателем q, а величину $-\ln q$ наз. асимптотич. скоростью сходимости; если $\|z^{n+1}\| \leqslant C\|z^n\|^k$, то говорят о степенной с порядком k скорости сходимости.

СХОДИ́МОСТЬ — одно из основных понятий математического анализа, означающее, что некоторый математический объект имеет *предел*. В этом смысле говорят о С. последовательности, С. ряда, С. бесконечного произведения, С. непрерывной дроби, С. интеграла и т. д. Понятие С. возникает, напр., когда при изучении того или иного математич. объекта строится последовательность более простых в известном смысле объектов, приближающихся к данному, т. е. имеющих его своим пределом (так, для вычисления длины окружности используется последовательность длин периметров правильных многоугольников, вписанных в окружность; для вычисления значений функций используются последовательности частичных сумм рядов, к-рыми представляются данные функции, и т. п.).

С. последовательности $\{a_n\}$, $n=1, 2, \ldots$, означает существование у неё конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$; С. ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — С. к конечному пределу (наз. суммой ряда) последовательности его частичных сумм $s_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$, $n=1, 2, \ldots$; С. бесконечного произведения $\prod_{n}^{\infty} b_n$ — С. к конечному пределу, не равному нулю, последовательности конечных произведений $p_n=\prod_{k=1}^{n} b_k$, $n=1, 2, \ldots$; С. интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ от функции $f(x)$, интегрируемой по любому конечному отрезку $[a, b]$,— существование конечного предела у интегралов $\int_a^b f(x)dx$ при $b\to+\infty$, наз. несобственным интегралом.

Свойство С. тех или иных математич. объектов играет существенную роль как в вопросах теории, так и в приложениях математики. Напр., используется представление величин и функций с помощью сходящихся рядов; так, для основания натуральных логарифмов e разложение

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots,$$

для функции $\sin x$ — степенной ряд

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

Подобные ряды используются для приближённого вычисления рассматриваемых величин и функций. При практич. осуществлении этой задачи немаловажной является проблема «скорости» С. соответствующих рядов. Так как для одних и тех же величин и функций имеются различные ряды, суммой к-рых они являются, то целесообразно из имеющихся рядов выбрать тот ряд, к-рый сходится «более быстро». Существуют различные понятия «более быстро» сходя-

щихся рядов; напр., если даны сходящиеся ряды $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ и $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, $\rho_n=\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$ соответственно их остатки, то 1-й ряд наз. сходящимся быстрее 2-го ряда, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{\rho_n}=0.$$

Имеются различные методы улучшения сходимости рядов, позволяющие преобразовать данный ряд в «более быстро» сходящийся. Аналогично вводится понятие «более быстрой» С. и для несобственных интегралов, для к-рых также имеются способы улучшения их С.

В теории рядов и интегралов весьма важным является понятие а б с о л ю т н о й с х о д и м о с т и. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \qquad (1)$$

наз. абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|. \qquad (2)$$

Если же ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то говорят об условной сходимости ряда (1). Свойства абсолютно сходящихся рядов аналогичны во многом свойствам конечных сумм.

Большую роль понятие С. играет при решении всевозможных уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных), в частности при нахождении их численных приближённых решений. Напр., с помощью метода последовательных приближений можно получить последовательность функций, сходящихся к соответствующему решению данного дифференциального уравнения, и тем самым одновременно доказать существование при определённых условиях решения и дать метод, позволяющий вычислить это решение с нужной точностью. Как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений с частными производными существует хорошо разработанная теория различных сходящихся конечноразностных методов их численного решения.

Если изображать члены последовательности $\{a_n\}$ точками числовой прямой, то С. этой последовательности к a означает, что расстояние между точками a_n и a становится и остаётся сколь угодно малым с возрастанием n. В этой формулировке понятие С. обобщается на последовательности точек плоскости, пространства и более общих объектов, для к-рых может быть определено понятие расстояния, обладающее обычными свойствами расстояния между точками пространства (напр., на последовательности векторов, матриц, функций, геометрич. фигур). Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к a, то вне любой окрестности точки a лежит лишь конечное число членов последовательности. В этой формулировке понятие С. допускает обобщение на совокупности величин ещё более общей природы, в к-рых тем или иным образом введено понятие окрестности.

В математич. анализе используются различные виды С. последовательности функций $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ (на нек-ром множестве M). Если

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=f(x_0)$$

для каждой точки x_0 (из M), то говорят о С. в к а ж д о й т о ч к е (если это равенство не имеет места лишь для точек, образующих множество меры нуль, то говорят о С. п о ч т и в с ю д у). При таком определении последовательность непрерывных функций может сходиться к разрывной функции, из сходимости последовательности интегрируемых функций не следует С. интегралов от них к интегралу от предельной функции. Свойство непрерывности функций и возможность перехода к пределу под знаком интеграла сохраняются при р а в н о м е р н о й с х о д и м о с т и. Последовательность $\{f_n(x)\}$ наз. равномерно сходящейся к $f(x)$ на множестве M, если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x)-f(x)|=0.$$

Этот вид С. соответствует определению расстояния между функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$ по формуле

$$r(f,\varphi)=\sup_{x\in M} |f(x)-\varphi(x)|.$$

Д. Ф. Егоров доказал (1911), что если последовательность измеримых функций сходится почти всюду на множестве M, то из M можно так удалить часть сколь угодно малой меры, чтобы на оставшейся части имела место равномерная С.

В теории интегральных уравнений, ортогональных рядов и т. д. широко применяется понятие с р е д н е й к в а д р а т и ч е с к о й с х о д и м о с т и. Напр., средняя квадратическая С. на отрезке $[a, b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b [f(x)-f_n(x)]^2\,dx=0.$$

Более общо, последовательность $\{f_n(x)\}$ с х о д и т с я в с р е д н е м с показателем p к $f(x)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x)-f_n(x)|^p\,dx=0.$$

Эта С. соответствует заданию расстояния между функциями по формуле

$$\left[\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|^p\,dx\right]^{1/p},\quad 1\leqslant p<+\infty.$$

Из равномерной С. на конечном отрезке вытекает С. в среднем с любым показателем p. Последовательность частичных сумм разложения функции $\varphi(x)$ с интегрируемым квадратом по полной ортонормированной системе функций может расходиться в каждой точке, но всегда имеет место их средняя квадратическая С. к функции $\varphi(x)$. Рассматриваются также другие виды С. Напр., с х о д и м о с т ь п о м е р е: для любого $\varepsilon>0$ мера множества тех точек, для к-рых $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, стремится к нулю с возрастанием n; с л а б а я с х о д и м о с т ь:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\varphi(x)\,dx=\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$$

для любой функции $\varphi(x)$ с интегрируемым квадратом (напр., последовательность функций $\sin x$, $\sin 2x$, ..., $\sin nx$, ... слабо сходится к нулю на отрезке $[-\pi, \pi]$, так как для любой функции $\varphi(x)$ с интегрируемым квадратом коэффициенты $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\,dx$ ряда Фурье стремятся к нулю).

Указанные выше и многие другие понятия С. последовательности функций систематически изучаются в функциональном анализе, где рассматриваются различные векторные пространства с заданной нормой (расстоянием до нуля) — т. н. банаховы пространства. В таких пространствах можно ввести понятие С. функционалов, операторов и т. д., определяя для них соответствующим образом норму. Наряду со С. по норме (т. н. с и л ь н о й с х о д и м о с т ь ю), в банаховых пространствах рассматривается слабая С., определяемая условием

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(f_n)=\varphi(f)$$

для всех линейных функционалов φ; введённая выше слабая С. функций соответствует рассмотрению нормы $\left[\int_a^b |f(x)|\,dx\right]^{1/2}$.

В теории вероятностей для последовательности случайных величин употребляются понятия с х о д и м о с т и с в е р о я т н о с т ь ю е д и н и ц а (с х о д и м о с т и п о ч т и н а в е р н о е) и с х о д и м о с т и п о в е р о я т н о с т и.

Ещё математики древности (Евклид, Архимед), по существу, употребляли бесконечные ряды для нахождения площадей и объёмов. Доказательством С. рядов им слу-

жили вполне строгие рассуждения по схеме *исчерпывания метода*. Термин «С.» в применении к рядам был введён в 1668 Дж. Грегори при исследовании нек-рых способов вычисления площади круга и гиперболич. сектора. Математики 17 в. обычно имели ясное представление о С. употребляемых ими рядов, хотя и не проводили строгих с современной точки зрения доказательств С. В 18 в. широко распространилось употребление в анализе заведомо расходящихся рядов (в частности, их широко применял Л. Эйлер). Это, с одной стороны, привело впоследствии ко многим недоразумениям и ошибкам, устранённым лишь с развитием отчётливой теории С., а с другой — предвосхитило современную теорию *суммирования* расходящихся рядов. Строгие методы исследования С. рядов были разработаны в 19 в. (О. Коши, Н. Абель, Б. Больцано, К. Вейерштрасс и др.). Понятие равномерной С. сформировалось в работах Н. Абеля (1826), Ф. Зейделя (1847—48) и Дж. Стокса (1848). Дальнейшие расширения понятия С. были связаны с развитием теории функций, функционального анализа и топологии.

● Ильин В. А., Позняк Э. Г., Основы математического анализа, 3 изд., ч. 1, М., 1971; 2 изд., ч. 2, М., 1980; Кудрявцев Л. Д., Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; Никольский С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975.

Л. Д. Кудрявцев.

СХОДИМОСТЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ — сходимость численных методов. Выделяются две ситуации: 1) вычислительный процесс является итерационным методом; 2) вычислительный процесс решения исходной задачи является методом её дискретизации, в к-ром строится последовательность конечномерных аналогов исходной задачи с возрастающими значениями их размерности. В первой ситуации говорят о сходимости и скорости сходимости итерационного метода, во второй — о сходимости и точности того или иного метода дискретизации (напр., сеточного, разностного, о сходимости кубатурных формул).

СХОДЯЩАЯСЯ В СЕБЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ, фундаментальная последовательность, последовательность Коши,— последовательность, удовлетворяющая *Коши условию*.

СХОДЯЩАЯСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ — числовая последовательность, имеющая конечный предел. Примеры С. п.: $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$, $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$. Всякая С. п. ограничена.

Критерий Коши устанавливает необходимое и достаточное условие сходимости числовой последовательности: $\{x_n\}$ — С. п., если для любого положительного числа ε найдётся номер N такой, что для всех $n>N$ и любого натурального m имеет место

$$|x_n - x_{n+m}| < \varepsilon.$$

Важен следующий признак сходимости: монотонная и ограниченная последовательность является С. п. На основе этого признака, напр., устанавливается, что последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ — С. п., предел к-рой есть число e.

Последовательность, сходящаяся к бесконечности, не есть С. п., такая последовательность бесконечно большая и, следовательно, расходящаяся.

Последовательность $\{x_n\}$ в метрич. пространстве M наз. С. п. в M, если существует элемент x из M такой, что для любого $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что при $n>N$ имеет место $d(x, x_n)<\varepsilon$, где $d(x, y)$ — расстояние в пространстве M. Одна и та же последовательность может рассматриваться в различных метрич. пространствах, причём в одних она будет С. п., а в других нет. Напр., последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ есть С. п. в пространстве действительных чисел и не является таковой в пространстве рациональных чисел, в к-ром $d(x, y)=|x-y|$, поскольку предел этой последовательности (число e) не является рациональным числом.

СХОДЯЩИЙСЯ РЯД — ряд, последовательность частичных сумм которого сходится к конечному пределу, называемому суммой ряда. См. *Ряд*, *Сходимость*, а также *Абсолютная сходимость*, *Условная сходимость*.

СЧЁТНОЕ МНОЖЕСТВО — множество, равномощное множеству натуральных чисел. Таковы, напр., множества рациональных или алгебраических чисел.

СЧЁТНОСТИ АКСИОМА — условие на топологическое пространство, введённое Ф. Хаусдорфом (1914). Пространство X удовлетворяет первой С. а., если система окрестностей каждой его точки обладает счётной базой, и второй С. а., если система открытых множеств в X (т. е. само X) обладает счётной базой. Напр., всякое метрич. пространство удовлетворяет первой С. а., а если оно сепарабельно, то и второй. Пространства со второй С. а. удовлетворяют и первой С. а., обратное неверно.

СЧЁТЫ — прибор для арифметических вычислений (рис. 1). Прообразом С. явился т. н. дощаной счёт, возникший впервые в России в 16 в. Большое влияние на создание дощаного счёта оказала система налогового обложения в России 15—17 вв. (сошное письмо), при которой, наряду со сложением, вычитанием, умножением и делением целых чисел, надо было производить те же операции и с дробями, поскольку условная единица обложения — соха — делилась на части. Дощаной счёт представлял собой два складывающихся ящика. Каждый ящик разгораживался надвое (позже только внизу); второй ящик был необходим ввиду особенностей денежного счёта. Внутри ящика на натянутые шнуры или проволоку нанизывались кости. В соответствии с десятичной системой счисления ряды для целых чисел имели по 9 или 10 костей (рис. 2); операции с дробями производились на неполных рядах: ряд из трёх костей составлял три трети, ряд из четырёх костей — четыре четверти (чети). Ниже располагались ряды, в к-рых было по одной кости; каждая кость представляла половину от той дроби, под к-рой она располагалась (напр., кость, расположенная под рядом из трёх костей, составляла половину от одной трети; кость под ней — половину от половины одной трети). Дроби суммировались без приведения к общему знаменателю, напр. «четь да полтрети, да полполчети» $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{16}\right)$. Иногда операция с дробями производилась как с целыми при помощи приравнивания целого (сохи) к определённой сумме денег. Напр., при равенстве соха=48 денежным единицам, приведённая выше дробь составит 12+8+3=23 денежные единицы.

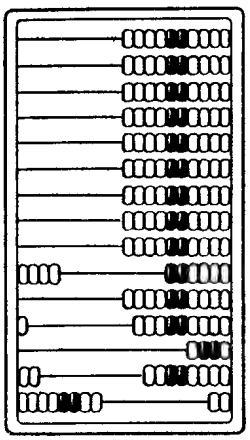


Рис. 1. Счёты. Положено 401, 28.

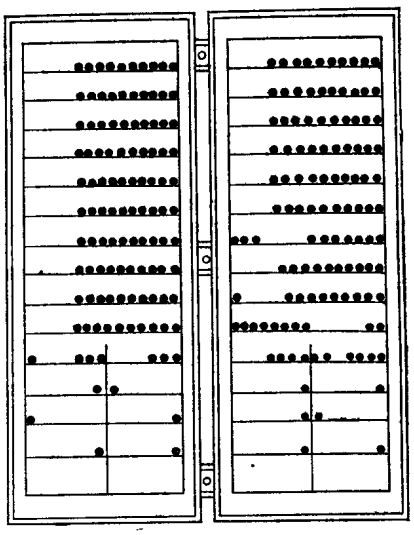


Рис. 2. Дощаной счёт (по чертежу 17 в.). Положено: слева $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{16}$, справа 30 рублей 18 алтын 2 $\frac{1}{4}$ деньги.

С переходом к арабским цифрам и отменой сошного письма С. утратили в кон. 17 в. ряды для дробей, а в нач. 18 в. лишились второго ящика и приобрели свой современный вид (сохранившийся в С. один неполный ряд, обычно из четырёх костей, отделяет два ряда для десятых и сотых единиц, а также иногда служит для счёта четвертей и половинок).

Китайские С. (суан-пан, рис. 3), принятые также в Индокитае и Японии, значительно старше русских и поныне сохраняют своё древнее устройство со счётом единиц до 5, а далее пятками.

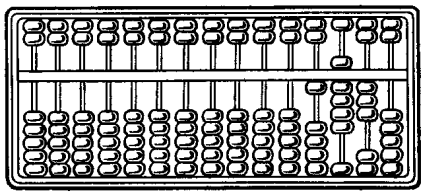


Рис. 3. Суан-пан (китайские счёты). Положено 1930.

● Спасский И. Г., Происхождение и история русских счетов, в кн.: Историко-математические исследования, в. 5, М., 1952.

В. И. Битюцков.

СЧИСЛЕ́НИЕ, система счисления, нумерация,— совокупность приёмов представления обозначения натуральных чисел. Наиболее совершенным принципом представления чисел является позиционный (поместный) принцип, согласно к-рому один и тот же числовой знак (цифра) имеет различные значения в зависимости от того места, где он расположен. Такая система С. основывается на том, что нек-рое число n единиц (основание системы С.) объединяются в одну единицу второго разряда, n единиц второго разряда объединяются в одну единицу третьего разряда и т. д. Основанием систем С. может быть любое число, большее единицы. К числу таких систем относится современная десятичная система С. (с основанием $n=10$). В ней для обозначения первых десяти чисел служат цифры 0, 1, ..., 9 (см. *Десятичная система счисления*).

Несмотря на кажущуюся естественность такой системы С., она явилась результатом длительного историч. развития. Возникновение десятичной системы С. связывают со счётом на пальцах. Имелись системы С. и с другим основанием: 5,12 (счёт дюжинами), 20 (следы такой системы сохранились во франц. языке, напр. quatre-vingts, т. е. буквально четыре-двадцать, означает 80), 40, 60 и др. При вычислениях на ЭВМ часто применяется система С. с основанием 2 (см. *Двоичная система счисления*).

У первобытных народов не существовало развитой системы С. Ещё в 19 в. у многих племён Австралии и Полинезии было только два числительных: один и два; сочетания их образовали числа: 3 — два-один, 4 — два-два, 5 — два-два-один и 6 — два-два-два. О всех числах, больших 6, говорили «много», не индивидуализируя их. С развитием общественно-хозяйственной жизни возникла потребность в создании систем С., к-рые позволяли бы считать и обозначать всё большие совокупности предметов. Одной из наиболее древних систем С. является египетская иероглифич. нумерация, возникшая ещё за 2500—3000 лет до н. э. Это была десятичная непозиционная система С., в к-рой для записи чисел применялся только принцип сложения (числа, выраженные рядом стоящими цифрами, складываются). Специальные знаки имелись для единицы 𓏺, десяти 𓎆, ста 𓍢 и других десятичных разрядов до 10^7. Число 343 записывалось так: 𓍢𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺 .

Аналогичными системами С. были греческая геродианова, римская (см. *Римские цифры*), сирийская и др. Более совершенными системами С. являются алфавитные: ионийская, славянская (см. *Славянские цифры*), еврейская, арабская, а также грузинская и армянская. Первой алфавитной системой С. была, по-видимому, ионийская, возникшая в греч. колониях в Малой Азии в сер. 5 в. до н. э. В алфавитных системах С. числа от 1 до 9, а также все десятки и сотни обозначаются, как правило, последовательными буквами алфавита (над к-рыми иногда ставятся чёрточки, чтобы отличить записи чисел от слов). Число 343 в ионийской системе записывалось так: $\overline{\tau\mu\gamma}$ (здесь $\bar{\tau}$ — 300, $\bar{\mu}$ — 40, $\bar{\gamma}$ — 3), в славянской ТМГ . В алфавитных системах С. запись чисел гораздо короче, чем в предыдущих; кроме того, над числами, записанными в алфавитной нумерации, гораздо легче производить арифметич. действия. Однако в алфавитных системах С. нельзя записывать сколь угодно большие числа. Греки расширили ионийскую нумерацию: числа 1000, 2000, ..., 9000 они обозначали теми же буквами, что и 1, 2, ..., 9, но ставили штрих внизу слева: так, $\underline{\alpha}$ обозначала 1000, $\underline{\beta}$ — 2000 и т. д. Для 10 000 был введён новый знак Μ. Тем не менее ионийская система С. оказалась непригодной уже для астрономич. вычислений эпохи эллинизма, и греч. астрономы этого времени стали комбинировать алфавитную систему с шестидесятеричной вавилонской — первой известной нам системой С., основанной на позиционном принципе. В системе С. древних вавилонян, возникшей примерно за 2000 лет до н. э., все числа записывались с помощью двух знаков: ▼ (для единицы) и ❮ (для десяти). Числа до 60 записывались как комбинация этих двух знаков с применением принципа сложения. Число 60 снова обозначалось знаком ▼, являясь единицей высшего разряда. Для записи чисел от 60 до 3600 вновь применялся принцип сложения, а число 36 000 обозначалось тем же знаком, что и единица, и т. д. Число $343=5\cdot60+4\cdot10+3$ в этой системе записывалось так: 𒐜𒐜𒐜𒐜❮❮❮❮𒐜𒐜𒐜 . Однако в силу отсутствия знака для нуля, которым можно было бы отмечать недостающие разряды, запись чисел в этой системе С. не была однозначной (см. *Клинописные математические тексты*). Другая система С., основанная на позиционном принципе, возникла у индейцев майя, обитателей полуострова Юкатан (Центральная Америка) в сер. 1-го тыс. н. э. У майя существовали две системы С.: одна, напоминающая египетскую, употреблялась в повседневной жизни, другая — позиционная, с основанием 20 и особым знаком для нуля, применялась при календарных расчётах. Запись в этой системе, как и в нашей современной, носила абсолютный характер.

Современная десятичная позиционная система С. возникла на основе нумерации, зародившейся не позднее 5 в. в Индии. До этого в Индии имелись системы С., в к-рых применялся не только принцип сложения, но и принцип умножения (единица какого-нибудь разряда умножается на стоящее слева число). Аналогично строились старокитайская система С. и нек-рые другие. Если, напр., условно обозначить число 3 символом III, а число 10 символом X, то число 30 запишется как IIIX (три десятка). Такие системы С. могли служить подходом к созданию десятичной позиционной нумерации.

Десятичная позиционная система С. даёт принципиальную возможность записывать сколь угодно большие числа. Запись чисел в ней компактна и удобна для производства арифметич. операций. Поэтому вскоре после возникновения десятичная позиционная система С. начинает распространяться из Индии на Запад и Восток. В 9 в. появляются рукописи на арабском языке, в к-рых излагается эта система С., в 10 в. десятичная позиционная нумерация до-

ходит до Испании, в нач. 12 в. она появляется и в других странах Европы. Новая система С. получила название арабской, потому что в Европе с ней познакомились впервые по латинским переводам с арабского. Только в 16 в. новая нумерация получила широкое распространение в науке и в житейском обиходе. В России она начинает распространяться в 17 в. и в самом нач. 18 в. вытесняет алфавитную. С введением десятичных дробей десятичная позиционная система С. стала универсальным средством для записи всех действительных чисел.

● Башмакова И. Г., Юшкевич А. П., Происхождение систем счисления, в кн.: Энциклопедия элементарной математики, кн. 1, М.— Л., 1951; История математики, т. 1, М., 1970.

И. Г. Башмакова.

СЮРЪЕКТИ́ВНОЕ ОТОБРАЖЕ́НИЕ, с ю р ъ е к ц и я, множества A в множество B — отображение f такое, что образ A есть всё B, т. е. $f(A)=B$. Вместо «f сюръективно» говорят также «f есть отображение множества A на множество B».

СЮРЪЕ́КЦИЯ (от франц. sur — на, над и лат. jacio — бросаю) — то же, что *сюръективное отображение.*

Т

ТАВТОЛО́ГИЯ (греч. ταὐτολογία, от ταὐτό — то же самое и λόγος — слово, учение), о б щ е з н а ч и м а я ф о р м у л а,— формула, которая при подстановке в неё каких-либо высказываний вместо переменных всегда даёт истинное высказывание (см. *Высказываний исчисление*, а также *Многозначная логика*, *Предикатов исчисление*).

ТАКСОНО́МИИ ЗАДА́ЧА — см. *Распознавание образов.*

ТА́НГЕНС (от лат. tangens — касающийся) — 1) одна из *тригонометрических функций*; обозначение: tg.

2) Т. острого угла в прямоугольном треугольнике называют отношение катета, лежащего против этого угла, к катету, прилежащему к этому углу.

ТА́НГЕНС ГИПЕРБОЛИ́ЧЕСКИЙ — одна из *гиперболических функций.*

ТА́НГЕНСОВ ТЕОРЕ́МА — теорема, устанавливающая соотношение между длинами сторон треугольника и тангенсами полусуммы и полуразности противоположных углов. Именно, если a, b, c — длины сторон треугольника, A, B, C — величины противоположных углов, то

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}$$

(ф о р м у л а Р е г и о м о н т а н а).

ТАНГЕНСО́ИДА — график функции $y=\operatorname{tg}x$ (рис. 1). Периодич. кривая с периодом $T=\pi$ и асимптотами $x=(k+{}^1/_2)\pi$, $k=0, \pm1, \ldots$. При изменении x от $-\pi/2$ до $+\pi/2$ y монотонно растёт от $-\infty$ до $+\infty$. Абсциссы точек пересечения с осью Ox: $x=k\pi$, они же — точки перегиба с углом $\pi/4$ наклона к оси Ox.

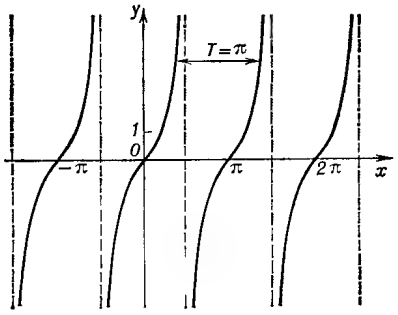


Рис. 1.

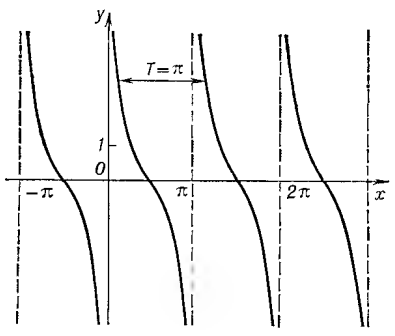


Рис. 2.

Т., зеркально отражённая относительно оси Ox и сдвинутая влево на отрезок $\pi/2$ (рис. 2), является графиком функции $y=\operatorname{ctg}x=-\operatorname{tg}(\pi/2+x)$; асимптоты $x=k\pi$; абсциссы точек пересечения с осью Ox: $x=(k+{}^1/_2)\pi$, они же — точки перегиба с углом $-\pi/4$ наклона к оси Ox.

ТАНГЕНЦИА́ЛЬНЫЕ КООРДИНА́ТЫ — название для коэффициентов в уравнении прямой, которые рассматриваются как координаты. Для уравнения прямой $ux+vy+1=0$ коэффициенты u и v наз. неоднородными Т. к.; для однородного уравнения прямой $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ коэффициенты u_1, u_2, u_3 наз. однородными Т. к. Уравнение, связывающее Т. к. касательной к кривой, наз. т а н г е н ц и а л ь н ы м у р а в н е н и е м этой кривой.

ТА́УБЕРОВЫ ТЕОРЕ́МЫ, т е о р е м ы т а у б е р о в а т и п а,— теоремы, устанавливающие условия, при которых суммируемость ряда или интеграла некоторым методом влечёт его суммируемость более слабым методом (см. *Суммирование* расходящихся рядов и интегралов). Одной из первых теорем такого типа была т е о р е м а Т а у б е р а (1897): если для числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ существует предел

$$\lim_{r\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n=s$$

(т. е. если он суммируем к s методом Абеля) и если

$$\lim_{n\to\infty}na_n=0,$$

то этот ряд сходится к s.

ТАУТОХРО́ННАЯ КРИВА́Я (от греч. ταὐτός — тот же и χρόνος — время) — то же, что *циклоида.*

ТЕ́ЙЛОРА МНОГОЧЛЕ́Н степени n для функции f, n раз дифференцируемой при $x=x_0$,— многочлен вида

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Значения Т. м. и его производных до порядка n включительно в точке $x=x_0$ совпадают со значениями функции и её соответствующих производных в той же точке:

$$f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0),\quad k=0, 1, \ldots, n.$$

Т. м. является многочленом наилучшего приближения функции f при $x\to x_0$ в том смысле, что

$$f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0, \qquad (*)$$

и если какой-либо многочлен $Q_n(x)$ степени, не превышаю-

щей n, обладает свойством, что

$$f(x)-Q_n(x)=o((x-x_0)^m),\quad x\to x_0,$$

где $m\geqslant n$, то он совпадает с Т. м. $P_n(x)$. Иначе говоря, многочлен, обладающий свойством (*), единствен.

Если хотя бы одна из производных $f^{(k)}(x)$, $k=0, 1, \ldots, n$, не равна нулю в точке x_0, то Т. м. является главной частью *Тейлора формулы*.

ТЕЙЛОРА РЯД — степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \qquad (1)$$

или (другая запись)

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

где числовая функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Частными суммами Т. р. являются *Тейлора многочлены*.

При $x_0=0$ разложение функции в Т. р. (см. *Маклорена ряд*) принимает вид

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots;$$

в частности:

$$(1+x)^m=1+mx+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots, \qquad (2)$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \qquad (3)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots, \qquad (4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \qquad (5)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad (6)$$

Ряд (2), наз. биномиальным рядом, сходится: при $-1<x<1$, если $m<-1$; при $-1<x\leqslant 1$, если $-1<m<0$; при $-1\leqslant x\leqslant 1$, если $m>0$. Ряды (3), (4), (5) сходятся при любых значениях x, ряд (6) сходится при $-1<x\leqslant 1$.

Если x_0 — комплексное число, функция f определена в нек-рой окрестности точки x_0 во множестве комплексных чисел и дифференцируема в точке x_0, то существует окрестность этой точки, на к-рой функция f является суммой своего Т. р. (1). Если же x_0 — действительное число, функция f определена в нек-рой окрестности точки x_0 во множестве действительных чисел и имеет в точке x_0 производные всех порядков, то функция f может ни в какой окрестности точки x_0 не быть суммой своего Т. р. Напр., функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases} \qquad (7)$$

бесконечно дифференцируема на всей действительной оси, не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки $x=0$, а все коэффициенты её Т. р. в этой точке равны нулю.

Если функция раскладывается в нек-рой окрестности данной точки в степенной ряд, то такой ряд единствен и является её Т. р. в этой точке. Однако один и тот же степенной ряд может являться Т. р. для разных действительных функций. Так, степенной ряд, у к-рого все коэффициенты равны нулю, является как Т. р. функции, тождественно равной нулю на всей действительной оси, так и Т. р. функции (7) в точке $x=0$.

Достаточным условием сходимости Т. р. (1) к действительной функции f на интервале (x_0-h, x_0+h) является ограниченность в совокупности всех её производных на этом интервале.

Ряд (1) был опубликован Б. Тейлором (1715); ряд, сводящийся к ряду (1) простым преобразованием, был опубликован И. Бернулли (1694).

ТЕЙЛОРА ФОРМУЛА — представление функции в виде суммы её многочлена Тейлора степени n ($n=0, 1, \ldots$) и остаточного члена. Если действительная функция f одного переменного имеет n производных в точке x_0, то её Т. ф. имеет вид

$$f(x)=P_n(x)+r_n(x),$$

где

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-k)^k$$

— *Тейлора многочлен*, а остаточный член $r_n(x)$ может быть записан в форме Пеано:

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0.$$

Если функция f дифференцируема $n+1$ раз в нек-рой окрестности $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$, точки x_0, то остаточный член в этой окрестности может быть записан в форме Шлёмильха — Роша:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!\,p}(1-\theta)^{n-p+1}(x-x_0)^{n+1},$$

где $p=1, 2, \ldots, n+1$, частным видом к-рой являются форма Лагранжа:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

и форма Коши:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},$$
$$0<\theta<1,\quad x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta).$$

Если производная порядка $n+1$ функции f интегрируема на отрезке с концами в точках x и x_0, то остаточный член можно записать в интегральной форме

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Т. ф. со всеми указанными формами записи её остаточного члена обобщается на случай функций нескольких переменных.

Т. ф. позволяет изучение ряда свойств определённое число раз дифференцируемой функции свести к существенно более простой задаче изучения этих свойств у соответствующего многочлена Тейлора — на этом и основаны разнообразные и многочисленные применения Т. ф., напр. для вычисления пределов функций, исследования их экстремумов, точек перегиба, интервалов выпуклости и вогнутости, сходимости рядов и интегралов, оценки скорости их сходимости или расходимости.

ТЕЛЕГРАФНОЕ УРАВНЕНИЕ (от греч. τῆλε — далеко и γράφω — пишу) — дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2u}{\partial s^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\beta u=0. \qquad (*)$$

Этому уравнению удовлетворяет напряжение u между проводами, рассматриваемое как функция времени t и расстояния s от нек-рой фиксированной точки провода. Здесь c — скорость света, α — ёмкостный, β — индуктивный коэффициенты.

Преобразованием

$$e^{(\alpha+\beta)t/2}u(s,\ t)=v(x,\ y),\quad x=s+ct,\quad y=-ct$$

уравнение (*) приводится к виду

$$v_{xy}+\lambda v=0,\quad \lambda=\left(\frac{\alpha-\beta}{4c}\right)^2.$$

Это уравнение принадлежит классу уравнений 2-го порядка гиперболич. типа:

$$v_{xy}+av_x+bv_y+cv=f.$$

ТЕЛЕ́СНЫЙ У́ГОЛ — часть пространства, ограниченная некоторой конической поверхностью (рис. 1); частными случаями Т. у. являются трёхгранные и многогранные углы. Т. у. измеряется соотношением площади S той части сферы с центром в вершине конич. поверхности, к-рая вырезается этим Т. у., к квадрату радиуса сферы. Очевидно, Т. у. измеряются отвлечёнными числами; напр, Т. у.,

заключающий $^1/_8$ часть пространства (октант, рис. 2), измеряется числом $4\pi R^2/8R^2=\pi/2$. Единицей измерения Т. у. является *стерадиан* (ср). Полная сфера образует Т.у., равный 4π стерадиан.

ТЕ́ЛО — 1) кольцо, в котором каждое из уравнений $ax=b$ и $ya=b$ при $a\neq 0$ имеет единственное решение. Коммутативное ассоциативное Т. наз. *полем*. Всякая конечномерная алгебра без делителей нуля есть Т. Всякое конечное ассоциативное Т. является полем. Пример некоммутативного, но ассоциативного Т. — совокупность *кватернионов*, некоммутативного и неассоциативного — алгебра *Кэли чисел*. Иногда телами называют только ассоциативные Т., а в неассоциативном случае говорят об алгебрах с делением.

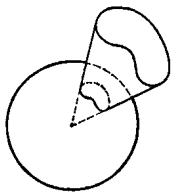


Рис. 1.

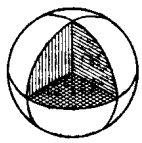


Рис. 2.

2) Т. геометрическое — часть пространства, ограниченная замкнутой поверхностью, или, более общо, связное открытое подмножество, замыкание к-рого компактно. Иногда Т. наз. только компактное множество, имеющее внутренние точки. Примерами являются выпуклые тела, многогранники.

3) Т. комплекса — объединение составляющих его клеток, т. е. *полиэдр*, являющийся геометрич. реализацией этого комплекса.

4) Т. процедуры — сокращённое параметризованное функциональное обозначение нек-рой части *программы*; Т. цикла — обозначение нек-рой части программы, к-рая выполняется с нек-рым числом повторений.

ТЕ́НЗОР (от лат. tendo, буквально — напрягаю, растягиваю) — величина, координаты которой преобразуются по особому закону при переходе от одной системы координат к другой (см. *Тензорное исчисление*). Термин первоначально относился к тензору деформации, связанному с возникающими упругими деформациями при малых растяжениях.

Понятие Т. в векторном пространстве V может быть введено различными способами. В частности, r раз ковариантный и s раз контравариантный **Т.** t можно определить как *полилинейную форму* от r векторов пространства V и s векторов сопряжённого пространства V^* или как элемент *тензорного произведения* пространств

$$\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{s}\otimes\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{r}.$$

ТЕ́НЗОРНАЯ ВЕЛИЧИНА́ — см. *Тензорное исчисление*.

ТЕ́НЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕ́НИЕ — математическая теория, изучающая величины особого рода — *тензоры*, их свойства и правила действий над ними. Т. и. является развитием и обобщением векторного исчисления и теории матриц. Т. и. широко применяется в дифференциальной геометрии, в частности в теории римановых пространств, теории относительности, электродинамике и других областях науки.

Для описания многих физич. и геометрич. фактов обычно вводится та или иная система координат, что позволяет описывать различные объекты при помощи одного или нескольких чисел, а соотношения между объектами — равенствами, связывающими эти числа или системы чисел. Нек-рые из величин, называемые скалярными (в классич. физике это — масса, температура и т. д.), описываются одним числом, не изменяющимся при переходе от одной системы координат к другой. Другие величины — векторные (сила, скорость и т. д.) описываются тремя числами (компонентами вектора), причём при переходе от одной системы координат к другой компоненты векторов преобразуются по известному закону. Наряду со скалярными и векторными величинами во многих вопросах физики и геометрии встречаются величины более сложного строения. Эти величины, называемые тензорными, описываются в каждой системе координат несколькими числами (компонентами тензора), причём закон преобразования этих чисел при переходе от одной системы координат к другой более сложен, чем для векторов (точные определения будут даны ниже). Одним из классич. примеров тензора является тензор инерции, задаваемый совокупностью чисел J_{ij}, $i, j=1, 2, 3$, где J_{ii} — осевой момент инерции твёрдого тела относительно оси x_i, а J_{ij} (при $i\neq j$) — центробежные моменты инерции, взятые с обратным знаком. При переходе от одной системы координат к другой осевой момент инерции J_{ii} меняется, причём знание J_{ii} в одной системе координат не позволяет найти J_{ii} в другой системе координат. Потому J_{ii} не может рассматриваться как физич. величина, имеющая независимый от выбора системы координат смысл. В то же время совокупность всех чисел J_{ij} имеет смысл, независимый от выбора координатной системы, так, напр., знание всех чисел J_{ij} в одной системе прямоугольных координат позволяет найти их в любой другой системе прямоугольных координат по формуле

$$J'_{kl}=\alpha^r_k\alpha^s_l J_{rs},$$

где $\|\alpha^r_k\|$ — матрица перехода от одной системы координат к другой; здесь, как принято в Т. и., опущен знак суммы и считается, что если один и тот же индекс встречается дважды (один раз наверху, а другой раз внизу), то по нему производится суммирование, причём этот индекс принимает все возможные для него значения (в приведённом примере — значения 1, 2, 3).

Определение и примеры тензоров. Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве E^3 заданы два базиса (e_i) и (e'_i), $i=1, 2, 3$, причём $e'_j=A^i_j e_i$, $e_i=B^j_i e'_j$; r раз ковариантным и s раз контравариантным тензором в пространстве E^3 наз. зависящая от выбора базиса совокупность t чисел $t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}$, преобразующихся при изменении базиса по формулам

$$t'^{k_1\ldots k_r}_{m_1\ldots m_s}=A^{l_1}_{m_1}\ldots A^{l_s}_{m_s}B^{k_1}_{i_1}\ldots B^{k_s}_{i_r}\,t^{i_1\ldots i_r}_{l_1\ldots l_s}.$$

Число $r+s$ наз. валентностью тензора t. При $s=0$ тензор t наз. ковариантным, при $r=0$ — контравариантным, при $r>0$, $s>0$ — смешанным. Числа $t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_r}$ наз. компонентами (координатами) тензора t в данном базисе. Рассматриваются также тензоры нулевой валентности (скаляры или инварианты), к-рые в любом базисе имеют единственную компоненту, не зависящую от базиса.

Примеры: компоненты (u^i) вектора $u\in E^3$ являются компонентами 1 раз контравариантного тензора, к-рый отождествляют с вектором u. Далее, координаты $l_i=l(e_i)$ линейной формы l на E^3 определяют 1 раз ковариантный тензор, отождествляемый с l. Аналогичным образом r раз ковариантные тензоры отождествляются с r-линейными формами на E^3 (см. *Полилинейная форма*). В частности, скалярному произведению в E^3 соответствует 2 раза ковариантный тензор $g_{ij}=(e_i, e_j)$, наз. ковариантным метрическим тензором. Элементы матрицы $\|g^{ij}\|=\|g_{ij}\|^{-1}$ определяют 2 раза контравариантный тензор (контравариантный метрический тензор). *Поливекторы* дают примеры r раз контравариантных тензоров. Элементы матрицы $\|c^i_j\|$ линейного преобразования γ пространства E^3 задают 1 раз ковариантный и 1 раз контравариантный тензор, к-рый отождествляют с γ и иногда наз. аффинором.

Если ограничиться рассмотрением ортонормированных базисов в E^3, то $A^i_j=B^i_j$, так что разница между ковариантными, контравариантными и смешанными тензорами данной валентности исчезает. Напр., имеется взаимно однозначное соответствие между векторами и линейными формами, а также между билинейными формами и линейными преобразованиями в E^3.

Дословно так же определяются тензоры в n-мерном векторном пространстве над произвольным полем.

Алгебраические операции над тензорами. Существуют четыре основные операции над тензорами: сложение, умножение, свёртывание по двум или более индексам и перестановка индексов тензора.

Суммой двух тензоров t^{ab}_{cde} и q^{ab}_{cde} одинакового строения (т. е. имеющих одинаковое число верхних и нижних индексов) наз. тензор с координатами

$$r^{ab}_{cde} = t^{ab}_{cde} + q^{ab}_{cde}.$$

Произведением двух тензоров t^{a}_{bc} и q^{de}_{fgh} (быть может, различного строения) наз. тензор с координатами

$$r^{ade}_{bcfgh} = t^{a}_{bc} q^{de}_{fgh}.$$

Произведение тензоров, вообще говоря, зависит от порядка сомножителей. Если один из тензоров имеет нулевую валентность (т. е. является скаляром λ), то умножение его на другой тензор t^{a}_{bc} сводится к умножению всех компонент тензора t^{a}_{bc} на число λ.

Результатом свёртывания тензора t^{ab}_{cde} по индексам a и d (верхнему и нижнему) называется тензор t^{b}_{ce}, компоненты к-рого равны $t^{b}_{ce} = t^{ib}_{cie}$ (здесь производится суммирование по индексу i). При полном свёртывании тензора (по всем индексам) получается инвариант. Напр., след матрицы p^{i}_{i} является результатом свёртывания её по индексам i и j.

Пусть компоненты тензора q^{ab}_{cde} выражаются через компоненты тензора t^{ab}_{cde} формулой $q^{ab}_{cde} = t^{ab}_{edc}$. Тогда говорят, что q^{ab}_{cde} получился из t^{ab}_{cde} перестановкой индексов c и e. При этом переставляться могут только индексы одного и того же уровня. Тензор наз. симметрическим (кососимметрическим) по данной совокупности индексов (одного и того же уровня), если при перестановке любых двух индексов этой совокупности он не меняется (соответственно меняет знак).

Тензорный анализ. Тензорным полем (r раз ковариантным и s раз контравариантным) в области U пространства E^3 наз. соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in U$ тензор $t(x)$ (r раз ковариантный и s раз контравариантный). Тензорное поле задаётся набором функций $t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(x)$, на к-рые налагаются те или иные условия гладкости. Напр., рассматриваются скалярные поля, т. е. функции ($r=s=0$), векторные поля ($r=0$, $s=1$), пфаффовы формы ($r=1$, $s=0$). Тензор инерции, рассматриваемый во всех точках тела, задаёт пример тензорного поля валентности 2. Частные производные $\frac{d}{dx^{i_{r+1}}} t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$ компонент тензорного поля являются компонентами $r+1$ раз ковариантного и s раз контравариантного тензорного поля. Напр., при дифференцировании скалярного поля f получается пфаффова форма df с компонентами $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ (дифференциал функции f). В декартовых координатах эту форму можно рассматривать как векторное поле grad f, наз. градиентом функции f.

В тензорном анализе рассматриваются тензорные поля на произвольных дифференцируемых многообразиях и дифференциальные операторы, действующие на таких полях.

Историческая справка. Возникновение Т. и. было подготовлено в 19 в. развитием теории алгебраич. форм, с одной стороны, и теории квадратичных дифференциальных форм — с другой. Исследования в области теории дифференциальных квадратичных форм были непосредственно связаны с дифференциальной геометрией: с геометрией поверхностей (К. Гаусс) и с геометрией многомерных метрич. пространств (Б. Риман). Современную форму Т. и. придал Г. Риччи-Курбастро, поэтому Т. и. иногда наз. исчислением Риччи. Идеи Г. Риччи-Курбастро первоначально не получили широкого распространения. Внимание к ним возросло после появления общей теории относительности, математич. часть к-рой целиком основана на Т. и.

● Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, 3 изд., М., 1967; Схоутен Я. А., Тензорный анализ для физиков, пер. с англ., М., 1965; Кострикин А. И., Манин Ю. И., Линейная алгебра и геометрия, М., 1980.

ТЕНЗОРНОЕ ПОЛЕ — см. *Тензорное исчисление.*

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ векторных пространств V и W над полем k — векторное пространство $V \otimes W$ над k, обладающее следующим свойством: каждому базису $v_1, \dots, v_n$ пространства V и базису $w_1, \dots, w_m$ пространства W отвечает базис $v_i \otimes w_j$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$, пространства $V \otimes W$. В частности, $\dim V \times W = \dim V \times \dim W$. Т. п. $V \otimes W$ определяется как абелева группа с образующими $x \otimes y$ ($x \in V$, $y \in W$) и определяющими соотношениями

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y,$$
$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2,$$
$$cx \otimes y = x \otimes cy,$$

умножение на скаляр $c \in k$ определяется формулой

$$c \sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i cx_i \otimes y_i.$$

Основное свойство Т. п., к-рое можно принять за его определение, состоит в следующем: для любого векторного пространства U над k и любого отображения h: $U \times V \to W$, линейного по каждому аргументу, существует единственное линейное отображение $\tilde{h}$: $U \otimes V \to W$ такое, что $h(x, y) = \tilde{h}(x \otimes y)$ для всех $x \in U$, $y \in V$. Имеют место следующие изоморфизмы:

$$V \otimes W \cong W \otimes V,$$
$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W),$$
$$U \otimes (V \oplus W) \cong U \otimes V \oplus U \otimes W.$$

Другими словами, Т. п. коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно операции взятия прямой суммы.

ТЕОРЕ́МА (греч. θεώρημα, от θεωρέω — рассматриваю, исследую) — математическое утверждение, истинность которого установлена путём доказательства. Каждая область математики состоит из Т., доказываемых одна за другой на основании ранее уже доказанных Т., самые же первые предложения принимаются без доказательств и служат логич. основой данной области математики; эти первые предложения наз. *аксиомами.*

В формулировке Т. различают условие и заключение. Напр.: 1) если сумма цифр числа делится на три, то и само число делится на три, или 2) если в треугольнике один из углов прямой, то оба других — острые; в каждом из этих примеров перед словом «то» стоит условие Т., а после слова «то» — заключение. В такой форме можно высказать каждую Т. Напр., Т. «всякий вписанный в окружность угол, опирающийся на диаметр,— прямой» можно высказать так: «если вписанный в окружность угол опирается на диаметр, то он прямой».

Каждой Т., высказанной в форме «если..., то...», можно высказать ей обратную теорему, в к-рой условие данной теоремы заменяется заключением, а заключение — условием. Прямая и обратная Т. взаимно обратны. Не для всякой верной Т. обратная Т. оказывается верной; так, обратная Т. для примера 1) верна, а для примера 2) — неверна. Справедливость обеих взаимно обратных Т. означает, что выполнение условия любой из них не только достаточно, но и необходимо для справедливости заключения (см. *Необходимые и достаточные условия*). Если условие и заключение данной Т. заменить их отрицаниями, то получим т. н. противоположную теорему. См. также *Высказываний исчисление.*

«ТЕОРЕТИ́ЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИ́ЧЕСКАЯ ФИ́ЗИКА» — научный журнал Секции физико-технич. и математич. наук Президиума АН СССР. Издаётся в Москве с 1969. Ежегодно выходят 4 тома, состоящие из 3 номеров

каждый. Публикует оригинальные статьи физич. и математич. содержания по фундаментальным проблемам строения материи. Тираж (1987) ок. 1100 экз.

ТЕО́РИЯ (от греч. θεωρία — исследование, научное познание) — произвольная совокупность предложений некоторого *формализованного языка*. См. также *Моделей теория*.

«ТЕО́РИЯ ВЕРОЯ́ТНОСТЕЙ И ЕЁ ПРИМЕНЕ́НИЯ» — научный журнал Отделения математики АН СССР. Издаётся в Москве с 1956, выходит 4 номера в год. Публикует оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математич. статистики и их применениям в естествознании и технике. Тираж (1987) ок. 2 700 экз.

ТЕПЛОПРОВО́ДНОСТИ УРАВНЕ́НИЕ — однородное дифференциальное уравнение с частными производными

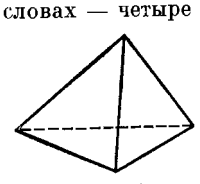
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$

Это уравнение является простейшим уравнением параболич. типа. При $n=3$ оно описывает процесс распространения тепла в твёрдом теле (u — температура тела). К осповным корректно поставленным задачам для Т. у. относятся первая краевая задача (в цилиндрич. области) и начально-краевая задача (в полупространстве).

ТЕРМ (англ. term, франц. terme, от ср.-век. лат. terminus — выражение, слово, термин) — выражение *формализованного языка*, являющееся аналогом имени объекта или именной формы. Простейшими Т. являются предметные переменные, а также предметные константы — символы, служащие для обозначения конкретных объектов. Более сложные Т. строятся из них индукцией с помощью символов для обозначения функций. См. также *Формальная арифметика*.

ТЕРНА́РНАЯ ФО́РМА (от лат. ternarius — тройной, тройничный) — *форма* от трёх переменных.

ТЕТРА́ЭДР (греч. τετράεδρον, от τετρα-, в сложных словах — четыре и ἕδρα — основание, грань) — один из пяти типов правильных многогранников (рис.); имеет 4 грани (треугольные), 6 рёбер, 4 вершины (в каждой вершине сходится 3 ребра). Если a — длина ребра Т., то его объём $V=a^3\sqrt{2}/12\approx \approx 0{,}1179a^3$. Т. является правильной треугольной пирамидой.



ТЕТРАЭДРИ́ЧЕСКИЕ ЧИ́СЛА — см. *Арифметический ряд*.

ТИ́ХОНОВА ТЕОРЕ́МА — 1) Т. т. о компактных пространствах: топологическое произведение любого множества компактных пространств — компактное пространство. Установлена А. Н. Тихоновым (1929).

2) Т. т. о малом параметре — теорема о поведении решений нелинейных систем дифференциальных уравнений с малым параметром (см. *Малого параметра метод*). Установлена А. Н. Тихоновым (1952).

ТИ́ХОНОВСКИЙ КУБ — топологическое пространство, являющееся произведением τ экземпляров отрезка I действительной прямой, где τ — произвольное кардинальное число; обозначается I^τ; введён А. Н. Тихоновым (1929). Если $\tau=n$ — натуральное число, то Т. к. I^n есть куб в n-мерном евклидовом пространстве, если $\tau=\aleph_0$ — мощность натурального ряда, то Т. к. $I^{\aleph_0}$ гомеоморфен *гильбертову кирпичу*. При $\tau_1\neq\tau_2$ Т. к. I^{τ_1} и I^{τ_2} не гомеоморфны между собой; если τ — бесконечное кардинальное число, то τ есть вес пространства I^τ, а если $\tau=n$ — натуральное число, то n — размерность пространства I^n.

ТИ́ХОНОВСКОЕ ПРОСТРА́НСТВО — топологическое пространство X, в котором каждое конечное множество замкнуто и для всякого замкнутого множества P и любой не принадлежащей P точки x найдётся непрерывная функция на X со значениями в $[0, 1]$, равная 0 в x и 1 во всех точках множества P. Всякое Т. п.— регулярное пространство. Обратное неверно. Всякое подпространство Т. п. и произведение всякого семейства Т. п. является Т. п. Введено А. Н. Тихоновым (1929).

ТКАНЬ — совокупность трёх (или более) семейств гладких линий на плоскости таких, что через каждую точку проходит точно по одной линии каждого семейства и линии разных семейств имеют не более одной общей точки. Напр., Т. образуют три семейства прямых, параллельных сторонам равностороннего треугольника. Рассматриваются многомерные обобщения Т.

ТОЖДЕ́СТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — 1) замена одного аналитического выражения другим, тождественно ему равным, но отличным по форме. Целью Т. п. может быть придание выражению вида, более удобного для численных расчётов или дальнейших преобразований, для логарифмирования, потенцирования, дифференцирования, интегрирования, решения уравнений и т. д. К Т. п. относятся, напр., приведение подобных членов, раскрытие скобок, разложение на множители, приведение алгебраич. дробей к одному знаменателю, разложение их на элементарные дроби, приведение суммы тригонометрич. функций к виду, удобному для логарифмирования (т. е. превращение её в произведение).

2) Т. п.— преобразование (отображение в себя) некого множества, оставляющее на месте каждый его элемент.

ТО́ЖДЕСТВО — равенство двух аналитических выражений, справедливое для любых допустимых значений входящих в него букв.

Примеры Т.: 1) равенство

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

справедливое при всех числовых значениях a и b;

2) равенство

$$\frac{a^2-1}{a-1}=a+1,$$

справедливое при всех значениях $a\neq 1$ (при $a=1$ правая часть существует, но левая теряет смысл);

3) равенство

$$\log xy=\log x+\log y,$$

справедливое при всех положительных значениях x и y (если x и y отрицательны, то левая часть существует, но правая теряет смысл).

Для обозначения Т. применяется знак $\equiv$, введённый Б. Риманом (1857).

ТО́КА ЛИ́НИЯ — то же, что *векторная линия*.

ТОЛЕРА́НТНОСТЬ (от лат. tolerantia — терпение) — см. *Соответствие, Транзитивность*.

ТО́МСОНА ФУ́НКЦИИ, Кельвина функции,— то же, что модифицированные *цилиндрические функции*. Предложены У. Томсоном (лордом Кельвином) в 1890.

ТОПОЛОГИ́ЧЕСКАЯ А́ЛГЕБРА — раздел алгебры, который занимается изучением различных топологических алгебраических систем (то есть групп, полугрупп, колец, алгебр, векторных пространств и др.), наделённых топологиями, в которых алгебраические операции этих систем непрерывны. Первым в ряду понятий Т. а. явилось понятие *топологической группы*. Оно возникло в связи с рассмотрением групп непрерывных преобразований. Во 2-й пол. 19 в. С. Ли и его школа создали развитую теорию важного класса топологич. групп — групп дифференцируемых преобразований многообразий, получивших впоследствии название *Ли групп*. Изучение общих топологич. групп началось в 20-х гг. 20 в. Многочисленные проблемы анализа привели к общему определению *банахова пространства*, что создало предпосылку для систематич. изучения банаховых алгебр — топологич. алгебр над полем комплексных чисел.

Основные вопросы, рассматриваемые в Т. а.,— существование топологий в алгебраич. системах, превращающих их в топологич. алгебраич. системы, возможность продолжения топологий на расширения алгебраич. систем, свойства топологий алгебраич. систем, в частности возможность задания топологии метрикой или нормой, и др.

ТОПОЛОГИ́ЧЕСКАЯ ГРУ́ППА — группа, снабжённая топологией, в которой групповые операции непрерывны. Таким образом, Т. г.— это группа G, одновременно являющаяся топологич. пространством, причём отображение $(g, h)\to gh^{-1}$ пространства $G\times G$ в G непрерывно. Обычно предполагают также, что топология в G хаусдорфова (для этого достаточно, чтобы одноэлементное множество $\{e\}$, где e — единица группы G, было замкнуто в G). На Т. г. распространяются как терминология теории групп, так и терминология теории топологич. пространств (напр., понятия связности, компактности, размерности).

Примерами Т. г. являются группы Ли, а также аддитивные группы топологич. векторных пространств. В развитии теории Т. г. большую роль сыграла следующая проблема (п я т а я п р о б л е м а Г и л ь б е р т а): является ли группой Ли топологич. группа, пространство к-рой есть топологич. многообразие? Эта проблема была положительно решена в 1952. Прямое произведение счётного семейства групп $\mathbb{Z}_2$ представляет собой пример нульмерной компактной Т. г., гомеоморфной канторову совершенному множеству и потому не являющейся группой Ли.

Наиболее хорошо изучено строение локально компактных топологич. групп, в особенности абелевых, структурная теория к-рых тесно связана с теорией двойственности. Напр., известно, что любая связная локально компактная абелева Т. г. топологически изоморфна $\mathbb{R}^n\times K$, где $n\geqslant 0$ и K — компактная абелева Т. г.

ТОПОЛОГИ́ЧЕСКИЙ ИНВАРИА́НТ — см. *Общая топология*, *Топология*.

ТОПОЛОГИ́ЧЕСКОЕ ВЕ́КТОРНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — векторное пространство E над полем K (обычно $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), наделённое топологией, согласующейся со структурой векторного пространства, т. е. удовлетворяющей следующим аксиомам: 1) отображение $(x, y)\to x+y$, $E\times E\to E$ непрерывно; 2) отображение $(k, x)\to kx$, $K\times E\to E$ непрерывно (при этом предполагается, что произведения $E\times E$, $K\times E$ наделены произведениями соответствующих топологий). Классич. примеры Т. в. п.— евклидово пространство, банахово пространство, локально выпуклое пространство. Если Т. в. п. над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ отделимо и обладает выпуклой ограниченной окрестностью нуля, то оно нормируемо, а если обладает предкомпактной окрестностью, то оно конечномерно.

Математич. анализ (в широком смысле) на Т. в. п.— т. н. бесконечномерный анализ, являясь продолжением классич. анализа, в то же время качественно отличается от него как постановками задач и результатами, так и методами. На языке бесконечномерного анализа естественно формулируются основные задачи физики бесконечномерных систем — квантовой теории поля, статистич. гидромеханики и механики, а также нек-рые математич. задачи, первоначально возникшие вне его рамок.

ТОПОЛОГИ́ЧЕСКОЕ ПРОСТРА́НСТВО — множество X, между точками и подмножествами к-рого определено предельное отношение, или отношение близости δ, подчинённое следующим аксиомам:

1) никакая точка не близка к пустому множеству;
2) $x\delta\{x\}$ для всех $x\in X$;
3) если $x\delta A$ и $A\subset B\subset X$, то $x\delta B$;
4) если $x\delta(A\cup B)$, то $x\delta A$ или $x\delta B$;
5) если $y\delta A$ для всех $y\in B$ и $x\delta B$, то $x\delta A$.

В Т. п. вводится понятие з а м к н у т о г о м н о ж е с т в а как такого, к-рое содержит все близкие к нему точки. О т к р ы т ы м и м н о ж е с т в а м и наз. дополнения до замкнутых множеств, они составляют топологию пространства X. Точки, близкие ко множеству A, наз. также т о ч к а м и п р и к о с н о в е н и я множества A в данном пространстве, они образуют з а м ы к а н и е $[A]$ множества A.

Важнейший частный случай Т. п. образуют *метрические пространства*. В частности, числовая прямая, евклидово пространство любого числа измерений, различные функциональные пространства могут служить примерами метрических и, следовательно, топологич. пространств. Существует много способов вводить в данное множество X топологию, т. е. превратить его в Т. п.; напр., в случае метрич. пространств топология вводится посредством вспомогательного понятия расстояния. В очень многих случаях топология в данное множество X вводится посредством окрестностей: для каждого элемента (для каждой точки) множества X нек-рые подмножества множества X выделяются в качестве окрестностей данной точки. В предположении, что окрестности определены, точка x объявляется точкой прикосновения множества A, если каждая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества A.

Чрезвычайная общность понятия Т. п. ограничивается теми или иными условиями, налагаемыми на предельные соотношения. Эти условия называются аксиомами Т. п. В качестве аксиом Т. п. можно принять следующие условия, налагаемые на операцию замыкания: 1) замыкание суммы двух множеств есть сумма замыканий этих множеств; 2) каждое множество содержится в своём замыкании; 3) замыкание замыкания любого множества A совпадает с замыканием множества A; замыкание пустого множества пусто.

Отображение f Т. п. X в Т. п. Y наз. н е п р е р ы в н ы м, если оно сохраняет предельные соотношения, т. е. если из того, что точка a пространства X близка ко множеству $A\subset X$, следует, что точка $b=f(a)$ в пространстве Y близка ко множеству $B=f(A)$ — образу множества A при отображении f. Если дано взаимно однозначное отображение f топологич. пространства X на топологич. пространство Y, причём и само отображение f, и обратное к нему отображение f^{-1} непрерывны, то f наз. т о п о л о г и ч е с к и м о т о б р а ж е н и е м X на Y (или г о м е о м о р ф и з м о м между этими пространствами). Два Т. п. наз. г о м е о м о р ф н ы м и между собой, если одно из них можно топологически отобразить на другое. Можно доказать, что если дано топологич. пространство X, то, принимая в нём каждое открытое множество, содержащее данную точку x, за окрестность точки x, получают систему окрестностей, к-рая даёт (по правилу, указанному выше) именно топологию данного топологич. пространства X. Оказывается, для того чтобы получить топологию данного Т. п., нет надобности рассматривать в качестве окрестностей данной точки x все открытые множества, содержащие эту точку; достаточно взять открытые множества, являющиеся элементами к.-л. базы данного Т. п. При этом базой топологич. пространства X наз. всякая система открытых множеств пространства X, обладающая тем свойством, что любое открытое множество пространства X есть сумма нек-рых множеств, являющихся элементами этой системы. Напр., если за пространство X взять числовую прямую, то одной из баз этого пространства является множество всех интервалов с рациональными концами. Этот пример показывает, что несчётное Т. п. может иметь базу, состоящую из счётного множества элементов. Такие пространства наз. п р о с т р а н с т в а м и с о с ч ё т н о й б а з о й (или пространствами, удовлетворяющими второй аксиоме счётности). Другой признак, позволяющий выделять всё более узкие классы Т. п., даётся т. н. *отделимости аксиомами*.

Вместо того чтобы определить Т. п. посредством отношения близости или понятия замыкания, можно определить Т. п. как множество, в к-ром нек-рые подмножества выделены как открытые, причём выполнены следующие два условия: 1) пересечение конечного числа и сумма любого числа открытых множеств суть открытые множества; 2) всё множество X и пустое множество открыты. Называя окрестностью данной точки каждое содержащее эту точку открытое множество, приходят к понятию точек прикосновения и замыкания любого множества, что даёт тот же класс Т. п., к-рый был определён выше.

П. С. Александров, А. В. Архангельский.

ТОПОЛО́ГИЯ (от греч. τόπος—место и λόγος — слово, учение) — раздел математики, имеющий своим назначением выяснение и исследование в рамках математики идеи непрерывности. Интуитивно идея непрерывности выражает

коренное свойство пространства и времени и имеет, следовательно, фундаментальное значение для познания. Соответственно, Т., в к-рой понятие непрерывности получает математич. воплощение, естественно вплетается почти во все разделы математики. В соединении с алгеброй Т. составляет общую основу современной математики и содействует её единству.

Предметом Т. является исследование свойств фигур и их взаимного расположения, сохраняющихся *гомеоморфизмами*. Следовательно, Т. можно квалифицировать как разновидность геометрии. Важной чертой этой геометрии является необычайная широта класса геометрич. объектов, попадающих в сферу действия её законов.

Вызвана эта широта тем, что центральное понятие Т.— понятие гомеоморфизма — не требует для своего определения никаких классич. геометрич. понятий типа расстояния, прямолинейности, гладкости и т. д. Понятие гомеоморфизма и лежащее в его основе понятие *непрерывного отображения* предполагают только, что точки и множества рассматриваемой фигуры могут находиться в нек-ром интуитивно ясном отношении близости, отличном, вообще говоря, от простого отношения принадлежности.

Под «фигурой» в Т. понимается любое множество точек, в к-ром задано отношение близости между точками и некрыми подмножествами, удовлетворяющее определённым аксиомам. Такие фигуры наз. *топологическими пространствами*. Практически всякая фигура в смысле к.-л. другой геометрии (аффинной, проективной, дифференциальной и т. д.) может, естественно, рассматриваться и как топологич. пространство. В этом смысле Т. является наиболее общей геометрией; однако многие свойства фигур, к-рые изучаются в других геометриях, не относятся к предмету Т.

Главной задачей Т. является выделение и изучение топологич. свойств пространств, или т о п о л о г и ч е с к и х и н в а р и а н т о в,— т. е. свойств, сохраняющихся любыми гомеоморфизмами одного топологич. пространства на другое. К числу важнейших топологич. инвариантов относятся, напр., *связность*, *компактность*, *размерность*, *фундаментальная группа*, группа *гомологии* и др. Кроме того, большое внимание в Т. уделяется свойствам типа расположения одной фигуры в другой, одного топологич. пространства в другом, сохраняющимся при гомеоморфизмах объемлющего пространства на себя. Проблематика этого рода началась с теоремы Жордана.

При общем подходе естественно считать центральным объектом исследования в Т. тройку (X, f, Y), где f — непрерывное отображение топологич. пространства X в топологич. пространство Y; этим охватываются две постановки основной задачи Т., указанные выше. Главным средством сравнения троек становятся их непрерывные гомоморфизмы. На этом пути возникает понятие топологич. категории и выделяются важнейшие их примеры.

Конкретный запас топологич. пространств, или, лучше сказать, типов топологич. пространств, с к-рыми имеет дело современная Т., формировался под воздействием разных областей математики в соответствии с их весьма непохожими потребностями.

К числу наиболее важных классов топологич. пространств, сформировавшихся из требований, предъявленных к Т. математикой в целом, относятся, в частности, следующие: а) *многообразия* — локально эти топологич. пространства устроены, как евклидово пространство; важная глобальная черта классич. многообразий — паракомпактность; б) *полиэдры* — эти пространства правильным образом «скроены» из элементарных фигур, подобных отрезку, треугольнику, тетраэдру и т. д.; в) подпространства евклидова пространства (раздел Т., посвящённый их изучению и их расположению в пространстве, наз. обычно г е о м е т р и ч е с к о й т о п о л о г и е й); г) пространства функций— топологич. объекты этого рода играют фундаментальную роль в функциональном анализе и его приложениях.

Ряд важных классов топологич. пространств был выделен аксиоматически — путём фиксации того или иного важного свойства конкретных топологич. объектов. Так, л е м м а Г е й н е — Б о р е л я о том, что из любого покрытия отрезка интервалами можно выбрать конечное подпокрытие, легла в основу определения абстрактного понятия — бикомпактности (компактности) и отвечающего ему класса *бикомпактных пространств* (*компактных пространств*). Наличие естественных *метрик* на конкретных множествах явилось отправной точкой для абстрактного определения *метрического пространства* и *метризуемого пространства*. Интуитивно ясная идея отделимости (см. *Отделимости аксиомы*) точек и множеств окрестностями нашла выражение в Т. через определения классов *Колмогорова пространств*, *хаусдорфовых пространств*, *регулярных пространств*, *тихоновских пространств*, *нормальных пространств* и др. Важен класс *паракомпактных пространств*, отражающий, в частности, идею безграничности делимости пространства.

Исследование всех названных классов пространств объединено общей идеей гомеоморфизма и порождённым ею понятием топологич. инварианта. Т. к. понятие гомеоморфизма имеет ярко выраженную теоретико-множественную природу, теоретико-множественные методы и конструкции того или иного уровня сложности или общности применяются при исследовании каждого из названных и других классов топологич. пространств. Ряд этих методов имеет общий характер и значение для Т. в целом. В то же время исследование топологич. объектов в пределах к.-л. фиксированного класса пространств требует особых, специфич. методов, обладающих более узким, но и более глубоким действием. Эти методы придают областям Т., попадающим в сферу их действия, столь яркую и различную окраску, что иногда говорят о распадении Т. на ряд самостоятельных дисциплин (напр., *алгебраическая топология*, *общая топология*, *дифференциальная топология*, геометрическая Т.). Однако Т. объединена изначально своими исходными концепциями, и это единство подтверждено в процессе развития Т. общим значением для всех разделов Т., ряда основных конструкций, принципов.

Топологич. объекты, сформировавшиеся под непосредственным воздействием других областей, часто обладают следующей важной чертой: их Т. порождается нек-рой другой, более жёсткой математич. структурой, связанной, естественно, с самой природой рассматриваемого объекта. В связи с этим возникают следующие взаимосвязанные вопросы фундаментального характера.

1) Как связаны инварианты данной «внешней» структуры (комбинаторной, дифференциальной, алгебраической и др.) с топологич. инвариантами порождённой этой структурой Т.?

2) Какие инварианты данной «внешней» структуры являются инвариантами порождённой ею Т.— т. е. топологич. инвариантами?

3) Как много, с точностью до изоморфизма, существует различных «внешних» структур данного типа, порождающих заданную Т.? Прежде всего важно выяснить, есть ли хоть одна такая структура, и особенное значение имеет случай, когда такая структура единственна (с точностью до изоморфизма),— тогда вся она (а следовательно, и все её характеристики) оказывается (топологическим) инвариантом рассматриваемой Т.

Аналогичный в принципе характер имеют вопросы о соотношениях между метрич. и топологич. инвариантами и о существовании метрики, задающей данную Т. (проблема метризации).

В случае более общих пространств возникает вопрос о соотношении между инвариантами равномерной и порождённой ею топологической структуры. Исследование равномерных инвариантов и их соотношений с топологич. инвариантами составляет предмет р а в н о м е р н о й т о п о л о г и и (см. *Равномерное пространство*). Другая тесно связанная с Т. структура — структура близости. Понятие п р о с т р а н с т в а б л и з о с т и основано на

отношении близости между подмножествами — в отличие от понятия топологич. пространства, первичным для к-рого является отношение близости между точками и подмножествами пространства.

В зависимости от широты класса исследуемых топологич. пространств меняется характер постановки основной задачи Т. Так, ограничиваясь узким классом пространств, ставят задачу различить их между собой в терминах топологич. инвариантов с точностью до гомеоморфизма. Задача эта выглядит вполне естественной, напр., в рамках класса топологич. многообразий — но даже и здесь она оказывается чрезвычайно трудной и заведомо алгоритмически неразрешимой. Сложности задачи различения многообразий с точностью до гомеоморфизма приводят к необходимости рассмотреть более широкое, чем гомеоморфность, отношение гомотопич. эквивалентности топологич. пространств. В основе этого отношения лежит понятие *гомотопии* одного непрерывного отображения в другое непрерывное отображение.

Хотя методы алгебраич. Т. играют исключительно важную роль в топологич. исследованиях, существенную роль выполняют здесь и чисто теоретико-множественные конструкции. Это связано с тем, напр., что отношение гомотопич. эквивалентности, применённое к многообразиям, выводит за пределы класса многообразий. При этом получаются более простые топологич. объекты, рассматривать к-рые в технич. отношении весьма полезно. Методы теории гомотопий требуют осуществления теоретико-множественных конструкций типа различных «выметаний», приклеивания одного топологич. пространства к другому вдоль произвольного непрерывного отображения и т. д.

Для более широких классов пространств, таких, как класс бикомпактов, класс всех паракомпактов или класс всех метризуемых пространств, ставить проблему различения пространств с точностью до гомеоморфизма посредством обозримой системы вычислимых топологич. инвариантов не представляется возможным, ввиду её интуитивно очевидной неразрешимости. На передний план в качестве основной задачи Т. выдвигается здесь задача сравнения не отдельных топологич. пространств, а целых классов топологич. пространств, к-рые, особенно при аксиоматич. подходе, обычно соответствуют отдельным топологич. инвариантам или их комбинациям. При таком подходе основной вопрос Т. превращается в задачу систематич. сравнения топологич. инвариантов.

Два метода выступают на первый план в решении этой задачи. Во-первых, метод взаимной классификации пространств и отображений. Речь идёт об исследовании поведения топологич. инвариантов при разного типа непрерывных отображениях и о том, когда топологич. пространство из одного данного класса можно представить как образ пространства из другого данного класса при непрерывном отображении того или иного типа. Эта задача тем более важна и естественна, что часто топологич. пространства бывают даны нам уже будучи связанными нек-рым непрерывным отображением — напр., когда новое пространство строится как фактор-пространство нек-рого исходного топологич. пространства.

Второй метод сравнения заключается в применении кардинальных, или кардинальнозначных, топологич. инвариантов, называемых также *мощностными характеристиками*. Значениями кардинальных инвариантов являются бесконечные кардинальные числа, что даёт возможность их сравнивать, пользуясь операциями и законами арифметики кардинальных чисел. Это направление Т. переплетается с глубокими проблемами теории множеств, такими, как, напр., вопрос о справедливости *континуум-гипотезы*.

Несмотря на отмеченную выше специфику, к-рую приобретают топологич. задачи и методы в зависимости от того, какой класс топологич. пространств выбран для изучения, ряд основных задач, определяющих развитие Т., формулируется общим образом для всех её разделов и решается на основе нек-рых общих принципов и методов.

К этим задачам относятся, в частности, следующие. 1) Построение системы топологич. инвариантов на основе Т. или внешних структур, её порождающих. В этом случае возникает задача нахождения этих инвариантов для отдельных пространств и классов пространств. 2) Исследование поведения топологич. инвариантов при основных операциях над топологич. пространствами, в частности при переходе к подпространству при операции произведения. 3) Исследование поведения топологич. инвариантов при разного типа непрерывных отображениях (в частности, вложениях). 4) Исследование соотношений между топологич. свойствами пространств и их дополнений в нек-ром объемлющем пространстве.

К числу общих методов, применяемых в решении большинства задач Т. во всех её разделах, относятся, в частности, следующие.

1. Метод покрытий. Этот метод даёт результат при решении проблемы метризации, при определении и исследовании паракомпактных пространств, при определении и исследовании основных объектов комбинаторной топологии — симплициальных и клеточных комплексов. На основе открытых покрытий и отвечающих им разбиений единицы доказываются теоремы о погружениях многообразий в евклидовы пространства.

2. Метод функторов. Он заключается в сопоставлении топологич. пространствам алгебраич. и алгебротопологич. объектов, обладающих правильным — функториальным поведением и допускающих вычисление. На применении функторов основан алгебраич. метод в Т.

3. Метод спектров. Суть его заключается в представлении более сложно устроенных пространств в качестве предела обратного спектра из пространств более простых (напр., полиэдров), при этом изучается связь между топологич. инвариантами элементов спектра и предельного пространства. В понятии спектра реализуется определённым образом идея топологич. аппроксимации топологич. пространства более простыми или более удобными для изучения объектами. На этом методе основано построение теории гомологий для широких классов пространств, построение примеров сложных топологич. пространств с заданными комбинациями свойств.

4. Метод непрерывных отображений. Вложения, отображения пространств из одного класса на пространства из другого класса, исследование поведения топологич. инвариантов при отображениях составляют основу этого метода. Важную роль здесь играет решение задачи о непрерывном продолжении отображения, заданного на части пространства, на всё пространство. Решение задачи продолжения существенно зависит от гомотопич. свойств пространств, и в теории гомотопии она занимает центральное место.

5. Аксиоматический метод. Он даёт наиболее широкие и естественные рамки для выяснения взаимоотношений между топологич. инвариантами и для определения новых топологич. инвариантов и классов топологич. пространств «внутри» самой Т. в соответствии с необходимостью сделать классификацию пространств систематической и гармоничной. При этом фиксируют топологич. инвариант, определяя его в терминах самой Т., и отвлекаются от конкретных способов, к-рыми могут быть заданы пространства рассматриваемого класса, и от того, как вычислять этот топологич. инвариант. Так возникают класс бикомпактов, класс всех континуумов и т. д.

Применения Т. обладают двойной спецификой, определяемой тем, какой раздел Т. применяется и где он применяется. Очевидно, применения Т. возможны всюду, где присутствует идея непрерывности.

Есть ряд топологич. принципов и концепций «чисто» теоретико-множественного характера, нашедших очень широкие приложения в математике и имеющих, таким образом, общематематич. характер. Среди них: теорема Тихонова о бикомпактности произведения бикомпактных пространств, теорема о замкнутости всякого биком-

пактного множества в любом объемлющем хаусдорфовом пространстве, теорема Вейерштрасса — Стоуна о равномерной аппроксимации непрерывных функций на бикомпактах. Сюда же относятся принципы, связанные с полнотой пространства: теорема о неподвижной точке сжимающего отображения, теорема Бэра о категории, теорема Тихонова о неподвижной точке непрерывного отображения компактного выпуклого множества в себя. Именно эти положения общей Т. находят наиболее частые и весьма разнообразные применения в математике.

● Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; его же, О понятии пространства в топологии, «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 1, с. 5—57; Болтянский В. Г., Ефремович В. А., Наглядная топология, М., 1982; Стинрод Н., Чинн У., Первые понятия топологии, пер. с англ., М., 1967; Пархоменко А. С., Что такое линия, М., 1954; Пасынков Б. А., Федорчук В. В., Топология и теория размерности, М., 1984; Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности, пер. с англ.,М., 1948; Зейферт Г., Трельфалль В., Топология, пер. с нем., М.— Л., 1938; Архангельский А. В., Пономарев В. И., Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

А. В. Архангельский.

ТОР (от лат. torus — валик, выпуклость, узел) — тело, образуемое вращением круга вокруг прямой, лежащей в плоскости этого круга, но не пересекающей его. Приблизительно форму Т. имеет, например, баранка (или спасательный круг). Если радиус вращающегося круга равен r, а расстояние центра круга до оси вращения равно a, то поверхность Т. равна $S=4\pi^2ar$, а его объём $V=2\pi^2ar^2$. Поверхность, ограничивающую Т., иногда также наз. тором.

ТОРОИДА́ЛЬНЫЕ КООРДИНА́ТЫ — см. *Биполярные координаты.*

ТО́ЧЕЧНАЯ СТАТИСТИ́ЧЕСКАЯ ОЦЕ́НКА — см. *Статистическая оценка.*

ТО́ЧКА — одно из основных понятий геометрии. При систематич. изложении геометрии Т. обычно принимается за одно из исходных понятий.

В современной математике Т. наз. элементы весьма различной природы, из к-рых состоят различные пространства (напр., в n-мерном евклидовом пространстве Т. наз. упорядоченная совокупность из n чисел).

Во многих областях математики встречаются Т., имеющие специальные названия. Так, в геометрии изучаются особые Т. кривых; в математич. анализе — особые Т. решений дифференциальных уравнений, особые Т. аналитич. функций; в теории множеств — Т., характеризующие свойства рассматриваемого множества (см. *Предельная точка*, *Граничная точка*, *Плотности точка*) и др.

ТО́ЧНАЯ ВЕ́РХНЯЯ ГРАНЬ множества — см. *Верхняя и нижняя грани*, *Частично упорядоченное множество.*

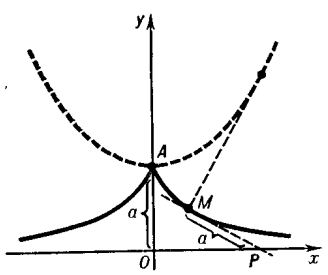
ТО́ЧНАЯ НИ́ЖНЯЯ ГРАНЬ множества — см. *Верхняя и нижняя грани*, *Частично упорядоченное множество.*

ТО́ЧНЫЙ МО́ДУЛЬ — модуль с нулевым *аннулятором.*

ТРАЕКТО́РИЯ (от ср.-век. лат. trajectorius — относящийся к перемещению) — см. *Эргодическая теория.*

ТРАЕКТО́РИЯ случайного процесса — то же, что *выборочная функция.*

ТРАКТРИ́СА (новолат. tractrix, от лат. tractus — вытянутый) — плоская трансцендентная кривая, для которой длина отрезка касательной $MP=a$ (рис.). Уравнение в прямоугольных координатах:



$$x=\pm a\left[\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right].$$

Т. симметрична относительно оси Oy. Ось Ox — асимптота. Точка A $(0, a)$ — точка возврата 1-го рода с вертикальной касательной. Длина дуги AM:

$$L=a\ln\frac{a}{y}.$$

Радиус кривизны:

$$R=a\operatorname{ctg}\frac{x}{y}.$$

Площадь, ограниченная Т. и её асимптотой:

$$S=\frac{\pi a^2}{2}.$$

При вращении Т. вокруг оси абсцисс образуется *псевдосфера.* Т.— эвольвента цепной линии (развёртывание начинается в вершине A).

Вопрос о форме Т. впервые поставлен в 1675 К. Перро. Кривая исследована Г. Лейбницем и Х. Гюйгенсом.

ТРАНЗИТИ́ВНАЯ ГРУ́ППА — группа G преобразований множества X такая, что каждый элемент $x\in X$ может быть переведён в любой элемент $y\in X$ подходящим $\gamma\in G$.

ТРАНЗИТИ́ВНОСТЬ (от лат. transitivus — переходный) — свойство бинарных отношений, выражающее их «переносимость» с одних пар объектов на другие: отношение R называется транзитивным, если для любых объектов x, y и z из xRy и yRz следует xRz. Наиболее важные классы транзитивных отношений — это отношения типа равенства (эквивалентности) и отношения порядка. Отношение R, для к-рого из xRy и yRz вытекает $\neg xRz$ (отрицание xRz), наз. интранзитивным; примером интранзитивных отношений может служить отношение различия двух чисел по чётности. Любое интранзитивное отношение нетранзитивно. Нетранзитивные отношения, обладающие свойствами *рефлексивности* и *симметричности*, наз. отношениями толерантности; они выражают идею сходства («ослабленного подобия»): похожие на одно и то же не обязательно похожи друг на друга.

ТРАНСВЕРСА́ЛЬ (франц. transversal, от лат. transversus — поперечный, скрещённый) — см. *Комбинаторный анализ.*

ТРАНСВЕРСА́ЛЬНОСТИ УСЛО́ВИЕ — необходимое условие оптимальности в вариационных задачах (см. *Вариационное исчисление*) с подвижными концами.

ТРАНСЛЯ́ТОР — программа, с помощью которой совершается трансляция.

ТРАНСЛЯ́ЦИЯ (от лат. translatio — передача) — 1) Т. в программировании, компиляция, — систематический процесс, преобразующий *программу* на входном языке в нек-рую программу на объектном языке (см. ниже) так, что обе программы реализуют одну и ту же функцию.

2) Т. в теории вычислимых функций и теории алгоритмов — любое эффективное отображение одной нумерации вычислимых функций в другую, сохраняющее свойство образа и прообраза быть номером одной и той же функции (наз. также сводимостью).

В практике программирования входным языком обычно является *программирования язык*, используемый человеком, а объектным языком— язык непосредственно выполняемых машинных программ. Сама Т., как правило, совершается автоматически, т. е. с помощью специальной программы, наз. транслятором или компилятором. Систематич. разработка трансляторов для любого входного языка из нек-рого класса языков составляет содержание теории и методов Т., а соответствующие средства такой разработки наз. системами построения трансляторов или трансляторами трансляторов.

Понятие Т. (сводимости) в теории вычислимых функций приводит к понятию главных нумераций, т. е. таких, к к-рым сводятся любые другие нумерации из некрого класса. Доказано существование главных вычислимых нумераций у всех конкретных моделей вычислимых функций, в частности у частично рекурсивных функций и у машин Тьюринга. В свою очередь, существование главных вычислимых нумераций взаимообусловлено способностью вычислимых функций к т. н. частичным вычислениям, т. е. к эффективному отображению любой программы p, вычисляющей функцию $\varphi(x, y)$, и любого значения $a=x$ одного из её аргументов в свою проек-

ц и ю, т. е. программу p_a, вычисляющую функцию $\psi(y)=\varphi(a, y)$ (см. *Смешанные вычисления*).

Между задачами практич. Т. в программировании и частичными вычислениями также существует непосредственная связь. Пусть и н т е р п р е т а т о р о м входного языка наз. специальная программа на объектном языке, имитирующая непосредственное выполнение программ входного языка. Тогда оказывается, что объектная программа — это проекция интерпретатора входного языка на входную программу; транслятор — это проекция частичного вычислителя на интерпретатор входного языка, а транслятор трансляторов — это проекция частичного вычислителя на самого себя.

● Е р ш о в Ю. Л., Теория нумераций, М., 1977; А х о А., У л ь м а н Д ж., Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции, пер. с англ., т. 1—2, М., 1978.

ТРАНСПОЗИ́ЦИЯ (ср.-век. лат. transpositio — перестановка) — *подстановка*, переставляющая местами только два элемента.

ТРАНСПОНИ́РОВАННАЯ МА́ТРИЦА (нем. transponieren — перекладывать, от лат. transpono — переставляю) — матрица, получающаяся из данной (прямоугольной или квадратной) матрицы $A=\|a_{ik}\|$ заменой строк соответствующими столбцами, т. е. матрица $\|a'_{ik}\|$, где $a'_{ik}=a_{ki}$. Число строк Т. м. равно числу столбцов матрицы A, а число столбцов — числу строк матрицы A. Матрицу, транспонированную по отношению к матрице A, обозначают $A^{\top}$, A^T или A'.

ТРАНСПОНИ́РОВАННЫЕ УРАВНЕ́НИЯ — 1) Т. у. для линейных алгебраич. систем — уравнения, имеющие *транспонированные матрицы*.

2) Т. у. для линейных интегральных уравнений — уравнения с ядрами $K(x, y)$ и $K(y, x)$.

Т. у. наз. также с о ю з н ы м и, а с с о ц и и р о в а н н ы м и, п р и с о е д и н ё н н ы м и у р а в н е н и я м и.

ТРА́НСПОРТНАЯ ЗАДА́ЧА (от лат. transporto — переношу, перемещаю) — частный случай общей задачи *линейного программирования*.

С о д е р ж а т е л ь н а я ф о р м у л и р о в к а Т. з. Пусть в пунктах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ производится нек-рый однородный продукт, причём объём производства этого продукта в пункте A_i составляет a_i единиц, $i=1, \ldots, m$. Произведённый в пунктах производства продукт требуется доставить в пункты потребления $B_1, B_2, \ldots, B_n$, причём объём потребления в пункте B_j составляет b_j единиц продукта. Предполагается, что транспортировка готовой продукции возможна из любого пункта производства в любой пункт потребления и транспортные издержки, приходящиеся на перевозку единицы продукта из пункта A_i в пункт B_j, составляют c_{ij} денежных единиц. Задача состоит в организации такого плана перевозок, при к-ром суммарные транспортные издержки были бы минимальными.

Ф о р м а л ь н а я п о с т а н о в к а Т. з. Пусть x_{ij} — количество продукта, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j. Требуется определить совокупность из mn величин x_{ij}, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i,\ i=1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j,\ j=1, 2, \ldots, n,$$

и обращающих в минимум линейную форму

$$L(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

ТРАНСФИНИ́ТНАЯ ИНДУ́КЦИЯ — способ математических доказательств, обобщающий обычный принцип *математической индукции*. См. *Трансфинитные числа*.

ТРАНСФИНИ́ТНЫЕ ЧИ́СЛА (от лат. trans — сквозь, через, за и finitus — ограниченный) — обобщённые порядковые числа. Определение Т. ч. опирается на понятие вполне упорядоченного множества (см. *Частично упорядоченное множество*). Каждое конечное множество можно сделать вполне упорядоченным, выписав все его элементы в определённом порядке. Простейшим примером бесконечного вполне упорядоченного множества является множество всех натуральных чисел, расположенных в порядке возрастания; то же множество, расположенное в порядке убывания (так что большее считается предшествующим меньшему), уже не будет вполне упорядоченным, т. к. ни одно его бесконечное подмножество не имеет первого элемента. Два упорядоченных множества X и Y наз. п о д о б н ы м и или имеющими один и тот же п о р я д к о в ы й т и п, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок элементов (т. е. такое, что для любых двух элементов x', x'' множества X и соответствующих им элементов y', y'' множества Y из $x'<x''$ следует $y'<y''$ и обратно). Все конечные вполне упорядоченные множества, содержащие одинаковое число элементов, подобны между собой. Поэтому порядковые типы конечных вполне упорядоченных множеств можно отождествить с натуральными числами, к-рые появляются, таким образом, как п о р я д к о в ы е ч и с л а (тогда как, характеризуя количество элементов множества, те же натуральные числа выступают в другом своём аспекте — к о л и ч е с т в е н н ы х ч и с е л).

Т р а н с ф и н и т н ы м и ч и с л а м и наз. порядковые типы бесконечных вполне упорядоченных множеств. Тем самым понятие Т. ч. представляет собой распространение понятия порядкового числа на бесконечные множества. Аналогичное обобщение понятия количественного числа приводит к понятию *мощности* м н о ж е с т в а. Т. к. неравномощные множества нельзя поставить во взаимно однозначное соответствие, то вполне упорядоченным множествам различной мощности соответствуют различные Т. ч. Однако обратное (в отличие от случая конечных множеств) неверно: бесконечные вполне упорядоченные множества могут быть равномощными, не будучи подобными, и тем самым определяя различные Т. ч.

Для Т. ч. можно ввести понятия «больше» и «меньше». Именно, Т. ч. α, по определению, меньше Т. ч. β ($\alpha<\beta$), если какое-либо (а значит, и любое) вполне упорядоченное множество типа α подобно нек-рому о т р е з к у какого-нибудь (а следовательно, и любого) множества типа β (отрезком вполне упорядоченного множества, отсечённым элементом x, наз. подмножество его элементов, предшествующих x). При этом доказывается, что для любых двух Т. ч. α и β всегда осуществляется один и только один из трёх случаев: либо $\alpha<\beta$, либо $\alpha=\beta$, либо $\alpha>\beta$.

В применении Т. ч. к различным вопросам математики важную роль играет принцип т р а н с ф и н и т н о й и н д у к ц и и, обобщающий обычный принцип *математической индукции* на произвольные вполне упорядоченные множества: если нек-рое предположение верно для первого элемента вполне упорядоченного множества X и если из того, что оно верно для всех элементов множества X, предшествующих данному элементу x из множества X, следует его справедливость и для элемента x, то это предложение верно для каждого элемента множества X.

ТРАНСЦЕНДЁНТНАЯ КРИВА́Я (от лат. transcendens, род. падеж transcendentis — выходящий за пределы, переходящий) — плоская кривая, уравнение которой в прямоугольных координатах не является алгебраическим. Т. к. в отличие от *алгебраических кривых* могут иметь бесконечное количество точек пересечения с прямой, точек перегиба, особых точек, вершин, асимптот и т. п. Наряду с этим у Т. к. могут быть характерные точки, к-рых не существует у алгебраич. кривых: точки прекращения, угловые точки (точки излома), асимптотич. точки. К Т. к. относятся графики трансцендентных функций, все *спирали*, *квадратриса*, *трактриса*, *цепная линия*, *трохоида*, *циклоида*.

ТРАНСЦЕНДЁНТНАЯ ТО́ЧКА ВЕТВЛЕ́НИЯ а н а л и т и ч е с к о й ф у н к ц и и $f(z)$ — точка ветвления a, не являющаяся алгебраической точкой ветвления. Иначе говоря, это либо точка ветвления конечного порядка $k>0$, в к-рой, однако, не существует ни конечного, ни бесконеч-

ного предела $\lim\limits_{z\to a,\ z\neq a} f(z)$, либо логарифмическая точка ветвления бесконечного порядка.

См. также *Особая точка* аналитич. функции.

ТРАНСЦЕНДЕ́НТНАЯ ФУ́НКЦИЯ — аналитическая функция, не являющаяся алгебраической. Простейшими примерами Т. ф. служат *показательная функция*, *логарифмическая функция*, *тригонометрические функции*. Если Т. ф. рассматривать как функции комплексного переменного, то характерным признаком их является наличие хотя бы одной особенности, отличной от полюсов и точек ветвления конечного порядка (см. *Особая точка* аналитич. функции). Так, напр., e^z, $\cos z$ и $\sin z$ имеют существенно особую точку $z=\infty$, $\ln z$ — точки ветвления бесконечного порядка при $z=0$ и $z=\infty$. Основания общей теории Т. ф. даёт теория аналитич. функций. Специальные Т. ф. изучаются в соответствующих дисциплинах (теория гипергеометрич., эллиптич., цилиндрич. функций и т. д.).

ТРАНСЦЕНДЕ́НТНАЯ ЦЕ́ЛАЯ ФУ́НКЦИЯ — целая функция $f(z)$, для которой $z=\infty$ является существенно особой точкой.

ТРАНСЦЕНДЕ́НТНОЕ РАСШИРЕ́НИЕ поля — расширение поля, не являющееся алгебраическим; см. *Поле*.

ТРАНСЦЕНДЕ́НТНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение, содержащее трансцендентные функции от неизвестного (переменного), напр. уравнения

$$\sin x+\lg x=x,\quad 2^x-\lg x=\arccos x.$$

Обычно рассматривают только простейшие Т. у.— *показательные уравнения*, *логарифмические уравнения* и *тригонометрические уравнения*, т. к. приёмов решения, кроме приближённых, общих для Т. у. не существует.

ТРАНСЦЕНДЕ́НТНОЕ ЧИСЛО́ — число, не являющееся корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами. Областью определения таких чисел являются поля действительных, комплексных и p-адических чисел. Существование и явные построения действительных Т. ч. обосновал Ж. Лиувилль на основе замеченного им факта: иррациональные алгебраич. числа не допускают «очень сильных» приближений рациональными числами. Аналогичные соображения позволяют строить p-адические Т. ч. Обнаружив счётность множества всех алгебраич. чисел и несчётность множества всех действительных чисел, Г. Кантор тем самым доказал, что действительные Т. ч. образуют множество мощности континуум. Э. Борель, введя первые понятия теории меры, установил, что «почти все» действительные числа трансцендентны. Позднее было найдено, что Т. ч. Лиувилля образуют множество, всюду плотное на действительной числовой оси, имеющее мощность континуума и нулевую меру Лебега. Хотя ещё в сер. 18 в. возникла гипотеза о трансцендентности чисел типа e, π, $\ln 2$, $2^{\sqrt{2}}$ и др., доказательств этого долго не удавалось получить. Трансцендентность e доказал Ш. Эрмит (1873), π и вообще логарифмов алгебраич. чисел — Ф. Линдеман (1882), $2^{\sqrt{2}}$ — А. О. Гельфонд (1929). К. Зигель разработал общий метод доказательства трансцендентности и алгебраич. независимости значений в алгебраич. точках целых функций определённого класса, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с полиномиальными коэффициентами. А. О. Гельфонд и Т. Шнайдер одновременно (1934) и независимо доказали, что α^β трансцендентно при алгебраическом $\alpha\neq 0$ и 1 и алгебраическом иррациональном β (решив тем самым седьмую проблему Гильберта). Методы теории Т. ч. прилагаются к ряду вопросов при исследовании диофантовых уравнений.

● Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952; Фельдман Н. И., Седьмая проблема Гильберта, М., 1982.

ТРАПЕ́ЦИЙ ФО́РМУЛА — частный случай *Ньютона—Котеса квадратурной формулы*, в которой берётся два узла:

$$\int_a^b f(x)\,dx\cong\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]. \qquad (1)$$

Часто применяется составная Т.ф.:

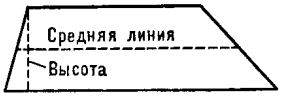
$$\int_a^b f(x)dx\cong h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right], \qquad (2)$$

где $h=(b-a)/n$, n — натуральное, $x_j=a+jh$, $j=0, 1, \ldots, n$, к-рую также называют Т. ф. (без добавления слова составная). Формулы (1), (2) точны для многочленов 1-й степени. В случае $b-a=2\pi$ формула (2) точна для тригонометрич. полиномов порядка не выше $n-1$.

Если $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то погрешность $R(f)$ квадратурной формулы (2) — разность между интегралом и квадратурной суммой — может быть представлена в виде

$$R(f)=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi),\quad \xi\in[a, b].$$

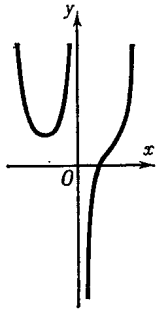
ТРАПЕ́ЦИЯ (от греч. τραπέζιον — четырёхугольник с неравными сторонами; букв.— столик) — выпуклый четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие — непараллельны (рис.). Параллельные стороны наз. основаниями Т., а непараллельные — её боковыми сторонами. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон Т., наз. её средней линией; средняя линия параллельна основаниям Т. и равна их полусумме. Площадь Т. равна произведению средней линии на высоту Т. или половине произведения диагоналей на синус угла между ними. Т., боковые стороны к-рой равны между собой, наз. равнобочной.



ТРЕЗУ́БЕЦ — плоская алгебраическая кривая 3-го порядка (рис.). Уравнение в прямоугольных координатах:

$$xy=ax^3+bx^2+cx+d;$$

кривая имеет две бесконечные ветви и одну асимптоту. Левая ветвь кривой, т. н. парабола Декарта, описана Р. Декартом (1637). Полностью кривая и её название даны И. Ньютоном (1704).



ТРЕУГО́ЛЬНАЯ МА́ТРИЦА — квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю. В первом случае матрица наз. верхней треугольной матрицей, во втором — нижней треугольной матрицей. Определитель Т. м. равен произведению всех её диагональных элементов.

ТРЕУГО́ЛЬНИК в евклидовой геометрии — три точки, не лежащие на одной прямой, и три отрезка с концами в этих точках.

Основные элементы треугольника. Отрезки, соединяющие каждые две из трёх данных точек A, B и C, наз. сторонами Т., точки A, B и C — вершинами (рис., *1*). Длина каждой стороны меньше суммы и больше разности длин двух других сторон. Если по к.-л. соображениям выделяется одна из сторон Т., то она наз. основанием, а две другие — боковыми сторонами Т. Стороны, образующие прямой угол (рис., *2*), наз. катетами, третья сторона — гипотенузой.

Углами (внутренними) Т. наз. три угла (рис., *3*), каждый из к-рых образован двумя лучами, исходящими из вершины Т. и проходящими через две другие вершины. Сумма углов Т. равна двум прямым углам. Внешним углом Т. наз. угол, смежный внутреннему углу Т. Внешний угол равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных.

Различают (рис., *4*) *Т. остроугольные* (все углы острые), прямоугольные (один угол прямой) и тупоугольные (один угол тупой).

В зависимости от соотношения длин сторон Т. подразделяются (рис., *5*) на р а в н о с т о р о н н и е, или п р а в и л ь н ы е (все стороны равны), р а в н о б е д р е н н ы е (две стороны равны).

Т. разбивает плоскость на две области: в ы п у к л у ю — в н у т р е н н я я ч а с т ь Т. и н е в ы п у к л у ю — в н е ш н я я ч а с т ь Т. Иногда при определении Т. относят к Т. и его внутреннюю часть.

Р а в н ы м и (конгруэнтными) наз. Т. (рис., *6*), стороны и углы к-рых соответственно равны. Два Т. равны, если они имеют равные соответствующие стороны, или две стороны и угол между ними, или сторону и два прилежащих угла.

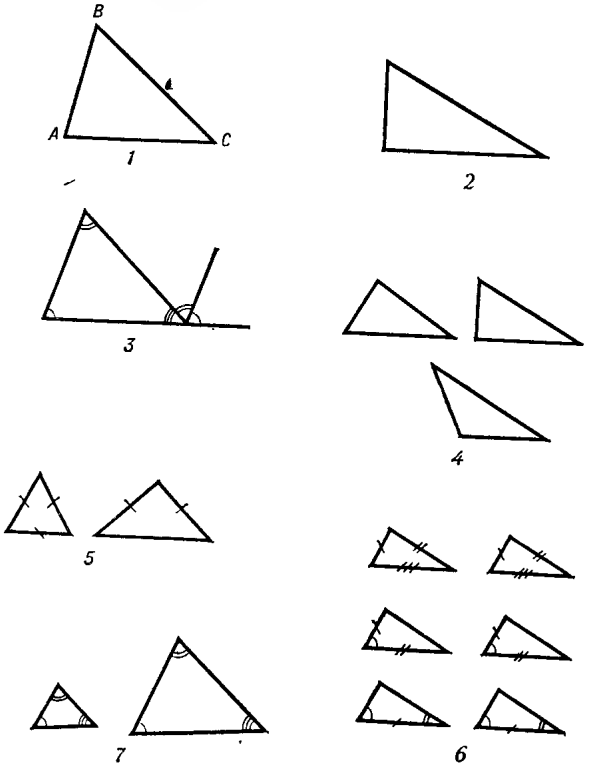


Рис. 1—7.

П о д о б н ы м и наз. Т. (рис., *7*), у к-рых соответствующие стороны пропорциональны, а углы, заключённые между пропорциональными сторонами, равны. Для подобия Т. необходимым и достаточным признаком является каждый из следующих: 1) стороны одного Т. пропорциональны соответствующим сторонам другого; 2) два угла одного Т. равны двум углам другого; 3) две стороны одного Т. пропорциональны двум сторонам другого, а углы между этими сторонами равны.

Точки и линии, связанные с треугольником. В ы с о т о й Т. наз. отрезок перпендикуляра (рис., *8*), опущенного из к.-л. вершины Т. на противоположную сторону или на продолжение этой стороны; иногда длину этого отрезка называют также высотой. Высоты Т. пересекаются в одной точке — о р т о ц е н т р е Т.

М е д и а н о й Т. наз. отрезок прямой (рис., *9*), соединяющий вершину Т. с серединой противоположной стороны. Три медианы Т. пересекаются в одной точке. Эта точка наз. ц е н т р о и д о м. Центроид является ц е н т р о м т я ж е с т и Т., если под Т. понимается Т. вместе с внутренней частью; если же под Т. понимается совокупность трёх отрезков, то его центром тяжести является центр окружности, вписанной в Т., вершины к-рого — середины сторон данного Т. Центроид делит медианы в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Б и с с е к т р и с о й Т. наз. биссектриса внутреннего (или внешнего) угла Т. (рис., *10*). Биссектрисы внутренних углов Т. пересекаются в одной точке. Биссектриса внутреннего угла Т. делит противоположную углу сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам; биссектриса внешнего угла Т. делит (внешним образом) противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Общие свойства пересечения высот, биссектрис и медиан в одной точке суть следствия т е о р е м ы Ч е в ы: пусть (рис., *11*) A', B', C' — три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника. Для того чтобы

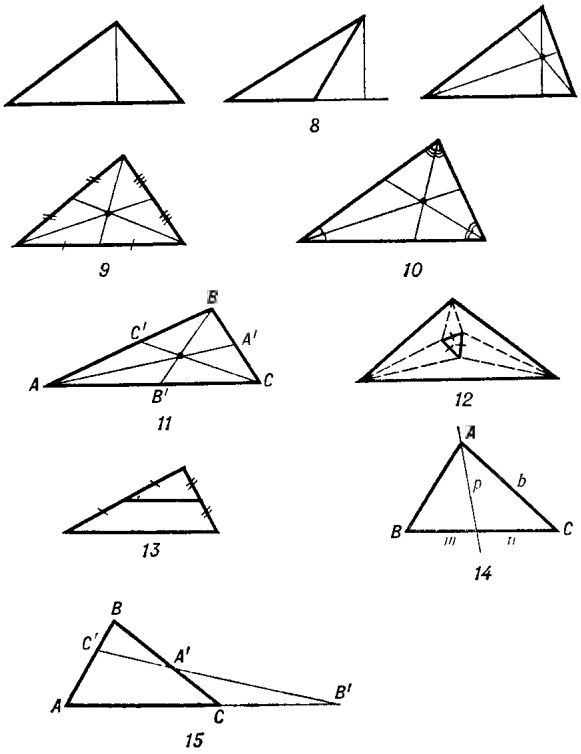


Рис. 8—15.

прямые AA', BB' и CC' пересеклись в одной точке или были все параллельны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1;$$

такие прямые наз. п р я м ы м и Ч е в ы или ч е в и а н а м и.

Т р и с е к т р и с а м и наз. прямые, делящие внутренние углы Т. на три равные части. Три точки пересечения смежных трисектрис углов Т. (рис., *12*) образуют равносторонний Т. (т е о р е м а М о р л е я).

С р е д н е й л и н и е й Т. наз. отрезок (рис., *13*), соединяющий середины двух сторон Т.; средняя линия параллельна третьей стороне и равна половине её длины.

Если прямая проходит через вершину Т. (рис., *14*) и делит противоположную сторону в отношении $m : n$, то имеет место соотношение (т е о р е м а С т ю а р т а):

$$a(p^2+mn)=b^2m+c^2n.$$

Если стороны AB, BC, CA треугольника (рис., *15*) или их продолжения пересекаются нек-рой прямой соответственно в точках C', A', B', то

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=-1$$

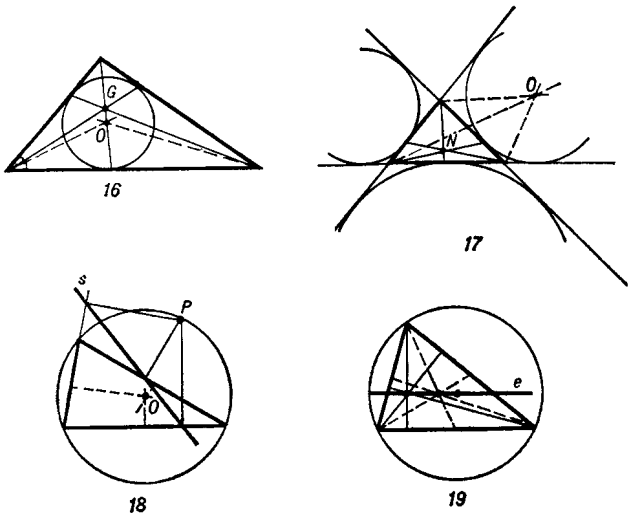
(т е о р е м а М е н е л а я).

В п и с а н н о й о к р у ж н о с т ь ю Т. наз. окружность, к-рая внутренним образом касается трёх сторон Т. Центр вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис. Прямые, соединяющие вершины Т. с точками касания вписанной окружности с противоположны-

ми сторонами, пересекаются в одной точке G — точке Жергонна (рис., *16*).

Вневписанной окружностью Т. наз. окружность, к-рая касается одной из сторон Т. и продолжения двух других сторон. Центр вневписанной окружности лежит в точке пересечения двух биссектрис внешних углов и биссектрисы внутреннего угла. Прямые, соединяющие вершины Т. с точками касания противоположных сторон с вневписанными окружностями, пересекаются в одной точке N — точке Нагеля (рис., *17*).

Описанной окружностью Т. наз. окружность, проходящая через вершины Т. Центр описанной



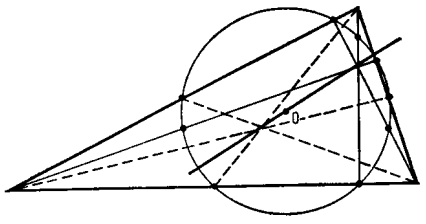
16 17 18 19

Рис. 16—19.

окружности находится в точке пересечения перпендикуляров к серединам сторон Т. Основания перпендикуляров, опущенных из точки P на описанной окружности на три стороны треугольника, лежат на одной прямой. Эта прямая s наз. прямой Симсона точки P по отношению к Т. (рис., *18*).

Центр описанной окружности, точка пересечения высот и точка пересечения медиан лежат на одной прямой e — прямой Эйлера (рис., *19*).

Середины сторон Т., основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр Т. с вершинами, расположены на т. н. окружности девяти точек (рис., *20*). Эта окружность касается вписанной в Т. окружности и трёх вневписанных (теорема Фейербаха). Точки касания окружности девяти точек с вписанной и вневписанными окружностями наз. точками Фейербаха. Центр окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера.



20

Рис. 20.

Основные метрические соотношения между элементами треугольника. Пусть a, b, c — длины сторон Т., A, B, C — противолежащие им углы, S — площадь, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, ρ — радиус вневписанной окружности, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр, h_a — высота к стороне a. Справедливы (и при циклич. перестановке a, b, c и A, B, C) следующие соотношения. Теорема косинусов:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

Теорема тангенсов:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

Теорема о проекциях:

$$c=a\cos B+b\cos A.$$

Тригонометрич. функции от углов Т.:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Величина площади:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C=$$
$$=\frac{abc}{4R}=pr=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Полупериметр:

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Длина высоты к стороне a:

$$h_a=b\sin C=c\sin B=\frac{bc}{2R}.$$

Длина биссектрисы угла A:

$$\omega_\alpha=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}.$$

Длина медианы к стороне a:

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

Радиус вписанной окружности:

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=$$
$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{S}{p}.$$

Радиус описанной окружности:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}=\frac{abc}{4S}.$$

Расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей:

$$d=\sqrt{R^2-2Rr}.$$

Расстояние между центрами описанной и вневписанной окружностей:

$$d=\sqrt{R^2+2R\rho_a}.$$

Соотношение между радиусами вписанной и вневписанных окружностей:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\rho_a}+\frac{1}{\rho_b}+\frac{1}{\rho_c}.$$

О Т. в пространствах, отличных от евклидового, см. в статьях *Неевклидовы геометрии*, *Лобачевского геометрия*. См. также *Сферическая геометрия*, *Сферическая тригонометрия*.

А. Б. Иванов.

ТРЕУГО́ЛЬНИКА НЕРАВЕНСТВО — классическое неравенство, утверждающее, что длина любой стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других сторон.

Допускает следующее обобщение в виде т. н. а к с и о м ы т р е у г о л ь н и к а для метрич. пространств:

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z),$$

где $d(x, y)$ — расстояние между x и y; для нормированных пространств:

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|,$$

где $\|x\|$ — норма x. См. *Метрика*, *Норма*, *Неравенство*.

ТРЕУГО́ЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — см. *Равномерное распределение*.

ТРЕУГО́ЛЬНЫЕ ЧИ́СЛА — см. *Арифметический ряд*, *Фигурные числа*.

ТРЕ́ФФЦА МЕ́ТОД — один из вариационных методов решения краевых задач. Пусть требуется решить краевую задачу

$$\Delta u = 0, \quad u|_S = \varphi, \qquad (*)$$

где S — граница области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Решение задачи (*) минимизирует функционал

$$J(u) = \int_\Omega (\operatorname{grad} u(x))^2 dx$$

среди всех функций, удовлетворяющих краевому условию $u|_S = \varphi$. Пусть дана последовательность гармонических в Ω функций $v_1, v_2, \ldots$, квадратично суммируемых в Ω вместе с первыми производными. Приближённое решение разыскивается в виде

$$u_n = \sum_{j=1}^n c_j v_j;$$

коэффициенты c_j определяются из условия минимума $J(u_n - u)$, где u — точное решение задачи (*). Это приводит к системе уравнений относительно $c_1, \ldots, c_n$:

$$\sum_{j=1}^n c_j \int_S v_j \frac{\partial v_i}{\partial \nu} dS = \int_S \varphi \frac{\partial v_i}{\partial \nu} dS, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь ν — внешняя нормаль к S.

Метод предложен Э. Треффцем (1926).

ТРЁХ ГЕОДЕЗИ́ЧЕСКИХ ТЕОРЕ́МА: на поверхности, гомеоморфной сфере, существует по крайней мере три замкнутые несамопересекающиеся геодезические. Пример — диаметральные сечения эллипсоида. Задача оценки числа кривых такого рода восходит к А. Пуанкаре (1905), предложившего нек-рый подход к ней. Полное доказательство дано Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом (1927, подробное изложение 1947).

ТРЁХ СИГМ ПРА́ВИЛО — см. *Квадратичное отклонение*.

ТРЁХГРА́ННЫЙ У́ГОЛ — часть пространства, ограниченная бесконечной треугольной пирамидой (рис.). Грани этой пирамиды наз. гранями Т. у., её вершина — вершиной Т. у., полупрямые, по к-рым пересекаются грани, — рёбрами Т. у. Рёбра образуют между собой п л о с к и е у г л ы Т. у. грани — д в у г р а н н ы е углы Т. у. Обычно рассматривают Т. у., для к-рых двугранные углы меньше π — выпуклые Т. у.; каждый плоский угол выпуклого Т. у. меньше суммы двух других и больше их разности.

ТРЁХМЕРНОЕ МНОГООБРА́ЗИЕ — топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную трёхмерному числовому пространству $\mathbb{R}^3$ или замкнутому полупространству $\mathbb{R}^3_+$. Это определение обычно дополняется требованием того, чтобы Т. м. как топологич. пространство было хаусдорфовым и имело счётную базу. Край Т. м., т. е. совокупность его точек, имеющих окрестность второго, но не первого типа, является *двумерным многообразием* без края.

Один из наиболее употребительных способов задания Т. м. состоит в использовании специального типа разбиений. Суть этого способа состоит в том, что любое замкнутое ориентируемое Т. м. можно разбить на два подмногообразия с общим краем, каждое из к-рых гомеоморфно стандартной сфере с нек-рым числом ручек. Другими словами, Т. м. можно получить склеиванием двух экземпляров сферы с ручками по нек-рому гомеоморфизму их краёв. Этот факт позволяет сводить многие задачи топологии Т. м. к задачам топологии поверхностей.

ТРЁХЧЛЕ́Н — см. *Многочлен*.

ТРИАНГУЛЯ́ЦИЯ (от лат. triangulum — треугольник) — разбиение поверхности на треугольники, вообще говоря, криволинейные. Напр., если тетраэдр или октаэдр вписать в сферу и спроектировать их на неё из её центра, то сфера окажется разбитой соответственно на четыре и на восемь криволинейных треугольников, к-рые и образуют Т. В общем случае Т.— это представление полиэдра (или гомеоморфного ему топологич. пространства, к-рое в этом случае наз. триангулируемым) в виде тела геометрич. симплициального комплекса, т. е. такое его разбиение на замкнутые симплексы, что каждые два из них либо не пересекаются, либо пересекаются по их общей грани.

ТРИГОНОМЕТРИ́ЧЕСКАЯ СИСТЕ́МА — одна из ортогональных систем функций. Функции Т. с.

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

ортогональны на любом отрезке вида $[a-\pi, a+\pi]$, а функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

ортонормированы на этом отрезке. Т. с. полна и замкнута в пространстве $L_p[-\pi; \pi]$ при $1 \leqslant p < \infty$, а также в пространстве $C_{2\pi}$ непрерывных 2π-периодических функций. Эта система образует базис в пространстве $L_p[-\pi, \pi]$ при $1 < p < \infty$. Ряды по Т. с. изучаются в теории *тригонометрических рядов*.

Наряду с Т. с. широкое применение находит комплексная тригонометрич. система $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Функции этих систем связаны друг с другом формулами Эйлера.

ТРИГОНОМЕТРИ́ЧЕСКАЯ СУ́ММА — см. *Тригонометрический полином*.

ТРИГОНОМЕТРИ́ЧЕСКИЕ ФУ́НКЦИИ — класс элементарных функций: с и н у с, к о с и н у с, т а н г е н с, к о т а н г е н с, с е к а н с, к о с е к а н с. Обозначаются соответственно

$$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sec x, \operatorname{cosec} x.$$

Другие обозначения:

$$\tan x, \cot x, \operatorname{cotg} x, \operatorname{ctn} x;$$
$$\operatorname{sc} x, \operatorname{csc} x, \operatorname{cosc} x, \operatorname{csec} x.$$

Тригонометрические функции действительного аргумента. Пусть A — точка окружности с центром в начале координат и радиусом, равным единице; α — угол между осью абсцисс и вектором $\overrightarrow{OA}$, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс (рис. 1). При этом если отсчёт ведётся против часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по часовой стрелке — отрицательной, т. е. α — полярный угол точки A. Если (x_α, y_α) — прямоугольные координаты точки A, то Т. ф. синус и косинус определяются формулами

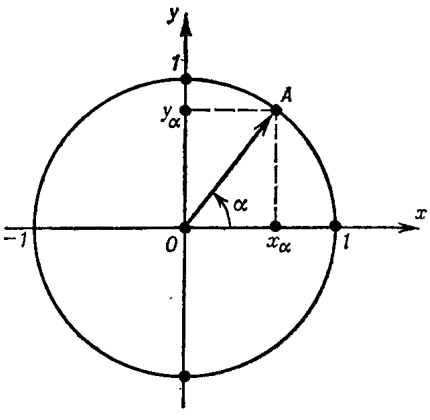


Рис. 1.

$$\sin\alpha = y_\alpha; \quad \cos\alpha = x_\alpha.$$

Остальные Т. ф. определяются формулами

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Угол может измеряться как в градусах, так и в радианах и изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Чаще используется радианное измерение, причём обозначение радиан опускается, и тогда Т. ф. считаются функциями числового аргумента.

Для острых углов значения Т. ф. можно определить как отношения сторон прямоугольного треугольника (рис. 2)

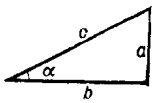


Рис. 2. Представление тригонометрических функций острого угла как отношения сторон прямоугольного треугольника: $\sin\alpha=a/c$, $\cos\alpha=b/c$, $\operatorname{tg}\alpha=a/b$, $\operatorname{ctg}\alpha=b/a$, $\sec\alpha=c/b$, $\operatorname{cosec}\alpha=c/a$.

или как отрезки, связанные с окружностью единичного радиуса (рис. 3).

Происхождение названий Т. ф. связано с их геометрич. представлением как отрезков (рис. 3). Так, латинское tangens означает к а с а ю щ и й с я ($\operatorname{tg}\alpha$ изображается отрезком CD касательной к окружности), secans — с е к у щ а я ($\sec\alpha$ изображается отрезком OC секущей к окружности). Назв. «синус» (лат. sinus — пазуха) представляет точный перевод арабского «джайб», являющегося, по-видимому, искажением санскритского слова «джива» (букв.— тетива лука), к-рым индийские математики обозначали синус ($\sin\alpha$ изображается отрезком AB). Назв. «косинус», «котангенс», «косеканс» происходят от сокращения слова complementi (дополнение). Напр., «косинус» — от complementi sinus (синус дополнения). Это связано с тем, что $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ равны соответственно синусу, тангенсу и секансу аргумента, дополнительного к α до $\pi/2$:

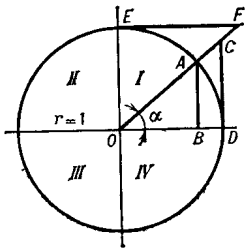


Рис. 3. Представление тригонометрических функций острого угла как отрезков, связанных с окружностью единичного радиуса: $\sin\alpha=AB$, $\cos\alpha=OB$, $\operatorname{tg}\alpha=CD$, $\operatorname{ctg}\alpha=EF$, $\sec\alpha=OC$, $\operatorname{cosec}\alpha=OF$. I—IV — четверти.

$$\cos\alpha=\sin(\pi/2-\alpha),\quad \operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}(\pi/2-\alpha),$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\sec(\pi/2-\alpha).$$

О с н о в н ы е с в о й с т в а Т. ф. см. в табл. 1. Все Т. ф.— периодич. функции. Наименьший положительный период Т. ф. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ равен 2π, то есть $\sin(\alpha+2\pi)=\sin\alpha$, $\cos(\alpha+2\pi)=\cos\alpha$ и т. д., для Т. ф. $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ наименьший положительный период равен π, то есть $\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha+\pi)=\operatorname{ctg}\alpha$.

Графики Т. ф. см. на рис. 4.

Табл. 1. — ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Функция	Область определения	Множество значений	Чётность	Участки монотонности ($n=0,\pm1,\pm2,\ldots$)
$\sin x$	$-\infty<x<+\infty$	$[-1, +1]$	Нечётная	Возрастает при $x\in((4n-1)\pi/2,(4n+1)\pi/2)$, убывает при $x\in((4n+1)\pi/2,(4n+3)\pi/2)$
$\cos x$	$-\infty<x<+\infty$	$[-1, +1]$	Чётная	Возрастает при $x\in((2n-1)\pi, 2n\pi)$, убывает при $x\in(2n\pi,(2n+1)\pi)$
$\operatorname{tg} x$	$x\neq\pi/2+\pi n$	$(-\infty, +\infty)$	Нечётная	Возрастает при $x\in((2n-1)\pi/2,(2n+1)\pi/2)$
$\operatorname{ctg} x$	$x\neq\pi n$	$(-\infty, +\infty)$	Нечётная	Убывает при $x\in(n\pi,(n+1)\pi)$
$\sec x$	$x\neq\pi/2+\pi n$	$(-\infty,-1]\cup[+1,+\infty)$	Чётная	Возрастает при $x\in(2n\pi,(2n+1)\pi)$, убывает при $x\in((2n-1)\pi, 2n\pi)$
$\operatorname{cosec} x$	$x\neq\pi n$	$(-\infty,-1]\cup[+1,+\infty)$	Нечётная	Возрастает при $x\in((4n+1)\pi/2,(4n+3)\pi/2)$, убывает при $x\in((4n-1)\pi/2,(4n+1)\pi/2)$

Табл. 2. — ЗНАКИ ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РАЗЛИЧНЫХ ЧЕТВЕРТЯХ

Четверть	Угол ($n=0, \pm1, \pm2, \ldots$)	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
I	$2\pi n<\alpha<2\pi n+\frac{\pi}{2}$	+	+	+	+	+	+
II	$2\pi n+\frac{\pi}{2}<\alpha<2\pi n+\pi$	+	−	−	−	−	+
III	$2\pi n+\pi<\alpha<2\pi n+\frac{3\pi}{2}$	−	−	+	+	−	−
IV	$2\pi n+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi n+2\pi$	−	+	−	−	+	−

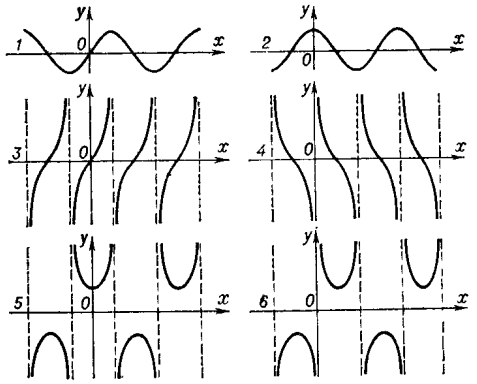


Рис. 4. Графики тригонометрических функций: *1* — $y=\sin x$ (кривая — *синусоида*); *2* — $y=\cos x$ (кривая — косинусоида, т. е. синусоида, сдвинутая влево по оси Ox на $\pi/2$); *3* — $y=\operatorname{tg} x$ (кривая — *тангенсоида*); *4* — $y=\operatorname{ctg} x$ (тангенсоида, зеркально отражённая относительно оси Oy и сдвинутая вправо на $\pi/2$); *5* — $y=\sec x$; *6* — $y=\operatorname{cosec} x$ (график секанса, зеркально отражённый относительно оси Ox и сдвинутый вправо на $\pi/2$).

Знак значения Т. ф. зависит от того, в какой четверти (рис. 3) находится аргумент (табл. 2). Значения Т. ф. при $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$ приведены в табл. 3.

Т. ф. $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$ используются редко, обычно их сразу выражают через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ по формулам $\sec\alpha=1/\cos\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha=1/\sin\alpha$, поэтому в дальнейших таблицах они не фигурируют.

Значения Т. ф. любого аргумента можно выразить через значения Т. ф. аргумента, лежащего в первой четверти, что упрощает составление таблиц Т. ф. и пользование ими, а также построение графиков. Для этого Т. ф. любого аргумента вида $2\pi n+\beta$ сначала приводится к Т. ф. аргумента β по формулам

$$\sin(2\pi n+\beta)=\sin\beta,\quad \cos(2\pi n+\beta)=\cos\beta,$$

где $\pi/2<\beta<2\pi$,

$$\operatorname{tg}(\pi n+\beta)=\operatorname{tg}\beta,\quad \operatorname{ctg}(\pi n+\beta)=\operatorname{ctg}\beta,$$

где $\pi/2<\beta<\pi$.

Затем Т. ф. аргумента β приводится к Т. ф. аргумента α, где $0<\alpha<\pi/2$, по т. н. ф о р м у л а м п р и в е д е н и я (табл. 4).

Различные Т. ф. одного аргумента связаны между собой рядом соотношений (табл. 5) и могут быть выражены одна через другую (табл. 6).

Табл. 3. — ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЗНАЧЕНИЙ АРГУМЕНТА $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$

Аргумент		Тригонометрические функции					
в градусах	в радианах	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
0°	0	0	1	0	Не существует	1	Не существует
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}8660$	$\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}5774$	$\sqrt{3}\approx 1{,}7322$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\approx 1{,}1547$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7071$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}7071$	1	1	$\sqrt{2}\approx 1{,}4142$	$\sqrt{2}\approx 1{,}4142$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}8660$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}\approx 1{,}7322$	$\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}5774$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\approx 1{,}1547$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Не существует	0	Не существует	1

Табл. 4. — ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ АРГУМЕНТА β, ГДЕ $\frac{\pi}{2}<\beta<2\pi$, К ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ АРГУМЕНТА α, ГДЕ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

β	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{ctg}\beta$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Табл. 5. — СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};$$
$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha;$$
$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha};$$
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1;$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};$$
$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\operatorname{cosec}^2\alpha;$$
$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

Табл. 6. — ВЫРАЖЕНИЕ ОДНОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ЧЕРЕЗ ДРУГИЕ (ТОГО ЖЕ АРГУМЕНТА) (знак перед радикалом определяется четвертью, к которой принадлежит аргумент)

Искомая функция	Данные функции			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha=$	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha=$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha=$	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha=$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Формулы, выражающие Т. ф. суммы и разности аргументов (теоремы сложения), кратных и половинных углов, даны в табл. 7—9.

Функции $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ при больших значениях n определяют с помощью *Муавра формулы*, выражая $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ через многочлены n-й степени от $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Функции $\sin n\alpha$, $\cos n\alpha$, $n=0, 1, 2, \ldots$, образуют на отрезке $[-\pi, \pi]$ полную ортогональную систему, что даёт возможность представления функций в виде тригонометрич. рядов.

В табл. 10 приведены формулы, выражающие Т. ф. через тангенс половинного аргумента, к-рые используются,

Табл. 7. — ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СУММЫ И РАЗНОСТИ ДВУХ АРГУМЕНТОВ

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta};$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}.$$

Табл. 8. — ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КРАТНЫХ АРГУМЕНТОВ

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha;$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha};$$
$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{2};$$
$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$
$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha};$$
$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}.$$

Табл. 9. — ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА (знак перед радикалом определяется четвертью, к которой принадлежит аргумент)

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$
$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

напр., при вычислении интегралов от рациональных функций тригонометрич. аргументов. Формулы, выражающие суммы, разности, произведения и степени Т. ф., даны в табл. 11—13.

Табл. 10. — ВЫРАЖЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Табл. 11. — СУММЫ И РАЗНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\qquad \operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};\qquad \operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Табл. 12. — ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)];\quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}.$$

Табл. 13. — СТЕПЕНИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha);\qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);$$

$$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha);\qquad \cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos 3\alpha);$$

$$\sin^4\alpha=\frac{1}{8}(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3);\qquad \cos^4\alpha=\frac{1}{8}(\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3).$$

Табл. 14. — ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

$$(\sin x)'=\cos x;\qquad (\cos x)'=-\sin x;$$

$$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x};\qquad (\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C,\qquad \int\cos x\,dx=\sin x+C;$$

$$\int\operatorname{tg}x\,dx=-\ln|\cos x|+C,\qquad \int\operatorname{ctg}x\,dx=\ln|\sin x|+C.$$

Каждая Т. ф. в каждой точке своей области определения непрерывна и бесконечно дифференцируема; производные и интегралы Т. ф. приведены в табл. 14. Все Т. ф. допускают разложение в степенные ряды. При этом $\sin x$ и $\cos x$ представляются рядами, сходящимися для всех значений x, что позволяет использовать их для приближённых выражений этих Т. ф. Возможно также представление $\sin x$ и $\cos x$ в виде бесконечных произведений (табл. 15).

Функция $x=\sin y$, являющаяся обратной по отношению к функции $y=\sin x$, определяет y как многозначную функцию от x; обозначается $y=\operatorname{Arcsin}x$. Аналогично определяются функции, обратные по отношению к другим Т. ф.; все они наз. *обратными тригонометрическими функциями*.

Табл. 15. — ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ И БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$$

$$+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots\text{ при }|x|<\infty;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

$$+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\text{ при }|x|<\infty;$$

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+$$

$$+\frac{62}{2835}x^9+\ldots+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!}x^{2n-1}+\ldots\text{ при }|x|<\frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{ctg}x=\frac{1}{x}-\left[\frac{x}{3}+\frac{x^3}{45}+\frac{2x^5}{945}+\frac{x^7}{4725}+\ldots+\frac{2^{2n}|B_{2n}|}{(2n)!}x^{2n-1}+\ldots\right]$$

при $0<|x|<\pi$

(B_n — числа Бернулли);

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\ldots;$$

$$\cos x=\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)\ldots$$

Простейшие тригонометрические уравнения решаются с помощью следующих формул. Решения уравнений $\sin x=a$, $\cos x=a$ для любого действительного числа a такого, что $|a|\leqslant 1$:

$$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,$$

$$x=\pm\arccos a+2\pi n,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Решения уравнений $\operatorname{tg}x=a$, $\operatorname{ctg}x=a$ для любого действительного числа a:

$$x=\operatorname{arctg}a+\pi n,\quad x=\operatorname{arcctg}a+\pi n,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Тригонометрические функции комплексного аргумента. Т. ф. для комплексных значений аргумента определяются как аналитич. продолжения соответствующих Т. ф. действительного аргумента в комплексную плоскость. Так, $\sin z$ и $\cos z$ можно определить с помощью рядов для $\sin x$ и $\cos x$ (табл. 15), если вместо x поставить z:

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}.$$

Эти ряды сходятся во всей плоскости, поэтому $\sin z$ и $\cos z$ — целые функции.

Т. ф. тангенс и котангенс определяются формулами

$$\operatorname{tg}z=\frac{\sin z}{\cos z},\qquad \operatorname{ctg}z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Т. ф. $\operatorname{tg}z$ и $\operatorname{ctg}z$ — мероморфные функции. Полюсы $\operatorname{tg}z$ — простые (1-го порядка) и находятся в точках $z=\pi/2+\pi n$, полюсы $\operatorname{ctg}z$ — также простые и находятся в точках $z=\pi n$, $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$

Все формулы, справедливые для Т. ф. действительного аргумента, остаются справедливыми и для комплексного аргумента (табл. 4—15). В частности,

$$\sin(-z)=-\sin z,\quad \cos(-z)=\cos z,$$

$$\operatorname{tg}(-z)=-\operatorname{tg}z,\quad \operatorname{ctg}(-z)=-\operatorname{ctg}z,$$

то есть $\cos z$ — чётная функция, а $\sin z$, $\operatorname{tg}z$ и $\operatorname{ctg}z$ — нечётные функции. Сохраняются также формулы

$$\sin(z+2\pi)=\sin z,\quad \cos(z+2\pi)=\cos z,$$

$$\operatorname{tg}(z+\pi)=\operatorname{tg}z,\quad \operatorname{ctg}(z+\pi)=\operatorname{ctg}z,$$

то есть Т. ф. — периодич. функции: $\sin z$ и $\cos z$ с периодом 2π, а $\operatorname{tg}z$ и $\operatorname{ctg}z$ с периодом π.

В отличие от Т. ф. действительного аргумента функции $\sin z$ и $\cos z$ принимают все комплексные значения: урав-

нения $\sin z=a$, $\cos z=a$ имеют решения для любого комплексного a:

$$z=\arcsin a=-i\ln\left(ia+\sqrt{1-a^2}\right),$$

$$z=\arccos a=i\ln\left(a+\sqrt{a^2-1}\right).$$

Т. ф. $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ принимают все комплексные значения, кроме $\pm i$: уравнения $\operatorname{tg} z=a$, $\operatorname{ctg} z=a$ имеют решения для любого комплексного числа $a\neq\pm i$:

$$z=\operatorname{arctg} a=\frac{i}{2}\ln\frac{1-ia}{1+ia},$$

$$z=\operatorname{arcctg} a=\frac{i}{2}\ln\frac{ia+1}{ia-1}.$$

Для любого $z=x+iy$, где x и y — действительные числа, имеют место неравенства

$$\frac{1}{2}\left|e^{y}-e^{-y}\right|\leqslant|\sin z|\leqslant\frac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right),$$

$$\frac{1}{2}\left|e^{y}-e^{-y}\right|\leqslant|\cos z|\leqslant\frac{1}{2}\left(e^{y}+e^{-y}\right),$$

из к-рых при $y\to\infty$ вытекают а с и м п т о т и ч е с к и е ф о р м у л ы (равномерно относительно x)

$$|\sin z|\sim\frac{1}{2}e^{|y|},\quad|\cos z|\sim\frac{1}{2}e^{|y|}.$$

Примеры конформных отображений Т. ф. приведены на рис. 5.

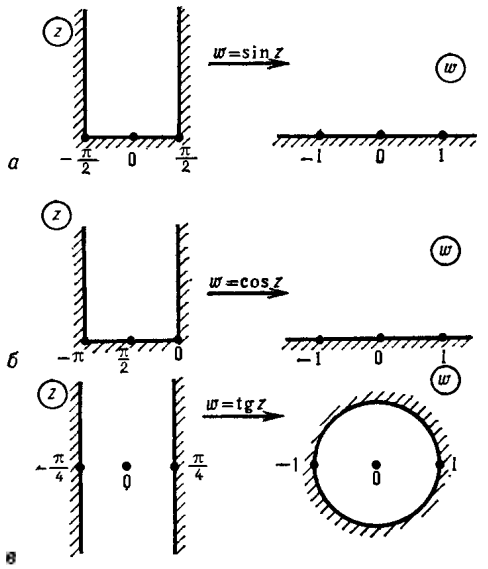


Рис. 5. Конформные отображения тригонометрических функций: *а)* $w=\sin z$ отображает полуполосу $-\pi/2<\operatorname{Re} z<\pi/2$, $\operatorname{Im} z>0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$; *б)* $w=\cos z$ отображает полуполосу $-\pi<\operatorname{Re} z<0$, $\operatorname{Im} z>0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w>0$; *в)* $w=\operatorname{tg} z$ отображает полосу $-\pi/4<\operatorname{Re} z<\pi/4$ на круг $|w|<1$.

Т. ф. можно выразить через показательную функцию:

$$\sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right),$$

$$\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right),$$

$$\operatorname{tg} z=\frac{1}{i}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}.$$

Т. ф. можно также выразить через гиперболич. функции:

$$\sin z=-i\operatorname{sh} iz,\quad\cos z=\operatorname{ch} iz,$$

$$\operatorname{tg} z=-i\operatorname{th} iz.$$

Т. ф. комплексного аргумента $z=x+iy$, где x и y — действительные числа, можно выразить через тригонометрич. и гиперболич. функции действительных аргументов, напр.:

$$\sin(x+iy)=\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y,$$

$$\cos(x+iy)=\cos x\operatorname{ch} y-i\sin x\operatorname{sh} y.$$

Исторический очерк. Т. ф. возникли впервые в связи с исследованиями в астрономии и геометрии. Соотношения отрезков в треугольнике и окружности, являющиеся по существу Т. ф., встречаются уже в 3 в. до н. э. в работах математиков Др. Греции — Евклида, Архимеда, Аполлония Пергского и др. Однако эти соотношения не являются у них самостоятельным объектом исследования, так что Т. ф. как таковые ими не изучались. Т. ф. рассматривались первоначально как отрезки и в такой форме применялись Аристархом (кон. 4—1-я пол. 3 вв. до н. э.), Гиппархом (2 в. до н. э.), Менелаем (1 в. н. э.) и Птолемеем (2 в. н. э.) при решении сферич. треугольников. Птолемей составил первую таблицу хорд для острых углов через 30′ с точностью до 10^{-6}. Это была первая таблица синусов. Как отношение функция $\sin\alpha$ встречается уже у Ариабхаты (кон. 5 в.). Функции $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ встречаются у аль-Баттани (2-я пол. 9— нач. 10 вв.) и Абу-ль-Вефы (10 в.), к-рый употреблял также $\sec\alpha$ и $\operatorname{cosec}\alpha$. Ариабхата знал уже формулу $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ и формулы для Т. ф. половинного аргумента, с помощью к-рых составил таблицу синусов для углов через 3°45′. Бхаскара (12 в.) дал способ построения таблиц через 1° с помощью теорем сложения. Формулы преобразования суммы Т. ф. в произведение выводились Региомонтаном (15 в.) и Дж. Непером в связи с изобретением последним логарифмов (1614). Региомонтан дал таблицу значений синуса через 1′. Разложение Т. ф. в степенные ряды получено И. Ньютоном (1669). В современную форму теорию Т. ф. привёл Л. Эйлер (18 в.). Ему принадлежат определение Т. ф. для действительного и комплексного аргументов, принятая ныне символика, установление связи с показательной функцией, ортогональности системы синусов и косинусов, формулы разложения синуса и косинуса в бесконечные произведения, котангенса на элементарные дроби. *В. И. Битюцков.*

ТРИГОНОМЕТРИ́ЧЕСКИЙ ПОЛИНО́М, к о н е ч н а я т р и г о н о м е т р и ч е с к а я с у м м а,— выражение вида

$$T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

с действительными коэффициентами a_0, a_k, b_k, $k=1,\ldots,n$; число n наз. п о р я д к о м Т. п. ($|a_n|+|b_n|>0$). Т. п. можно записать в комплексной форме:

$$T(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx},$$

где

$$2c_k=\begin{cases}a_k-ib_k, & k\geqslant 0,\\ a_{-k}+ib_{-k}, & k<0.\end{cases}$$

Т. п. являются важнейшим средством приближения функций.

ТРИГОНОМЕТРИ́ЧЕСКИЙ РЯД — ряд по косинусам и синусам кратных дуг, то есть ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\qquad(1)$$

или (в комплексной форме)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx},$$

где a_k, b_k или, соответственно, c_k наз. к о э ф ф и ц и е н т а м и Т. р.

Впервые Т. р. встречаются у Л. Эйлера (1744). Он получил разложения

$$\frac{\pi-x}{2}=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots\quad(0<x<2\pi);$$

$$\frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}=1+r\cos x+r^2\cos 2x+\ldots;$$

$$\frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}=r\sin x+r^2\sin 2x+\ldots$$

В сер. 18 в. в связи с исследованиями задачи о свободном колебании струны возник вопрос о возможности представления функции, характеризующей начальное положение струны, в виде суммы Т. р. Этот вопрос вызвал острые споры, продолжавшиеся несколько десятилетий, лучших аналитиков того времени — Д. Бернулли, Ж. Д'Аламбера, Ж. Лагранжа, Л. Эйлера. Споры относились к содержанию понятия функции. В то время функции обычно связывались с их аналитич. заданием, что приводило к рассмотрению только аналитич. или кусочно аналитич. функций. А здесь появилась необходимость представить тригонометрич. рядом функцию, графиком к-рой является достаточно произвольная кривая.

Но значение этих споров больше. Фактически в них обсуждались или возникли в связи с ними вопросы, связанные со многими принципиально важными понятиями и идеями математич. анализа вообще,— представление функций рядами Тейлора и аналитич. продолжение функций, использование расходящихся рядов, перестановка пределов, бесконечные системы уравнений, интерполирование функций многочленами и др.

И в дальнейшем, как и в этот начальный период, теория Т. р. служила источником новых идей математич. анализа и влияла на развитие других его разделов. Существенную роль играли исследования по Т. р. в построении интегралов Римана и Лебега. Теория функций действительного переменного возникла и развивалась затем в тесной связи с теорией Т. р. Как обобщения Т. р. появились интеграл Фурье, почти периодич. функции, общие ортогональные ряды, абстрактный гармонич. анализ. Исследования по Т. р. были исходным пунктом при создании теории множеств. Т. р. являются мощным средством представления и исследования функций.

Вопрос, приведший к спорам математиков 18 в., был решён в 1807 Ж. Фурье, указавшим формулы для вычисления коэффициентов Т. р. (1), к-рый должен представлять на $(0,2\pi)$ функцию $f(x)$:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx,\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и применившим их при решении задач теплопроводности. Формулы (2) получили назв. ф о р м у л Ф у р ь е, хотя они встречались ранее у А. Клеро (1754), а Л. Эйлер (1777) приходил к ним с помощью почленного интегрирования. Т. р. (1), коэффициенты к-рого определяются по формулам (2), наз. рядом Фурье функции f, а числа a_k, b_k — её к о э ф ф и ц и е н т а м и Ф у р ь е.

Характер получаемых результатов зависит от того, как понимается представление функции рядом, как понимается интеграл в формулах (2). Современный вид теория Т. р. приобрела после появления интеграла Лебега.

Теорию Т. р. можно условно разделить на два раздела — теорию *Фурье рядов*, когда предполагается, что ряд (1) является рядом Фурье нек-рой функции, и теорию общих Т. р., где такое предположение не делается. Первое систематическое исследование общих Т. р. принадлежит Б. Риману (1853). Поэтому теорию общих Т. р. наз. иногда римановской теорией Т. р.

Если Т. р. сходится на множестве положительной меры или на множестве второй категории, то его коэффициенты стремятся к нулю. Для Т. р. со стремящимися к нулю коэффициентами справедлив принцип локализации Римана, согласно к-рому поведение ряда (1) в точке x зависит только от поведения в произвольно малой окрестности этой точки функции, к к-рой сходится ряд, полученный двукратным почленным интегрированием ряда (1).

Одной из центральных проблем теории общих Т. р. является задача о представлении произвольной функции Т. р. Усилив результаты Н. Н. Лузина (1915) о представлении функций Т. р., суммируемыми почти всюду методами Абеля — Пуассона и Римана, Д. Е. Меньшов доказал (1940), что для каждой измеримой и конечной почти всюду функции f существует Т. р., сходящийся к ней почти всюду. Следует отметить, что если даже функция f интегрируема, то в качестве такого ряда нельзя, вообще говоря, взять её ряд Фурье, т. к. существуют ряды Фурье, расходящиеся всюду. Неизвестно, можно ли в приведённой теореме Меньшова опустить условие конечности функции f почти всюду. Это можно сделать, если заменить сходимость почти всюду на более слабое требование — сходимость по мере (Д. Е. Меньшов, 1948).

Много исследований посвящено проблеме единственности Т. р. Множество $E\subset[0,\ 2\pi)$ наз. множеством единственности, если из сходимости Т. р. к нулю вне E следует, что все коэффициенты ряда равны нулю. Каждое не более чем счётное множество является множеством единственности (Г. Кантор, 1872, У. Юнг, 1909). Множества положительной меры не являются множествами единственности. Существование множеств неединственности меры нуль было установлено Д. Е. Меньшовым (1916). Отсюда, в частности, следует, что при представлении функций Т. р., сходящимися почти всюду, эти ряды определяются неоднозначно.

К проблеме единственности примыкает следующий вопрос: если Т. р. сходится к функции $f(x)\in L(0,\ 2\pi)$, то должен ли этот ряд быть рядом Фурье функции f? Из результатов П. Дюбуа-Реймона (1877) и Ш. Ла Валле Пуссена (1912) следует, что ответ положителен, если ряд сходится и его сумма конечна всюду, кроме счётного множества точек.

Имеются нек-рые результаты, относящиеся к общим Т. р. от нескольких переменных, но здесь во многих случаях нужно ещё найти естественные постановки задач.

● Б а р и Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; З и г м у н д А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., 2 изд., т. 1—2, М., 1965; Л у з и н Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М.— Л., 1951.

С. А. Теляковский.

ТРИГОНОМЕТРИ́ЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИ́РОВАНИЕ — приближённое представление функции $f(x)$ в виде тригонометрического полинома

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

значения которого в заданных точках совпадают с соответствующими значениями функции. Именно, всегда можно подобрать $2n+1$ коэффициентов A, a_k, b_k, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, полинома n-го порядка $T(x)$ так, чтобы его значения были равны значениям y_k функции $y=f(x)$ в $2n+1$ наперёд заданных точках x_k промежутка $[0,\ 2\pi)$.

ТРИГОНОМЕТРИ́ЧЕСКОЕ УРАВНЕ́НИЕ — алгебраическое уравнение относительно тригонометрических функций неизвестного аргумента. Для решения Т. у., пользуясь различными соотношениями между тригонометрич. функциями, преобразуют Т. у. к такому виду, чтобы можно было определить значения одной из тригонометрич. функций искомого аргумента. После этого корни Т. у. получаются с помощью обратных тригонометрич. функций.

Напр., Т. у. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$ можно привести к виду $2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0$ или $\sin 2x(2\cos x+1)=0$, откуда $\sin 2x=0$ или $\cos x=-1/2$; это даёт решения Т. у. $x=1/2\ \mathrm{Arc}\sin 0=n\pi/2$ и $x=\mathrm{Arc}\cos(-1/2)=2/3\pi(3n\pm 1/2)$, где n — произвольное целое число (положительное или отрицательное).

ТРИГОНОМЕ́ТРИЯ (от греч. τρίγωνον — треугольник и μετρέω — измеряю) — раздел геометрии, в котором метрические соотношения между элементами *треугольника* описываются через тригонометрические функции (см., напр., *Косинусов теорема*, *Синусов теорема*, *Тангенсов теорема*), а также устанавливаются соотношения между тригонометрическими функциями. Т. рассматривается как для евклидовой, так и для *неевклидовой геометрии*. Т. сферы евклидового пространства наз. *сферической тригонометрией*.

Т. на плоскости начала развиваться позже сферической, хотя отдельные её теоремы встречались и раньше. Напр., 12-я и 13-я теоремы второй книги «Начал» Евклида (3 в.

до н. э.) выражают по существу теорему косинусов. Т. получила развитие у аль-Баттани (2-я пол. 9 — нач. 10 вв.), Абу-ль-Вефы (10 в.), Бхаскары (12 в.) и Насирэддина ат-Туси (13 в.), к-рым была уже известна теорема синусов. Теорема тангенсов была получена Регномонтаном (15 в.). Дальнейшие работы в области Т. принадлежат Н. Копернику (1-я пол. 16 в.), Т. Браге (2-я пол. 16 в.), Ф. Виету (16 в.), И. Кеплеру (кон. 16—1-я пол. 17 вв.). Современный вид Т. получила в работах Л. Эйлера (18 в.).

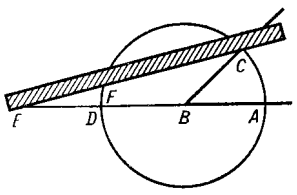
ТРИЛЛИОН (франц. trillion), тысяча миллиардов,— число, изображаемое единицей с 12 нулями, то есть число 10^{12}. В нек-рых странах Т. наз. число 10^{18}.

ТРИМЕТРИЯ — *аксонометрия* с тремя неравными показателями искажения.

ТРИСЕКТРИСА — 1) кривая, позволяющая осуществить *трисекцию угла*. См., напр., *Маклорена трисектриса*.

2) Одна из прямых, делящих внутренний угол треугольника на три равные части.

ТРИСЕКЦИЯ УГЛА (от лат. tri-, в сложных словах — три и sectio — разрезание, рассечение) — задача о разделении угла на три равные части. Наряду с двумя другими классич. задачами древнегреческой математики (*квадратурой круга* и *удвоением куба*) Т. у. сыграла большую роль в развитии математич. методов. Несомненно, что первоначально решение Т. у. стремились найти с помощью простейших геометрич. средств — циркуля и линейки (без делений, рассматриваемой как инструмент для проведения прямых линий), что удавалось, однако, лишь в отдельных случаях (напр., для углов в 90° и $\frac{90°}{2^n}$, где n — натуральное число). Начиная с 5 в. до н. э. греки привлекают для точной Т. у. *квадратрисы*. В сочинениях Архимеда Т. у. производится с помощью т. н. приёма «вставки», осуществляемого циркулем и линейкой с делениями. Именно, решение задачи (рис.) о Т. у. ABC приводится к вставке отрезка $EF=BA$ (для этого точки E и F отмечаются на линейке) между продолжением диаметра AD и окружностью так, чтобы продолжение EF прошло через C; тогда $\angle AEF = \frac{1}{3}\angle ABC$.



В средневековой литературе на арабском языке Т. у. связывается с задачами алгебры и тригонометрии. В 9—10 вв. Т. у. сводится к решению кубич. уравнения вида $x^3+q=px$, построение корня к-рого осуществляется с помощью вставок или конич. сечений. В 15 в. аль-Каши для составления весьма точных тригонометрич. таблиц и вычисления $\sin 1°$ по известному $\sin 3°$ применил итерационный приём приближённого численного решения кубич. уравнения. В кон. 16 в. Ф. Виет, используя Т. у., дал тригонометрич. решение кубич. уравнения в т. н. неприводимом случае.

Параллельно со всеми этими изысканиями продолжались попытки дать точную Т. у. с помощью только циркуля и линейки без делений. Р. Декарт в 1637 первый выразил убеждение в недостаточности этих средств для Т. у. в общем случае. Неудачи многочисленных попыток в этом направлении (к-рые отдельные любители тщетно продолжают и ныне) побудили Парижскую академию наук в 1775 (а затем и другие академии) отказаться от рассмотрения решения Т. у., как и двух других классич. задач древности. Строгое доказательство невозможности точной Т. у. в общем случае с помощью циркуля и линейки (т. е. неразрешимости соответствующего кубич. уравнения в квадратичных радикалах) дал в 1837 П. Ванцель.

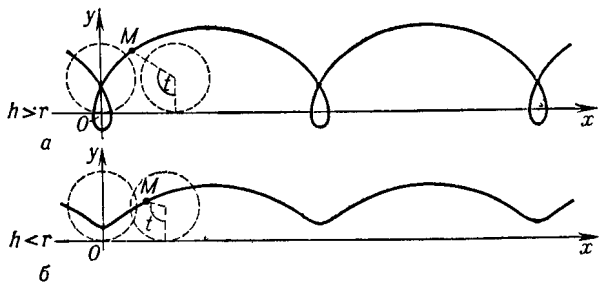
● История математики, т. 1, М., 1970.

ТРИЭДР (от греч. τρί-, в сложных словах — три и ἕδρα — основание, грань) — система трёх взаимно перпендикулярных единичных векторов, выходящих из одной точки. Специальным образом выбранные Т. играют важную роль в механике (при изучении относительного движения), дифференциальной геометрии кривых и поверхностей. В теории пространственных кривых большое значение имеет подвижной (сопровождающий) Т. кривой, к-рый строится так, что один вектор $\boldsymbol{t}$ направлен по касательной к кривой, другой $\boldsymbol{n}$ — по главной нормали, а третий $\boldsymbol{b}$ — по бинормали.

По существу, понятие «Т.» введено Л. Эйлером (1736), метод подвижного Т. в основном развит Г. Дарбу (1887—1896) и Э. Картаном (1937).

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ — см. *Кратный интеграл*.

ТРОХОИДА (от греч. τροχοειδής — колесообразный, круглый, от τροχός — колесо, круг и εἶδος — вид) — плоская трансцендентная кривая; траектория точки M, жёстко связанной с окружностью, катящейся без скольжения по прямой, причём вычерчивающая точка находится на расстоянии h от центра производящей окружности. При $h>r$



Т. наз. удлинённой циклоидой (рис., *а*) при $h<r$ — укороченной циклоидой (рис., *б*).

Параметрич. уравнения:

$$x=rt-h\sin t, \quad y=r-h\cos t.$$

При $h=r$ кривая наз. *циклоидой*.

См. также *Гипотрохоида*, *Эпитрохоида*.

ТРУБЧАТОЕ ПОЛЕ — то же, что *соленоидальное поле*.

ТУПОЙ УГОЛ — угол, больший прямого и меньший развёрнутого.

ТУПОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК — треугольник, у которого один внутренний угол тупой.

ТУЭ ТЕОРЕМА — теорема о конечности числа решений в целых числах уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n=A$$

с целыми коэффициентами при $n\geqslant 3$. Получена как следствие метода А. Туэ, разработанного в 1909 в связи с проблемой приближения алгебраич. чисел рациональными. См. *Чисел теория*.

ТЬЮРИНГА МАШИНА — название, закрепившееся за абстрактными вычислительными машинами некоторого, точно охарактеризованного типа. Концепция такого рода машины возникла в сер. 30-х гг. 20 в. у А. Тьюринга в результате произведённого им анализа действий человека, выполняющего в соответствии с заранее разработанным планом те или иные вычисления, т. е. последовательные преобразования знаковых комплексов. Анализ этот, в свою очередь, был осуществлён им с целью решения назревшей к тому времени проблемы поиска точного математич. эквивалента для общего интуитивного представления об *алгоритме*. В ходе развития *алгоритмов теории* появился ряд модификаций первоначального тьюринговского определения. Здесь даётся версия, восходящая к Э. Посту,— в таком виде определение Т. м. получило весьма большое распространение.

Т. м. удобно представлять себе в виде автоматически функционирующего устройства, способного находиться в конечном числе внутренних состояний и снабжённого бесконечной внешней памятью — лентой. Среди состояний имеется два выделенных — начальное и заключительное. Лента разделена на клетки и бесконечна влево и вправо. В каждой клетке лен-

ты может быть записана любая из букв нек-рого алфавита A (ради единообразия удобно считать, что в пустой клетке записана «пустая буква»). В каждый момент дискретного времени Т. м. находится в одном из своих состояний и, рассматривая одну из клеток своей ленты, воспринимает записанный в ней символ — букву алфавита A или пустую букву.

Находясь в к.-л. момент времени в незаключительном состоянии, Т. м. совершает ш а г, к-рый вполне определяется её текущим состоянием и символом на ленте, воспринимаемым ею в данный момент. Шаг этот заключается в том, что: 1) в рассматриваемой клетке записывается новый символ, быть может совпадающий со старым или пустой; 2) машина переходит в новое состояние, быть может совпадающее со старым или заключительное; 3) лента сдвигается влево или вправо на одну клетку или остаётся на месте. Перечисление всех возможных шагов Т. м. в зависимости от текущей комбинации «незаключительное состояние + воспринимаемый символ», представленное, напр., в виде специальной таблицы с двумя входами, наз. п р о г р а м м о й или с х е м о й данной Т. м. В клетках этой таблицы стоят коды соответствующих шагов машины — её к о м а н д ы. Программа Т. м. является объектом с точной структурой, и можно условиться отождествлять Т. м. с её программой. Стремясь подчеркнуть связь так описанной Т. м. с алфавитом A, обычно говорят, что эта машина есть Т. м. в а л ф а в и т е A. Текущее полное описание Т. м. даётся её к о н ф и г у р а ц и е й, к-рая состоит из указания для данного момента следующей информации: 1) конкретного заполнения клеток ленты символами; 2) клетки, находящейся в поле зрения машины; 3) внутреннего состояния, в к-ром машина находится. Конфигурация, соответствующая заключительному состоянию Т. м., также наз. з а к л ю ч и т е л ь н о й.

Если зафиксировать какую-либо незаключительную конфигурацию Т. м. в качестве исходной, то работа этой машины будет заключаться в последовательном (шаг за шагом) преобразовании исходной конфигурации в соответствии с программой машины до тех пор, пока не будет достигнута заключительная конфигурация. После этого работа Т. м. считается закончившейся, а результатом работы считается достигнутая заключительная конфигурация. Разумеется, работа Т. м. заканчивается, вообще говоря, не при всякой исходной конфигурации.

Понятие Т. м. может быть следующим образом использовано для уточнения общего представления об алгоритме в данном алфавите. Т ь ю р и н г о в с к и м а л г о р и т м о м в а л ф а в и т е A называют всякий алгоритм $\mathfrak{A}$ следующего вида. Фиксируется нек-рая Т. м. $\mathfrak{M}$ в алфавите A. Пусть $\mathcal{P}$ — слово в A, принимаемое в качестве исходного данного для алгоритма $\mathfrak{A}$. Строится следующая исходная конфигурация машины $\mathfrak{M}$: 1) на её ленте без пробелов пишется слово $\mathcal{P}$ с оставлением прочих клеток пустыми; 2) в поле зрения $\mathfrak{M}$ устанавливается клетка с первой буквой слова $\mathcal{P}$; 3) машина $\mathfrak{M}$ приводится в начальное состояние (если $\mathcal{P}$ пусто, берётся пустая лента, а в поле зрения $\mathfrak{M}$ устанавливается произвольная её клетка). Пусть $\mathfrak{M}$, отправляясь от этой исходной конфигурации, заканчивает работу. Рассматривается клетка ленты, находящаяся в поле зрения $\mathfrak{M}$ в заключительной конфигурации. Если символ, записанный в ней, пуст, то в качестве $\mathfrak{A}(\mathcal{P})$ берётся пустое слово. В противном случае в качестве $\mathfrak{A}(\mathcal{P})$ берётся слово, записанное в максимальном, не содержащем пустых клеток отрезке ленты, включающем обозреваемую машиной $\mathfrak{M}$ клетку.

Имеются серьёзные основания считать, что уточнение общего представления об алгоритме в алфавите, произведённое с помощью понятия Т. м., является адекватным. Именно, считается, что для всякого алгоритма $\mathfrak{A}$ в к.-л. алфавите может быть построен тьюринговский алгоритм, дающий при одинаковых исходных данных те же самые результаты, что и алгоритм $\mathfrak{A}$. Это соглашение известно в теории алгоритмов под назв. т е з и с а Т ь ю р и н г а. Принятие тезиса Тьюринга равносильно принятию *Чёрча тезиса* (для частично рекурсивных функций) или принципа нормализации (для *нормальных алгорифмов*). Однако в отличие от этих последних тезис Тьюринга в высшей степени непосредственно убедителен. Действительно, производя вычисления согласно избранному плану, математик работает сходным с Т. м. образом: рассматривая к.-л. место в своих записях и находясь в определённом «умонастроении», он делает необходимые изменения в написанном, проникается новым «умонастроением» и переходит к рассмотрению дальнейших записей. То обстоятельство, что при этом он совершает более интегральные, чем Т. м., шаги, представляется не слишком принципиальным.

По структуре своего описания и по типу функционирования Т. м. являются *автоматами* весьма общего типа, так что концепция Тьюринга в заключительной степени стимулировала возникновение абстрактной *автоматов теории* и во многом предопределила её особенности.

Существует много модификаций Т. м. Самыми распространёнными среди них являются м н о г о л е н т о ч н ы е Т. м., имеющие по одной или несколько головок на каждой из лент. Движение головок и запись букв на лентах происходят одновременно, согласно программе управляющего устройства. Многоленточные Т. м. удобно использовать для формализации понятия относительного алгоритма. Так, функция f (алгоритмически) вычислима относительно функции g, если существует многоленточная Т. м., к-рая вычисляет функцию f при условии, что в любой начальной конфигурации на одной из лент в фиксированном порядке записаны все значения функции g. В таком виде через относительные вычисления можно ввести важное в теории алгоритмов понятие сводимости по Тьюрингу и другие виды *алгоритмической сводимости*. С помощью многоленточных Т. м. естественно формализуется понятие в е р о я т н о с т н о г о а л г о р и т м а. Распространённый подход состоит в том, что на одной из лент многоленточной Т. м. записывается случайная последовательность и Т. м. в каждый момент времени считывает ровно один символ этой последовательности. При другом подходе в программе управляющего устройства Т. м. допускается существование различных команд с одинаковыми левыми частями, причём выбор той или иной команды происходит с заданными вероятностями. На близкой идее основывается понятие н е д е т е р м и н и р о в а н н о й Т. м., в программе управляющего устройства к-рой также могут иметься различные команды с одинаковыми левыми частями. В обоих случаях вместо одного вычисления для данного входа рассматривается класс всевозможных вычислений, согласованных с программой. Для вероятностных Т. м. рассматривают вероятность тех или иных вычислений, для недетерминированных Т. м.— возможность самого вычисления.

См. также *Сложность алгоритма*, *Вычислимая функция*. ● М а л ь ц е в А. И., Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; К л и н и С. К., Математическая логика, пер. с англ., М., 1973; М е н д е л ь с о н Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; Р о д ж е р с Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, пер. с англ., М., 1972.

Н. М. Нагорный, С. С. Марченков.

ТЬЮРИНГОВА СВОДИМОСТЬ, *Т* - с в о д и м о с т ь,— см. *Алгоритмическая сводимость*.

ТЬЮРИНГОВСКИЙ АЛГОРИТМ — см. *Тьюринга машина*.

ТЯЖЁЛОГО ШАРИКА МЕТОД — метод решения задачи минимизации дифференцируемой функции $f(x)$ на евклидовом пространстве E^n. Метод основан на рассмотрении системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+\frac{f'(x)}{1+|f'(x)|^2}=0,\quad t\geqslant 0,\ x=(x_1,\ldots,x_n), \quad (1)$$

к-рая описывает движение материальной точки по поверхности $y=f(x)$ в поле тяжести, направленном в отрицательном направлении оси Oy, при условии, что точка не может оторваться от поверхности и трение пропорционально скорости; $f'(x)$ — градиент функции $f(x)$ в точке x, $a\geqslant 0$ — коэффициент трения. Этим объясняется название метода.

Учитывая, что в окрестности стационарной точки величина $|f'(x)|^2$ мала, систему (1) часто заменяют системой

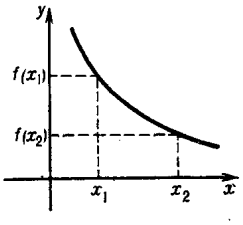
$$\frac{dx^2}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+f'(x)=0,\quad t\geqslant 0. \qquad (2)$$

При нек-рых предположениях относительно функции $f(x)$ и начальных условий можно доказать, что соответствующее решение $x(t)$ системы (1) или (2) при $t\to\infty$ сходится к какой-либо стационарной точке x_* функции $f(x)$; если $f(x)$ — выпуклая функция, то x_* — точка минимума $f(x)$ на E^n.

У

УБЫВА́ЮЩАЯ ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ — такая последовательность x_n, что для всех $n=1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $x_n>x_{n+1}$. Иногда такие последовательности наз. строго убывающими, а термин «У. п.» применяется к последовательностям, удовлетворяющим для всех n лишь условию $x_n\geqslant x_{n+1}$. Такие последовательности наз. также невозрастающими. Всякая ограниченная снизу невозрастающая последовательность имеет конечный предел, а всякая не ограниченная снизу имеет бесконечный предел, равный $-\infty$.

УБЫВА́ЮЩАЯ ФУ́НКЦИЯ, строго убывающая функция, — монотонная функция, значения которой уменьшаются при увеличении значений её аргумента. Напр., $2-3x$, $1-x^3$, e^{-x}, $\operatorname{arc\,cos} x$ являются У. ф. Для того чтобы функция $f(x)$ была У. ф., необходимо и достаточно, чтобы функция $-f(x)$ была *возрастающей функцией*.



Функция $f(x)$ наз. убывающей на множестве E, если $f(x_1)>f(x_2)$ для любых x_1, x_2 из E таких, что $x_1<x_2$ (график У. ф. см. на рис.); если выполняется условие $f(x_1)\geqslant f(x_2)$, то функция $f(x)$ наз. невозрастающей. Функция $f(x)$ убывает на множестве E тогда и только тогда, когда функция $-f(x)$ возрастает на E.

УГЛОВА́Я ТО́ЧКА, точка излома кривой, — см. *Особая точка* кривой.

УГЛОВО́Й КОЭ́ФФИЦИЕ́НТ — число k в уравнении прямой линии на плоскости $y=kx+b$, характеризующее наклон прямой относительно оси абсцисс.

У́ГОЛ — геометрическая фигура, состоящая из двух различных лучей, выходящих из одной точки (рис. *1*). Лучи наз. сторонами У., а их общее начало — вершиной У. Иногда У. определяют как часть плоскости, заключённую между двумя лучами с общим началом. Два У. наз. равными (конгруэнтными), если они могут быть совмещены так, что совпадут их соответствующие стороны и вершины. Два угла наз. смежными (рис. *2*), если у них общие вершина и одна сторона, а две другие образуют прямую. Вообще, У., имеющие общую вершину и одну общую сторону, наз. прилежащими. У. наз. вертикальными (рис. *3*), если стороны одного являются продолжениями за вершину сторон другого. Вертикальные У. равны между собой. У., у к-рого стороны образуют прямую, наз. развёрнутым (рис. *4*). У., равный своему смежному У., наз. прямым. У., меньший прямого, наз. острым, больший прямого и меньший развёрнутого — тупым (рис. *5*).

За единицу измерения У. принимается $^1/_{90}$ доля прямого угла, наз. *градусом*. Используется и радианная мера У.: один *радиан* приписывается центральному углу (см. *Окружность*), стороны к-рого высекают из единичной окружности дугу, длина к-рой равна её радиусу.

При пересечении двух прямых, лежащих в одной плоскости, третьей прямой образуются У. (рис. *6*), *1* и *5*, *2* и *6*, *4* и *8*, *3* и *7*, наз. соответственными; *2* и *5*, *3* и *8* — внутренними односторонними; *1* и *6*, *4* и *7* — внешними односторонними; *3* и *5*, *2* и *8* — внутренними накрест лежащими; *1* и *7*, *4* и *6* — внешними накрест лежащими.

Иногда У. рассматривается как мера поворота луча вокруг его начала до заданного положения. В зависимости от направления поворота У. в этом случае можно рассматривать как положительные, так и отрицательные. Тем самым У. в этом смысле может иметь своей величиной любое действительное число.

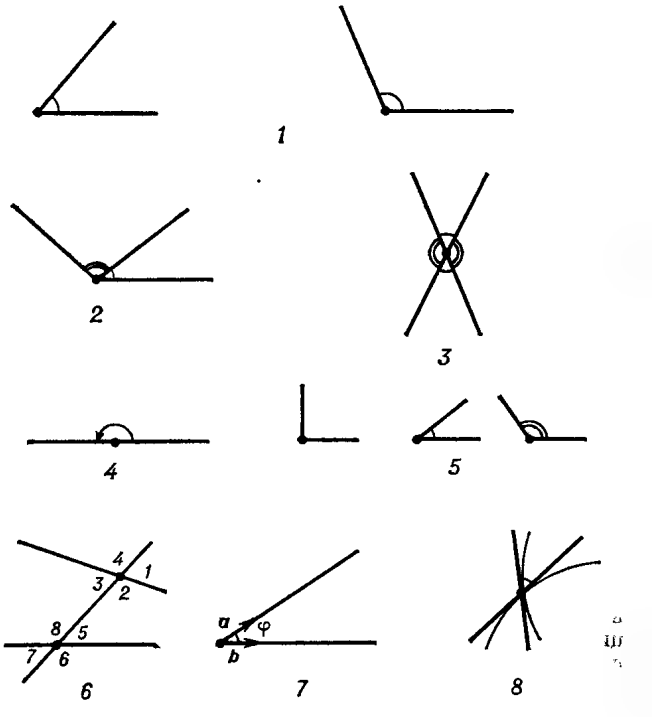


Рис. 1—8.

В геометрич. системах, в основу к-рых положена точечно-векторная аксиоматика, под У. понимается нек-рая метрич. величина, связанная с двумя векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ с помощью операции скалярного произведения. Именно, угол φ (рис. 7) определяется через скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ так: $\cos\varphi=\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$.

Понятие «У.» как плоской фигуры и как числовой величины применяется в различных геометрич. системах, в к-рых У. определяется специальным образом. Напр., под У. между кривыми (рис. *8*), имеющими определённые касательные в точке пересечения, понимают У., образованный этими касательными.

За У. между прямой и плоскостью принимается У. (рис. *9*), образованный прямой и её прямоугольной проекцией на плоскость; он измеряется в пределах от 0° до 90°. Под У. между скрещивающимися прямыми понимают У. (рис. *10*) между прямыми,

параллельными скрещивающимся и проведёнными через одну точку.

Телесным углом наз. часть пространства (рис. *11*), ограниченная нек-рой конич. поверхностью; частным случаем телесного У. является *многогранный угол* (рис. *12*).

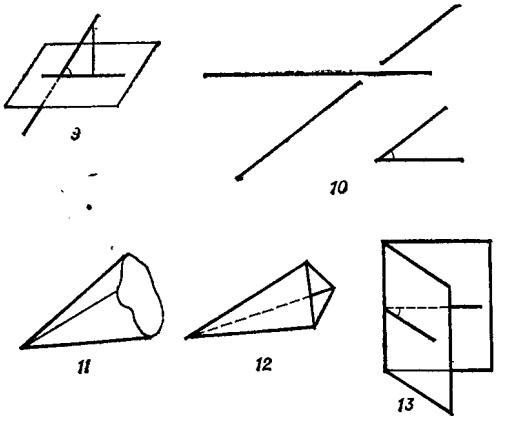


Рис. 9—13.

Таков, напр., *двугранный угол* (рис. *13*), к-рый измеряют линейным углом — углом, образованным перпендикулярами в его гранях к ребру. *Л. А. Сидоров.*

УДВОЕ́НИЕ КУ́БА — задача о построении куба, имеющего объём вдвое больший, чем данный куб. Задачу об У. к. нередко называют делосской (неправильно — делийской) задачей, т. к., по преданию, во время одной эпидемии на острове Делос (Эгейское море) оракул повелел для прекращения эпидемии вдвое увеличить кубич. жертвенник, не меняя его формы. Если ребро данного куба $a=1$, то ребро x искомого куба определяется из кубич. уравнения $x^3-2=0$; таким образом, задача состоит в построении отрезка, численно равного $\sqrt[3]{2}$. Древние греки сначала пытались осуществить У. к. (так же как *квадратуру круга* и *трисекцию угла*) с помощью лишь циркуля и линейки. Неудачи этих попыток привели исследования к новым, весьма плодотворным направлениям. Так, Гиппократ Хиосский (2-я пол. 5 в. до н. э.) свёл У. к. с ребром a к определению двух средних пропорциональных x, y к двум данным отрезкам a и $2a$, т. е. к отысканию искомого ребра x из пропорций $a : x = x : y = y : 2a$. Вскоре Архит Тарентский предложил остроумное стереометрич. построение отрезка x при помощи пересечения трёх поверхностей — цилиндра, конуса и тора. В 1-й пол. 4 в. до н. э. Менехм применил к У. к. конич. сечения, показав, что отрезок x является абсциссой одной из точек пересечения двух парабол $x^2=ay$ и $y^2=2ax$ или параболы $x^2=ay$ и гиперболы $xy=2a^2$. Греки нашли также нек-рые другие планиметрич. построения У. к., из к-рых заслуживают упоминания механизм Эратосфена (3 в. до н. э.) — мезолябий и построение Герона (1 в.), удобные для приближённого У. к. Ряд оригинальных конструкций для У. к. предложили учёные 17 в. Р. Декарт в 1637 высказал мнение, что точное построение отрезка, равного $\sqrt[3]{2}$, посредством циркуля и линейки неосуществимо, другими словами, что кубич. корень из некубич. рационального числа есть иррациональность, не приводящаяся к конечному числу действий извлечения квадратного корня. Неразрешимость У. к. с помощью линейки и циркуля доказал в 1837 П. Ванцель.

● История математики, т. 1, М., 1970.

УДЛИНЁННАЯ ЦИКЛО́ИДА — см. *Трохоида.*

УЗЕЛ — 1) У.— один из видов *особых точек* дифференциального уравнения. Все интегральные кривые, проходящие через точки достаточно малой окрестности такой особой точки, входят в неё. Рассматривают различные типы У.: а) обычный У.— все интегральные кривые входят в особую точку, касаясь (кроме одной кривой) одного направления (рис. *1*); б) вырожденный У.— все без исключения интегральные кривые проходят через особую точку, касаясь одного направления (рис. *2*); в) особый У. (дикритический) — всякое направление является направлением входа в начало координат (рис. *3*).

Название «У.» предложено А. Пуанкаре.

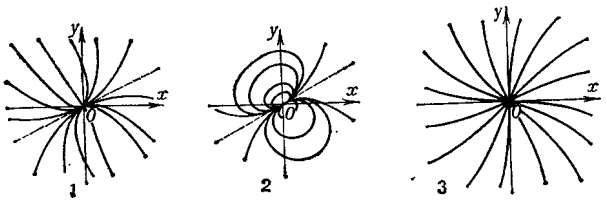


Рис.

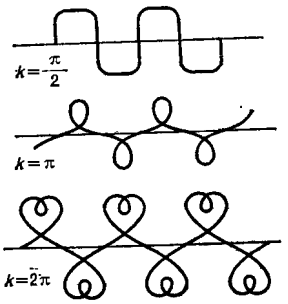
2) У.— несамопересекающаяся замкнутая кривая в трёхмерном евклидовом пространстве. По-видимому, К. Гаусс был первым, кто рассматривал У. как математич. объект. Он считал, что анализ явлений заузливания является одной из основных задач так наз. геометрии положения. Сам К. Гаусс мало написал об У., однако его ученик И. Листинг посвятил У. значительную часть своей монографии «Предварительные исследования по топологии» (1847, рус. пер.— М., 1932).

УЗЕЛ ИНТЕРПОЛЯЦИИ — см. *Интерполяционная формула, Квадратурная формула.*

УЗЛОВА́Я ТО́ЧКА кривой — см. *Особая точка* кривой.

УЗО́РНАЯ КРИВА́Я — плоская трансцендентная кривая (рис.). Натуральное уравнение:

$$R = k \sec s,$$



где R — радиус кривизны, s — длина дуги.

УЙШАРТА РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — см. *Многомерный статистический анализ*; введено Дж. Уишартом (1928).

УКЛОНЕ́НИЕ — расстояние между приближающей функцией и заданной функцией; см. *Наилучшее приближение.*

УКОРО́ЧЕННАЯ ЦИКЛО́ИДА — см. *Трохоида.*

«УКРАЙНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНА́Л» — научный журнал Ин-та математики АН УССР. Издаётся с 1949 на рус. и укр. языках в Киеве. Выходит 6 номеров в год. Публикует статьи по различным вопросам математики, по математич. и теоретич. физике. Тираж (1987) ок. 1200 экз.

УЛЬТРАСФЕРИ́ЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕ́НЫ (от лат. ultra — сверх и *сфера*), многочлены Гегенбауэра,— ортогональные многочлены на отрезке $[-1, +1]$ с весом $(1-x^2)^{p-1/2}$, появляющиеся при решении уравнения Лапласа в n-мерном пространстве, $p=\frac{n}{2}-1$. При $m=0, 1, 2, \ldots$ У. м. степени m являются коэффициентами при t^m в разложении в степенной ряд функции

$$(1-2tz+t^2)^{-p}=\sum_{m=0}^{\infty} C_m^p(z)\,t^m.$$

Лежандра многочлены можно рассматривать как частный случай У. м., к-рые, в свою очередь, являются частным случаем *Якоби многочленов.*

УМЕНЬША́ЕМОЕ — см. *Вычитание.*

УМНОЖЕ́НИЕ — операция образования по двум данным объектам a и b, наз. сомножителями, третьего объекта c, наз. произведением. У. обозначается знаком $\times$ (ввёл У. Оутред в 1631) или $\cdot$ (ввёл Г. Лейбниц в 1698); в буквенном обозначении эти знаки опускаются и вместо $a\times b$ или $a\cdot b$ пишут ab.

У. имеет различный конкретный смысл и соответственно различные конкретные определения в зависимости от конкретного вида сомножителей и произведения. У. целых

положительных чисел есть, по определению, действие, относящее числам a и b третье число c, равное сумме b слагаемых, каждое из к-рых равно a, так что $ab=a+a+\ldots+a$ (b слагаемых). Число a наз. м н о ж и м ы м, b — м н о ж и т е л е м.

У. дробных чисел $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ определяется равенством $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}$. У. рациональных чисел даёт число, абсолютная величина к-рого равна произведению абсолютных величин сомножителей, имеющее знак плюс (+), если оба сомножителя одинакового знака, и знак минус (—), если они разного знака. У. иррациональных чисел определяется при помощи У. их рациональных приближений. У. комплексных чисел, заданных в форме $\alpha=a+bi$ и $\beta=c+di$, определяется равенством $\alpha\beta=ac-bd+(ad+bc)i$. При У. комплексных чисел, записанных в тригонометрич. форме

$$\alpha=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$
$$\beta=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$\alpha\beta=r_1r_2\{\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\}.$$

У. чисел однозначно и обладает следующими свойствами: 1) $ab=ba$ (коммутативность, переместительный закон); 2) $a(bc)=(ab)c$ (ассоциативность, сочетательный закон); 3) $a(b+c)=ab+ac$ (дистрибутивность, распределительный закон). При этом всегда $a\cdot0=0$; $a\cdot1=a$. Указанные свойства лежат в основе обычной техники У. многозначных чисел.

Дальнейшее обобщение понятия У. связано с возможностью рассматривать числа как операторы в совокупности векторов на плоскости. Напр., комплексному числу $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ соответствует оператор растяжения всех векторов в r раз и поворота их на угол φ вокруг начала координат. При этом У. комплексных чисел отвечает У. соответствующих операторов, т. е. результатом У. будет оператор, получающийся последовательным применением двух данных операторов. Такое определение У. операторов переносится и на другие виды операторов, к-рые уже нельзя выразить при помощи чисел (напр., линейные преобразования). Это приводит к операциям У. матриц, кватернионов, рассматриваемых как операторы поворота и растяжения в трёхмерном пространстве, ядер интегральных операторов и т. д. При таких обобщениях могут оказаться невыполненными нек-рые из перечисленных выше свойств У., чаще всего — свойство коммутативности. Изучение общих свойств операции У. входит в задачи общей алгебры, в частности теории групп и колец.

УМНОЖЕ́НИЕ ВЕРОЯ́ТНОСТЕЙ — см. *Вероятностей теория*.

УНА́РНАЯ ОПЕРА́ЦИЯ (от лат. unarius — единичный) — см. *Алгебраическая операция*.

УНИВЕРСА́ЛЬНАЯ А́ЛГЕБРА (от лат. universalis — общий, всеобщий) — непустое множество, на котором заданы некоторые алгебраические операции. Другими словами, У. а.— это алгебраич. система с пустым множеством отношений. Определения подалгебры, гомоморфизма, эндоморфизма, изоморфизма, автоморфизма и прямого произведения для У. а. фактически повторяют подобные определения для *алгебраических систем*. Эквивалентность θ на У. а. A наз. к о н г р у э н ц и е й, если она перестановочна со всеми операциями этой алгебры, т. е. для любой n-арной операции ω из того, что $(x_i, y_i)\in\theta$, $i=1, \ldots, n$, вытекает, что

$$(\omega(x_1, \ldots, x_n), \omega(y_1, \ldots, y_n))\in\theta.$$

Подалгебры (а также конгруэнции) У. а. A образуют решётку $\mathrm{Sub}\,A$ (соответственно $\mathrm{Con}\,A$). Эти две решётки, а также моноид всех эндоморфизмов $\mathrm{End}\,A$ и группа $\mathrm{Aut}\,A$ всех автоморфизмов алгебры A наз. сопутствующими структурами У. а. Исследование связи свойств этих структур со свойствами самой У. а. A — одна из важных задач теории У. а.

Класс $\mathfrak{K}$ У. а. наз. м н о г о о б р а з и е м, если существует такая система тождеств Σ, что У. а. принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда в ней справедливы все тождества из Σ. Класс У. а. является многообразием тогда и только тогда, когда он вместе с любыми своими алгебрами содержит также все их подалгебры, факторалгебры и всевозможные их прямые произведения (т е о р е м а Б и р к г о ф а). Другими словами, многообразия — это классы алгебр, замкнутые относительно операций взятия подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. Примерами многообразий служат классы всех групп, всех колец, всех абелевых групп, всех колец с нулевым умножением и т. д. Класс всех конечных групп, а также класс всех периодич. групп многообразиями не являются.

У. а. F наз. с в о б о д н о й а л г е б р о й класса $\mathfrak{K}$, если она принадлежит этому классу и обладает с в о б о д н о й п о р о ж д а ю щ е й с и с т е м о й (или б а з о й) X, т. е. таким множеством X порождающих, что всякое отображение множества X в любую алгебру A из $\mathfrak{K}$ продолжается до гомоморфизма из F в A. Напр., кольцо многочленов с целочисленными коэффициентами от одного переменного x является свободной алгеброй в классе всех колец, причём его базой служит одноэлементное множество $\{x\}$. Свободная алгебра существует в каждом многообразии. Свободная алгебра класса, состоящего из всех У. а. данной сигнатуры, наз. а б с о л ю т н о с в о б о д н о й. Она изоморфна алгебре всех слов в рассматриваемой сигнатуре. Всякая свободная У. а. класса $\mathfrak{K}$ является гомоморфным образом абсолютно свободной. Естествен вопрос: какие слова переходят при этом в один и тот же элемент? В нек-рых случаях ответ почти тривиален (полугруппы, кольца, группы, ассоциативные алгебры), в других — достаточно сложен (алгебры Ли, решётки, булевы алгебры), а иногда не поддаётся решению (альтернативные кольца).

● К о н П., Универсальная алгебра, пер. с англ., М., 1968; К у р о ш А. Г., Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; С к о р н я к о в Л. А., Элементы общей алгебры, М., 1983.

УНИВЕРСА́ЛЬНАЯ ОБЁРТЫВАЮЩАЯ А́ЛГЕБРА — см. *Ли алгебра*.

УНИВЕРСА́ЛЬНОЕ МНО́ЖЕСТВО, у н и в е р с у м,— некоторое множество, фиксированное в рамках данной математической теории и содержащее в качестве элементов все объекты, рассматриваемые в этой теории. Напр., для элементарной арифметики У. м. является множество всех целых чисел. Особую роль играет понятие У. м. в теории множеств. Объектами исследования в ней являются множества; поэтому У. м. здесь будет совокупностью всех множеств, однако само оно уже не является множеством, т. е. не может быть объектом рассмотрения в теории множеств. На это указывают парадоксы, связанные с понятием множества всех множеств (например, антиномия Кантора).

УНИКУРСА́ЛЬНАЯ КРИВА́Я (от лат. unus — один и cursus — бег, путь) — плоская кривая, которая может быть задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — рациональные функции параметра t. Если алгебраич. кривая имеет максимальное число двойных точек, допускаемое её порядком, то она уникурсальна, и обратно: всякая У. к. является алгебраич. кривой с максимальным числом двойных точек, допускаемым её порядком. В формулировке этих теорем предполагается, что точки высшей кратности пересчитаны по определённым правилам на двойные (напр., одна тройная точка эквивалентна трём двойным).

Максимальное число двойных точек, к-рое может иметь алгебраич. кривая n-го порядка, равно $(n-1)(n-2)/2=\delta$. Если кривая n-го порядка имеет r двойных точек, то разность $\delta-r$, т. е. число двойных точек, недостающее до максимального числа, наз. р о д о м этой кривой. У. к. может быть также поэтому определена как алгебраич. кривая, род к-рой равен нулю. Прямая линия и линия 2-го порядка не могут иметь двойных точек, следовательно, они всегда уникурсальны. Линия 3-го порядка уникурсальна, если она имеет одну двойную точку, таков, напр., *декартов лист*.

Линия 4-го порядка уникурсальна, если она имеет три двойные точки, и т. д.

При подсчёте двойных точек нельзя основываться на внешнем виде линии, т. к. двойные точки могут быть бесконечно удалёнными или мнимыми. Напр., линия 4-го порядка — лемниската Бернулли имеет одну лишь действительную двойную точку, но она имеет ещё две двойные точки в мнимых круговых точках и, следовательно, уникурсальна.

УНИМОДА́ЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ, одновершинное распределение,— распределение вероятностей с одной *модой*.

УНИМОДУЛЯ́РНАЯ ГРУ́ППА (от лат. unus — один и *модуль*), специальная линейная группа,— группа, состоящая из всех унимодулярных матриц n-го порядка, или изоморфная ей группа всех *унимодулярных преобразований* n-мерного векторного пространства.

УНИМОДУЛЯ́РНАЯ МА́ТРИЦА — квадратная матрица, определитель которой равен единице. Иногда, при рассмотрении матриц над коммутативным кольцом, под У. м. понимают обратимую матрицу.

УНИМОДУЛЯ́РНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства, матрица которого унимодулярна. У. п. сохраняет ориентированные объёмы областей. У. п. составляют нормальную подгруппу в группе всех невырожденных линейных преобразований.

УНИТА́РНАЯ ГРУ́ППА (франц. unitaire, от лат. unitas — единство) — группа всех унитарных преобразований унитарного пространства. См. также *Классическая группа*.

УНИТА́РНАЯ МА́ТРИЦА — квадратная матрица $A=\|a_{ik}\|_1^n$ над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, строки которой образуют ортонормированную систему, т. е.

$$a_{i1}\overline{a}_{k1}+\ldots+a_{in}\overline{a}_{kn}=\begin{cases}1 & \text{при } i=k,\\ 0 & \text{при } i\neq k,\end{cases}$$

$i,\ k=1,\ldots,\ n$. С помощью У. м. осуществляется переход от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису в унитарном пространстве. У. м. служат также матрицами унитарных преобразований в ортонормированном базисе. Квадратная матрица A с комплексными элементами унитарна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет любому из четырёх следующих условий:

$$A^*A=E,\quad AA^*=E,\quad A^*=A^{-1},$$

столбцы матрицы A образуют ортонормированную систему; здесь A^* — сопряжённая с A матрица. Определитель У. м. есть комплексное число, модуль к-рого равен единице.

УНИТА́РНОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — линейное преобразование A унитарного пространства L, сохраняющее скалярное произведение векторов, т. е. такое, что для любых векторов x и y из L имеет место равенство

$$(Ax,\ Ay)=(x,\ y).$$

У. п. сохраняет, в частности, длину вектора. Обратно, если линейное преобразование унитарного пространства сохраняет длины всех векторов, то оно унитарно. Собственные значения У. п. равны по модулю 1; собственные подпространства, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Линейное преобразование A конечномерного унитарного пространства L является У. п. тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет любому из следующих условий:

1) в любом ортонормированном базисе преобразованию A соответствует унитарная матрица,

2) A переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный,

3) в L существует ортонормированный базис, состоящий из собственных для A векторов, причём соответствующая A в этом базисе диагональная матрица имеет диагональные элементы, равные по модулю 1.

У. п. данного унитарного пространства образуют относительно умножения преобразований группу (наз. унитарной группой).

УНИТА́РНОЕ ПРОСТРА́НСТВО, эрмитово пространство, комплексно евклидово пространство,— векторное пространство над полем комплексных чисел, в котором задано скалярное умножение векторов (предполагается, что произведение $(a,\ b)$ векторов a и b — комплексное число) и выполняются следующие аксиомы:

1) $(a,\ b)=\overline{(b,\ a)}$;

2) $(\alpha a,\ b)=\alpha(a,\ b)$;

3) $(a+b,\ c)=(a,\ c)+(b,\ c)$;

4) если $a\neq 0$, то $(a,\ a)>0$, т. е. скалярный квадрат ненулевого вектора есть положительное действительное число.

У. п. не предполагается конечномерным. В У. п. точно так же, как и в евклидовых пространствах, вводятся понятия ортогональности и ортонормированной системы векторов, а в конечномерном случае доказывается существование ортонормированного базиса.

УНИТА́РНЫЙ МО́ДУЛЬ — модуль над кольцом с единицей такой, что умножение на единицу 1 кольца совпадает с тождественным отображением модуля (т. е. для всех элементов a модуля $1\cdot a=a$ в случае левого модуля или $a\cdot 1=a$ в случае правого модуля).

УНИТА́РНЫЙ ОПЕРА́ТОР — линейный оператор U, отображающий нормированное пространство X на нормированное пространство Y и такой, что $\|Ux\|_Y=\|x\|_X$. Наиболее важными являются У. о., отображающие гильбертово пространство H в себя. Такой оператор унитарен тогда и только тогда, когда $(x,\ y)=(Ux,\ Uy)$ для всех $x,\ y\in H$. Другими характеристич. признаками унитарности оператора $U:H\to H$ являются: 1) $U^*U=UU^*=I$, т. е. $U^{-1}=U^*$, где U^* — сопряжённый оператор; 2) спектр оператора U лежит на единичной окружности, и имеет место спектральное разложение $U=\int_0^{2\pi}e^{i\varphi}dE_\varphi$. Совокупность У. о., действующих в H, образует группу.

Примером У. о. и его обратного в пространстве $L_2(-\infty,\ \infty)$ являются взаимно обратные преобразования Фурье.

УНИФОРМИЗА́ЦИЯ (от лат. uniformis — единообразный) — представление многозначной аналитической функции $w=f(z)$ через однозначные аналитические функции $w=w(t),\ z=z(t)$ некоторого параметра t. Напр., двузначная аналитич. функция $w=\sqrt{1-z^2}$, определяемая алгебраич. уравнением $w^2+z^2-1=0$ степени 2, униформизируется посредством пары однозначных функций параметра t:

$$w=\frac{2t}{1+t^2},\quad z=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad\text{или}\quad w=\cos t,\ z=\sin t.$$

Вообще, локальная У. алгебраич. функций степени k, задаваемых алгебраич. уравнением степени k по w, т. е. У. в окрестности нек-рой точки $(z_0,\ w_0)$, легко достигается с помощью введения униформизирующего параметра $t=\sqrt[k]{z-z_0}$. Трудность проблемы У. состоит в отыскании параметра, униформизирующего функцию $w=f(z)$ «в целом», т. е. во всей области её значений. Для алгебраич. функций степени 2 У. в целом всегда можно осуществить при помощи рациональных или тригонометрич. функций; для степеней 3 и 4 — с добавлением эллиптич. функций; для степеней $k>4$ — с добавлением автоморфных функций.

УПЛОЩЕ́НИЯ ТО́ЧКА — см. *Параболическая точка*.

УПОРЯ́ДОЧЕННОЕ ВЕ́КТОРНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — векторное пространство X над $\mathbb{R}$, в котором определено бинарное отношение порядка $\geqslant$, причём $x\geqslant y$ влечёт $x+z\geqslant y+z$ для любого $z\in X$ и $\lambda x\geqslant\lambda y$ для любого $\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\geqslant 0$. Множество $X_+=\{x\in X,\ x>0\}$ наз. положительным конусом (и поэтому У. в. п. наз. также пространством с конусом). У. в. п., в к-ром всякое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань (точную верхнюю границу), наз. порядково полным.

Тогда и всякое ограниченное снизу множество имеет нижнюю грань (точную нижнюю границу).

Пример. Векторная решётка — У. в. п., в к-ром каждое двухэлементное множество имеет верхнюю (а тогда и нижнюю) грань. Порядково полная векторная решётка наз. пространством Канторовича (*К-пространством*).

УПОРЯДОЧЕННОЕ МНОЖЕСТВО — множество, на котором задано *порядка отношение* (линейного или частичного, строгого или нестрогого). См. *Линейно упорядоченное множество*, *Частично упорядоченное множество*.

УПРАВЛЕ́НИЕ, управляющая функция,— функция, входящая в дифференциальное уравнение, значения которой в каждый момент времени могут выбираться произвольным образом. См. *Вариационное исчисление*, *Оптимальное управление*.

УПРАВЛЕ́НИЕ ЗАПАСАМИ — раздел исследования операций, посвящённый изучению математических моделей процессов хранения, пополнения и расходования запасов различных ресурсов. Модели У. з. охватывают реальные ситуации, возникающие в различных областях экономики, организации и планирования производства, стандартизации, торговли, снабжения, управления водными ресурсами, в области военного дела. При этом под «запасами» могут пониматься сырьё, полуфабрикаты, запасные части, предметы потребления, рабочая сила и т. п. Эти объекты могут быть одного или нескольких видов, в зависимости от чего различают однопродуктовые и многопродуктовые задачи У. з.

Общая схема задачи У. з. состоит в следующем. Имеется система хранения запасов (напр., склад), функционирующая во времени (время может быть как дискретным, так и непрерывным). В нек-рые моменты возникает спрос, удовлетворяемый за счёт имеющихся запасов (в нек-рых моделях У. з. допускается также «задалживание»). В некрые другие моменты производится проверка состояния системы и принимаются решения о моментах производства заказов для пополнения запасов (если такое пополнение необходимо) и об объёмах этих заказов. Последовательность таких решений наз. политикой У. з.

Функционирование системы У. з. требует затрат трёх типов: а) затраты на выполнение заказа, включающие расходы, связанные с доставкой заказа, расходы на подготовительно-заключительные операции и т. п.; б) затраты, связанные с хранением запасов (включая, возможно, также омертвление капитала в запасах); в) затраты (потери) от неудовлетворённого спроса. Целью анализа модели является нахождение оптимальной политики заказов, минимизирующей суммарные затраты (в стохастич. случае — их математич. ожидание).

В теории У. з. нет универсальной модели, охватывающей всё разнообразие её задач. Разработан широкий спектр моделей, классифицируемых по ряду признаков, к числу к-рых относятся следующие:

1) характер спроса: детерминированный, стохастический (стационарный и нестационарный) и неопределённый;

2) характер поступления и использования запасов: непрерывные или дискретные схемы поступления и расходования;

3) способы учёта состояния запасов: непрерывный и состоящий в периодич. проверках;

4) принятый тип политики заказа: политика фиксированного размера заказа, политика постоянного уровня запасов, политика двух уровней, или так называемая (s, S)-политика (последняя характеризуется тем, что если уровень запаса понижается до s, то производится заказ на пополнение запаса до уровня S);

5) характер выполнения сделанного заказа: мгновенно, с фиксированным запаздыванием, со случайным запаздыванием;

6) способ функционирования системы при превышении спроса над наличным запасом (неудовлетворённый спрос может «теряться», его удовлетворение может откладываться или задалживаться);

7) порядок принятия решений: одноэтапные и многоэтапные решения, чему соответствуют статич. и динамич. модели У. з.

Первые попытки математич. моделирования задач У. з. относятся к нач. 20 в. Были получены формулы для размера партии, минимизирующего суммарные издержки на выполнение заказа и хранение запасов при известном спросе. Один из простейших вариантов такой модели состоит в следующем. Пусть c_1 — издержки выполнения одного заказа независимо от его размера q, c_2 — годовые издержки хранения единицы запаса, спрос детерминирован и интенсивность поступления требований равна λ единиц в год. Тогда издержки выполнения заказа, приходящиеся на единицу заказа, равны c_1/q, средний годовой уровень запасов равен $q/2$, а суммарные годовые издержки E, связанные с выполнением заказов и хранением запасов, запишутся в виде

$$E = \frac{c_1}{q}\lambda + c_2\frac{q}{2},$$

откуда наиболее экономичным размером заказа будет

$$q^* = \sqrt{\frac{2\lambda c_1}{c_2}}.$$

Момент заказа определяется как сумма страхового запаса, рассчитанного на случай дефицита, и спроса за время реализации заказа и время пересмотра запаса.

УПРАВЛЕ́НИЯ ОБЪЕ́КТ — см. *Кибернетика*.

УПРАВЛЯ́ЮЩАЯ СИСТЕ́МА — одно из центральных понятий кибернетики. Так называются объекты, к-рые имеют определённую структуру и обладают нек-рыми функциональными свойствами, отражающими их информационную природу. Понятие У. с. относится к числу понятий, к-рые невозможно полностью объяснить, используя только математич. конструкции, поэтому для обсуждения этого понятия необходимо иметь интуитивное представление о них. Вот примеры физических (неформальных) У. с.:

нервная ткань, представляющая определённую структуру из нейронов и осуществляющая преобразование раздражений, идущих из внешней среды, в определённые воздействия на органы;

ЭВМ, являющаяся нек-рым соединением элементов и способная выполнять данный перечень элементарных актов (команд);

химич. молекула, характеризуемая определённой конфигурацией атомов и обладающая интересующим нас перечнем свойств;

шахматная позиция, задаваемая расположением фигур на доске и набором допустимых ходов одного из партнёров;

фраза русского языка, представляющая определённое соединение грамматич. элементов (синтаксис) и обладающая нек-рым смыслом, заложенным автором (семантика).

Каждый из упомянутых объектов выступает как единство нек-рой структуры (или схемы) и определённых свойств или функций. При рассмотрении объектов как У. с. интересуются главным образом их схемно-функциональными характеристиками, не принимая во внимание остальные их качества. Поэтому две У. с., имеющие в нек-ром смысле одинаковые схемы и одинаковое функционирование, не различаются.

Математич. развитие понятия У. с. состоит в уточнении понятия схемы и понятия функции, а также нек-рых других деталей, связанных с учётом информации и расположения частей У. с. Схема У. с. представляет собой нек-рое соединение элементов, каждый из к-рых связан с заданной памятью, образуя в ней т. н. элементарные подсхемы. Состояния памяти, принимаемые из нек-рого конечного (или счётного) множества, задают информацию У. с. Расположение схемы характеризуется набором координат (также из конечного или счётного множества) её элементов. Наконец, функция У. с. определяет возможные преобразования У. с., происходящие (детерминированно или стохастически) в моменты времени, принадле-

жащие нек-рой дискретной (не более чем счётной) шкале. Эти преобразования могут изменять информацию (перерабатывая состояния памяти), осуществлять движение У. с. (изменяя координаты элементов), изменять схему (структуру) и функцию (поведение).

Примеры показывают, что схема и функция в У. с. могут иметь разнообразный смысл. Благодаря этому У. с. позволяют описывать физич. У. с. адекватным образом, т. е. с сохранением их функциональных свойств и их структуры (схемы). Поэтому У. с. являются мощным средством для моделирования, при к-ром достаточно точно копируется не только функция объекта, но и его схема.

У. с. как математич. модели исходных физич. У. с., изучаемых в кибернетике, обладают рядом характерных черт. Прежде всего они являются объектами дискретной природы. Дискретными являются и схема, и её координаты, и информация, и функция, и время. Для У. с., требующих специальных кибернетич. рассмотрений, характерна большая сложность. Эта с л о ж н о с т ь У. с. проявляется в том, что У. с. может иметь большое количество элементов, сложную структуру их связей, большую и сложно организованную память (и тем самым сложную информацию), сложное функционирование.

Основная проблематика теории У. с. группируется вокруг трёх проблем: проблема синтеза, проблема эквивалентных преобразований У. с., проблема *надёжности и контроля управляющих систем.* *С. В. Яблонский.*

УРАВНЕ́НИЕ — аналитическая запись задачи о разыскании значений аргументов, при которых значения двух данных функций равны. Аргументы, от к-рых зависят эти функции, наз. обычно н е и з в е с т н ы м и, а значения неизвестных, при к-рых значения функций равны,— р е ш е н и я м и (к о р н я м и) у р а в н е н и я; о таких значениях неизвестных говорят, что они удовлетворяют данному У. Напр., $3x-6=0$ является У. с одним неизвестным, а $x=2$ есть его решение; $x^2+y^2=25$ является У. с двумя неизвестными, а $x=3$, $y=4$ есть одно из его решений. Совокупность решений данного У. зависит от области M значений, допускаемых для неизвестных. У. может не иметь решений в M, тогда оно наз. н е р а з р е ш и м ы м в области M. Если У. разрешимо, то оно может иметь одно, или несколько, или даже бесконечное множество решений. Напр., У. $x^4-4=0$ неразрешимо в области рациональных чисел, но имеет два решения $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$ в области действительных чисел, четыре решения $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=-\sqrt{2}$, $x_3=i\sqrt{2}$, $x_4=-i\sqrt{2}$ в области комплексных чисел. У. $\sin x=0$ имеет бесконечное множество решений $x_k=k\pi$ ($k=\pm0, \pm1, \pm2, \ldots$) в области действительных чисел. Если У. имеет решениями все числа области M, то оно наз. т о ж д е с т в о м в области M. Напр., У. $x=\sqrt{x^2}$ является тождеством в области неотрицательных чисел и не является тождеством в области действительных чисел.

Совокупность У., для к-рых требуется найти значения неизвестных, удовлетворяющие одновременно всем этим У., наз. с и с т е м о й У.; значения неизвестных, удовлетворяющих одновременно всем У. системы,— р е ш е н и я м и с и с т е м ы. Напр., совокупность У. $x+2y=5$, $2x+y-z=1$ является системой двух У. с тремя неизвестными; одним из решений этой системы является $x=1$, $y=2$, $z=3$.

Две системы У. (или два У.) наз. р а в н о с и л ь н ы м и, если каждое решение одной системы (одного У.) является решением другой системы (другого У.), и наоборот, причём обе системы (оба У.) рассматриваются в одной и той же области. Напр., У. $x-4=0$ и $2x-8=0$ равносильны, т. к. решением обоих У. является лишь $x=4$. Процесс разыскания решений У. заключается обычно в замене У. равносильным. В нек-рых случаях приходится заменять данное У. другим, для к-рого совокупность решений шире, чем у данного У. Решения нового У., не являющиеся решениями данного У., наз. п о с т о р о н н и м и р е ш е н и я м и (к о р н я м и). Напр., возводя в квадрат У. $\sqrt{x-3}=-2$, получают У. $x-3=4$, решение к-рого $x=7$ является посторонним для исходного У. Поэтому если при решении У. делались действия, могущие привести к появлению посторонних решений (напр., возведение У. в квадрат), то все полученные решения преобразованного У. проверяют подстановкой в исходное У.

Наиболее изучены У., для к-рых функции f_k являются многочленами от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$,— *алгебраические уравнения.*

Если $f(x)$ — трансцендентная функция, то У. $f(x)=0$ наз. *трансцендентным уравнением*, причём в зависимости от вида $f(x)$ оно наз. *тригонометрическим уравнением, логарифмическим уравнением, показательным уравнением.* Рассматриваются также *иррациональные уравнения.*

Среди систем У. простейшими являются системы *линейных уравнений.* Решение системы У. (не обязательно линейных) сводится, вообще говоря, к решению одного У. при помощи т. н. исключения неизвестных (см. *Исключения теория*).

В аналитич. геометрии одно У. с двумя неизвестными интерпретируется при помощи линии на плоскости, координаты всех точек к-рой удовлетворяют данному У. Одно У. с тремя неизвестными интерпретируется при помощи поверхности в трёхмерном пространстве. При этой интерпретации решение системы У. совпадает с задачей о разыскании точек пересечения линий, поверхностей и т. д.; У. с бо́льшим числом неизвестных интерпретируются при помощи многообразий в n-мерных пространствах.

В теории чисел рассматриваются т. н. *диофантовы уравнения*, то есть У. с несколькими переменными, для к-рых ищутся целые или же рациональные решения. Напр., целые решения У. $x^2+y^2=z^2$ имеют вид $x=m^2-n^2$, $y=2mn$, $z=m^2+n^2$, где m и n — целые числа.

С наиболее общей точки зрения У. является записью задачи о разыскании таких элементов a нек-рого множества A, что $F(a)=\Phi(a)$, где F и Φ — заданные отображения множества A в множество B. Если множества A и B являются множествами чисел, то возникают У. рассмотренного выше вида. Если A и B — множества точек в многомерных пространствах, то получаются системы У., если же A и B — множества функций, то в зависимости от характера отображений могут получаться также *дифференциальные уравнения, интегральные уравнения* и другие виды У. Наряду с вопросами нахождения решений У. (в общей теории У.) различного вида изучаются вопросы существования и единственности решения, непрерывной зависимости его от тех или иных данных и т. д.

У́РНА в к о м б и н а т о р и к е — см. *Размещение.*

У́РОВНЯ МНО́ЖЕСТВО ф у н к ц и и — множество точек пространства, на котором эта функция имеет постоянное значение.

УРЫСО́НА ЛЕ́ММА: для любых двух непересекающихся замкнутых множеств A и B нормального пространства X существует действительная и непрерывная во всех точках этого пространства функция f, принимающая во всех точках множества A значение 0, во всех точках множества B значение 1 и удовлетворяющая во всех точках $x\in X$ неравенству $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. Эта лемма выражает не только необходимое, но и достаточное условие для того, чтобы T_1-пространство X было нормальным.

Установлена П. С. Урысоном (1924).

УРЫСО́НА МЕТРИЗАЦИО́ННАЯ ТЕОРЕ́МА: 1) бикомпактное или счётнокомпактное хаусдорфово пространство тогда и только тогда метризуемо, когда оно имеет счётную базу.

2) Топологич. пространство со счётной базой тогда и только тогда метризуемо, когда оно нормально и (добавление А. Н. Тихонова) даже когда оно только регулярно.

Обе теоремы установлены П. С. Урысоном (1923).

УСЕЧЁННАЯ ПИРАМИ́ДА — см. *Пирамида.*

УСЕЧЁННАЯ ПРИ́ЗМА — см. *Призма.*

УСЕЧЁННЫЙ КО́НУС — см. *Конус.*

УСЕЧЁННЫЙ ЦИЛИ́НДР — см. *Цилиндр.*

УСЛО́ВНАЯ ВЕРОЯ́ТНОСТЬ — характеристика связи двух событий; см. *Вероятностей теория, Независимость.*

УСЛО́ВНАЯ ДИСПЕ́РСИЯ — см. *Регрессия.*

УСЛО́ВНАЯ СХОДИ́МОСТЬ — частный случай сходимости рядов. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ наз. условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из абсолютных величин его членов, расходится. Напр., ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно, т. к. ряд из его абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Если ряд условно сходится, то ряды, составленные из его положительных и отрицательных членов, расходятся. Путём изменения порядка членов условно сходящегося ряда можно получить ряд, сходящийся к любой наперёд заданной сумме, или расходящийся ряд (теорема Римана). При почленном умножении двух условно сходящихся рядов может получиться расходящийся ряд. Понятие «У. с.» обобщается на ряды векторов, бесконечные произведения, а также на несобственные интегралы.

УСЛО́ВНОЕ МАТЕМАТИ́ЧЕСКОЕ ОЖИДА́НИЕ — см. *Корреляция, Регрессия.*

УСЛО́ВНОЕ РАВЕ́НСТВО — см. *Рекурсивная функция.*

УСЛО́ВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — см. *Распределение* вероятностей.

УСЛО́ВНЫЕ УРАВНЕ́НИЯ — см. *Наименьших квадратов метод.*

УСЛО́ВНЫЙ ЭКСТРЕ́МУМ, относительный экстремум, — экстремум функции $f(x_1, \ldots, x_{n+m})$ от $n+m$ переменных в предположении, что эти переменные подчинены m уравнениям связи (условиям):

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_{n+m}) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \qquad (*)$$

Точнее, функция f имеет У. э. в точке M, координаты к-рой удовлетворяют уравнениям (*), если её значение в точке M является наибольшим или наименьшим по сравнению со значениями f в точках нек-рой окрестности точки M, координаты к-рых удовлетворяют уравнениям (*). Геометрически в простейшем случае У. э. функции $f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y)=0$ является наивысшей или наинизшей (по сравнению с близлежащими точками) точкой линии, лежащей на поверхности $z=f(x, y)$ и проектирующейся на плоскость xOy в кривую $\varphi(x, y)=0$. В точке У. э. линия $\varphi(x, y)=0$ либо имеет особую точку, либо касается соответствующей линии уровня функции $f(x, y)$. При нек-рых дополнительных условиях на уравнения связи (*) разыскание У. э. функции f можно свести к разысканию обычного экстремума функции, выразив $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ из уравнений (*) через $x_1, \ldots, x_n$ и подставив эти выражения в функцию f. Другой метод решения — *Лагранжа множителей метод.*

Задачи на У. э. возникают во многих вопросах геометрии (напр., разыскание прямоугольника наименьшего периметра, имеющего заданную площадь), механики и т.д.

Многие задачи вариационного исчисления приводят к разысканию экстремумов функционалов при условии, что другие функционалы имеют заданное значение (см., напр., *Изопериметрическая задача*), или же к задаче о разыскании экстремума функционала в классе функций, удовлетворяющих нек-рым уравнениям связи, и т. д. Решение таких задач также проводится методом множителей Лагранжа.

«УСПЕ́ХИ МАТЕМАТИ́ЧЕСКИХ НАУ́К» — научный журнал, издаваемый в Москве АН СССР и Московским матем. об-вом. В 1936—44 издавался как сборник (вышло 10 выпусков). С 1946 издаётся новая серия; выходит 6 выпусков в год. Журнал помещает научные обзоры в области математики и сообщения информационного характера. Тираж (1987) ок. 2400 экз.

УСТО́ЙЧИВОГО ТИ́ПА ОСО́БАЯ ТО́ЧКА дифференциального уравнения — см. *Особая точка* дифференциального уравнения.

УСТО́ЙЧИВОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ — распределение вероятностей, обладающих свойством, что для любых $a_1>0$, b_1, $a_2>0$, b_2 имеет место соотношение

$$F(a_1x+b_1) * F(a_2x+b_2) = F(ax+b),$$

где $a>0$ и b — нек-рые постоянные, F — функция распределения У. р., $*$ — символ операции свёртки двух функций распределения. Характеристич. функция У. р.

$$\varphi(t) = \exp\left\{ idt + c|t|^{\alpha}\left[1 + i\beta\,\frac{t}{|t|}\,\omega(t, \alpha)\right]\right\},$$

где $0<\alpha<2$, $-1\leqslant\beta\leqslant 1$, $c\geqslant 0$, d — любое действительное число, и

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}\ln|t| & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Число α наз. показателем устойчивого распределения. У. р. с показателем $\alpha=2$ является *нормальное распределение*, примером У. р. с показателем $\alpha=1$ служит *Коши распределение*, У. р.— *безгранично делимое распределение.*

УСТО́ЙЧИВОСТЬ — термин, не имеющий чётко определённого содержания.

1) У. применительно к движению — характер поведения системы на бесконечном промежутке времени. Этот характер движения выражается следующим образом.

а) Как свойство движущейся системы в том или ином смысле мало отклоняться от нек-рого движения при малых возмущениях начального положения системы, причём малость отклонения равномерна. В других рассмотрениях У. движения есть свойство движущейся системы мало отклоняться от нек-рого движения при малых возмущениях как начального положения системы, так и самого закона движения. Иногда малые возмущения начального положения берутся не любые, а подчинённые нек-рому дополнительному условию; иногда малость возмущения и отклонения измеряется лишь по нек-рым параметрам.

б) Как свойство системы сохранять нек-рые черты фазового портрета при малых возмущениях закона движения.

в) Как свойство системы в процессе движения оставаться в ограниченной области фазового пространства.

г) Как свойство системы в процессе движения сколь угодно поздно возвращаться сколь угодно близко к своему начальному положению.

2) У. применительно к геометрическим или иным объектам, зависящим от параметров,— непрерывная зависимость этих объектов от параметров.

Совокупность взглядов, представлений, идей, понятий, рассуждений, методов, теорий (содержащих определения, леммы, теоремы и доказательства), возникших и возникающих с целью изучения У. движения (понимаемого в самом общем смысле), и составляет теорию У.

УСТО́ЙЧИВОСТЬ ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНОГО АЛГОРИ́ТМА — равномерная относительно h и m ограниченность операторов Λ_m^h и функций φ_m^h в системе частично разрешённых уравнений

$$\Lambda_m^h y_m^h = \varphi_m^h, \quad m = 0, 1, \ldots, M, \qquad (1)$$

описывающих последовательные этапы вычислительного алгоритма решения уравнения

$$L^h u^h = f^h \qquad (2)$$

(напр., сеточного уравнения, тогда h — шаг сетки). Здесь Λ_M^h — тождественный оператор, $\varphi_M^h = (L^h)^{-1} f^h = u^h$, т. е. на M-м этапе алгоритма получается окончательное решение уравнения.

На неформальном языке У. в. а. означает относительно слабое влияние ошибок округления в процессе решения задачи на результат. Однако не исключено, что величина $p(h) = \max_m \|\Lambda_m^h\|$ растёт сравнительно медленно, например $p(h) = O(h^{-r})$, где $r>0$, и соответствующее усиление вли-

яния вычислительной погрешности при $h\to 0$ оказывается практически допустимым (т. н. слабая неустойчивость).

В случае итерационных алгоритмов Λ_m^h — тождественный оператор и уравнение (1) принимает вид

$$y_m^h = \varphi_m^h, \quad m=1, 2, \ldots, \qquad (3)$$

где φ_m^h зависит от y_{m-1}^h, причём для сходящегося процесса $\varphi_m^h \to u^h$ при $m\to\infty$. В этом случае устойчивость алгоритма понимается как ограниченность величины $q(h)=\sup\limits_m \|\varphi_m^h\|$ при $h\to 0$.

Имеется другое определение устойчивости итерационного алгоритма, основанное на учёте числа «запасных знаков» при приближённом вычислении по формуле (3).

УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ — одно из основных понятий теории разностных (сеточных) методов, характеризующее непрерывную зависимость решений разностных схем по отношению к выходной информации. Точнее, пусть разностная схема (разностный или сеточный аналог исходной задачи) использует множество сеток Ω_h с $h\in\{h\}$ в пространстве независимых переменных для исходной задачи, где параметр h является элементом нек-рого нормированного пространства и характеризует конкретную используемую сетку. Пусть такой сетке Ω_h соответствует N_h-мерное пространство U_h и операторное уравнение в U_h (система разностных уравнений)

$$L_h(u_h)=f_h, \quad h\in\{h\}, \qquad (*)$$

в к-ром $f_h\in U_h$ и оператор L_h заданы. Пусть u_h и f_h — элементы нормированных пространств H_h и F_h соответственно, а оператор L_h — линейный. Тогда говорят, что разностная схема устойчива, если: 1) для любого $h\in\{h\}$ существует L_h^{-1}; 2) существует константа $K>0$, не зависящая от h и такая, что

$$\|L_h^{-1}\|_{F_h\to H_h}\leqslant K, \quad h\in\{h\}.$$

Это определение равносильно корректности (*): решение (*) существует и единственно при любой правой части f_h и равномерно (по h), непрерывно зависит от f_h в смысле пространств H_h и F_h. Оно же на языке априорных оценок означает наличие константы K, не зависящей от h и такой, что для любого решения (*) имеет место априорная оценка

$$\|u_h\|_{H_h}\leqslant K\|f_h\|_{F_h}.$$

Если разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу в смысле пространства F_h, то она является и сходящейся с оценкой погрешности

$$\|z_h\|_{H_h}\leqslant K\|\xi_h\|_{F_h},$$

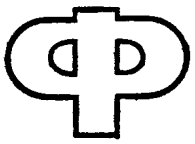
где z_h — погрешность схемы, а ξ_h — погрешность аппроксимации. Специфика разностных схем для нестационарных задач, определяемая их расслоением, проявляется существенным образом и при определении устойчивости, требуя в этом случае выбора норм в пространствах H_h и F_h, выражаемых через нормы сеточных функций на отдельных слоях по времени. Она же проявляется и при исследовании устойчивости, в к-ром особая роль отводится получению рекуррентных соотношений, связывающих нормы погрешности на соседних слоях. В теории У. р. с. выделяют условно устойчивые разностные схемы типа явных схем для уравнения теплопроводности, в к-рых устойчивость имеется лишь при ограничениях типа $\tau/h^2\leqslant k$ (τ — шаг сетки по времени, h — шаг по пространственным переменным), и схемы абсолютно устойчивые, в к-рых шаги по времени и по пространственным переменным могут меняться независимо друг от друга, не нарушая устойчивости. Схемы последнего типа часто являются предпочтительными, если они не требуют решения сложных систем на каждом шаге.

УСТОЙЧИВЫЙ МНОГОЧЛЕН — то же, что многочлен Гурвица (см. *Рауса — Гурвица критерий*).

УСТОЙЧИВЫЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ — см. *Предельный цикл.*

УСТРАНИМАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА — *особая точка* аналитической функции.

УСТРАНИМАЯ ТОЧКА РАЗРЫВА — см. *Разрыва точка.*



ФАБЕРА МНОГОЧЛЕНЫ — классическая базисная система, служащая для представления аналитических функций в комплексной области. Пусть дополнение ограниченного континуума K, содержащего более одной точки, есть односвязная область D комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а функция $w=\Phi(z)$, $z\in D$, отображает конформно и однолистно область D на область $|w|>1$ при условиях $\Phi(\infty)=\infty$ и $\Phi'(\infty)>0$. Тогда многочлены Фабера $\{\Phi_n(z)\}$ можно определить как суммы членов с неотрицательными степенями z в разложениях Лорана функций $\{\Phi^n(z)\}$ в окрестности точки $z=\infty$. Ф. м. для континуума K можно определить так же, как коэффициенты разложения

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w)-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Phi_n(z)}{w^{n+1}}, \quad z\in K, \quad |w|>1,$$

где функция $\zeta=\Psi(w)$ — обратная функция для $w=\Phi(\zeta)$. Если континуум K — круг $|z|\leqslant 1$, то $\Phi_n(z)=z^n$. А в случае, когда K — отрезок $[-1, 1]$, Ф. м. суть многочлены Чебышева 1-го рода. Эти многочлены были введены Ж. Фабером (1903).

ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ (от греч. φάσις — появление) — см. *Фазовое пространство.*

ФАЗОВАЯ ТОЧКА — см. *Динамическая система, Фазовое пространство.*

ФАЗОВАЯ ТРАЕКТОРИЯ — см. *Динамическая система.*

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО — совокупность всевозможных мгновенных состояний физической (в широком смысле слова) системы, снабжённой определённой структурой в зависимости от изучаемой системы и рассматриваемых вопросов. Ф. п. наз. также более конкретный объект — пространство (множество с надлежащей структурой), элементы к-рого (фазовые точки) представляют (условно изображают) состояния системы (напр., фазовая плоскость). С математич. точки зрения эти объекты изоморфны, поэтому часто не делают различия между состояниями и изображающими их фазовыми точками.

Математич. формализация понятия «системы» того или иного типа обычно включает в качестве существенной части определение соответствующего Ф. п. (или класса Ф. п.), что отражает важность понятия состояния системы. Эволюция системы (т. е. изменение со временем её состояний) может быть строго детерминированной (тогда она описывается группой или полугруппой $\{S_t\}$ преобразований Ф. п.: состояние w за время t переходит в $S_t w$) или иметь вероятностный характер. В первом случае тоже бывает нужно рассматривать статистич. состояния системы; для классич. (неподвижных) систем они описываются посредством вероятностных распределений на Ф. п. Указания, определяющие эволюции, составляют другую существенную часть формального определения «системы».

В классич. случае дифференцируемой *динамической системы* (что включает основные системы, рассматриваемые в аналитич. механике и классич. статистич. физике) Ф. п.— дифференцируемое многообразие M [быть может,

с особенностями и (или) краем]. Если динамич. система задаётся нек-рой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, то говорят о Ф. п. последней. В этом случае M является той областью в евклидовом пространстве, где определены правые части этой системы. В подобной ситуации термин «Ф. п.» употребляют и тогда, когда решения не определены при всех t.

ФА́ЗОВОЕ СРЕ́ДНЕЕ — см. *Эргодическая теория.*

ФА́ЗОВОЙ СКО́РОСТИ ВЕ́КТОР — векторная скорость движения фазовой точки *динамической системы.*

ФА́КТОР (от лат. factor — делающий, производящий) ряда подгрупп — см. *Нормальный ряд* группы.

ФАКТОРА́ЛГЕБРА универсальной алгебры — см. *Конгруэнция.*

ФАКТОРГРУ́ППА группы G по нормальной подгруппе H — группа, элементами которой являются подмножества элементов группы G (а именно, классы смежности по нормальной подгруппе H), а операция индуцируется из G. Точнее, пусть H — нормальная подгруппа в G, а G/H — множество смежных классов по этой подгруппе. Произведение смежных классов A, B из G/H определяется следующим образом: если $a\in A$ и $b\in B$ — произвольные представители этих смежных классов, то произведением $A\cdot B$ считается тот класс, в к-ром лежит элемент $a\cdot b$. То, что это определение умножения классов не зависит от выбора элементов a и b, следует из свойств нормальной подгруппы. Легко проверяется, что относительно так введённой операции умножения множество G/H является группой, причём единицей этой группы будет смежный класс, совпадающий с H.

Все гомоморфные образы группы G (с точностью до изоморфизма) исчерпываются её Ф. А именно, пусть $\varphi: G\to G'$ — гомоморфизм группы G на (всю) группу G', тогда G' изоморфна Ф. G/H, где H — нормальная подгруппа в группе G, состоящая из элементов, отображающихся гомоморфизмом φ в единицу группы G' (теорема о гомоморфизмах).

ФАКТОРИА́Л (англ. factorial, от лат. factor — делающий, производящий) — произведение натуральных чисел от единицы до какого-либо данного натурального числа n, то есть $1\cdot 2\ldots\cdot n$, обозначается $n!$. При больших n приближённое выражение Ф. даётся *Стирлинга формулой.* Ф. равен числу перестановок из n элементов.

Термин «Ф.» ввёл Л. Арбогаст (1800), обозначение $n!$ — К. Крамп (1808).

ФАКТОРИА́ЛЬНОЕ КОЛЬЦО́, гауссово кольцо, — *область целостности* с однозначным разложением на далее неразложимые множители. В Ф. к. существуют наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное любых двух элементов. Любое кольцо главных идеалов факториально.

ФАКТОРКОЛЬЦО́ кольца R по идеалу I — факторгруппа R/I аддитивной группы кольца R по подгруппе I, снабжённая умножением

$$(a+I)(b+I)=ab+I.$$

Ф. оказывается кольцом и обозначается R/I. Отображение $\pi: R\to R/I$, где $\pi(x)=x+I$, является кольцевым гомоморфизмом. Важнейший пример Ф. — кольцо вычетов по модулю n. Это — Ф. кольца $\mathbb{Z}$ целых чисел по идеалу $\mathbb{Z}n$, состоящему из всех чисел, кратных n. Элементами этого кольца можно считать числа $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, где сумма и произведение определяются как остатки от деления обычных суммы и произведения на n.

ФА́КТОРНЫЙ АНА́ЛИЗ — раздел многомерного статистического анализа, объединяющий методы оценки размерности множества наблюдаемых переменных посредством исследования структуры ковариационных или корреляционных матриц. Основное предположение Ф. а. заключается в том, что корреляционные связи между большим числом наблюдаемых переменных определяются существованием меньшего числа гипотетич. наблюдаемых переменных или факторов. В терминах случайных величин — результатов наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ общей моделью Ф. а. служит следующая линейная модель:

$$X_i=\sum_{j=1}^{k} a_{ij}f_j+b_iU_i+\varepsilon_i,\quad i=1,\ \ldots,\ n, \qquad (*)$$

где случайные величины f_j — общие факторы, случайные величины U_i — факторы, специфические для величин X_i и не коррелированные с f_j, а ε_i — случайные ошибки. Предполагается, что $k<n$ задано, случайные величины ε_i независимы между собой и с величинами f_j и U_i и $\mathrm{E}\varepsilon_i=0$, $\mathrm{D}\varepsilon_i=\sigma_i^2$. Постоянные коэффициенты a_{ij} наз. факторными нагрузками (нагрузка i-й переменной на j-й фактор). Значения a_{ij}, b_i и σ_i^2 считаются неизвестными параметрами, подлежащими оценке. В указанной форме модель Ф. а. отличается нек-рой неопределённостью, т. к. n переменных выражаются здесь через $n+k$ других переменных. Однако уравнения (*) заключают в себе гипотезу о ковариационной матрице, к-рую можно проверить. Напр., если факторы f_j некоррелированы и c_{ij} — элементы матрицы ковариаций между величинами X_i, то из уравнения (*) следует выражение для c_{ij} через факторные нагрузки и дисперсии ошибок:

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{k} a_{il}a_{jl},\quad c_{ii}=\sum_{l=1}^{k} a_{il}^2+\sigma_i^2.$$

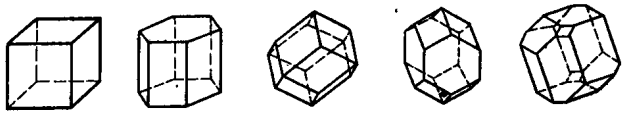
Таким образом, общая модель Ф. а. равносильна гипотезе о том, что ковариационная матрица представляется в виде суммы матрицы $A=\{a_{ij}\}$ и диагональной матрицы Λ с элементами σ_i^2.

Процедура оценивания в Ф. а. состоит из двух этапов: оценки факторной структуры — числа факторов, необходимого для объяснения корреляционной связи между величинами X_i и факторной нагрузки, а затем оценки самих факторов по результатам наблюдений. Принципиальные трудности при интерпретации набора факторов состоят в том, что при $k>1$ ни факторные нагрузки, ни сами факторы не определяются однозначно, т. к. в уравнении (*) факторы f_j могут быть заменены любым ортогональным преобразованием. Это свойство модели используется в целях преобразования (вращения) факторов, к-рое выбирается так, чтобы наблюдаемые величины имели максимально возможные нагрузки на один фактор и минимальные нагрузки на остальные факторы. Существуют различные практич. способы оценки факторных нагрузок, имеющие смысл в предположении, что $X_1, \ldots, X_n$ подчиняются многомерному нормальному распределению с ковариационной матрицей $C=\{c_{ij}\}$. Выделяется метод максимального правдоподобия, к-рый приводит к единственным оценкам для c_{ij}, но для оценок a_{ij} даёт уравнения, к-рым удовлетворяет бесчисленное множество решений, одинаково хороших по статистич. свойствам.

ФАКТОРПРЕДСТАВЛЕ́НИЕ — см. *Линейное представление.*

ФА́ЛЕСА ТЕОРЕ́МА: параллельные прямые, отсекающие на одной стороне угла равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой его стороне. Теорема доказана Фалесом Милетским в 6 в. до н. э.

ФЁДОРОВА ТЕЛА́ — выпуклые *многогранники*, параллельными переносами которых можно заполнить простран-



ство так, чтобы они не входили друг в друга и не оставляли пустот между собой (т. е. являются параллелоэдрами). Существует пять типов Ф. т. (рис.). Найдены Е. С. Фёдоровым (1885).

ФЕЙЕРБАХА ТЕОРЕ́МА: вписанная и вневписанные окружности *треугольника* касаются *девяти точек окружности.* Теорема доказана К. Фейербахом (1822).

ФЕРМА́ ВЕЛИ́КАЯ ТЕОРЕ́МА — утверждение, что для любого натурального числа $n>2$ уравнение

$$x^n+y^n=z^n$$

не имеет решений в целых положительных числах x, y, z. Она была сформулирована П. Ферма примерно в 1630 на полях книги Диофанта «Арифметика» следующим образом: «невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем». И далее добавил: «Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком малы». В бумагах П. Ферма было найдено доказательство Ф. в. т. для $n=4$. Для $n=3$ Ф. в. т. доказал Л. Эйлер (1770), для $n=5$ — П. Дирихле и А. Лежандр (1825), для $n=7$ — Г. Ламе (1839); доказательства Ф. в. т. для различных значений n устанавливались в дальнейшем многими учёными. Общее доказательство Ф. в. т. до сих пор (1987) не получено, несмотря на усилия многих математиков (как профессионалов, так и любителей). Нездоровый интерес к доказательству Ф. в. т. среди неспециалистов в области математики был в своё время вызван большой международной премией, аннулированной в конце 1-й мировой войны.

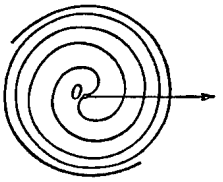
● Постников М. М., Теорема Ферма, М., 1978; Эдвардс Г., Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел, пер. с англ., М., 1980.

ФЕРМА́ МА́ЛАЯ ТЕОРЕ́МА: если p — простое число и a — целое число, не делящееся на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p (то есть $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$). Теорема была установлена П. Ферма (1640) и обобщена Л. Эйлером на случай произвольного модуля p.

ФЕРМА́ СПИРА́ЛЬ — плоская трансцендентная кривая (рис.). Уравнение в полярных координатах:

$$\rho=a\sqrt{\varphi}.$$

Кривая обладает центральной симметрией. Состоит из двух ветвей (соответствующих положительным и отрицательным значениям ρ), к-рые начинаются в полюсе, где имеется точка перегиба. Расстояние между двумя последовательными витками неограниченно убывает по мере удаления от полюса. Ф. с. относится к алгебраич. спиралям. Кривая рассматривалась П. Ферма (1636).



ФЕРМА́ ТЕОРЕ́МА — необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции. Пусть действительная функция f определена в окрестности точки $x_0\in\mathbb{R}$ и дифференцируема в этой точке. Тогда если функция f имеет в точке x_0 локальный экстремум, то её производная в x_0 равна нулю: $f'(x_0)=0$. Геометрически это означает, что касательная к графику функции f в точке $(x_0,\ f(x_0))$ горизонтальна. Впервые равносильное условие для экстремумов многочленов было получено П. Ферма (1629, опубл. в 1679).

ФЕРРА́РИ МЕ́ТОД — метод сведения решения уравнения 4-й степени к решению одного кубического и двух квадратных уравнений; найден Л. Феррари (опубл. в 1545).

Ф. м. для уравнения

$$y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$$

состоит в следующем. При помощи подстановки $y=x-\frac{a}{4}$ данное уравнение приводится к уравнению вида

$$x^4+px^2+qx+r=0, \qquad (1)$$

не содержащему члена с x^3. Вводя вспомогательный параметр α, левую часть уравнения (1) можно преобразовать по формуле

$$x^4+px^2+qx+r=\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha\right)^2-$$
$$-\left[2\alpha x^2-qx+\left(\alpha^2+p\alpha+\frac{p^2}{4}-r\right)\right]. \qquad (2)$$

Затем подбирается значение α так, чтобы выражение в квадратных скобках было полным квадратом. Это даёт для α кубич. уравнение

$$q^2-4\cdot 2\alpha\left(\alpha^2+p\alpha+\frac{p^2}{4}-r\right)=0.$$

Пусть α_0 — один из корней этого уравнения. При $\alpha=\alpha_0$ многочлен в квадратных скобках в формуле (2) имеет один двукратный корень

$$x_0=\frac{q}{4\alpha_0},$$

что приводит к уравнению

$$\left(x^2+\frac{p}{2}+\alpha_0\right)^2-2\alpha_0\,(x-\alpha_0)^2=0.$$

Это уравнение 4-й степени распадается на два квадратных уравнения. Корни этих уравнений и служат корнями уравнения (1).

ФИБОНА́ЧЧИ ЧИ́СЛА — элементы числовой возвратной последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . . (ряда Фибоначчи), в которой каждый последующий член равен сумме двух предыдущих; таким образом, последовательность $u_1,\ u_2,\ldots$ Ф. ч. задаётся начальными значениями $u_1=u_2=1$ и рекуррентным соотношением $u_{n+1}=u_{n-1}+u_n$. Первые 14 Ф. ч. были впервые в 1228 приведены в рукописи Леонардо Пизанского (Фибоначчи).

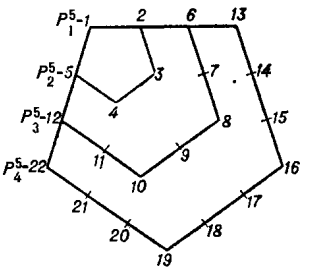
ФИГУ́РА (лат. figura — внешний вид, образ) — термин, применяемый к разнообразным множествам точек; обычно Ф. называют такие множества, которые можно представить состоящими из конечного числа точек, линий и поверхностей, в частности сами точки, линии и поверхности.

ФИГУ́РНЫЕ ЧИ́СЛА — числа, связанные с геометрическими построениями определённого типа. Из Ф. ч. чаще всего рассматриваются многоугольные числа; n-е q-угольное число P_n^q получается в результате сложения числа n с суммой n первых членов начинающейся от 0 арифметической прогрессии с разностью $(q-2)$ и выражается формулой

$$P_n^q=n+(q-2)\frac{n(n-1)}{2}.$$

Таким образом, треугольные числа выражаются формулой $P_n^3=\frac{n(n+1)}{2}$; квадратные — формулой $P_n^2=n^2$, и т. д.

Название «многоугольные числа» связано с их построением. На рис. дано построение пятиугольных чисел $P_n^5=\frac{3n^2-n}{2}$, к-рое осуществляется следующим образом: правильные пятиугольники, стороны к-рых равны 1, 2, 3, . . . единицам длины, накладываются друг на друга так, чтобы один угол у них был общим; если на каждой стороне отложить отрезки единичной длины, то число точек деления в одном пятиугольнике будет равно 5, в двух — 12, в трёх — 22 и т. д., то есть в общем случае равно P_n^5.



Рассматривают также Ф. ч., аналогичные треугольным числам, в пространстве трёх и большего числа измерений: пирамидальные и т. д. Пирамидальные числа выражают числа шаров, складывающихся в правильные пирамиды.

ФИКСИ́РОВАННАЯ ЗАПЯ́ТАЯ (от лат. fixus — прочный, закреплённый) — см. *Запятая*.

ФИ́ЛДСА ПРЕ́МИЯ — международная премия и золотая медаль, которыми Международный математический союз 1 раз в 4 года поощряет молодых математиков (до 40 лет) за крупные научные достижения. Размер премии 1500 долларов. Фонд учредил Дж. Ч. Филдс. Премия установлена в 1932. Присуждалась в 1936 (Л. Альфорс, Финляндия; Дж. Дуглас, США), в 1950 (А. Сельберг, Норвегия; Л. Шварц, Франция), в 1954 (К. Кодаира, Япония; Ж. П. Серр, Франция), в 1958 (К. Ф. Рот, Великобритания; Р. Том, Франция), в 1962 (Дж. Милнор, США;

Л. Хёрмандер, Швеция), в 1966 (М. Ф. Атья, Великобритания; А. Гротендик, живёт во Франции; П. Дж. Коэн, США; С. Смейл, США), в 1970 (А. Бейкер, Великобритания; С. П. Новиков, СССР; Дж. Г. Томпсон, Великобритания; Х. Хиронака, Япония), в 1974 (Э. Бомбьери, Италия; Д. Мамфорд, США), в 1978 (П. Делинь, Бельгия; Д. Куиллен, США; Г. А. Маргулис, СССР; Ч. Л. Фефферман, США), в 1983 (А. Конн, Франция; У. Тёрстон, США; Яу Шинтан, США), в 1986 (С. Доналдсон, Великобритания; Г. Фалтингс, ФРГ; М. Фридман, США).

ФИНИТИ́ЗМ (от лат. finitus — определённый, законченный) Гильберта — идущая от Д. Гильберта методологическая точка зрения на то, какие объекты и способы рассуждений в математике следует считать абсолютно надёжными. См. *Математическая логика.*

ФИНИ́ТНАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция ψ, определённая в некоторой области Ω пространства $\mathbb{R}^n$ и такая, что замыкание множества точек $x\in\Omega$, для которых $\psi(x)$ отлично от нуля, ограничено и отстоит от границы области Ω на положительное расстояние. Напр., Ф. ф. будет такая:

$$\psi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x|^2=\sum x_i^2<1,\\ 0, & |x|^2\geqslant 1.\end{cases}$$

ФИ́НСЛЕРОВО ПРОСТРА́НСТВО — метрическое пространство, метрика которого задаётся положительной однородной относительно дифференциалов координат формой

$$f(x,\ \lambda\,dx)=\lambda f(x,\ dx).$$

Геометрия Ф. п. является обобщением *римановой геометрии*. П. Финслер (1918) дал первое обстоятельное исследование таких пространств.

ФЛЮ́КСИЙ ИСЧИСЛЕ́НИЕ — наиболее ранняя форма дифференциального и интегрального исчисления. Возникло и в основных частях было развито в сочинениях И. Ньютона; основные факты Ф. и. получены им в 1665—1666. Задачи исчисления флюксий И. Ньютон формулировал так: «1. Длина проходимого пути (т. е. в каждый момент времени) дана; требуется найти скорость движения в предложенное время пути» (Ньютон И., Математические работы, пер. с лат., М.— Л., 1937, с. 45). Время И. Ньютон понимал как общий аргумент, к к-рому отнесены все переменные величины. Систему величин x, y, z, . . ., одновременно изменяющихся непрерывно в зависимости от времени, он назвал флюентами (от лат. fluens, род. падеж fluentis — текущий), скорости, с к-рыми изменяются флюенты,— флюксиями (от лат. fluxio — истечение): $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Таким образом, флюксии являются производными флюент по времени. Бесконечно малые изменения флюент И. Ньютон назвал моментами, понятие момента в Ф. и. соответствует дифференциалу, момент независимого переменного он обозначал знаком o, момент флюенты x — знаком xo. Представление о существе операции отыскания флюксий и особенностях символики можно получить из следующего примера (там же, стр. 50): «Пусть, например, дано уравнение

$$x^3-a\dot{x}x+a\dot{x}y-y^3=0.$$

Подставь в него $x+\dot{x}o$ и $y+\dot{y}o$ вместо x и y, ты получишь

$$\left.\begin{array}{l} x^3+3\dot{x}x^2o+3\dot{x}^2xo^2+\dot{x}^3o^3\\ -a\dot{x}x-2a\dot{x}^2xo-a\dot{x}^2o^2\\ +a\dot{x}y+a\dot{y}xo+a\dot{x}yo+a\dot{x}\dot{y}o^2\\ -y^3-3\dot{y}y^2o+3\dot{y}^2yo^2-\dot{y}^3o^3 \end{array}\right\}=0.$$

Но по предположению

$$x^3-a\dot{x}x+a\dot{x}y-y^3=0.$$

Поэтому вычеркни эти члены, а остальные раздели на o. При этом останется

$$3\dot{x}x^2-2a\dot{x}^2x+a\dot{y}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2+3\dot{x}^2xo-a\dot{x}^2o+a\dot{x}\dot{y}o-$$
$$-3\dot{y}^2yo+\dot{x}^2oo-\dot{y}^3oo=0.$$

Но так как мы предположили o бесконечно малой величиной, для того чтобы она могла выражать моменты величин, то те члены, которые на неё умножены, можно считать за ничто в сравнении с другими. Поэтому я ими пренебрегаю и остаётся

$$3\dot{x}x^2-2a\dot{x}^2x+a\dot{y}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2=0».$$

Об обратной задаче Ф. и., обосновании Ф. и. и его истории см. в ст. *Дифференциальное исчисление.*

Ф. и., как особый вид дифференциального и интегрального исчисления со своеобразной символикой, развивалось только в работах английских математиков. В сер. 19 в. оно было вытеснено дифференциальным исчислением с символикой более удобной, употребляющейся и в наше время. Символы, принятые в Ф. и., частично сохранились в механике и в векторном анализе.

ФОКА́ЛЬНАЯ ОСЬ гиперболы — см. *Гипербола.*

ФО́КУС (от лат. focus — очаг, огонь) — 1) Ф. конического сечения — точка, лежащая в плоскости конического сечения (эллипса, гиперболы, параболы) и обладающая тем свойством, что для любой точки конического сечения отношение её расстояния r до этой точки к расстоянию d до определённой прямой (директрисы) постоянно и равно эксцентриситету $e=r/d$. Гипербола и эллипс, не являющийся окружностью, имеют по два Ф., у окружности два Ф. совмещены в один, парабола имеет один Ф.

Ф. эллипса и гиперболы рассматривались Аполлонием Пергским (ок. 200 до н. э.), Ф. параболы — Паппом (3 в.), современный термин ввёден И. Кеплером (1604).

2) Ф.— один из видов *особых точек* обыкновенных дифференциальных уравнений. Все интегральные кривые, проходящие через точки достаточно малой окрестности такой особой точки, представляют собой спирали с бесконечным числом витков, неограниченно приближающихся к особой точке, навиваясь на неё. Название «Ф.» предложено А. Пуанкаре.

ФО́КУСНОЕ РАССТОЯ́НИЕ — см. *Гипербола, Эллипс.*

ФО́РМА (лат. forma), однородный многочлен,— многочлен от нескольких переменных, все члены которого имеют одну и ту же степень (под степенью одночлена $x^\alpha y^\beta\ldots z^\gamma$ понимают число $n=\alpha+\beta+\ldots+\gamma$). В зависимости от числа m переменных Ф. называют бинарными формами (при $m=2$), тернарными формами (при $m=3$) и т. д., в зависимости от степени n их членов — *линейными формами* (при $n=1$), *квадратичными формами* (при $n=2$), кубичными формами (при $n=3$) и т. д. Напр., $xy+2y^2+z^2$ является тернарной квадратичной Ф. Если переменные можно объединить в системы так, чтобы каждый член Ф. линейно зависел от переменных каждой системы, то Ф. наз. *полилинейной формой*. Любая Ф. может быть получена из полилинейной Ф. путём отождествления нек-рых переменных. Обратно — из каждой Ф. можно путём нек-рого процесса, наз. процессом поляризации, получить полилинейную Ф. Напр., Ф. $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ соответствует полилинейная Ф. $x_1y_1+x_1y_2+y_1x_2+x_2y_2$, к-рая в результате отождествления y_1 с x_1 и y_2 с x_2 превращается в данную Ф. $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$.

Уравнение любой алгебраич. линии на плоскости может быть записано в однородных координатах в виде $f(x_1,\ x_2,\ x_3)=0$, где f — нек-рая тернарная Ф. Аналогично можно дать геометрич. истолкование Ф. большего числа переменных. Геометрич. свойства линий, поверхностей и т. д., не зависящие от выбора системы координат, выражаются при помощи инвариантов Ф. Теория инвариантов является одним из основных разделов алгебраич. теории Ф., находящим применение не только в алгебраич. геометрии, но и в ряде др. разделов математики и её приложений. Наиболее важными для приложений являются квадратичные Ф.,

тесно связанные с линиями и поверхностями второго порядка.

В теории чисел весьма важен вопрос о представимости целых чисел как значений Ф. с целочисленными коэффициентами при целочисленных значениях переменных.

В дифференциальной и римановой геометрии используются дифференциальные формы, т. е. многочлены от дифференциалов переменных, каждый член к-рых имеет относительно дифференциалов одну и ту же степень. Коэффициенты дифференциальных Ф. могут произвольно зависеть от самих переменных. Рассматриваются и полилинейные дифференциальные Ф. Примерами дифференциальных Ф. является первая и вторая квадратичные Ф. теории поверхностей.

ФОРМАЛИ́ЗМ — направление в основаниях математики, программа которого была выдвинута Д. Гильбертом (1899).

Целью этой программы было доказательство непротиворечивости математики точным математич. способом. Поскольку непротиворечивость математич. теории, развиваемой аксиоматич. методом, означает, что ни одно из доказательств, возможных в этой теории, не ведёт к противоречию, программа Д. Гильберта предусматривала уточнение понятия доказательства, чтобы последние сами могли быть объектами точной математич. теории — теории доказательств, или *метаматематики*. Это осуществляется с помощью формализации теорий, т. е. замены математич. теории соответствующей *формальной системой*. При метаматематич. исследованиях Д. Гильберт допускает только т. н. финитные методы, т. е. интуитивно убедительные и не содержащие сомнительных элементов канторовской теории множеств, в частности абстракции актуальной бесконечности.

Попытка осуществления программы Д. Гильберта в целом оказалась несостоятельной. Как вытекает из *Гёделя теоремы о неполноте*, во всякой формальной системе, содержащей арифметику, можно указать утверждение, к-рое невозможно доказать или опровергнуть в рамках этой теории. Несмотря на это, исследования, проведённые в рамках этой программы, имели большое значение для развития многих разделов математич. логики.

Термин «Ф.» часто употребляется как синоним формальной системы и вообще для обозначения исчисления, позволяющего заменить операции с объектами операциями с соответствующими им знаками. В философии математики Ф. означает взгляд на природу математики, согласно к-рому математика характеризуется скорее своим методом, нежели предметом изучения; её объекты либо не определяются, либо если и определяются, то таковы, что подлинная их природа несущественна.

ФОРМАЛИЗО́ВАННЫЙ ЯЗЫК, формальный язык,— искусственный (в отличие от естественных, напр. русского) язык, характеризующийся точными правилами построения выражений и их понимания.

На протяжении всей истории развития математики в ней широко использовались символич. обозначения для различных объектов и понятий. Однако наряду с символич. обозначениями математики свободно пользовались и обычным языком. Потребность в полной формализации математич. теорий, т. е. в изложении этих теорий на Ф. я., возникла в связи с задачей логич. анализа математич. суждений, уточнения понятия доказательства в математике. Ф. я., используемые для формализации математич. теорий, обычно называют логико-математическими языками, т. к. в них сочетается использование математич. и логич. символики. Среди этих языков важное место занимают т. н. языки 1-го порядка, к-рые строятся по следующей схеме.

Построение всякого Ф. я. начинается с указания алфавита этого языка, т. е. перечня символов (букв), из к-рых будут строиться все выражения языка. Затем описывается синтаксис Ф. я.— правила построения осмысленных выражений. В логико-математич. языках среди таких выражений различают термы и формулы.

Термы — это выражения, к-рые являются аналогом имён объектов формализуемой теории и соответствующих именных форм. К термам, прежде всего, относятся предметные переменные и предметные константы — выражения, служащие для обозначения конкретных объектов. По определённым правилам из предметных констант и переменных строятся более сложные термы. Обычно для этого используются функциональные символы — имена конкретных функций. Если f есть n-местный функциональный символ, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то выражение $f(t_1, \ldots, t_n)$ тоже считается термом.

Из термов с помощью предикатных символов (имён конкретных предикатов) и символов логич. операций, или логич. символов, строятся формулы — выражения, соответствующие высказываниям и высказывательным формам обычного языка. Если P есть n-местный предикатный символ, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то выражение $P(t_1, \ldots, t_n)$ наз. элементарной формулой. Из элементарных формул строятся более сложные формулы, при этом логич. символы играют ту же роль, что союзы и другие служебные слова при построении сложных предложений обычного языка. Наиболее часто в логико-математич. языках используются следующие логич. символы: $\supset$ — знак импликации, & — знак конъюнкции, $\vee$ — знак дизъюнкции, $\neg$ — знак отрицания, $\forall$ — квантор всеобщности, $\exists$ — квантор существования.

Построение всякого конкретного логико-математич. языка 1-го порядка ведётся по указанной схеме путём выбора конкретных функциональных и предикатных символов и символов логич. операций. Число предметных констант, функциональных и предикатных символов может быть как конечным, так и бесконечным. Запас предметных переменных всегда предполагается потенциально бесконечным. Это, однако, не означает, что алфавит языка должен быть бесконечным, т. к. в качестве переменных могут использоваться не только отдельные буквы, но и их сочетания.

Синтаксич. правила определяют класс осмысленных выражений Ф. я. Понимание этих выражений, или семантика Ф. я., обычно подразумевается при его построении. Интерпретация выражений Ф. я., к-рая предполагалась при его построении, наз. намеренной или главной интерпретацией. Наряду с ней возможны и другие интерпретации. Связь между логико-математич. языками 1-го порядка и их различными интерпретациями является основным предметом исследования в *моделей теории*.

Описание синтаксиса и семантики Ф. я. обычно ведётся на к.-н. естественном языке, к-рый таким образом выступает как метаязык по отношению к данному Ф. я.

Наряду с описанными выше языками 1-го порядка рассматриваются языки более высоких порядков. Напр., в языках 2-го порядка могут использоваться предикатные и функциональные переменные и кванторы по таким переменным, а также предикатные и функциональные символы 2-го порядка, применимые к обычным функциональным и предикатным символам и выражающие свойства функций и предикатов.

Логико-математич. языки играют существенную роль в математич. логике и исследованиях по основаниям математики. Наряду с ними широкое применение получили *алгоритмические языки* — Ф. я., служащие для записи алгоритмов, подлежащих выполнению на вычислительных машинах.

В. Е. Плиско.

ФОРМА́ЛЬНАЯ АРИФМЕ́ТИКА — формальная система, предназначенная для формализации элементарной теории чисел.

Язык наиболее употребительного варианта Ф. а. является формализованным логико-математич. языком 1-го порядка и строится на основе алфавита, содержащего следующие буквы: 0, x, |, $=, +, \cdot, ', \&, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists, (,)$. Слова x, $x|$, $x||$, . . . наз. (предметными) переменными. Переменные $x|$, $x||$, . . . будут обозначаться x_1, x_2, . . . Все переменные и предметная константа 0 считаются тер-

мами. Более сложные арифметич. термы строятся с помощью функциональных символов $+$ (сложение), $\cdot$ (умножение) и $'$ (прибавление 1): если t_1 и t_2 — термы, то (t_1+t_2), $(t_1\cdot t_2)$ и t_1' — термы. Натуральные числа 0, 1, 2, ... изображаются термами $0, 0', 0''$... Элементарные формулы строятся из термов с помощью знака равенства $=$: если t_1 и t_2 — термы, то $t_1=t_2$ — формула. Более сложные арифметич. формулы строятся с помощью логич. символов $\&$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\supset$ (импликация), $\neg$ (отрицание), $\forall$ (квантор всеобщности), $\exists$ (квантор существования): если A и B — формулы, y — переменная, то $(A\&B)$, $(A\vee B)$, $(A\supset B)$, $\neg A$, $\forall yA$, $\exists yA$ — формулы. Понятие свободной переменной в формуле определяется следующим образом. Все переменные, входящие в элементарную формулу, свободны в ней. Если переменная является свободной в формуле A или в формуле B, то она свободна также в формулах $(A\&B)$, $(A\supset B)$, $(A\vee B)$, $\neg A$. В формулах $\forall yA$ и $\exists yA$ свободными являются все свободные переменные формулы A, кроме y. Формула без свободных переменных наз. замкнутой формулой или предложением.

Постулатами Ф. а. являются 1) логич. постулаты — аксиомы и правила вывода *предикатов исчисления*; 2) аксиомы Пеано $(x_1'=x_2'\supset x_1=x_2)$; $\neg x'=0$; $((x_1=x_2\&x_1=x_3)\supset x_2=x_3)$; $(x_1=x_2\supset x_1'=x_2')$; $(x+0)=x$; $(x_1+x_2')=(x_1+x_2)'$; $(x\cdot 0)=0$; $(x_1\cdot x_2')=((x_1\cdot x_2)+x_1)$ и 3) схема аксиом индукции

$$A(0)\,\&\,\forall x\,(A(x)\supset A(x'))\supset A(x),$$

где $A(x)$ — произвольная арифметич. формула, $A(0)$ и $A(x')$ — формулы, полученные подстановкой в $A(x)$ термов 0 и x' вместо x. Выводом формулы A из множества формул Γ наз. последовательность формул $B_1, \ldots, B_k$, где B_k есть формула A и каждая из формул B_k либо принадлежит Γ, либо является аксиомой, либо получается из предшествующих формул по одному из правил вывода. Вывод из пустого множества формул наз. доказательством. Формула наз. доказуемой формулой, или теоремой, если существует доказательство, завершающееся этой формулой.

В Ф. а. могут быть доказаны практически все теоремы элементарной теории чисел. Однако роль Ф. а. в математич. исследованиях состоит прежде всего в том, что она является формальным аналогом такой важной области математики, как арифметика, и позволяет в точной математич. форме ставить и решать различные вопросы, касающиеся её оснований. Ф. а. явилась пробным камнем при осуществлении выдвинутой Д. Гильбертом программы обоснования математики (см. *Метаматематика*). В результате исследования Ф. а. были установлены такие важные математич. результаты, как *Гёделя теорема о неполноте*, оказавшие сильное влияние на развитие математич. логики.

В. Е. Плиско.

ФОРМА́ЛЬНАЯ ГРАММА́ТИКА — см. *Математическая лингвистика*.

ФОРМА́ЛЬНАЯ СИСТЕ́МА — уточнение понятия аксиоматической теории, характеризующееся представлением последней в виде исчисления. Процесс построения Ф. с. в качестве точного аналога данной аксиоматич. теории обычно наз. формализацией этой теории.

Построение всякой Ф. с. начинается с описания некрого формализованного языка. При этом набор исходных символов (алфавит) языка и правила построения осмысленных выражений (формул) выбираются с таким расчётом, чтобы формализованный язык мог служить для записи всех предложений данной аксиоматич. теории. Затем выделяется нек-рый класс формул, наз. аксиомами. Обычно множество аксиом задаётся списком (если оно конечно) или с помощью алгоритма, к-рый для любой формулы позволяет проверить, является ли она аксиомой. В качестве аксиом чаще всего выбирают формулы, служащие для записи аксиом формализуемой аксиоматич. теории (собственные, или нелогические, аксиомы), к к-рым добавляются т. н. логические аксиомы — формулы, к-рые уже в силу своего строения являются записями истинных предложений (как, напр., формулы вида $A\supset(B\supset A)$). Кроме аксиом при построении Ф. с. задаётся (обычно конечной) класс правил вывода, к-рые должны как можно более полно отражать способы логич. вывода, применяемые в математич. рассуждениях. В математич. логике выработаны стандартные системы логич. аксиом и правил вывода, с помощью к-рых можно получить все логич. следствия из данных нелогич. аксиом (см. *Предикатов исчисление*). Доказательством в Ф. с. наз. конечная последовательность формул, в к-рой каждая формула либо является аксиомой, либо непосредственно выводима по одному из правил вывода из нек-рых формул, предшествующих ей в этой последовательности. Формула наз. теоремой, если существует доказательство, последней формулой к-рого она является.

Ф. с. суть точные математич. объекты, исследование к-рых можно вести математич. методами. Формализация основных разделов математики и обоснование их непротиворечивости путём анализа доказательств в соответствующих Ф. с. были составной частью выдвинутой Д. Гильбертом программы обоснования математики (см. *Метаматематика*).

ФО́РМУЛА (от лат. formula — форма, правило, предписание) — комбинация математических знаков, выражающая какое-либо предложение; напр., нижеследующие выражения суть формулы:

$$x^3+y^3<z, \tag{1}$$

$$2\times 2=4, \tag{2}$$

$$\triangle ABC\sim\triangle EFG, \tag{3}$$

$$2\times 2=5, \tag{4}$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \tag{5}$$

$$\int_0^1 x^5\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^5\cdot\frac{1}{n}, \tag{6}$$

$$y'=y, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}. \tag{8}$$

Уже приведённые примеры показывают, что с помощью Ф. довольно сложные предложения могут быть записаны в компактной и удобной форме (см. *Математические знаки*). Нек-рые Ф. [из написанных выше (2), (4), (6)] выражают вполне определённые конкретные суждения и являются истинными [как (2) и (6)] или ложными [как (4)]. Смысл других Ф. [из написанных выше (1), (3), (5), (7), (8)] зависит от значения входящих в них переменных [напр., (1) превращается в истинную Ф. $1^3+2^3<19$ при $x=1$, $y=2$, $z=19$ и в ложную Ф. $3^3+4^3<5$ при $x=3$, $y=4$, $z=5$]. Ф. этого типа не являются истинными или ложными непосредственно, но становятся таковыми при замещении переменных конкретными объектами из к.-л. заранее выбранной области. Ф., становящиеся истинными при любом замещении переменных объектами из нек-рой области, называются тождественно-истинными в данной области. Напр., Ф. (5) тождественно-истинна в области комплексных чисел, Ф. (8) тождественно-истинна в области дважды непрерывно дифференцируемых функций от аргументов x и y. Ф., являющиеся истинными [как (2) и (6)] или тождественно-истинными в к.-л. области [как (5) и (8)], служат для записи математич. законов. При этом тождественно-истинные Ф. часто понимаются как утверждения о всеобщности. Напр., наиболее распространённое понимание Ф. (5) состоит в том, что она считается сокращённой записью следующего утверждения: «для любых чисел a и b имеет место равенство $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$».

ФОРТРА́Н (FORTRAN — сокращение от слов FORmula TRANslator, от англ. formula — формула, translator — переводчик) — *программирования язык*, предназначенный для решения научно-технических задач. Разработан в 60-х гг. (в США). Основными типами данных в Ф. явля-

ются целые и действительные числа, реже — логич. величины и текстовые данные. Однотипные величины в языке объединяются в массивы индексируемых компонент. Основными операторами Ф. являются операторы присваивания, условного и безусловного перехода, цикла по перечисляемому параметру, вызова подпрограмм, ввода, вывода. Программа на Ф. состоит из ведущей части и набора подпрограмм. Для подпрограмм можно задавать общие участки памяти для размещения данных. В языке существуют развитые средства для поддержания библиотек программ и комплектования из них больших программных комплексов. Ф. является одним из наиболее широко используемых языков программирования.

● Карпов В. Я., Алгоритмический язык (Фортран-Дубна), М., 1976; Катцан Г., Язык Фортран 77, пер. с англ., М., 1982.

ФРЕ́ДГОЛЬМА АЛЬТЕРНАТИ́ВА — утверждение о разрешимости уравнений Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt=f(s),\ s\in(a,b), \qquad (1)$$

а именно: либо уравнение (1) и сопряжённое с ним уравнение

$$\psi(s)-\overline{\lambda}\int_a^b \overline{K(t,s)}\,\psi(t)\,dt=g(s) \qquad (2)$$

имеют единственное решение φ, ψ, каковы бы ни были известные функции f, g, либо соответствующие однородные уравнения (когда $f\equiv g=0$) имеют ненулевое решение, причём число линейно независимых решений конечно и одинаково для обоих уравнений.

Во втором случае для того, чтобы уравнение (1) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_a^b f(t)\,\overline{\psi_n(t)}\,dt=0,\ k=1,\ \ldots,\ n,$$

где $\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n$ — полная система линейно независимых решений однородного уравнения, соответствующего (2). При этом общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(s)=\varphi_0(s)+\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(s),$$

где φ_0 — к.-н. решение уравнения (1), а $\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n$ — полная система линейно независимых решений однородного уравнения, соответствующего (1), c_k — произвольные постоянные. Сходные утверждения имеют место и для уравнения (2).

ФРЕ́ДГОЛЬМА ОПЕРА́ТОР — линейный интегральный оператор вида

$$F\varphi(s)=\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где $K(s,\ t)$ — заданная функция. Интегральные уравнения с таким оператором (*Фредгольма уравнения*) и методы их решения предложены И. Фредгольмом (1900—03).

ФРЕ́ДГОЛЬМА УРАВНЕ́НИЕ — интегральное уравнение вида

$$\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt=f(s), \qquad (1)$$

$a\leqslant x$, $s\leqslant b$ (Ф. у. 1-го рода) или

$$\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt=f(s),\ s\in[a,\ b] \qquad (2)$$

(Ф. у. 2-го рода), где $K(s,\ t)$ — заданная непрерывная функция от s и t, наз. я д р о м уравнения, $f(s)$ — заданная функция, $\varphi(s)$ — искомая функция, λ — параметр. Уравнения (1) и (2) были изучены в 1900—03 И. Фредгольмом. Теория Ф. у. 2-го рода проще, и они чаще используются в приложениях. Построение устойчивых решений Ф. у. 1-го рода в общем случае возможно лишь с помощью специальных регуляризирующих алгоритмов решения некорректно поставленных задач. Если λ не является собственным значением уравнения (2), то это уравнение имеет единственное непрерывное решение, определяемое формулой

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b\Gamma(s,\ t,\ \lambda)\,f(t)\,dt, \qquad (3)$$

где $\Gamma(s,\ t,\ \lambda)=D(s,\ t;\ \lambda)/D(\lambda)$ наз. р е з о л ь в е н т о й уравнения (2). Здесь

$$D(s,t;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(s,t)\,\lambda^n,$$

$$d_0(s,t)=K(s,t),$$

$$d_m(s,t)=K(s,t)\,d_m+\int_a^b K(s,x)\,d_{m-1}(x,t)\,dx,$$

$$D(\lambda)=\sum_{n=0}^{m}d_n\lambda^n,$$

$$d_{m+1}=-\frac{1}{m+1}\int_a^b d_m(t,t)\,dt,\ d_0=1.$$

ФРЕНЕ́ ФО́РМУЛЫ — формулы, дающие разложение производных (по дуге) единичных векторов касательной t, нормали n и бинормали b произвольной кривой L по векторам t, n, b. Если k и σ — кривизна и кручение L, то Ф. ф. имеют вид

$$\frac{dt}{ds}=kn,\ \frac{dn}{ds}=-kt+\sigma b,\ \frac{db}{ds}=-\sigma n.$$

С помощью Ф. ф. исследуются дифференциально-геометрич. свойства кривых линий, в кинематике — движение материальной точки по криволинейной траектории. Ф. ф. были впервые опубликованы в 1851 Ж. Серре. Однако ранее они были известны Ф. Френе (1847), опубликовавшему своё открытие лишь в 1852. Эти формулы иногда наз. ф о р м у л а м и С е р р е — Ф р е н е.

ФРЕ́ШЕ ДИФФЕРЕНЦИА́Л, с и л ь н ы й д и ф ф е р е н ц и а л,— см. *Дифференциал*, *Фреше производная*.

ФРЕ́ШЕ ПРОИЗВО́ДНАЯ, с и л ь н а я п р о и з в о д н а я,— наиболее распространённая (наряду с *Гато производной*, наз. иногда с л а б о й п р о и з в о д н о й) производная функционала или отображения. Ф. п. в точке x_0 отображения $f: X\to Y$ нормированного пространства X в нормированное пространство Y наз. линейный непрерывный оператор $\Lambda: X\to Y$, удовлетворяющий условию

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\Lambda h+\varepsilon(h),$$

где

$$\lim_{\|h\|\to 0}\|\varepsilon(h)\|/\|h\|=0.$$

Оператор Λ, удовлетворяющий этим условиям, единствен и обозначается $f'(x_0)$, линейное отображение $h\to f'(x_0)\,h$ наз. д и ф ф е р е н ц и а л о м Ф р е ш е. Для Ф. п. выполнены важнейшие теоремы дифференциального исчисления — о дифференцировании сложной функции, о среднем и т. д.

Понятие «Ф. п.» впервые, по-видимому, встречается в лекциях К. Вейерштрасса (1861); общепринятое ныне определение дано М. Фреше (1911).

ФРОБЕ́НИУСА ТЕОРЕ́МА — теорема, описывающая все конечномерные действительные ассоциативные алгебры без делителей нуля. Доказана Г. Фробениусом (1877). См. *Гиперкомплексное число*.

ФРОНТА́ЛЬНАЯ ПРОЕ́КЦИЯ (от франц. frontal — лобовой) — см. *Начертательная геометрия*.

ФУНДАМЕНТА́ЛЬНАЯ ГРУ́ППА (от лат. fundamentum — основание) — один из гомотопических инвариантов топологического пространства.

Пусть x_0 — фиксированная точка топологич. пространства X, и пусть $\Omega_{x_0}(X)$ — множество всех петель (замкнутых путей) на X с базисной точкой x_0, т. е. непрерывных отображений $\lambda: [0,1]\to X$ таких, что $\lambda(0)=\lambda(1)=x_0$. Множество классов гомотопных петель обозначается через $\pi_1(X,\ x_0)$. Умножение в $\pi_1(X,\ x_0)$ определяется исходя из операции умножения петель, которая задаётся формулой

$$(\alpha\,\beta)(t)=\begin{cases}\alpha(2t)\left(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\right),\\ \beta(2t-1)\left(\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\right).\end{cases}$$

Получаемая группа $\pi_1(X, x_0)$ — это Ф. г. пространства X с базисной точкой x_0. Единицей этой группы служит класс гомотопии постоянного отображения $e_{x_0}(t)=x_0 (0\leqslant t\leqslant 1)$. Если x_1 — другая точка пространства X, причём x_0 и x_1 можно соединить непрерывным путём, то Ф. г. $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X_1, x_0)$ изоморфны. Таким образом, Ф. г. линейно связного пространства не зависит от выбора базисной точки. Линейно связное пространство наз. односвязным, если его Ф. г. тривиальна, т. е. если любая петля стягивается в точку. Напр., евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 0)$ и сфера S^n $(n>1)$ — односвязные пространства, а Ф. г. окружности S^1 изоморфна аддитивной группе целых чисел. Ф. г. плоскости с p выколотыми точками — свободная группа с p образующими. Ф. г. замкнутой ориентируемой поверхности рода $g>0$ — это группа с $2g$ образующими $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ и определяющим соотношением

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = e.$$

Вообще, Ф. г. компактного многообразия обладает конечной системой образующих, связанных конечным числом определяющих соотношений.

Ф. г. является гомотопич. инвариантом топологич. пространства, т. е. Ф. г. двух гомотопически эквивалентных линейно связных пространств изоморфны. Она включается в целую серию гомотопич. инвариантов — т. н. гомотопических групп $\pi_n(X, x_0)$ $(n\geqslant 1)$, к-рые при $n>1$ абелевы. Эти группы можно определить по индукции формулой

$$\pi_{n+1}(X, x_0) = \pi_n(\Omega_{x_0}(X), e_{x_0}),$$

если снабдить пространство петель $\Omega_{x_0}(X)$ нек-рой естественной топологией.

● Масси У., Столлингс Д., Алгебраическая топология, пер. с англ., М., 1977; Постников М. М., Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий, М., 1984; Болтянский В. Г., Ефремович В. А., Наглядная топология, М., 1982.

А. Л. Онищик.

ФУНДАМЕНТА́ЛЬНАЯ ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ, последовательность Коши, сходящаяся в себе последовательность,— последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая условию Коши: для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что для всех $n>N$, $m>N$ выполняется неравенство $|x_n - x_m|<\varepsilon$. Здесь x_n — действительное или комплексное число либо точка метрич. пространства, $|x_n - x_m|$ — расстояние между точками x_n и x_m.

Всякая сходящаяся последовательность является Ф. п. Пространство, в к-ром верно обратное утверждение (всякая Ф. п. имеет предел), наз. полным. Напр., евклидово пространство является полным. Множество рациональных чисел не обладает свойством полноты. Напр., последовательность $\{r_n\}$ десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ порядка n является Ф. п., но не имеет предела в множестве рациональных чисел.

В определении Ф. п. $\{x_n\}$ элементов x_n любого нормированного пространства вместо $|x_n|$ употребляется символ $\|x_n\|$ — норма в этом пространстве. Полное нормированное пространство наз. банаховым. Любое нормированное пространство можно пополнить до банахова с помощью Ф. п. (по аналогии с пополнением множества рациональных чисел до множества действительных чисел).

ФУНДАМЕНТА́ЛЬНАЯ СИСТЕ́МА ОКРЕ́СТНОСТЕЙ, определяющая система окрестностей,— множество Σ окрестностей точки x такое, что для любой её окрестности v существует множество w из Σ, содержащееся в v.

ФУНДАМЕНТА́ЛЬНАЯ СИСТЕ́МА РЕШЕ́НИЙ — то же, что *базис* векторного пространства решений какой-либо системы линейных уравнений.

ФУ́НКТОР (от лат. fungo — осуществляю, выполняю) — отображение одной категории в другую, согласованное со структурой *категории*. Понятие Ф. аналогично понятиям линейного отображения векторных пространств, непрерывного отображения топологических пространств, гомоморфизма групп, колец и т. д. Более точно, одноместным ковариантным функтором из категории $\mathfrak{C}$ в категорию $\mathfrak{C}'$ наз. пара отображений

$$(\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}',\ \mathrm{Mor}\,\mathfrak{C} \longrightarrow \mathrm{Mor}\,\mathfrak{C}')$$

(каждое из к-рых обычно обозначается одной и той же буквой, напр. F), удовлетворяющая следующим условиям:

$F1$. Для каждого объекта $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$

$$F(1_A) = 1_{F(A)}.$$

$F2$. Для любых морфизмов $f : A \to B$, $g : B \to C$ из $\mathrm{Mor}\,\mathfrak{C}$

$$F(fg) = F(f)\,F(g).$$

Обычно вместо «одноместный ковариантный функтор» говорят просто «функтор». Вместо указания пары отображений пишут просто $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$.

Функтор F из двойственной категории $\mathfrak{C}^*$ в категорию $\mathfrak{C}'$ наз. одноместным контравариантным функтором из $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{C}'$ или просто контравариантным функтором. Он удовлетворяет условию $F1$ и условию $F2^*$, дуальному к $F2$: для любых морфизмов $f : A \to B$, $g : B \to C$ из $\mathfrak{C}$

$$F(fg) = F(g)\,F(f).$$

Для любой категории тождественное отображение объектов и морфизмов этой категории, очевидно, является Ф. Кроме того, последовательное выполнение (произведение) Ф. $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ и $G : \mathfrak{C}' \to \mathfrak{C}''$ также является Ф. $FG : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}''$.

Пусть дано n категорий $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_n$; n-местным функтором из категорий $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$ в категорию $\mathfrak{C}$, ковариантным по аргументам $i_1, \ldots, i_k$ и контравариантным по остальным аргументам, наз. функтор F: $\prod_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{C}_i} \to \mathfrak{C}$, где $\overline{\mathfrak{C}_i}$ совпадает с $\mathfrak{C}_i$, если i равняется одному из индексов $i_1, \ldots, i_k$, и равно $\mathfrak{C}_i^*$ в противном случае, а знак $\prod_{i=1}^{n}$ обозначает декартово произведение. Декартово произведение произвольных категорий $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$ строится следующим образом; объектами этой категории являются кортежи объектов $(A_1, \ldots, A_n)$, в к-рых $A_i \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}_i$, $i=1, \ldots, n$, а множество морфизмов объекта $(A_1, \ldots, A_n)$ в объект $(B_1, \ldots, B_n)$ совпадает с декартовым произведением $H_{\mathfrak{C}_1}(A_1, B_1) \times \ldots \times H_{\mathfrak{C}_n}(A_n, B_n)$. Произведение морфизмов определяется покомпонентно, а единичные морфизмы имеют вид $(1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n})$.

Пусть $\mathfrak{C}$ — произвольная категория, A — её объект, St — категория множеств. Каждому объекту $X \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ сопоставляется множество $H^A(X) = H_{\mathfrak{C}}(A, X)$ и каждому морфизму f: $X \to Y$ — отображение $H^A(f)$: $H^A(X) \to H^A(Y)$, к-рое произвольный морфизм $x : A \to X$ переводит в морфизм xf: $A \to Y$, т. е. $H^A(f)(x) = xf$. Построенное отображение $H^A : \mathfrak{C} \to \mathrm{St}$ является Ф., к-рый наз. основным ковариантным функтором из $\mathfrak{C}$ в St с представляющим объектом A. Аналогично, но двойственным образом строится основной контравариантный функтор $H_A(X)$ из $\mathfrak{C}$ в St. Если $\mathfrak{C}$ — категория векторных пространств над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, то функтор $H_{\mathbb{R}}(X) = H_{\mathfrak{C}}(X, \mathbb{R})$ описывает хорошо известный переход от пространства X к сопряжённому пространству X^*.

Обычно конструкции, к-рые можно осуществить над любым объектом нек-рой категории или над произвольным кортежем объектов независимо от их индивидуальных свойств, являются Ф. Таковы, напр., конструкции прямого произведения алгебр, свободных универсальных алгебр, фундаментальной группы топологич. пространства и т. д.

Пусть F, $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ — два Ф. Естественным преобразованием φ функтора F в функтор G наз. отображение φ: $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathfrak{C}'$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) для любого объекта $A \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{C}$ морфизм $\varphi(A)$ принадлежит множеству $H_{\mathfrak{C}'}(F(A), G(A))$,

2) для любого морфизма f: $A \to B$ из $\mathfrak{C}$ выполнено равенство

$$F(f)\,\varphi(B) = \varphi(A)\,G(f).$$

Понятие естественного преобразования очевидным образом распространяется на контравариантные и n-местные Ф.

Естественное преобразование φ наз. естественным изоморфизмом функторов, а соответствующие Ф. наз. изоморфными, если каждый морфизм $\varphi(A)$ является изоморфизмом. Для любых естественных преобразований $\varphi : F \to G$, $\psi : G \to H$ можно определить их произведение $\varphi\psi : F \to H$, положив $(\varphi\psi)(A) = \varphi(A)\psi(A)$, к-рое также является естественным преобразованием. Для каждой малой категории $\mathfrak{D}$ и произвольной категории $\mathfrak{C}$ определяется категория функторов $\mathrm{Funct}(\mathfrak{D}, \mathfrak{C})$. Объектами этой категории являются произвольные Ф. $F : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$, а морфизмами из F в G — всевозможные естественные преобразования φ: $F \to G$.

М. Ш. Цаленко.

ФУ́НКЦИЙ ТЕО́РИЯ — раздел математики, в котором изучаются общие свойства функций. Ф. т. распадается на две части: теория функций действительного переменного и теория функций комплексного переменного. В Ф. т. действительного переменного можно выделить три основных направления.

1) *Метрическая теория функций*, где свойства функций изучаются на основе понятия меры множества.

2) Теория *приближения функций*, изучающая вопросы приближённого представления функций при помощи надлежащих аналитич. средств.

3) Дескриптивная теория функций, в к-рой основным объектом изучения является операция предельного перехода.

О Ф. т. комплексного переменного см. в ст. *Аналитическая функция.*

ФУНКЦИОНА́Л — отображение f произвольного множества X в множество $\mathbb{R}$ действительных или $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Если X наделено структурой векторного пространства, топологич. векторного пространства и упорядоченного множества, то возникают соответственно важные классы линейных, непрерывных и монотонных Ф. Понятие Ф. возникло в вариационном исчислении и означало переменную величину, зависящую от одной или нескольких функций (откуда и название). С развитием функционального анализа термин «Ф.» стал применяться в более широком (вышеприведённом) смысле.

ФУНКЦИОНА́ЛЬНАЯ ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ — последовательность, все члены которой — функции.

ФУНКЦИОНА́ЛЬНОЕ УРАВНЕ́НИЕ — уравнение (линейное или нелинейное), в котором неизвестным является элемент какого-либо банахова пространства X, конкретного (функционального) или абстрактного, т. е. уравнения вида

$$P(x) = y, \qquad (*)$$

где $P(x)$ — некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор, переводящий элементы банахова пространства X в элементы банахова пространства Y. Если Ф. у. содержит ещё и числовой (или общий функциональный) параметр λ, то вместо (*) пишут

$$P(x; \lambda) = y,$$

где $x \in X$, $y \in Y$, $\lambda \in \Lambda$, Λ — пространство параметров.

Уравнениями вида (*) являются конкретные или абстрактные дифференциальные уравнения обыкновенные и с частными производными, интегральные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения и более сложные уравнения математич. анализа, а также системы алгебраич. уравнений конечные и бесконечные, уравнения в конечных разностях и др.

Если решения Ф. у. являются элементами пространства операторов, то такие Ф. у. наз. операторными уравнениями, конкретными или абстрактными.

Под Ф. у. в узком смысле этого слова понимают уравнения, в к-рых искомые функции связаны с известными функциями одного или нескольких переменных при помощи операции образования сложной функции. Системы Ф. у. в нек-рых случаях удобно записываются в более краткой записи в виде векторного или матричного Ф. у. Одними из простейших Ф. у. являются, напр., уравнения Коши

$$f(x + y) = f(x) + f(y);$$

$$f(x + y) = f(x)\,f(y);$$

$$f(xy) = f(x)\,f(y),$$

непрерывные решения к-рых имеют, соответственно, вид $f(x) = Cx$; e^{Cx} ; x^C.

Точные решения в виде аналитич. выражений получаются лишь для немногих типов Ф. у., поэтому особое значение имеют приближённые методы решения. Для нахождения решений общих Ф. у. вида (*) развит ряд методов, напр. метод бесконечных степенных рядов, метод последовательных приближений, метод Галёркина (метод моментов), метод касательных гипербол, метод Чебышева (метод касательных парабол), метод Ньютона — Канторовича и его модификации, метод наискорейшего спуска, а также методы вариации параметра (прямые, итерационные и комбинированные) определённых типов и их различные модификации, в том числе и с последовательной аппроксимацией обратного оператора. Общие методы применяются к решению различных конкретных Ф. у. Существуют специальные методы решения конкретных Ф. у., в том числе и численные методы, напр. метод сеток.

Решения Ф. у. в узком смысле этого слова и систем таких уравнений могут быть как конкретными функциями, так и классами функций, зависящими от произвольных параметров или произвольных функций. В теории Ф. у. известно мало общих методов решения таких уравнений, поэтому в каждом частном случае необходимо, как правило, исследовать степень общности полученного решения. Одним из более или менее общих методов решения Ф. у. является метод сведения их к решению уравнений в конечных разностях.

Для решения Ф. у. применяется также метод подстановок, к-рый используется и для сведения одних Ф. у. к другим уравнениям того же типа, в частности к Ф. у. с известными решениями. Для сведения к другим Ф. у. того же типа применяют также логарифмирование и др. приёмы. Во многих случаях для решения Ф. у. они сводятся к дифференциальным уравнениям; этот метод даёт лишь решения, принадлежащие классу дифференцируемых функций. Для решения Ф. у. в ряде случаев применяется также и метод итераций.

● Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, 8 изд., т. 1, М., 1970; Красносельский М. А. [и др.], Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969; Бахвалов Н. С., Численные методы, 2 изд., М., 1975; Самарский А. А., Введение в теорию разностных схем, М., 1971.

Д. Ф. Давиденко.

ФУНКЦИОНА́ЛЬНЫЙ АНА́ЛИЗ — раздел математики, главной задачей которого является изучение бесконечномерных пространств и их отображений. Наиболее изучены векторные (линейные) пространства и линейные отображения (их теория есть по существу обобщение на бесконечномерный случай проблематики *линейной алгебры*). Для Ф. а. характерно сочетание методов и объединение подходов классич. анализа, топологии и линейной алгебры, что приводит к установлению связей между отдалёнными (на первый взгляд) разделами математики.

Развитие Ф. а. происходило параллельно с развитием современной теоретич. физики, в частности выяснилось, что язык Ф. а. наиболее адекватно отражает закономерности квантовой теории, статистич. механики и т. п. В свою очередь, физич. теории оказали существенное влияние на проблематику и методы Ф. а.

Ф. а. как самостоятельный раздел математики сложился на рубеже 19 и 20 вв. и окончательно оформился в 20—30-е гг., с одной стороны, под влиянием конкретных классов отображений (операторов) (в частности, интегральных операторов и связанных с ними интегральных уравнений) и конкретных пространств (в особенности функциональных, т. е. пространств, элементами к-рых являются функции, откуда и назв. «Ф. а.»), а с другой — под влиянием чисто внутреннего развития современной математики, т. е. под влиянием желания обобщить и тем самым осознать природу тех или иных закономерностей.

Пространствами, фигурирующими в Ф. а., являются топологические векторные пространства, т. е. векторные пространства X над полем действительных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел, к-рые одновременно являются и топологич. пространствами, причём линейная структура и топология согласованы в том смысле, что операции сложения и умножения на число непрерывны в рассматриваемой топологии.

Более частная, но важная ситуация возникает, когда в векторном пространстве X можно ввести норму $\|x\|$ элемента $x\in X$, свойства к-рой обобщают свойства длины векторов в обычном евклидовом пространстве. Такое пространство наз. нормированным; топология в нём вводится при помощи метрики

$$\rho(x, y)=\|x-y\|,\ x,y\in X,$$

таким образом считается, что последовательность $x_n\to x$, если $\|x_n-x\|\to 0$.

Ещё более частная ситуация получается, когда в векторном пространстве X можно ввести скалярное произведение (x,y) элементов $x,y\in X$. Такое пространство наз. предгильбертовым. При этом величина $\sqrt{(x, x)}=\|x\|$ является нормой элемента $x\in X$.

Для конструкций Ф. а. важно, чтобы изучаемые пространства были полными (т. е. из того, что $\|x_n-x_m\|\to 0$ для $x_m, x_n\in X$ при $m, n\to\infty$, следует существование предела $\lim x_n=x$, также являющегося элементом X). Полное нормированное и полное предгильбертово пространства наз. соответственно *банаховым пространством* и *гильбертовым пространством*. При этом известная процедура пополнения (аналогичная переходу от рациональных чисел к действительным) в случае нормированных (предгильбертовых) пространств приводит к банаховым (гильбертовым) пространствам.

Определённые так пространства могут быть конечномерными, и тогда ничего существенно нового по сравнению с результатами линейной алгебры не получается. В Ф. а. же основную роль играют бесконечномерные пространства, т. е. такие, в к-рых существует бесконечное множество линейно независимых векторов.

В Ф. а. важное место занимает «геометрическая» тематика, посвящённая выяснению свойств различных множеств, напр. выпуклых, компактных, ограниченных. Здесь часто просто формулируемые вопросы имеют весьма нетривиальные решения. Эта тематика тесно связана с изучением изоморфизма пространств, с нахождением универсальных представителей в том или ином классе пространств.

Наиболее простыми с геометрич. точки зрения являются гильбертовы пространства H, свойства к-рых больше всего напоминают свойства конечномерных евклидовых пространств. В частности, два вектора $x,y\in H$ наз. ортогональными $(x\perp y)$, если $(x,y)=0$. Для любого $x\in H$ существует его проекция на произвольное замкнутое подпространство Z, т. е. такой вектор x_Z, что $x-x_Z\perp z$ для любого $z\in Z$. Благодаря этому факту многие геометрич. конструкции, имеющиеся в евклидовом пространстве, переносятся на H, где они часто приобретают аналитич. характер. Так, напр., обычная процедура ортогонализации приводит к существованию в H ортонормированного базиса — последовательности векторов e_i, $i=1, 2, \ldots$, из H таких, что $\|e_i\|=1$, $e_i\perp e_j$, $j\neq i$, и для любого $x\in H$ справедливо «покоординатное» разложение

$$x=\sum x_i e_i, \qquad (1)$$

где $x_i=(x,e_i)$ и $\|x\|^2=\sum|x_i|^2$. Геометрич. вопросы резко усложняются при переходе от гильбертовых пространств к банаховым и тем более к топологич. векторным пространствам ввиду отсутствия в них ортогонального проектирования.

Большой раздел Ф. а. посвящён изучению конкретных пространств, т. к. их свойства обычно определяют характер решения задачи, получаемой методами Ф. а. Типичный пример — теоремы вложения для т. н. пространств Соболева и их обобщений. В теоремах вложения выясняется вопрос о характере гладкости элементов пространства, получаемых процедурой пополнения.

В связи с запросами математич. физики в Ф. а. возникло большое количество пространств, строящихся из известных при помощи определённых конструкций. Наиболее важные и употребительные из них (в простейших вариантах):

ортогональная сумма $H=\bigoplus H_i$ гильбертовых пространств H_i — конструкция, подобная образованию H одномерными подпространствами, описываемому формулой (1);

тензорное произведение $H=\bigotimes H_i$ гильбертовых пространств — конструкция, аналогичная переходу от функций одной переменной $f(x_1)$ к функциям многих переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$; подобная конструкция применяется и для бесконечного числа сомножителей;

проективный предел ΠX_α банаховых пространств X_α — здесь, грубо говоря, $x_i\to x$, если $\|x_i-x\|_\alpha\to 0$ при $i\to\infty$ для каждого α;

индуктивный предел $\sum X_\alpha$ банаховых пространств X_α — здесь $x_i\to x$, если все x_i, начиная с нек-рого x_{α_0}, лежат в одном X_{α_0}, и в нём $\|x_i-x\|\to 0$ при $i\to\infty$.

В Ф. а. существенную роль играет изучение непрерывных *линейных функционалов* f — линейных отображений пространства X в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$), образующих т. н. сопряжённое пространство X^*; его свойства тесно связаны со свойствами исходного пространства. Если $X=H$ — гильбертово пространство, то структура пространства H^* проста: подобно конечномерному случаю каждый непрерывный линейный функционал f имеет вид $f=(x, a)$, где $a\in H$ — зависящий от f вектор (теорема Рисса). В случае банахова пространства ситуация сложнее: можно строить X^*, $X^{**}=(X^*)^*$, ..., и эти пространства могут оказаться различными.

Пространство X^* в известном смысле «лучше» X. Так, напр., в нём можно ввести наряду с нормой т. н. слабую топологию [грубо говоря, $f_i\to f$ при $i\to\infty$, если $f_i(x)\to f(x)$ для каждого $x\in X$], относительно к-рой шар, т. е. множество точек x таких, что $\|x\|\leqslant r$, уже будет компактным (такого эффекта никогда не будет в бесконечномерном пространстве относительно топологии, порождённой нормой). Это позволяет более детально изучить ряд геометрич. вопросов для множеств в X^*.

Для ряда конкретных пространств X сопряжённые пространства X^* могут быть найдены. Однако для большинства банаховых, и в особенности топологич. векторных пространств, функционалы будут элементами новой природы, не выражающимися с помощью средств классич. анализа. Элементы сопряжённого пространства наз. *обобщёнными функциями*.

Основным объектом изучения в Ф. а. являются прежде всего *линейные операторы* A — линейные отображения, действующие из одного топологич. векторного пространства X в другое Y. В случае конечномерных X, Y структура оператора A проста: если зафиксировать базисы в X и Y, то линейному оператору однозначно соответствует нек-рая матрица. При переходе к бесконечномерному случаю

положение значительно усложняется. Здесь прежде всего различаются *непрерывные операторы* (к-рые, напр., в случае банаховых пространств наз. ограниченными) и разрывные (неограниченные) операторы. Операторы первого типа — более простые, однако второй тип встречается чаще.

В разнообразных задачах математич. физики возникает т. н. задача на *собственные значения*: для нек-рого оператора $A : X \to X$ требуется выяснить возможность нахождения решения $x \neq 0$ (собственного вектора) уравнения $Ax = \lambda x$ при нек-ром $\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) (соответствующего собственному значению λ). Действие A на собственный вектор особенно просто: оно сводится к умножению на скаляр. Поэтому, напр., если собственные векторы образуют базис $e_1, e_2, \ldots$ пространства X, т. е. для $x \in X$ имеет место разложение (1), то оператор A имеет вид

$$Ax = \sum \lambda_i x_i e_i.$$

Набор $S(A)$ собственных значений в этом случае наз. с п е к т р о м оператора A.

Для конечномерных X вопрос о таком представлении выяснен полностью. Первое перенесение этой картины на бесконечномерный случай было дано для интегральных операторов с симметричным ядром. Затем подобная теория была развита для общих самосопряжённых компактных операторов в гильбертовом пространстве, а также для нек-рых других классов абстрактно заданных операторов. Однако при переходе к простейшим некомпактным операторам возникли трудности, связанные с самим определением спектра. Исследование пересмотренного и обобщённого понятия спектра лежит в основе *спектрального анализа* линейных операторов (обобщающего теорию собственных значений). Так, если A — ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве X, то спектром $S(A)$ называется дополнение к множеству таких точек $z \in \mathbb{C}$ (наз. регулярными), для к-рых оператор $(A - zE)^{-1} = R_z$, наз. р е з о л ь в е н т о й, имеет ограниченный обратный оператор. Как и в конечномерном случае $S(A)$ не пуст и расположен в круге $|z| \leqslant \| A \|$. С помощью этих понятий выяснено, как придавать разумный смысл нек-рым функциям от операторов. Напр., функция $f(A)$, соответствующая аналитической в окрестности $S(A)$ функции $f(z)$, определяется формулой

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) R_z \, dz,$$

где Γ — контур, охватывающий $S(A)$. При этом алгебраич. операции над функциями переходят в аналогичные операции над операторами.

Наиболее разработана спектральная теория самосопряжённых и унитарных операторов в гильбертовом пространстве H. Так, самосопряжённый оператор A имеет чисто действительный спектр. Если H конечномерно, то в нём существует ортонормированный базис собственных векторов оператора A; другими словами, имеет место разложение

$$x = \sum P(\lambda_k) x, \quad Ax = \sum \lambda_k P(\lambda_k) x, \qquad (2)$$

где $P(\lambda_k)$ — оператор проектирования (проектор) на подпространство, натянутое на все собственные векторы оператора A, отвечающие одному и тому же собственному значению. Оказывается, что эти формулы могут быть обобщены на произвольный самосопряжённый оператор в H, только сами проекторы $P(\lambda)$ могут не существовать, поскольку могут отсутствовать и собственные векторы. В формулах (2) суммы заменяются теперь интегралами Стилтьеса по неубывающей операторнозначной мере (функции) $E(\lambda)$ [к-рая в конечномерном случае равна $\sum_{\lambda_i < \lambda} P(\lambda_i)$], называемой с п е к т р а л ь н о й м е р о й, точки роста к-рой совпадают со спектром $S(A)$. Формулы этого типа сохраняются, если привлечь обобщённые функции.

Аналогичные результаты справедливы для унитарных операторов (спектр к-рых располагается на окружности $|\lambda| = 1$).

На ранних этапах развития Ф. а. изучались задачи, для постановки и решения к-рых необходимы были лишь линейные операции над элементами пространства. Исключение составляет только теория колец операторов. В кон. 30-х гг. стала развиваться теория т. н. б а н а х о в ы х а л г е б р (нормированных колец — старое название), в к-рой аксиоматизируется операция умножения, причём $\| xy \| \leqslant \| x \| \cdot \| y \|$. Типичными представителями банаховых алгебр являются кольца ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X (умножение в них — последовательное применение операторов, необходимо с учётом порядка).

Одновременно с развитием и углублением понятия пространства шло развитие и обобщение понятия функции (отображения), что привело, в конечном счёте, к необходимости рассматривать отображения (не обязательно линейные) одного пространства в другое — нелинейные операторы. Основными направлениями такого нелинейного Ф. а. являются: 1) дифференциальное исчисление нелинейных операторов, включая теоремы о локальном обращении и о неявной функции; 2) принципы неподвижной точки для различных классов нелинейных операторов (сжимающих, компактных и т. п.) и связанные с ними вопросы разрешимости уравнений; 3) спектральные свойства нелинейных операторов (точки бифуркации, ветви непрерывности и т. д.); 4) бесконечномерные пространства, линейные в малом — банаховы многообразия; 5) экстремальные свойства нелинейных функционалов и вариационные методы исследования нелинейных операторов.

● К о л м о г о р о в А. Н., Ф о м и н С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981; Л ю с т е р н и к Л. А., С о б о л е в В. И., Краткий курс функционального анализа, М., 1982; Т р е н о г и н В. А., Функциональный анализ, М., 1980; Функциональный анализ, М., 1972; К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П., Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977; Р у д и н У., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1975; И о с и д а К., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1967; Э д в а р д с Р., Функциональный анализ, пер. с англ., М., 1969.

Ю. М. Березанский, Б. М. Левитан.

«ФУНКЦИОНА́ЛЬНЫЙ АНА́ЛИЗ И ЕГО́ ПРИЛОЖЕ́НИЯ» — научный журнал Отделения математики АН СССР. Издаётся в Москве с 1967. Выходит 4 номера в год. Публикует оригинальные работы по актуальным вопросам функционального анализа и его приложений, а также информационные материалы. Тираж (1987) ок. 1500 экз.

ФУНКЦИОНА́ЛЬНЫЙ ОПРЕДЕЛИ́ТЕЛЬ — определитель, элементами которого являются функции одного или многих переменных. Наиболее важные примеры Ф. о.: *вронскиан*, играющий важную роль в теории линейных дифференциальных уравнений высшего порядка, *гессиан*, применяемый в теории алгебраич. кривых, и *якобиан*, используемый при преобразовании кратных интегралов, установлении независимости системы функций многих переменных. Производная Ф. о. $D(x) = |a_{ik}(x)|$ n-го порядка равна сумме n Ф. о., матрицы к-рых получаются из матрицы $\| a_{ik}(x) \|$, соответственно, дифференцированием элементов первого, второго, ... n-го столбца; напр., если

$$D(x) = \begin{vmatrix} e^x & \cos x \\ \ln x & \sin x \end{vmatrix},$$

то

$$D'(x) = \begin{vmatrix} e^x & \cos x \\ \frac{1}{x} & \sin x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e^x & -\sin x \\ \ln x & \cos x \end{vmatrix}.$$

Иногда термин «Ф. о.» применяется для обозначения якобиана.

ФУНКЦИОНА́ЛЬНЫЙ РЯД — см. *Ряд*.

ФУ́НКЦИЯ (от лат. functio — исполнение, осуществление) — одно из основных понятий математики, выражающее зависимость одних переменных величин от других. Слово «величина» в этом определении Ф. понимается в самом широком смысле: это может быть именованное число, отвлечённое число (действительное или комплексное),

несколько чисел (т. е. точка пространства) и, вообще, элемент любого множества.

Действительная функция одного действительного переменного. В простейшем случае, когда величина — действительное число, понятие «Ф.» определяется следующим образом. Пусть каждому числу x из заданного множества E поставлено в соответствие число y, обозначаемое $y=f(x)$ (читается «игрек равен эф от икс»). Тогда говорят, что на множестве E задана функция

$$y=f(x),\ x\in E.$$

При этом употребляются следующие термины: x — независимое переменное, или аргумент, y — зависимое переменное, или функция, E — множество значений, к-рые может принимать x — область определения, или область задания Ф. (областью определения Ф. может быть множество всех действительных чисел, интервал, отрезок и т. д.). Слова «поставлено в соответствие» означают, что указан определённый способ, по к-рому для каждого $x\in E$ находится значение $y=f(x)$. Этот способ в данном случае обозначен символом f. Для обозначения Ф. применяются и другие буквы, напр. $y=g(x)$, $y=F(x)$, $s=h(t)$, $v=\varphi(s)$.

Во всех случаях, когда употребляется термин «функция», подразумевается, если не оговорено противное, однозначная Ф., т. е. такое соответствие, при к-ром каждому значению аргумента x соответствует только одно значение Ф. y. Если одному и тому же значению аргумента соответствует несколько (быть может даже бесконечное множество) значений y, то y наз. многозначной функцией аргумента x.

Способы задания функций. Наиболее распространён аналитический способ задания Ф., при к-ром Ф. задаётся формулой, устанавливающей, какие вычислительные операции надо произвести над x, чтобы найти y. Напр., $y=2x+1$, $y=3x^2$, $y=\sqrt{x^2-1}$, $y=x/(x+1)$, $y=\ln(x+2)$, $y=\cos x$, $y=\arcsin x$. При этом считается, что областью определения Ф. является множество всех тех значений x, при к-рых выполнимы все операции, указанные в формуле. Напр., областью определения Ф. $y=3x^2$ является множество всех действительных чисел, областью определения Ф. $y=\ln(x-1)$ — полупрямая $x>1$, областью определения Ф. $y=\sqrt{1-x^2}$ — отрезок $1\leqslant x\leqslant 1$.

Ф. может быть задана разными формулами на разных частях области определения. Напр., Ф.

$$y=\begin{cases}\cos x & \text{при } -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 1 & \text{при } 0<x<1,\\ 1/x & \text{при } 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

задана на отрезке $-\pi\leqslant x\leqslant 2$ тремя разными формулами.

Часто используется задание Ф. с помощью предельного перехода, в частности в виде сходящегося ряда — бесконечной суммы или сходящегося бесконечного произведения. Напр.,

$$\operatorname{sign} x=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg} nx,$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

При аналитич. способе задания Ф. может быть задана явно, когда дано выражение y через x, т. е. формула имеет вид $y=f(x)$, неявно, когда x и y связаны между собой уравнением вида $F(x, y)=0$ (см. *Неявная функция*), а также параметрически, когда соответствующие друг другу значения x и y выражены через третью переменную величину t, наз. параметром (см. *Параметрическое представление*).

Иногда Ф. задаётся с помощью словесной формулировки. Напр., функция Дирихле равна 1, если x — рациональное число, и 0, если x — иррациональное число.

Распространён и графический способ задания Ф. *Графиком функции* $y=f(x)$, $x\in E$, наз. множество точек плоскости с прямоугольными координатами (x, y), где $x\in E$, $y=f(x)$. Графич. способ задания Ф. широко применяется на практике. Так, многие процессы изменения одной величины в зависимости от другой исследуются с помощью кривых, записанных самопишущими приборами. Однако чтобы графич. задание Ф. было вполне корректным с чисто математич. точки зрения, недостаточно просто иметь её график, ибо задание геометрич. объекта чертежом всегда недостаточно определённо. Поэтому для графич. задания Ф. должна быть указана точная геометрич. конструкция её графика. Чаще всего эта конструкция задаётся при помощи уравнения, что возвращает нас к аналитич. заданию Ф.

Хотя график Ф. не даёт возможности точного определения численных значений x и y, он наглядно отражает качественное поведение Ф. (непрерывность, монотонность, максимумы и минимумы, точки перегиба и т. д.) и является поэтому важным средством исследования Ф.

При табличном способе задания Ф. задаётся в виде таблицы, в к-рой для каждого значения аргумента указывается соответствующее ему значение Ф. Такой способ задания Ф. часто применяется в тех случаях, когда область определения состоит из конечного числа значений (таблицы цен на товары, таблицы розыгрыша лотерей и т. д.). Широко используются таблицы значений различных Ф.: в таблицах логарифмов, тригонометрич. Ф. и т. п. приводятся значения Ф., соответствующие достаточно мелкой сетке значений аргумента (для промежуточных значений аргумента приближённые значения Ф. находят интерполяцией). В виде таблиц обычно записываются результаты экспериментального исследования к.- л. процессов и явлений, напр. зависимость атмосферного давления или температуры воздуха от времени суток.

Действительная функция нескольких действительных переменных.

Ф. от двух переменных определяется следующим образом: рассматривается множество E упорядоченных пар чисел (x, y). Если в силу нек-рого закона каждой паре $(x, y)\in E$ приведено в соответствие число z, то говорят, что на множестве E определена функция $z=f(x,y)$ от двух переменных x и y. Так как каждой паре чисел (x, y) соответствует на плоскости точка с координатами (x, y), то Ф. $f(x, y)$ задана на множестве E точек плоскости. Ф. $z=f(x, y)$ изображают в трёхмерном пространстве, где задана прямоугольная система координат (x, y, z), в виде множества точек $(x, y, f(x, y))$, проекции к-рых (x, y) принадлежат множеству E. Напр., Ф. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\leqslant 1$, изображается верхней половиной шаровой поверхности радиуса 1 с центром в начале координат.

Аналогично можно рассматривать множество E упорядоченных систем $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из n чисел и Ф. $z=F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть Ф. от n переменных, определённая на множестве E точек n-мерного пространства.

Общее понятие функции. Пусть заданы множества E и E_1 элементов любой природы, и пусть каждому элементу $x\in E$ поставлен в соответствие элемент $y\in E_1$, обозначаемый $y=f(x)$. Тогда говорят, что задана функция $y=f(x)$, $x\in E$, или отображение $f: E\to E_1$.

Принята следующая терминология: x — независимое переменное, или аргумент; E — область определения Ф., каждый элемент $x\in E$ — значение аргумента; y — зависимое переменное, или Ф., от аргумента x; E_1 — область значений Ф., каждый элемент $y\in E_1$ такой, что $y=f(x)$ для нек-рого значения $x\in E$, наз. значением Ф.

Множество E' значений Ф. $y=f(x)$, $x\in E$, обозначается иногда символом $f(E)$, то есть $E'=f(E)$. Множество значений Ф. E' является подмножеством области значений

Ф.: $E' \subset E_1$, в частности, может совпадать с E_1. Напр., для действительных Ф. от одного действительного переменного областью значений является множество всех действительных чисел, а множеством значений может быть любое множество действительных чисел. Так, для Ф. $y=3x$ множеством значений является множество всех действительных чисел; множеством значений Ф. $y=x^2$ является полупрямая $y \geqslant 0$, множеством значений Ф. $y=\operatorname{arctg} x$ — интервал $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Ф. $y=f(x)$, $x \in E$, задаёт отображение множества E на множество её значений $E'=f(E)$. Если $x \in E$ — фиксированное значение аргумента и $y=f(x)$, то y наз. о б р а з о м элемента x, а x — п р о о б р а з о м элемента y. Множество E' наз. образом множества E. Напр., Ф. $y=3x$ отображает множество точек оси абсцисс на множество точек оси ординат; Ф. $y=\ln x$ отображает полупрямую $x>0$ на всю ось ординат; Ф. $y=\sqrt{1-x^2}$ отображает отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$ на отрезок $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Для Ф. $f(x)$ и $g(x)$ естественным образом определяются а р и ф м е т и ч е с к и е о п е р а ц и и: это Ф., принимающие (в тех случаях, когда это имеет смысл) значения

$$f(x) \pm g(x),\ f(x)\,g(x),\ f(x)/g(x).$$

Термин «Ф.» чаще всего используется только для обозначения числовой Ф. от одного или нескольких числовых переменных (действительных или комплексных). Напр., $y=f(x)$ — действительная Ф. от одного действительного переменного, $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — действительная Ф. от n действительных переменных, $w=f(z)$ — комплекснозначная Ф. от одного комплексного переменного. В других случаях, как правило, используются специальные термины: *отображение*, *преобразование*, *оператор*, *функционал*, *вектор-функция*.

См. также *Непрерывная функция*, *Разрывная функция*, *Периодическая функция*, *Монотонная функция*, *Обратная функция*, *Сложная функция*, *Чётная функция*, *Нечётная функция*, *Элементарные функции*, *Специальные функции*.

Исторический очерк. Как и остальные понятия математики, понятие Ф. сложилось не сразу, а прошло долгий путь развития. В работе П. Ферма «Введение и изучение плоских и телесных мест» (1636, опубл. 1679) говорится: «Всякий раз, когда в заключительном уравнении имеются две неизвестные величины, налицо имеется место». По существу здесь идёт речь о функциональной зависимости и её графич. изображении («место» у Ферма означает линию). Изучение линий по их уравнениям в «Геометрии» Р. Декарта (1637) также указывает на ясное представление о взаимной зависимости двух переменных величин. У И. Барроу («Лекции по геометрии», 1670) в геометрич. форме устанавливается взаимная обратность действий дифференцирования и интегрирования (разумеется, без употребления самих этих терминов). Это свидетельствует уже о совершенно отчётливом владении понятием Ф. В геометрич. и механич. виде это понятие мы находим и у И. Ньютона. Однако термин «Ф.» впервые появляется лишь в 1692 у Г. Лейбница, и притом не совсем в современном его понимании. Г. Лейбниц называет Ф. различные отрезки, связанные с к.-л. кривой (напр., абсциссы её точек). В первом печатном курсе «Анализа бесконечно малых» Г. Лопиталя (1696) термин «Ф.» не употребляется.

Первое определение Ф. в смысле, близком к современному, встречается у И. Бернулли (1718): «Функция — это величина, составленная из переменной и постоянной». В основе этого не вполне отчётливого определения лежит идея задания Ф. аналитич. формулой. Та же идея выступает и в определении Л. Эйлера, данном им во «Введении в анализ бесконечных» (1748): «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств». Впрочем, уже Л. Эйлеру было не чуждо и современное понимание Ф., к-рое не связывает понятие Ф. с к.-л. аналитическим её выражением. В его «Дифференциальном исчислении» (1755) говорится: «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называют функциями вторых».

Всё же в 18 в. отсутствовало достаточно ясное понимание различия между Ф. и её аналитич. выражением. Это нашло отражение в той критике, к-рой Л. Эйлер подверг решение задачи о колебании струны, предложенное Д. Бернулли (1753). В основе решения Д. Бернулли лежало утверждение о невозможности разложить любую Ф. в тригонометрич. ряд. Возражая против этого, Л. Эйлер указал на то, что подобная разложимость доставляла бы для любой Ф. аналитич. выражение, в то время как Ф. может и не иметь его (она может быть задана графиком, «начертанным свободным движением руки»). Эта критика убедительна и с современной точки зрения, ибо не все Ф. допускают аналитич. изображение (правда, у Д. Бернулли речь идёт о н е п р е р ы в н о й Ф., к-рая, как установил в 1885 К. Вейерштрасс, всегда аналитически изобразима, но она может и не разлагаться в тригонометрич. ряд). Однако другие аргументы Л. Эйлера уже ошибочны. Напр., он считал, что разложение Ф. в тригонометрич. ряд доставляет для неё е д и н о е аналитич. выражение, в то время как она может быть «смешанной» Ф., представимой на разных отрезках разными формулами. На самом деле одно другому не противоречит, но в ту эпоху казалось невозможным, чтобы два аналитич. выражения, совпадая на части отрезка, не совпадали на всём его протяжении.

С нач. 19 в. уже всё чаще и чаще определяют понятие Ф. без упоминания об её аналитич. изображении. В «Трактате по дифференциальному и интегральному исчислению» (1797—1802) С. Лакруа говорится: «Всякая величина, значение которой зависит от одной или многих других величин, называется функцией этих последних». В «Аналитической теории тепла» Ж. Фурье (1822) имеется фраза: «Функция fx обозначает функцию совершенно произвольную, то есть последовательность данных значений, подчинённых или нет общему закону и соответствующих всем значениям x, содержащимся между 0 и какой-либо величиной x». Близко к современному и определение Н. И. Лобачевского: «... Общее понятие функции требует, чтобы функцией от x называть число, которое даётся для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подаёт средство испытывать все числа и выбирать одно из них, или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной». Там же немного ниже сказано: «Обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа одни с другими в связи понимать как бы данными вместе». Таким образом, современное определение Ф., свободное от упоминаний об аналитич. задании, обычно приписываемое П. Дирихле (1837), неоднократно предлагалось и до него.

● И л ь и н В. А., П о з н я к Э. Г., Основы математического анализа, ч. 1, 3 изд., М., 1971; ч. 2, 2 изд., М., 1980; К у д р я в ц е в Л. Д., Математический анализ, 2 изд., т. 1—2, М., 1973; Н и к о л ь с к и й С. М., Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—2, М., 1975; История математики, т. 2—3, М., 1970—72.

И. П. Натансон, Ю. В. Сидоров.

ФУРЬЕ ИНТЕГРА́Л — формула для разложения непериодической функции на гармонические компоненты, частоты которых пробегают непрерывную совокупность значений. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на каждом конечном отрезке и если сходится

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx,$$

то

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt. \qquad (1)$$

Эта формула впервые встречается при решении нек-рых задач теплопроводности у Ж. Фурье (1811), но её доказа-

тельство было дано позже другими математиками. Формулу (1) можно представить также в виде

$$f(x)=\int_0^\infty [a(u)\cos ux+b(u)\sin ux]\,du, \qquad (2)$$

где

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt,$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt.$$

В частности, для чётных функций

$$f(x)=\int_0^\infty a(u)\cos ux\,dx,$$

где

$$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt.$$

Формулу (2) можно рассматривать как предельную форму ряда Фурье для функций, имеющих период $2T$, когда $T\to\infty$. При этом $a(u)$ и $b(u)$ аналогичны коэффициентам Фурье функции $f(x)$. Употребляя комплексные числа, можно заменить формулу (1) формулой

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}du\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu(x-t)}f(t)\,dt.$$

Формулу (1) можно преобразовать также к виду

$$f(x)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt \qquad (3)$$

(простой интеграл Фурье).

Если интегралы в формулах (2), (3) расходятся, то во многих случаях их можно просуммировать к $f(x)$ при помощи того или иного метода суммирования. При решении многих задач используются формулы Ф. и. для функций двух и большего числа переменных.

ФУРЬЕ КОЭФФИЦИЕ́НТЫ — коэффициенты разложения функции $f(x)$, имеющей период $2T$, в ряды Фурье:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{T}+b_n\sin\frac{\pi nx}{T}\right).$$

Формулы для Ф. к.

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{\pi nx}{T}\,dx,\ n=0,1,\ldots,$$

$$b_k=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{\pi nx}{T}\,dx,\ n=1,2,\ldots,$$

наз. формулами Эйлера — Фурье. Непрерывная функция $f(x)$ однозначно определяется своими Ф. к. Для интегрируемой функции $f(x)$ её Ф. к. стремятся к нулю при $n\to\infty$, причём скорость их убывания зависит от дифференциальных свойств функции $f(x)$; напр., если $f(x)$ имеет k непрерывных производных, то существует такое число c, что $|a_n|\leqslant c/n^k$, $|b_n|\leqslant c/n^k$. Ф. к. связаны с $f(x)$ также следующим равенством:

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|f(x)|^2\,dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)$$

(см. *Парсеваля равенство*). Ф. к. функции $f(x)$ по любой нормированной ортогональной на отрезке $[a, b]$ системе функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, . . ., $\varphi_k(x)$, . . . равны

$$a_k=\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx.$$

ФУРЬЕ МЕ́ТОД, метод разделения переменных,— метод, в котором решение дифференциального уравнения с заданными начальным однородным и краевым условиями ищется как суперпозиция решений, удовлетворяющих краевым условиям и представимых в виде произведения функции от пространственных переменных на функцию от времени. Нахождение таких решений связано с разысканием собственных функций и собственных значений нек-рых дифференциальных операторов и последующим разложением функций начальных условий по найденным собственным функциям. В частности, разложение функций в ряды и интегралы Фурье связано с применением Ф. м. для изучения задач о колебании струны и о теплопроводности стержня. Напр., изучение малых колебаний струны длины l, имеющей закреплённые концы, сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

при краевых условиях $u(0, t)=u(l, t)=0$ и начальных условиях $u(x, 0)=f(x)$, $u_t'(x, 0)=F(x)$; $0\leqslant x\leqslant 1$. Решения этого уравнения, имеющие вид $X(x)\,T(t)$ и удовлетворяющие краевым условиям, выражаются формулой

$$\sin\frac{\pi nx}{l}\left(A_n\cos\frac{a\pi nt}{l}+B_n\sin\frac{a\pi nt}{l}\right).$$

Выбирая соответствующим образом коэффициенты A_n и B_n, можно добиться того, что функция

$$u(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{\pi nx}{l_1}\left(A_n\cos\frac{a\pi nt}{l}+B_n\sin\frac{a\pi nt}{l}\right)$$

будет решением поставленной задачи.

Метод предложен для решения волнового уравнения Ж. Д'Аламбером (1749), с достаточной полнотой метод был развит в нач. 19 в. Ж. Фурье и в полной общности сформулирован М. В. Остроградским (1828).

ФУРЬЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — одно из интегральных преобразований; Ф. п. — функция, выражающаяся через данную функцию $f(x)$ формулой

$$g(u)=F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-iut}\,dt. \qquad (1)$$

Если функция $f(x)$ — чётная, то её Ф. п. равно

$$g(u)=F_c[f]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt \qquad (2)$$

(косинус-преобразование), а если $f(x)$ — нечётная функция, то

$$g(u)=F_s[f]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt \qquad (3)$$

(синус-преобразование). Формулы (1)—(3) обратимы, т. е. для чётных функций

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\cos ux\,du,$$

а для нечётных функций

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\sin ux\,du.$$

В общем случае имеет место формула

$$f(x)=F^{-1}[g]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)\,e^{iux}\,du. \qquad (4)$$

Каждой операции над функциями соответствует операция над их Ф. п., к-рая во многих случаях проще соответствующей операции над $f(x)$. Напр., Ф. п. для $f'(x)$ является $iug(u)$. Если

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-s)\,f_2(s)\,ds,$$

то $g(u)=g_1(u)g_2(u)$. Для $f(x+a)$ Ф. п. является $e^{iua}g(u)$, а для $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ — функция $c_1g_1(u)+c_2g_2(u)$.

Если существует $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$, то интегралы в формулах (1) и (4) сходятся в среднем, причём

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|g(u)|^2\,du \qquad (5)$$

(теорема Планшерел я). Формула (5) является обобщением на Ф. п. равенства Парсеваля для рядов Фурье. Физич. смысл формулы (5) заключается в равенстве энергии нек-рого колебания сумме энергий его гармонич. компонент. Отображение $F: f(x)\to g(u)$ является унитарным оператором в гильбертовом пространстве функций $f(x)$, $-\infty<x<\infty$, с интегрируемым квадратом. Этот оператор может быть представлен также в виде

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{du}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iut}-1}{-it}f(t)\,dt.$$

При нек-рых условиях на $f(x)$ справедлива формула Пуассона:

$$\frac{1}{2}g_c(0)+\sum_{n=1}^{\infty}g_c(n)=\sqrt{2\pi}\left\{\frac{1}{2}f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}f(2\pi n)\right\}.$$

Если функция $f(x)$ достаточно быстро убывает, то её Ф. п. можно определить и при нек-рых комплексных значениях $u=v+iw$. Напр., если существует $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|e^{a|x|}\,dx$, $a>0$, то Ф. п. определено при $|w|<a$. Ф. п. при комплексных значениях тесно связано с двусторонним *Лапласа преобразованием*

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-px}\,dx,\quad p=s+i\sigma.$$

Оператор Ф. п. может быть расширен на более обширные классы функций, нежели совокупность интегрируемых функций, и даже на нек-рые классы обобщённых функций (т. н. медленного роста).

Имеются обобщения Ф. п. Одно из них использует различного рода специальные функции, напр. цилиндрич. функции; это направление получает завершение в теории представлений непрерывных групп. Другим является т. п. преобразование Фурье — Стилтьеса, широко применяемое, напр., в теории вероятностей; оно определяется для произвольной ограниченной неубывающей функции $\varphi(x)$ интегралом Стилтьеса

$$g(u)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iux}\,d\varphi(x) \qquad (6)$$

и наз. характеристической функцией распределения $\varphi(x)$. Для представимости функции $g(u)$ в виде (6) необходимо и достаточно, чтобы при любых $u_1, \ldots, u_n$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ было

$$\sum_{j,k=1}^{n}g(u_j-u_k)\,\xi_j\overline{\xi}_k>0$$

(теорема Бохнера — Хинчина).

Ф. п., первоначально возникшее в теории теплопроводности, имеет многочисленные применения как в самой математике (напр., при решении дифференциальных, разностных и интегральных уравнений, в теории специальных функций), так и в различных разделах теоретич. физики. Напр., Ф. п. стало стандартным аппаратом квантовой теории поля, широко используется в методе функций Грина для неравновесных задач квантовой механики и термодинамики, в теории рассеяния. *Н. Я. Виленкин.*

ФУРЬЕ РЯД функции $f(x)$ по ортонормированной на промежутке (a, b) системе функций $\{\varphi_k(x)\}$ — ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(x),$$

коэффициенты (т. н. коэффициенты Фурье функции f) которого определяются по формулам

$$c_k=\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

О функции f в общем случае предполагается, что она интегрируема с квадратом на (a, b). Аналогично строятся Ф. р. для функций многих переменных. Ф. р. по ортонормированным системам возникли как обобщение Ф. р. по тригонометрич. системе, к-рые были первыми примерами Ф. р. Дальнейшие обобщения приводят к Ф. р. в гильбертовом пространстве.

Ф. р. по тригонометрич. системе определяется для каждой функции f, интегрируемой на $(0, 2\pi)$. Это ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \qquad (1)$$

с коэффициентами

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\,dx,\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx\,dx. \qquad (2)$$

Теория Ф. р. по тригонометрич. системе разработана наиболее глубоко. Имея в виду Ф. р. по тригонометрич. системе, обычно говорят просто о Ф. р., не указывая, по какой системе они строятся.

Ф. р. составляют значительную часть теории тригонометрич. рядов. Впервые Ф. р. появились в работах Ж. Фурье (1807), посвящённых исследованию задач теплопроводности. Он предложил для представления функции f, заданной на $(0, 2\pi)$ тригонометрич. рядом, брать ряд (1) с коэффициентами (2). Выбор коэффициентов (2) является естественным со многих точек зрения. Напр., если формально приравнять ряд (1) функции $f(x)$, то почленное интегрирование приводит к коэффициентам a_k, b_k, определяемым по формулам (2). Так их получал ещё Л. Эйлер (1777).

Интеграл в (2) можно понимать по-разному, напр. как интеграл Римана или Лебега. В зависимости от этого говорят о рядах Фурье — Римана, Фурье — Лебега и т. п. Современный вид теория Ф. р. приобрела после построения интеграла Лебега, после чего она развивается, главным образом, как теория рядов Фурье — Лебега.

В теории Ф. р. исследуются вопросы представления функций с помощью Ф. р., изучается связь свойств функции со свойствами её Ф. р.

К работе Ф. Бесселя (1828) восходит доказательство минимального свойства частных сумм Ф. р.: для функций $f\in L^2$ среди тригонометрич. полиномов $t_n(x)$ порядка n наименьшее значение интегралу

$$\int_0^{2\pi}[f(x)-t_n(x)]^2\,dx$$

доставляет частная сумма Ф. р. функции f. Если $f\in L^2$, то справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)\,dx,$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f. Это означает, что для каждой функции $f\in L^2$ её Ф. р. сходится к ней в метрике L^2.

Коэффициенты Фурье каждой интегрируемой функции стремятся к нулю. Скорость стремления увеличивается, если функция обладает лучшими свойствами. Напр., если f абсолютно непрерывна, то Ф. р. производной f' можно получить почленным дифференцированием Ф. р. функции f и для коэффициентов Фурье функции f справедлива оценка a_k, $b_k=o(k^{-1})$ при $k\to\infty$.

Первый признак сходимости Ф. р. получил П. Дирихле (1829). Обобщением его результата является теорема Жордана (1881): если функция f имеет ограниченную вариацию, то её Ф. р. сходится для всех x, причём в точках непрерывности сходится к $f(x)$, а в точках разрыва — к $[f(x+0)+f(x-0)]/2$.

Согласно принципу локализации, доказанному Б. Риманом (1853), сходимость или расходимость Ф. р. функции f в точке x и значение суммы в случае сходимости зависят только от поведения функции f в как угодно малой окрестности точки x. Известно много разных признаков сходимости Ф. р. в точке. Напр., Р. Липшиц (1864) установил, что Ф. р. функции f сходится в точке x, если для достаточно малых h выполнено условие $|f(x+h)-f(x)|\leqslant M|h|^{\alpha}$, где M и α — нек-рые положительные числа. П. Дюбуа-Реймон (1873) установил, что непрерывность функции в точке не гарантирует сходимость её Ф. р. в этой точке. В дальнейшем было доказано, что Ф. р. непрерывной функции может расходиться на всюду плотном множестве точек меры нуль, имеющем вторую категорию.

Если о функции не предполагать ничего, кроме интегрируемости, то её Ф. р. может оказаться расходящимся почти всюду или даже всюду. Первые такие примеры построил А. Н. Колмогоров (1923). Еще в 1915 Н. Н. Лузин высказал гипотезу, что Ф. р. каждой функции из L^2 сходится почти всюду. Справедливость этой гипотезы установил Л. Карлесон (1966). Ф. р. функций из L^p при $p>1$ также сходятся почти всюду.

Поскольку частные суммы Ф. р. сходятся не всегда, рассматривается суммирование Ф. р., когда для пред-

ставления функции используются те или иные средние частных сумм её Ф. р. Среди других задач, изучаемых в теории Ф. р., следует отметить равномерную и абсолютную сходимость, свойства сопряжённых функций и их Ф. р., ряды по переставленной тригонометрич. системе, свойства рядов при специальных предположениях об их коэффициентах, напр. лакунарных рядов или рядов с монотонными коэффициентами.

Теория Ф. р. для функций многих переменных разработана в меньшей степени. Пусть $x=(x_1, \ldots, x_N)$ — точка N-мерного пространства, $k=(k_1, \ldots, k_N)$ — N-мерный вектор с целочисленными координатами и $(k, x)=k_1x_1+\ldots+k_Nx_N$. Для функции $f(x)$ периода 2π по каждой переменной, интегрируемой на N-мерном кубе $[0, 2\pi]^N$, Ф. р. (в комплексной форме) по тригонометрич. системе наз. ряд

$$\sum_k c_k e^{i(k, x)}, \tag{3}$$

где суммирование ведётся по всем k и

$$c_k=\frac{1}{(2\pi)^N}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-i(k, x)}\,dx$$

— коэффициенты Фурье функции f.

Возможны различные определения частных сумм ряда (3), напр. по прямоугольникам

$$\sum_{|k_1|\leqslant n_1, \ldots, |k_N|\leqslant n_N} c_k e^{i(k, x)}$$

или по кругам

$$\sum_{|k|\leqslant n} e^{i(k, x)}, \tag{4}$$

где n — радиус и $|k|=\sqrt{k_1^2+\ldots+k_N^2}$. Для представления функций круговые частные суммы (4) менее пригодны, чем их средние Рисса

$$\sum_{|k|\leqslant n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)^{\alpha} c_k e^{i(k, x)}.$$

Для средних Рисса порядка $\alpha\geqslant\frac{N-1}{2}$ Ф. р. функций из L^2 справедлив принцип локализации, а для меньших α нет (С. Бохнер, 1936). Средние Рисса круговых частных сумм критич. порядка $\alpha=\frac{N-1}{2}$ играют существенную роль и в других вопросах. Ф. р. непрерывной функции двух переменных может не сходиться по прямоугольникам ни в одной внутренней точке квадрата $[0, 2\pi]^2$.

Нек-рые результаты о Ф. р. по тригонометрич. системе допускают значительные обобщения, напр., могут быть соответствующим образом перенесены на спектральные разложения, отвечающие самосопряжённым эллиптическим дифференциальным операторам.

● Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., 1961; Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., т. 1—2, М., 1965; Толстов Г. П., Ряды Фурье, 2 изд., М., 1960; Эдвардс Р., Ряды Фурье в современном изложении, пер. с англ., т. 1—2, М., 1985.

С. А. Теляковский.

ФУРЬЕ—СТИЛТЬЕСА ПРЕОБРАЗОВАНИЕ — см. *Фурье преобразование.*

Х, Ц

ХАНА—БАНАХА ТЕОРЕМА: линейный функционал $f(x)$, определённый на линейном многообразии L действительного или комплексного векторного пространства X, может быть продолжен до линейного функционала $F(x)$, определённого на всём X, если существует *полунорма* $p(x)$ такая, что

$$|f(x)|\leqslant p(x)$$

для любого $x\in L$. Такое продолжение определяется, вообще говоря, неоднозначно, но для любого из них неравенство

$$|F(x)|\leqslant p(x)$$

при любом $x\in X$ сохраняется.

Теорема доказана Х. Ханом (1927) и независимо С. Банахом (1929).

ХАРАКТЕР (от греч. χαρακτήρ — признак, особенность) — функция специального вида, применяемая в теории чисел, теории групп, топологии и др.

В теории чисел Х. (точнее, характером Дирихле) называют комплекснозначную ненулевую функцию $\chi(n)$, определённую для всех целых чисел n и такую, что: 1) $\chi(nm)=\chi(n)\,\chi(m)$ для всех n и m; 2) существует такое целое число k (период), что $\chi(n+k)=\chi(n)$ для всех n. Наименьший положительный период наз. основным модулем характера χ, а Х. с основным модулем k обозначается $\chi(n, k)$. Примерами Х. являются: 1) главный Х. по модулю k: $\chi(n, k)=1$, если n и k взаимно просты, и $\chi(n, k)=0$ в противном случае; 2) $\chi(n, k)=\left(\frac{n}{k}\right)$, если n и k взаимно просты, и $\chi(n, k)=0$ в противном случае ($k>1$ — нечётное натуральное число, $\left(\frac{n}{k}\right)$ — символ Якоби).

q-м степенным характером по модулю k наз. Х., равный единице для тех чисел a, для к-рых разрешимо сравнение $x^q\equiv a \pmod k$. Такие Х. играют важную роль в теории алгебраич. чисел. Многие вопросы теории чисел (напр., вопрос о распределении простых чисел) связаны с изучением функций

$$L(s, \chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)/n^s$$

— т. н. L-функций Дирихле. Частным случаем таких функций является *дзета-функция* $\zeta(s)$, для к-рой $\chi(n)=1$.

Понятие «Х». ввёл П. Дирихле (1837) в связи с изучением закона распределения простых чисел в арифметич. прогрессиях. Он же разработал основы теории Х., исходя из прямого конструктивного построения их.

Условие периодичности $\chi(n+k)=\chi(n)$ позволяет трактовать характеры $\chi(n, k)$ при фиксированном $k>1$ как функции, заданные на приведённой системе вычетов по модулю k, рассматриваемой как группа по умножению, и удовлетворяющие там функциональному уравнению

$$\chi(a, b)=\chi(a)\,\chi(b). \tag{1}$$

Такая трактовка понятия Х. позволяет перенести его на любую группу G. Если χ — ненулевая функция на конечной группе порядка n, удовлетворяющая условию (1), e — единица и a — произвольный элемент группы G, то $[\chi(a)]^n=\chi(a^n)=\chi(e)=1$, то есть $\chi(a)$ — корень n-й степени из единицы, в частности

$$|\chi(a)|=1. \tag{2}$$

Характером произвольной группы G (необязательно конечной) наз. всякую функцию $\chi(a)$, определённую на G и удовлетворяющую условиям (1) и (2). Если G — топологич. группа, то требуют ещё, чтобы $\chi(a)$ была непрерывна.

Совокупность всех Х. группы G образует группу G_1 относительно умножения Х. как функций. Если G конечна и коммутативна, то G_1 изоморфна G. Для бесконечных коммутативных групп это уже, вообще говоря, неверно. Напр., если G — группа целых чисел, то её Х. служат $\chi(n)=e^{in\varphi}$, где φ — любое действительное число по модулю 2π, так что группа Х. совпадает с группой вращений окружности. В свою очередь, группа непрерывных Х.

для группы вращений окружности совпадает с группой целых чисел [каждый такой Х. имеет вид: $\chi(\varphi)=e^{in\varphi}$]. Эта двойственность была обобщена Л. С. Понтрягиным на широкий класс коммутативных топологич. групп (см. *Понтрягина принцип двойственности*).

Теория Х. тесно связана с обобщениями понятий интегралов и рядов Фурье, с проблемами теории представлений групп.

ХАРАКТЕРИ́СТИКА (греч. χαρακτηριστικος — характерный, от χαρακτήρ — признак, особенность) — целая часть десятичного логарифма.

ХАРАКТЕРИ́СТИКА дифференциального уравнения — множество M точек (кривая, поверхность и т. п.) такое, что задача Коши с начальными данными на M становится неопределённой.

Напр., для уравнения

$$u_{xy}=0 \qquad (1)$$

могут быть заданы начальные данные на одной из его Х. $x=0$:

$$u(0,\ y)=u_0(y),\quad u_x(0,\ y)=u_1(y); \qquad (2)$$

если функция u_1 отлична от постоянной, то задача Коши (1), (2) не имеет решения, если же $u_1=A=\text{const}$, то решение неединственно:

$$u=Ax+u_0(y)+b(x),$$

где b — произвольно, $b(0)=b'(0)=1$.

Однако роль Х. проявляется не только в свойствах решений уравнений, разрешимости различных задач, их корректности и др., но и в конструировании широких классов самих решений (напр., задачи Коши с нехарактеристич. начальными данными) — в этом и состоит т. н. метод характеристик. Так, Х. квазилинейного дифференциального уравнения

$$Pz_x+Qz_y=R, \qquad (3)$$

где P, Q, R — функции от x, y, z, являются интегральными кривыми системы уравнений

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}. \qquad (4)$$

Совокупность их, пересекающих данную [нехарактеристическую, т. е. не определяемую решением (4)] кривую, представляет собой график решения (задачи Коши) для уравнения (3). Очевидно обобщение понятия Х. на случай дифференциальных уравнений 1-го порядка с числом независимых переменных, большим двух.

Х. инвариантны при преобразованиях независимых переменных, и поэтому знание их позволяет упростить данное дифференциальное уравнение с частными производными. Напр., Х. уравнения 2-го порядка

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=f, \qquad (5)$$

где a, b, c, f — функции от x, y, суть кривые, определяемые дифференциальным уравнением

$$ady^2-2bdxdy+cdx^2=0. \qquad (6)$$

В зависимости от типа уравнения (5) получается: два семейства действительных Х. (гиперболич. уравнение), одно семейство (параболич. уравнение) и ни одного (эллиптич. уравнение). В гиперболич. случае оказывается, что Х. разных семейств [с уравнениями $\xi(x,\ y)=C_1$, $\eta(x,\ y)=C_2$] нигде не касаются и их можно принять в качестве криволинейной системы координат; взяв ξ и η за новые аргументы, можно привести уравнение к более простому (т. н. характеристическому) виду

$$u_{\xi\eta}=\varphi(\xi,\eta).$$

Значения решения u вдоль Х. и значения u_x, u_y в к.-л. её точке полностью определяют значения этих производных вдоль всей линии (на это, в частности, и опирается метод Х.); для иных линий такой связи нет. С другой стороны, значения u и её производной по некасательному направлению, заданные на линии, не являющейся Х., определяют значения решения вблизи её, для Х. же это не так.

Термин «Х.» предложен Г. Монжем (1795—97), им же (1784, 1795) указано для Х. уравнение (6); впрочем, выбор новых аргументов ξ, η применялся ещё Л. Эйлером (1762, 1770).

ХАРАКТЕРИ́СТИКА поля — см. *Поле*.

ХАРАКТЕРИСТИ́ЧЕСКАЯ ПОДГРУ́ППА — см. *Подгруппа*.

ХАРАКТЕРИСТИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ — 1) то же, что *собственная функция*.

2) Х. ф., индикатор, множества A — функция $f_A(x)$, определённая на некотором множестве, содержащем множество A и принимающая значение $f_A(x)=1$, если x принадлежит множеству A, и значение $f_A(x)=0$, если x не принадлежит A.

3) В теории вероятностей Х. ф. $f_X(t)$ случайной величины X определяется как математич. ожидание величины e^{itX}. Это определение для случайных величин, имеющих плотность вероятности, приводит к формуле

$$f_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\,p(x)\,dx.$$

Напр., для случайной величины, имеющей нормальное распределение с параметрами a и σ^2, Х. ф. равна

$$f_X(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,dt=e^{iat-\sigma^2t^2/2}.$$

Свойства Х. ф.: каждой случайной величине X соответствует определённая Х. ф. $f_X(t)$; распределение вероятностей для X однозначно определяется по Х. ф. $f_X(t)$; при сложении независимых случайных величин соответствующие Х. ф. перемножаются; при надлежащем определении понятия «близости» случайным величинам с близкими распределениями соответствуют Х. ф., мало отличающиеся друг от друга, и обратно, близким Х. ф. соответствуют случайные величины с близкими распределениями. Указанные свойства определяют огромное практич. значение Х. ф. в теории вероятностей, в частности на них основано применение Х. ф. при доказательстве *предельных теорем*.

Впервые аппарат, по существу равнозначный Х. ф., был использован П. Лапласом (1812), но вся сила метода Х. ф. была показана А. М. Ляпуновым (1901), получившим с его помощью свою известную теорему (см. *Ляпунова теорема*).

Понятие Х. ф. может быть обобщено на конечные и бесконечные системы случайных величин (т. е. на случайные векторы и случайные процессы).

● Феллер В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, пер. с англ., т. 1—2, М., 1984.

ХАРАКТЕРИСТИ́ЧЕСКИЙ КО́РЕНЬ — то же, что *собственное значение*. См. также *Характеристический многочлен*.

ХАРАКТЕРИСТИ́ЧЕСКИЙ МНОГОЧЛЕ́Н матрицы $A=\|a_{ij}\|_1^n$ над полем k — многочлен над полем k

$$p(\lambda)=\det|(A-\lambda E)|=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(-\lambda)^n+b_1(-\lambda)^{n-1}+\dots+b_{n-1}(-\lambda)+b_n.$$

Степень Х. м. равна порядку квадратной матрицы A, коэффициент b_1 равен следу матрицы A:

$$b_1=\operatorname{tr}A=a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn},$$

коэффициент b_m равен сумме всех главных миноров m-го порядка, в частности $b_n=\det A$. Уравнение $p(\lambda)=0$ наз. характеристическим уравнением матрицы A.

Корни Х. м., лежащие в k, наз. характеристическими или собственными значениями матрицы A. Если k — числовое поле, употребляются также термины «характеристические числа», или «собственные числа». Иногда рассматривают корни Х. м. в алгебраич. замыкании поля k. Их обычно также называют характеристичес-

кпми корнями матрицы A. Матрица A порядка n, рассматриваемая над алгебраически замкнутым полем (напр., над полем комплексных чисел), имеет n собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Подобные матрицы имеют один и тот же Х. м. Каждый многочлен над k со старшим коэффициентом $(-1)^n$ является характеристическим для нек-рой матрицы над k.

Х. м. линейного преобразования см. *Линейное преобразование.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ФУНКЦИОНАЛ — аналог *характеристической функции*, используемый в бесконечномерном случае. См. также *Случайная функция.*

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ — см. *Характеристический многочлен.*

ХАРЬКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО — научное общество, основанное в 1879 при Харьковском ун-те. Инициатива создания принадлежала В. Г. Имшенецкому. Видными деятелями Х. м. о. были А. М. Ляпунов и В. А. Стеклов, работы к-рых систематически обсуждались на заседаниях и публиковались в сообщениях общества.

ХАССЕ ПРИНЦИП — критерий существования решения системы алгебраических уравнений (см. *Диофантова геометрия*). Был сформулирован и доказан Х. Хассе для уравнений 2-й степени (1923).

ХАУСДОРФОВО ПРОСТРАНСТВО, T_2- пространство, — топологическое пространство, каждые две точки которого отделимы непересекающимися окрестностями (см. *Отделимости аксиомы*). Х. п. могут не быть регулярными и тем более вполне регулярными, даже если они состоят лишь из счётного множества точек или имеют счётную базу. Впервые рассмотрены Ф. Хаусдорфом (1914).

ХИ-КВАДРАТ КРИТЕРИЙ, χ^2- критерий,— критерий проверки различных статистических гипотез, основанный на *хи-квадрат распределении.* Пусть, напр., результаты наблюдений $X_1, \ldots, X_n$ являются взаимно независимыми случайными величинами, подчиняющимися одному и тому же нормальному распределению с неизвестными параметрами a и σ^2. Для проверки гипотезы $\sigma^2=\sigma_0^2$ пользуются Х.-к. к. в следующей форме: если для заранее выбранных значений $x_1<x_2$

$$x_1 \leqslant \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \leqslant x_2,$$

где

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

то полагают, что результаты наблюдений не противоречат гипотезе $\sigma^2=\sigma_0^2$, если же одно из этих неравенств нарушается, то считают расхождение значимым с уровнем значимости α и гипотезу $\sigma^2=\sigma_0^2$ отклоняют. Пределы x_1 и x_2 выбираются по заданному α на основании того, что при гипотезе $\sigma^2=\sigma_0^2$ статистика

$$\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

имеет распределение хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы, т. е. x_1 и x_2 находятся из уравнений

$$\int_0^{x_1} p_{n-1}(x)\,dx=\frac{\alpha}{2}, \quad \int_{x_2}^{\infty} p_{n-1}(x)\,dx=\frac{\alpha}{2}.$$

Наиболее известно применение Х.-к. к. как критерия согласия Пирсона в следующей задаче. Пусть в серии n повторных независимых испытаний с исходами $A_1, \ldots, A_s$ получен результат $(\nu_1, \ldots, \nu_s)$, где ν_i — случайное число осуществлений исхода A_i, так что $\nu_1+\ldots+\nu_s=n$. Проверяется гипотеза о том, что вектор $(\nu_1, \ldots, \nu_s)$ имеет полиномиальное распределение с соответственными вероятностями $p_1, \ldots, p_s$ $(p_i>0,\ i=1, \ldots, s;\ p_1+\ldots+p_s=1)$. Х.-к. к. для этой гипотезы основан на хи-квадрат статистике Пирсона

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{s}\frac{(\nu_i-np_i)^2}{np_i},$$

к-рая в пределе при $n\to\infty$ имеет хи-квадрат распределение с $s-1$ степенями свободы. Согласно Х.-к. к. с уровнем значимости, приближённо равным α, гипотезу согласия отвергают, если $\hat{\chi}^2 \geqslant \chi^2_{s-1}(\alpha)$, где $\chi^2_{s-1}(\alpha)$ находится из соотношения:

$$\int_{\chi^2_{s-1}(\alpha)}^{\infty} k_n(x)\,dx=\alpha$$

($k_n(x)$ — плотность хи-квадрат распределения с $s-1$ степенями свободы). Та же статистика $\hat{\chi}^2$ используется для проверки гипотезы о неизвестной функции распределения $F(x)$ независимых одинаково распределённых результатов наблюдений $X_1, \ldots, X_n$. Критерий для проверки гипотезы о том, что $F(x)=F_0(x)$, где $F_0(x)$ — заданная функция распределения, строится следующим образом. Область значений каждой из величин X_k разбивается на конечное число r непересекающихся интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$, $r\geqslant 2$, и вычисляются ν_i — число $X_k \in \Delta_i$, $k=1, \ldots, n$, $i=1, \ldots, r$ и p_i — вероятности $\mathrm{P}\{X_k \in \Delta_i\}>0$ в предположении, что проверяемая гипотеза верна. Проверка гипотезы соответствия частот ν_i/n вероятностям p_i основана на статистике

$$\hat{\chi}^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\nu_i-np_i)^2}{np_i},$$

к-рая в случае, если $F(x)=F_0(x)$, имеет асимптотич. распределение хи-квадрат с $r-1$ степенями свободы.

Х.-к. к. используется также как критерий однородности, критерий независимости в таблицах сопряжённости признаков и т. д.

● Кендалл М., Стьюарт А., Статистические выводы и связи, пер. с англ., М., 1973; Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983.

А. В. Прохоров.

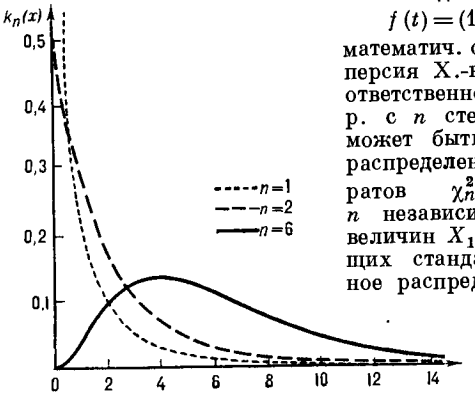
ХИ-КВАДРАТ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, χ^2- распределение, с n степенями свободы — распределение вероятностей, заданное плотностью вероятностей (рис.)

$$k_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n/2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,x^{n/2-1}\,e^{-x/2}, & x>0,\ n\geqslant 1,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases} \qquad (*)$$

где $\Gamma(\lambda)$ — гамма-функция. При $n\geqslant 2$ Х.-к. р. имеет моду в точке $x=n-2$. Характеристич. функция Х.-к. р. имеет вид

$$f(t)=(1-2it)^{-n/2};$$

математич. ожидание и дисперсия Х.-к. р. равны, соответственно, n и $2n$. Х.-к. р. с n степенями свободы может быть выведено как распределение суммы квадратов $\chi^2_n=X_1^2+\ldots+X_n^2$ n независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, имеющих стандартное нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Сумма независимых случайных величин $\chi^2_{n_1}, \ldots, \chi^2_{n_k}$ с $n_1, \ldots, n_k$ степенями свободы, соответственно, подчиняется Х.-к.р. с $n=n_1+\ldots+n_k$ степенями свободы.



Кривые плотности $y=k_n(x)$ хи-квадрат распределения для $n=1, 2, 6$.

Благодаря тесной связи с нормальным распределением Х.-к. р. играет важную роль в теории вероятностей и математич. статистике. Х.-к. р. и многие другие распреде-

ления, к-рые определяются посредством Х.-к. р. (напр., *Стьюдента распределение*) описывают выборочные распределения различных функций от нормально распределённых результатов наблюдений и используются для построения доверительных интервалов и статистич. критериев. Так, напр., для независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ с одинаковым нормальным распределением с математич. ожиданием a и дисперсией σ^2 отношение s^2/σ^2, где

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\ \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,$$

подчиняется Х.-к. р. с $n-1$ степенями свободы при любых значениях a и σ^2. Этот результат положен в основу построения *доверительных интервалов* и критерия для проверки гипотезы о неизвестном значении σ^2 в случае, когда a также неизвестно (см. *Статистических гипотез проверка*, *Интервальная статистическая оценка*). Особую известность в связи с Х.-к. р. получил *хи-квадрат критерий*, основанный на т. н. хи-квадрат статистике Пирсона.

Имеются подробные таблицы Х.-к. р., удобные для статистических расчётов. При больших объёмах выборок используют аппроксимацию посредством нормального распределения. При $n\to\infty$ согласно центральной предельной теореме распределение нормированной величины $(\chi_n^2-n)/\sqrt{2n}$ стремится к стандартному нормальному распределению:

$$\mathrm{P}\left\{\frac{\chi_n^2-n}{\sqrt{2n}}<x\right\}\longrightarrow\Phi(x),\ n\longrightarrow\infty;$$

более точная аппроксимация:

$$\mathrm{P}\{\chi_n^2<x\}\longrightarrow\Phi(\sqrt{2x}-\sqrt{2n-1}),\ n\longrightarrow\infty$$

(здесь $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}\,dy$ — функция распределения стандартного нормального закона).

Впервые Х.-к. р. было рассмотрено Р. Хельмертом (1876) и К. Пирсоном (1900).

● Крамер Г., Математические методы статистики, пер. с англ., 2 изд., М., 1975; Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983. *А. В. Прохоров.*

ХИ́НЧИНА ТЕОРЕ́МА — 1) Х. т. о корреляционной функции — см. *Стационарный случайный процесс.*

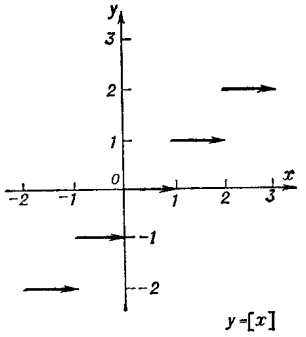
2) Х. т. о применимости закона больших чисел — теорема, установленная А. Я. Хинчиным (1929); см. *Больших чисел закон.*

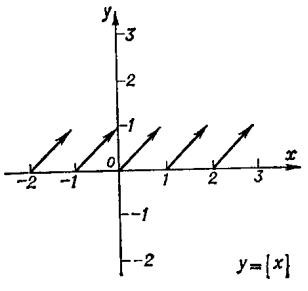
ХИ́НЧИНА УСЛО́ВИЯ применимости усиленного закона больших чисел — условия, предложенные А. Я. Хинчиным (1927, 1928); см. *Больших чисел усиленный закон.*

ХО́ЛЛА ТЕОРЕ́МА в комбинаторике — установленная Ф. Холлом (1935) теорема о существовании системы различных представителей (см. *Комбинаторный анализ*).

ХО́РДА (от греч. χορδή — струна) — прямолинейный отрезок, соединяющий две произвольные точки кривой линии или поверхности.

ЦЕ́ЛАЯ И ДРО́БНАЯ ЧА́СТИ ЧИСЛА́ — слагаемые $[x]$ и $\{x\}$ в специальном представлении действительного числа $x=[x]+\{x\}$. Целой частью $[x]$ числа x наз. наибольшее целое число, не превосходящее x. Так, $[5,6]=5$, $[-3,2]=-4$. Функцию $[x]$ наз. также «антье от x»; обозначение $[x]$ ввёл К. Гаусс (1808), другое обозначение $E(x)$ — А. Лежандр (1798). Дробная часть $\{x\}$ числа x — разность $x-[x]$; всегда $0<\{x\}<1$; функция $\{x\}$ есть периодич. функция с периодом, равным единице.





ЦЕ́ЛАЯ РАЦИОНА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦИЯ — то же, что *многочлен.*

ЦЕ́ЛАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция комплексного переменного z, представимая степенным рядом, сходящимся во всей конечной комплексной плоскости; иначе говоря, аналитическая функция комплексного переменного z, не имеющая конечных особых точек. Бесконечно удалённая точка $z=\infty$ — изолированная особая точка Ц. ф. $f(z)$. Если $z=\infty$ — устранимая особая точка, то $f(z)$ есть постоянная. Если точка $z=\infty$ — полюс для Ц. ф. $f(z)$, то $f(z)$ — многочлен $a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$. Если $z=\infty$ — существенно особая точка Ц. ф. $f(z)$, то $f(z)$ есть трансцендентная Ц. ф.; таковы, напр., $\sin z$, $\cos z$, e^z.

Для того чтобы $f(z)$ была Ц. ф., необходимо и достаточно, чтобы для нек-рой точки z_0 выполнялось соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!}}=0.$$

При этом $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\ldots,$$

к-рый сходится при любом z. Ц. ф. можно представить в виде бесконечного произведения, соответствующего её нулям (см. *Аналитическая функция*).

Основой классификации трансцендентных Ц. ф. служит скорость роста максимума модуля

$$M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$$

Ц. ф. $f(z)$ на окружности $|z|=r$ при $r\to\infty$. Величина

$$\rho=\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}$$

наз. порядком Ц. ф. $f(z)$. Важнейшим вопросом в теории Ц. ф. является установление связей между характером роста модуля Ц. ф. и распределением её нулей. Изучаются также Ц. ф. многих комплексных переменных, представимые всюду сходящимися кратными степенными рядами.

ЦЕЛЕВА́Я ФУ́НКЦИЯ — см. *Исследование операций, Линейное программирование.*

ЦЕ́ЛОЕ *p*-АДИ́ЧЕСКОЕ ЧИСЛО́ — см. *p-Адическое число.*

ЦЕ́ЛОЕ АЛГЕБРАИ́ЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕ́НИЕ — см. *Алгебраическое выражение.*

ЦЕ́ЛОЕ АЛГЕБРАИ́ЧЕСКОЕ ЧИСЛО́ — *алгебраическое число*, все коэффициенты канонического многочлена которого — целые (рациональные) числа.

ЦЕ́ЛОЕ ЧИСЛО́ — число, которое можно представить в виде разности натуральных чисел. См. *Число.*

Множество всех Ц. ч. обозначается $\mathbb{Z}$.

ЦЕ́ЛОСТНОЕ КОЛЬЦО́ — то же, что *область целостности.*

ЦЕЛОЧИ́СЛЕННАЯ ЗАДА́ЧА линейного программирования — см. *Дискретное программирование.*

ЦЕЛОЧИ́СЛЕННАЯ РЕШЁТКА — совокупность точек плоскости или пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат являются целыми числами. Ц. р. играет важную роль в различных вопросах кристаллографии, теории функций, теории чисел. Напр., вопрос о классификации кристаллич. систем связан с изучением симметрии Ц. р. В теории функций комплексного переменного совокупность периодов двоякопериодич. функций (см. *Эллиптические функции*) образует Ц. р. Систематич. использование Ц. р. в теории чисел, начатое К. Гауссом, привело к созданию Г. Минковским *геометрии*

чисел, в к-рой многие вопросы, связанные, напр., с квадратичными формами, приближением иррациональных чисел рациональными и т. д., решаются на основании геометрич. соображений.

ЦЕЛОЧИСЛЕ́ННОЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — см. *Исследование операций*.

ЦЕНА́ игры — см. *Дифференциальные игры*.

ЦЕНТР (лат. centrum, от греч. κέντρον — срединная точка, средоточие) — 1) Ц. симметрии геометрической фигуры — такая точка S, что данная фигура вместе с точкой A содержит и точку A', лежащую на прямой SA по другую сторону от точки S на расстоянии $SA'=SA$. Кривые и поверхности, имеющие Ц. симметрии, наз. центральными. Простейшими примерами центральных кривых могут служить окружность, эллипс, гипербола; центральных поверхностей — сфера, эллипсоид, гиперболоид (однополостный и двуполостный). Возможен случай, когда фигура имеет бесконечно много Ц.; напр., у фигуры, состоящей из пары параллельных прямых, Ц. расположены на прямой, равноудалённой от этих прямых (см. также *Симметрия*).

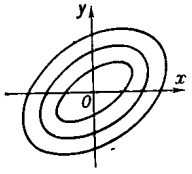
2) Ц. гомологии, гомотетии — см. *Гомология*, *Гомотетия*.

3) Ц. инверсии — см. *Инверсия*.

4) Ц. проекции — см. *Проекция*.

5) Ц. тяжести треугольника — точка пересечения медиан *треугольника*.

6) Ц.— один из видов *особых точек* дифференциального уравнения. В окрестности этой точки все интегральные кривые являются замкнутыми и содержат её внутри себя (рис.). Ц. принадлежит к числу таких особых точек, характер к-рых, вообще говоря, не сохраняется при малых изменениях правой части уравнения.



7) Ц. группы — совокупность элементов группы, перестановочных со всеми её элементами (т. е. таких элементов z, что $zg=gz$ для всех элементов g из данной группы G). Ц. группы является подгруппой в G, переходящей в себя при всех автоморфизмах. В группе невырожденных матриц порядка n Ц. группы совпадает с подгруппой скалярных матриц (матриц вида λE, где λ — число, а E — единичная матрица).

8) Ц. ассоциативного кольца — совокупность всех элементов кольца, перестановочных (относительно умножения) с любым элементом. Ц. является подкольцом.

ЦЕНТРА́ЛЬНАЯ АКСОНОМЕ́ТРИЯ — см. *Аксонометрия*.

ЦЕНТРА́ЛЬНАЯ ПРЕДЕ́ЛЬНАЯ ТЕОРЕ́МА — см. *Предельные теоремы* теории вероятностей.

ЦЕНТРА́ЛЬНАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Проекция*.

ЦЕНТРА́ЛЬНАЯ СИММЕ́ТРИЯ — см. *Симметрия*.

ЦЕНТРА́ЛЬНОЕ ПО́ЛЕ — то же, что *сферическое поле*.

ЦЕНТРА́ЛЬНЫЕ РА́ЗНОСТИ — см. *Конечных разностей исчисление*.

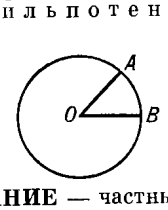
ЦЕНТРА́ЛЬНЫЙ МОМЕ́НТ — см. *Момент*.

ЦЕНТРА́ЛЬНЫЙ РЯД группы — *нормальный ряд* группы

$$E=G_0\subseteq G_1\subseteq\ldots\subseteq G_n=G,$$

для которого G_{i+1}/G_i лежит в центре группы G/G_i для всех i. Группа, обладающая Ц. р., наз. нильпотентной.

ЦЕНТРА́ЛЬНЫЙ У́ГОЛ — угол, образованный двумя радиусами некоторой окружности (на рис. угол AOB). Число угловых градусов Ц. у. равно числу градусов дуги окружности, заключённой внутри Ц. у.



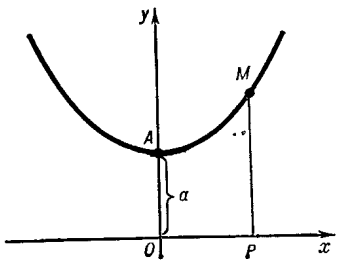
ЦЕНТРОАФФИ́ННОЕ ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — частный случай *аффинного преобразования*.

ЦЕНТРО́ИД — точка пересечения медиан *треугольника*.

ЦЕПНА́Я ДРОБЬ — то же, что *непрерывная дробь*.

ЦЕПНА́Я ЛИ́НИЯ — плоская трансцендентная кривая, форму которой принимает под действием силы тяжести гибкая однородная и нерастяжимая тяжёлая нить, концы которой закреплены (рис.). Уравнение в прямоугольных координатах:

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right).$$



Кривая расположена симметрично относительно оси Oy. Длина дуги AM:

$$L=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}-e^{-x/a}\right).$$

Радиус кривизны:

$$R=\frac{y^2}{a}=a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}.$$

Площадь $OAMP$:

$$S=aL=a^2\operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$

Поверхность, образованная вращением дуги Ц. л. вокруг оси Ox, наз. *катеноидом*.

Ц. л. используется в расчётах, связанных с провисанием проводов, тросов и т. п. Форму кривой провисания впервые рассматривал Г. Галилей (1638), к-рый считал её параболой. Истинная форма кривой найдена Г. Лейбницем, Я. и И. Бернулли, Х. Гюйгенсом (он же предложил термин «Ц. л.», 1690).

ЦЕ́ПЬ — 1) то же, что *линейно упорядоченное множество*. 2) Ц. в графе — маршрут, все рёбра в котором различны; если различны все вершины маршрута, то он называется простой цепью.

ЦЕ́РМЕЛО АКСИО́МА — то же, что *выбора аксиома*. Сформулирована Э. Цермело (1904).

ЦЕ́РМЕЛО ТЕОРЕ́МА: всякое непустое множество можно вполне упорядочить. Эта теорема была доказана в 1904 Э. Цермело исходя из аксиомы выбора. Позднее выяснилось, что Ц. т. эквивалентна этой аксиоме.

ЦИКЛ (от греч. κύκλος — круг, окружность) — см. *Подстановка*.

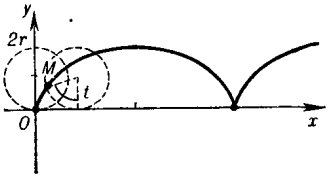
ЦИКЛИ́ЧЕСКАЯ ГРУ́ППА — группа, все элементы которой являются степенями одного из её элементов; такой элемент называется порождающим элементом Ц. г. Порядок порождающего элемента совпадает с порядком Ц. г. Примером конечной Ц. г. из n элементов служит совокупность всех комплексных корней n-й степени из единицы. Группа всех целых чисел по сложению образует бесконечную Ц. г.— аддитивную группу целых чисел $\mathbb{Z}^+$. Все конечные Ц. г. с одним и тем же числом элементов изоморфны между собой, а все бесконечные Ц. г. изоморфны группе $\mathbb{Z}^+$. Любая подгруппа и любая факторгруппа Ц. г. являются Ц. г.

ЦИКЛИ́ЧЕСКАЯ ПРОГО́НКА — см. *Прогонки метод*.

ЦИКЛИ́ЧЕСКАЯ УНИВЕРСА́ЛЬНАЯ А́ЛГЕБРА — алгебра, обладающая системой порождающих, состоящей из одного элемента.

ЦИКЛО́ИДА (от греч. κυκλοειδής — кругообразный, круглый) — плоская трансцендентная кривая (рис.), траектория точки M окружности радиуса r, катящейся без скольжения по прямой. Параметрич. уравнения:

$$x=rt-r\sin t,$$
$$y=r-r\cos t.$$



Ц.— тautохронная кривая: время, за к-рое материальная точка скатывается по кривой (обращённой выпуклостью вниз) до определённой высоты, не зависит от исходного положения её на кривой. Это свойство Ц. было использовано Х. Гюйгенсом (1673) для построения изо-

хронного циклоидального маятника, период колебания к-рого $T = 4\pi\sqrt{r/g}$ не зависит от амплитуды (g — ускорение силы тяжести). Обобщение Ц.— трохоида. См. также *Гипоциклоида*, *Эпициклоида*.

Термин «Ц.» предложил Г. Галилей (ок. 1598).

ЦИКЛОИДА́ЛЬНАЯ КРИВА́Я — плоская кривая, траектория точки (наз. вычерчивающей), которая связана с окружностью (наз. производящей), катящейся без скольжения по другой (неподвижной) окружности. Если вычерчивающая точка находится на окружности, то Ц. к. наз. *эпициклоидой* или *гипоциклоидой* в зависимости от того, расположена ли производящая окружность вне или внутри неподвижной. Если вычерчивающая точка расположена не на производящей окружности, а отстоит от её центра на расстояние h, то Ц. к. наз. *эпитрохоидой* или *гипотрохоидой* в зависимости от взаимного положения производящей и неподвижной окружностей.

ЦИЛИ́НДР (от греч. κύλινδρος — валик, каток) — 1) Ц., или цилиндрическая поверхность,— множество прямых (образующих) пространства, параллельных заданному направлению и проходящих через некоторую линию (направляющую).

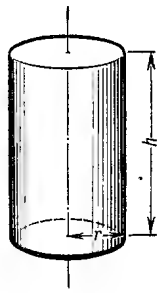


Рис. 1.

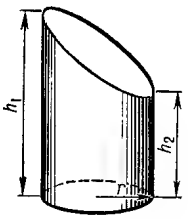


Рис. 2.

2) В элементарной геометрии Ц.— тело, ограниченное замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя секущими её параллельными плоскостями — основаниями Ц.

Если основания перпендикулярны образующей, то Ц. наз. прямым; в частности, если основания представляют собой круги, то говорят о прямом круговом, или круглом, Ц., к-рый часто называют просто цилиндром (рис. 1). Объём такого Ц. равен $V=\pi r^2 h$, боковая поверхность $S=2\pi rh$ (где r — радиус основания, h — высота). Часть цилиндра, рассечённого плоскостью, непараллельной основанию, наз. усечённым цилиндром (рис. 2). Объём круглого усечённого Ц. равен $V=\pi r^2\frac{h_1+h_2}{2}$, h_1 и h_2 — наибольший и наименьший отрезки образующей Ц.

ЦИЛИНДРИ́ЧЕСКАЯ ПОВЕ́РХНОСТЬ — то же, что *цилиндр*.

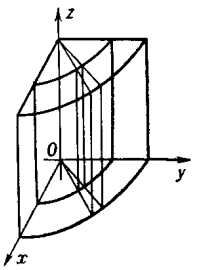
ЦИЛИНДРИ́ЧЕСКАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция*, *Проекция*.

ЦИЛИНДРИ́ЧЕСКИЕ КООРДИНА́ТЫ — числа ρ, φ и z, связанные с прямоугольными координатами x, y и z формулами:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z,$$

где $0\leqslant\rho<\infty$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $-\infty<z<\infty$. Координатные поверхности (рис.): круговые цилиндры (ρ=const), полуплоскости (φ=const), плоскости (z=const). Коэффициенты Ламе:

$$L_\rho=L_z=1,\qquad L_\varphi=\rho.$$



Элемент площади:

$$ds=\sqrt{\rho^2(d\rho d\varphi)^2+(d\rho dz)^2+\rho^2(d\varphi dz)^2}.$$

Элемент объёма:

$$dV=\rho d\rho d\varphi dz.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Обобщёнными Ц. к. наз. числа u, v и w, связанные с прямоугольными координатами x, y и z формулами:

$$x=au\cos v,\quad y=bu\sin v,\quad z=cw,$$

где $0\leqslant u<\infty$, $0\leqslant v<2\pi$, $-\infty<w<\infty$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a\neq b$. Координатные поверхности: эллиптич. цилиндры (u=const), полуплоскости (v const) и плоскости (w=const).

Название «Ц. к.» предложил Р. Бальтцер (1882).

ЦИЛИНДРИ́ЧЕСКИЕ ФУ́НКЦИИ — важный класс специальных функций, являющихся решениями дифференциального уравнения Бесселя

$$z^2y''+zy'+(z^2-\nu^2)\,y=0, \qquad (1)$$

где ν — произвольный, вообще говоря, комплексный параметр, z — независимое переменное (также комплексное). К этому уравнению приводят многие краевые задачи математич. физики, связанные с вопросами равновесия (упругого, теплового, электрического) и установившихся колебаний тел цилиндрич. формы. Решения, выражаемые рядом

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(1+\nu+k)},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, при всех ν определяют Ц. ф. первого рода с индексом ν. При целом индексе $\nu=n$ эта функция определена всюду на комплексной плоскости переменного z, при любом ν — на плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$; в частности, $J_\nu(x)$ определена для всех действительных x, $0\leqslant x<+\infty$. Ц. ф. нулевого индекса имеет вид

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}.$$

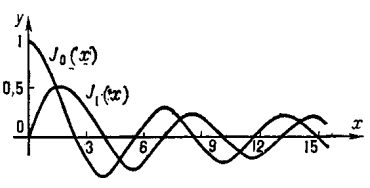
Если $\nu=-n$ — целое отрицательное, то

$$J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z),$$

т. е. отличается от $J_n(z)$ только постоянным множителем $(-1)^n$. Ц. ф. первого рода с полуцелым индексом $\nu=n+1/2$ сводится к элементарным функциям, напр.,

$$J_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z,\quad J_{-1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z.$$

Функции $J_\nu(z)$ наз. также функциями Бесселя. Однако эти функции и уравнение (1) были известны ещё Л. Эйлеру, к-рый пришёл к ним при изучении колебаний мембраны в 1766, т. е. почти за 50 лет до работ Ф. Бесселя; функция $J_0(x)$ встречается ещё раньше в работе Д. Бернулли о колебаниях тяжёлой цепи (1738), а функция с индексом $1/3$ — в письме Я. Бернулли к Г. Лейбницу (1703). Поведение нек-рых Ц. ф. первого рода для действительных x см. на рис.



Если ν не является целым числом, то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y=C_1J_\nu(z)+C_2J_{-\nu}(z), \qquad (2)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Если же $\nu=n$ — целое, то $J_n(z)$ и $J_{-n}(z)$, как было указано, линейно зависимые, и их линейная комбинация (2) уже не является общим решением уравнения (1). Поэтому, наряду с Ц.ф. первого рода, вводятся также Ц. ф. второго рода, к-рые можно определить соотношением

$$Y_\nu(z)=\lim_{\mu\to\nu}\frac{J_\mu(z)\cos\mu\pi-J_{-\mu}(z)}{\sin\mu\pi};$$

эти функции наз. также функциями Вебера или функциями Неймана (с обозначением $N_\nu(z)$). При помощи этих функций общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$y=C_1J_\nu(z)+C_2Y_\nu(z)$$

как при целом, так и нецелом ν.

При решении краевых задач для внешних неограниченных областей, содержащих бесконечно удалённую точку, целесообразно применять Ц. ф. третьего рода, или функции Ганкеля:

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iN_\nu(z),\quad H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iN_\nu(z).$$

Эти функции имеют наиболее простое асимптотич. поведение в бесконечности при $z\to\infty$, они также, подобно $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$, являются регулярными аналитич. функциями во всей плоскости z с разрезом $(-\infty, 0)$.

Линейная комбинация

$$y=C_1H_\nu^{(1)}(z)+C_2H_\nu^{(2)}(z)$$

также даёт общее решение уравнения (1).

Наряду с указанными к Ц. ф. относят также т. н. модифицированные Ц. ф.

$$I_\nu(z)=i^{-\nu}J_\nu(iz)$$

и

$$K_\nu(z)=\frac{\pi i}{2}e^{\frac{\nu\pi i}{2}}H_\nu^{(1)}(iz).$$

Функцию $K_\nu(z)$ наз. также функцией Макдональда. Модифицированные Ц. ф. удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$z^2y''+zy'-(z^2+\nu^2)y=0,$$

общее решение к-рого при всех ν представимо в виде линейной комбинации

$$y=C_1I_\nu(z)+C_2K_\nu(z).$$

С модифицированными Ц. ф. тесно связаны функции Томсона (Кельвина) ber x, bei x и ker x, kei x, определяемые равенствами

$$\operatorname{ber}x+i\operatorname{bei}x=I_0(\sqrt{i}\,x),$$

$$\ker x+i\operatorname{kei}x=K_0(\sqrt{i}\,x).$$

Важную роль играют асимптотич. равенства для Ц. ф., выражающие их поведение при $x\to+\infty$:

$$J_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$Y_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$I_\nu(x)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^x,$$

$$K_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x},$$

из к-рых, в частности, вытекает, что Ц. ф. $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ имеют бесконечно много действительных нулей, расположенных так, что вдали от начала координат они близки к нулям функций $\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ и $\sin\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ соответственно.

Ц. ф. изучены весьма детально как в действительной, так и в комплексной областях. Имеются многочисленные таблицы Ц. ф.

● Справочник по специальным функциям, пер. с англ., М., 1979.

Е. Д. Соломенцев.

ЦИЛИНДРИ́ЧЕСКОЕ ПО́ЛЕ — 1) Ц. п. векторное — поле $\boldsymbol{a}(M)$, в котором существует такая прямая (ось поля), что все векторы $\boldsymbol{a}(M)$ лежат на прямых, проходящих через ось и перпендикулярных ей, а длина их зависит только от расстояния r точки M до оси, то есть $\boldsymbol{a}(M)=f(r)\boldsymbol{r}^0$, где $\boldsymbol{r}^0$ — единичный вектор прямой. Пример векторного Ц. п.: поле электрич. напряжённости в бесконечном цилиндрич. конденсаторе.

2) Ц. п. скалярное — поле $\varphi(M)$, в к-ром существует такая прямая (ось поля), что $\varphi(M)$ зависит только от расстояния r точки M до этой оси, то есть $\varphi(M)=f(r)$. Пример скалярного Ц. п.: поле потенциала в бесконечном цилиндрич. конденсаторе.

ЦИРКУЛЯ́ЦИЯ (от лат. circulatio — вращение) векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ вдоль кривой L — интеграл вида

$$\int_L \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}.$$

В координатной форме Ц. равна

$$\int_L (a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz).$$

Работа, совершаемая силами силового поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ при перемещении пробного тела (единичной массы, заряда и т. д.) вдоль кривой L, равна Ц. поля вдоль L.

Понятие «Ц.» введено Г. Гельмгольцем (ок. 1858), термин принадлежит У. Томсону.

ЦИССО́ИДА ДИОКЛЕ́СА (от греч. κισσοειδής — плющевидный, похожий на лист плюща) — см. *Диоклеса циссоида.*

ЦИ́ФРЫ (позднелат. cifra, от араб. сифр — нуль, буквально — пустое место; арабы этим словом называли знак отсутствия разряда в числе) — условные знаки для обозначения чисел. Наиболее ранней и вместе с тем примитивной является словесная запись чисел, в отдельных случаях сохранявшаяся довольно долго (напр., нек-рые математики Средней Азии и Ближнего Востока систематически употребляли словесную запись чисел в 10 в. и даже позже). С развитием общественно-хозяйственной жизни народов возникла потребность в создании более совершенных, чем словесная запись, обозначений для чисел (у разных народов числовые знаки были различными; см. табл.) и в разработке принципов записи чисел — систем *счисления.*

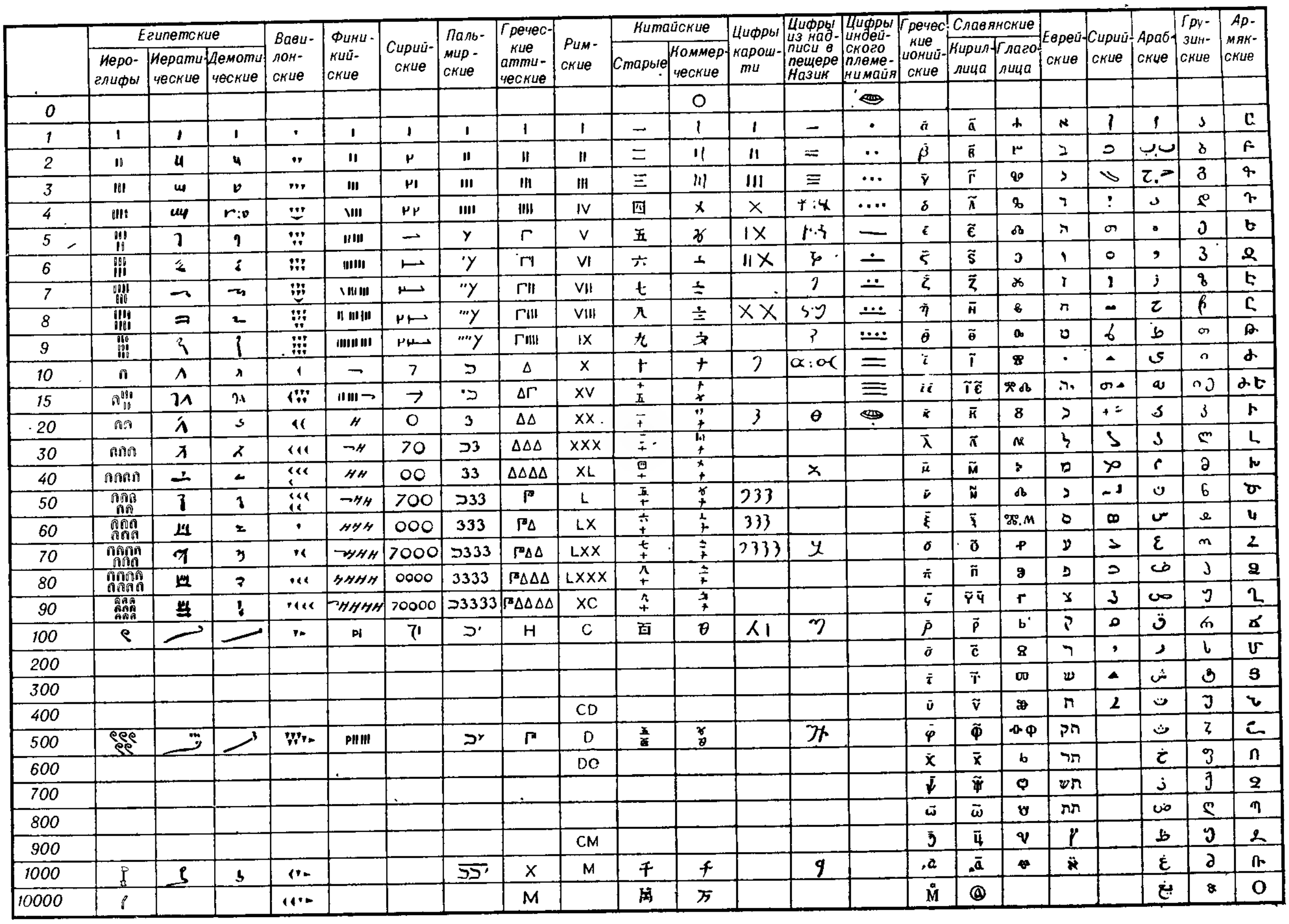
Древнейшие известные нам Ц.— цифры вавилонян и египтян. Вавилонские Ц. (2-е тыс. до н. э.— начало нашей эры) представляют собой клинописные знаки для чисел 1, 10 и 100 (или только для 1 и 10); все остальные натуральные числа записываются посредством их соединения. В египетской иероглифич. нумерации (возникновение её относится к 2500—3000 до н. э.) существовали отдельные знаки для обозначения единиц десятичных разрядов (вплоть до 10^7). Позднее, наряду с картинным иероглифич. письмом, египтяне пользовались скорописным иератич. письмом, в к-ром было больше знаков (для десятков и т. д.), а затем демотич. письмом (примерно с 8 в. до н. э.).

Нумерациями типа египетской иероглифической являются финикийская, сирийская, пальмирская, греческая, аттическая, или геродианова. Возникновение аттич. нумерации относится к 6 в. до н. э.; эта нумерация употреблялась в Аттике до 1 в. н. э., хотя в других греч. землях она была задолго до этого вытеснена более удобной алфавитной ионийской нумерацией, в к-рой единицы, десятки и сотни обозначались буквами алфавита, все остальные числа до 999 — их соединением (первые записи чисел в этой нумерации относятся к 5 в. до н. э.). Алфавитное обозначение чисел существовало также и у других народов, напр. у арабов, сирийцев, евреев, грузин, армян. Старинная русская нумерация (возникшая ок. 10 в. и встречавшаяся до 16 в.) также является алфавитной с применением славянской азбуки кириллицы (реже глаголицы) (см. *Славянские цифры*).

ЭВОЛЮЦИЯ ИНДИЙСКИХ ЦИФР

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
XII век	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Ок.1294	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Ок.1360	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Ок.1442	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Ок.1480	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

ОБОЗНАЧЕНИЕ ЧИСЕЛ У РАЗНЫХ НАРОДОВ



Наиболее долговечной из древних цифровых систем оказалась римская нумерация, возникшая у этрусков ок. 500 до н. э.; она употребляется иногда и в настоящее время (см. *Римские цифры*).

Прообразы современных Ц. (включая нуль) появились в Индии, вероятно, не позднее 5 в. н. э. (до этого в Индии пользовались Ц. карошти и наряду с ними нумерацией, Ц. к-рой сходны с буквами алфавита брами, см. в табл. цифры из надписи в пещере Назик, или Насик). Удобство записи чисел при помощи этих Ц. в десятичной позиционной системе счисления обусловило их распространение из Индии в другие страны. В Европу индийские Ц. были занесены в 10—13 вв. арабами (отсюда и сохранившееся их другое название — «арабские» Ц.) и получили всеобщее распространение со 2-й пол. 15 в. Начертание индийских Ц. претерпело со временем ряд крупных изменений (см. табл.); ранняя их история до сих пор плохо изучена.

В. И. Битюцков.

Ч, Ш

ЧАПЛЫГИНА МЕТОД — метод приближённого решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, состоящий в построении двусторонних последовательных приближений к её решению. В основе метода лежит т е о р е м а Ч а п л ы г и н а о дифференциальных неравенствах. Если найдена пара начальных приближений $u_0(x)$, $v_0(x)$ к точному решению $y(x)$ задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

в области

$$R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leqslant Q_1, |y - y_0| \leqslant b\}$$

таких, что

$$u_0(x) < y(x) < v_0(x),$$

то Ч. м. позволяет построить пару $u_1(x)$, $v_1(x)$ более точных приближений, т. е. таких, что

$$u_0(x) < u_1(x) < y(x) < v_1(x) < v_0(x).$$

Для этого в случае $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geqslant 0$ в R необходимо в качестве $u_1(x)$ взять решение задачи Коши

$$y' = k(x)\,y + p(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

а в качестве $v_1(x)$ — решение задачи Коши

$$y' = l(x)\,y + q(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

где

$$k(x)=f'_y(x,\ u_0(x)),\quad p(x)=f(x,\ u_0(x))-u_0(x)\,k(x),$$

$$l(x)=\frac{f(x,\ v_0(x))-f(x,\ u_0(x))}{v_0(x)-u_0(x)},$$

$$q(x)=f(x,\ u_0(x))-u_0(x)\,l(x).$$

Зная пару $u_1(x)$, $v_1(x)$, можно тем же способом построить $u_2(x)$, $v_2(x)$ и т. д. Процесс очень быстро сходится:

$$v_n(x)-u_n(x)\leqslant Cq^{2^n},\quad q<1,$$

где C не зависит ни от x, ни от n.

Основная трудность в применении метода — построение начальных приближений $u_0(x)$, $v_0(x)$.

Метод предложен С. А. Чаплыгиным (1919).

ЧАСТИ́ЦА в комбинаторике — см. *Размещение.*

ЧАСТИ́ЧНАЯ ПРОБЛЕ́МА СО́БСТВЕННЫХ ЗНАЧЕ́НИЙ — см. *Собственное значение.*

ЧАСТИ́ЧНАЯ СУ́ММА ряда — см. *Ряд.*

ЧАСТИ́ЧНАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция, не обязательно всюду определённая (см. *Рекурсивная функция*).

ЧАСТИ́ЧНО РЕКУРСИ́ВНАЯ ФУ́НКЦИЯ — то же, что *рекурсивная функция.*

ЧАСТИ́ЧНО УПОРЯ́ДОЧЕННОЕ МНО́ЖЕСТВО — непустое множество, на котором задан некоторый порядок (вообще говоря, частичный, обозначаемый символом $\leqslant$; см. *Порядка отношение*).

Примеры Ч. у. м.: 1) множество натуральных чисел с обычным порядком; 2) множество натуральных чисел, где $a\leqslant b$ означает, что a делит b; 3) множество всех действительных функций на отрезке, где $f\leqslant g$ означает, что $f(x)\leqslant g(x)$ для всех точек этого отрезка; 4) множество всех подмножеств данного множества, где $A\leqslant B$ означает, что A содержится в B; 5) произвольное непустое множество, где $a\leqslant b$ тогда и только тогда, когда $a=b$. Порядок в последнем из примеров наз. тривиальным или дискретным. Всякое непустое подмножество Ч. у. м. является Ч. у. м. относительно индуцируемого на нём порядка.

Отображение φ Ч. у. м. P в Ч. у. м. P' наз. изотонным отображением или гомоморфизмом, если из $a\leqslant b$ в P следует, что $a\varphi\leqslant b\varphi$ в P'. Взаимно однозначный гомоморфизм наз. изоморфизмом. Если на Ч. у. м. определить отношение $\trianglelefteq$, полагая $a\trianglelefteq b$, если $a\geqslant b$, то это отношение также оказывается порядком. Возникающее таким образом Ч. у. м. наз. дуальным, или двойственным, или антиизоморфным к данному.

Наибольший (наименьший) элемент Ч. у. м., если он существует, наз. единицей (нулём) этого Ч. у. м. Точной верхней гранью подмножества A Ч. у. м. P наз. элемент $u\in P$, являющийся наименьшим из элементов, больших любого элемента a из A. Двойственным образом определяется точная нижняя грань подмножества Ч. у. м. Точная верхняя (нижняя) грань подмножества A обозначается $\sup A$ (соответственно, $\inf A$). Ч. у. м., в к-ром каждое конечное подмножество имеет как точную верхнюю, так и точную нижнюю грань, наз. *решёткой*. Специальными видами Ч. у. м. являются *линейно упорядоченные множества*, или цепи, *вполне упорядоченные множества*, *направленные множества*, *булевы алгебры*.

Определение Ч. у. м. впервые явно сформулировал Ф. Хаусдорф (1914), хотя входящие в определение порядка аксиомы рассматривались ещё Г. Лейбницем (ок. 1690).

ЧАСТИ́ЧНО УПОРЯ́ДОЧЕННОЕ ПРОСТРА́НСТВО — см. *Полуупорядоченное пространство.*

ЧАСТИ́ЧНОГО ПЕРЕБО́РА МЕ́ТОД — см. *Дискретное программирование.*

ЧАСТИ́ЧНЫЙ ПОРЯ́ДОК — см. *Порядка отношение.*

ЧАСТИ́ЧНЫЙ ПРЕДЕ́Л — предел подпоследовательности. Ч. п. является предельной точкой множества членов последовательности. Все Ч. п. сходящейся последовательности равны между собой. Последовательность $x_n=(-1)^n$ не является сходящейся, однако её подпоследовательности $x_{2k}=1$ и $x_{2k+1}=-1$ сходятся, пределы их соответственно равны $+1$ и -1. Эти числа являются Ч. п. последовательности $\{(-1)^n\}$. Для последовательности $x_n=n^{(-1)^n}$ Ч. п. являются 0 и $+\infty$. Действительно, подпоследовательность с чётными номерами $x_{2k}=2k$ сходится к $+\infty$, а подпоследовательность с нечётными номерами $x_{2k+1}=\frac{1}{2k+1}$ сходится к нулю. Если $\{x_n\}$ — последовательность всех рациональных чисел, то каждое действительное число является Ч. п. этой последовательности. Всякая ограниченная числовая последовательность имеет хотя бы один конечный Ч. п., всякая неограниченная числовая последовательность имеет бесконечный Ч. п.

ЧА́СТНАЯ ПРОИЗВО́ДНАЯ — понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции нескольких переменных при изменении только одного аргумента. Для функции $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Ч. п. 1-го порядка (первая Ч. п.) по x_i определяется как обычная производная в предположении, что все аргументы, кроме x_i, сохраняют постоянные значения; обозначается $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, f'_{x_i}, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1, \ldots, n$. Определённые таким образом первые Ч. п. как функции тех же аргументов могут в свою очередь иметь Ч. п., к-рые по отношению к исходной функции наз. Ч. п. 2-го порядка, и т. д. Ч. п. 2-го порядка и высших порядков, взятые по одному аргументу, наз. чистыми, а взятые по разным аргументам наз. смешанными. Смешанные Ч. п. одного порядка, если они непрерывны, не зависят от порядка дифференцирования и равны между собой.

ЧА́СТНОЕ — результат *деления.*

ЧА́СТНЫЙ ИНТЕГРА́Л — см. *Интеграл дифференциального уравнения.*

ЧА́СТНЫЙ КОЭ́ФФИЦИЕ́НТ КОРРЕЛЯ́ЦИИ — мера линейной зависимости между двумя случайными величинами из некоторой совокупности случайных величин при исключении влияния остальных. См. *Корреляция.*

ЧА́СТНЫЙ МАСШТА́Б — см. *Картографическая проекция.*

ЧА́СТНЫХ КОЛЬЦО́, кольцо дробей,— кольцо, связанное с данным ассоциативным кольцом R с единицей следующим образом. Пусть $N\subseteq R$ — множество элементов, не являющихся делителями нуля в R. Кольцо $\overline{R}$, содержащее R, наз. (правым) Ч. к. по множеству N, если все элементы из N обратимы в R и любой элемент кольца R представим в виде ab^{-1}, где $a\in R$, $b\in N$. Если R коммутативно и $N=R\setminus 0$, то $\overline{R}$ наз. полем частных (полем дробей) кольца R.

Полем дробей для кольца целых чисел служит поле рациональных чисел, а полем частных для кольца многочленов с коэффициентами из поля P — поле дробно-рациональных функций (или поле рациональных дробей от одного неизвестного над P).

ЧАСТОТА́ случайного события A — отношение $\frac{m}{n}$ числа m наступлений этого события в данной последовательности испытаний к общему числу n испытаний. Очевидно, что $0\leqslant\frac{m}{n}\leqslant 1$. В ситуации, к к-рой по соображениям симметрии принято «классическое» определение вероятности (см. *Вероятностей теория*), Ч. $\frac{m}{n}$ события A совпадает с вероятностью A. В ином случае, если испытания независимы и априори постулируется существование определённой вероятности p наступления события A, то при любом сколь угодно малом числе $\varepsilon>0$ и больших n практически достоверно, что Ч. $\frac{m}{n}$ удовлетворяет неравенству $\left|\frac{m}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon$ (см. *Бернулли теорема*, *Больших чисел закон*, *Больших*

чисел усиленный закон). Эта близость $\frac{m}{n}$ к p позволяет при решении задачи оценивания неизвестной вероятности p по результатам наблюдения в математич. статистике принимать Ч. в качестве приближённого значения или, как принято говорить, статистич. оценки вероятности.

ЧАСТОТА́ периодической функции — величина ν, обратная периоду T; часто рассматривается к р у г о в а я ч а с т о т а $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$.

ЧЕБЫШЁВА КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — формула для приближённого вычисления определённого интеграла:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

точная для многочленов степени не выше $n-1$, где n — число узлов интерполяции. Значения x_i в Ч. к. ф. для некрых n вычислены. Напр., для $n=9$:

$$x_1 = -x_9 = 0{,}911589;\ x_2 = -x_8 = 0{,}601019;$$
$$x_3 = -x_7 = 0{,}528762;\ x_4 = -x_6 = 0{,}167906;\ x_5 = 0.$$

При $n=8$ и $n>9$ абсциссы x_i имеют комплексные значения, поэтому Ч. к. ф. применима только для $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$. Ч. к. ф. установлена П. Л. Чебышевым (1873).

ЧЕБЫШЁВА МЕ́ТОД — метод нахождения однократного действительного корня уравнения

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ — достаточно гладкая функция, обобщающий *Ньютона метод*. Разложение обратной к $f(x)$ функции $F(y)$ по формуле Тейлора при $y=0$ приводит к соотношению для определения приближённого значения корня, к-рое можно использовать в качестве итерационного алгоритма. Напр., оставляя в разложении три члена, получают итерационный алгоритм вида

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}.$$

Метод предложен П. Л. Чебышевым (1841; опубликовано в 1951).

ЧЕБЫШЁВА МНОГОЧЛЕ́НЫ — система ортогональных многочленов на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, открытая П. Л. Чебышевым (1854).

М н о г о ч л е н ы Ч е б ы ш е в а п е р в о г о р о д а определяются формулой

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{2^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n-1/2}];$$

в частности,

$$T_0(x) = 1,\quad T_1(x) = x,\quad T_2(x) = 2x^2 - 1,$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,\quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Они ортогональны на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т.е. имеют место формулы

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_m(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & m - n \geqslant 1, \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

Ч. м. первого рода $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ наименее отклоняется от нуля. Это означает, что среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом 1 именно максимум модуля $\max\left|\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)\right|$ на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ имеет наименьшее значение, причём этот максимум равен $\frac{1}{2^{n-1}}$. Ч. м. $y = T_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\,y'' - xy' + n^2 y = 0,$$

и для них справедлива рекуррентная формула

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

М н о г о ч л е н ы Ч е б ы ш е в а в т о р о г о р о д а $U_n(x)$ ортогональны на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ с весом $\sqrt{1-x^2}$:

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\,U_m(x)\,U_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n. \end{cases}$$

Они определяются формулой

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2^n (n+1)!}{(2n+1)!}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}\right];$$

в частности,

$$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x,\ U_2(x) = 4x^2 - 1,$$
$$U_3(x) = 8x^3 - 4x,\quad U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1.$$

Дифференциальное уравнение и рекуррентная формула для Ч. м. второго рода имеют вид:

$$(1-x^2)\,y'' - 3xy' + n(n+2)\,y = 0,$$
$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

Ч. м. первого и второго рода связаны соотношением

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1}\,\frac{dT_{n+1}(x)}{dx}.$$

ЧЕБЫШЁВА НЕРА́ВЕНСТВО — 1) неравенство для монотонных числовых последовательностей и функций. Ч. н. для конечных последовательностей $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ или $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ имеет вид ($a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$):

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leqslant n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k. \qquad (1)$$

В интегральной форме Ч. н. таково:

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right) \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx, \qquad (2)$$

где $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ и обе функции либо убывают, либо возрастают. Если одна последовательность (функция) убывает, а другая последовательность (функция) возрастает, то знак неравенств в (1) и (2) меняется на противоположный. Неравенства установлены П. Л. Чебышевым (1882).

2) Ч. н., н е р а в е н с т в о Б ь е н е м е — Ч е б ы ш е в а,— неравенство, устанавливающее верхнюю границу для вероятности отклонения случайной величины от её математического ожидания. Пусть X — к.-л. случайная величина с математич. ожиданием $\mathsf{E}X = a$ и дисперсией $\mathsf{D}X = \sigma^2$. Ч. н. состоит в том, что для любого $\varepsilon > 0$ вероятность события

$$|X - a| \geqslant \varepsilon$$

не превосходит σ^2/ε^2 или

$$\mathsf{P}\{|X - a| \geqslant t\sigma\} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Это неравенство было независимо открыто Ж. Бьенеме (1853) и П. Л. Чебышевым (1867). В современной литературе оно чаще наз. Ч.н., возможно, потому, что с именем П. Л. Чебышева связано использование его при доказательстве обобщения *больших чисел закона*. При нек-рых дополнительных предположениях точность Ч. н. может быть увеличена: степенная оценка $1/t^2$ может быть заменена показательной оценкой $2e^{-t^2/4}$, убывающей с ростом t значительно быстрее.

Ч. н. и его всевозможные обобщения являются простым следствием исходной т е о р е м ы Ч е б ы ш е в а: если случайная величина X с математич. ожиданием $\mathsf{E}X$ такова, что $X \geqslant 0$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{E}X}{\varepsilon}.$$

ЧЕБЫШЁВА ТЕОРЕ́МА о д и ф ф е р е н ц и а л ь н о м б и н о м е: неопределённый интеграл от дифференциального бинома

$$x^m(a + bx^n)^p,$$

где a и b — действительные числа, m, n, p — рациональные, не выражается через элементарные функции при любых m, n, p, кроме случаев, когда одно из чисел p, $(m+1)/n$, $(m+1)/n + p$ — целое. Установлена П. Л. Чебышевым (1853).

2) Ч. т. о наилучшем приближении — теорема теории *приближения функций*, установленная П. Л. Чебышевым (1854).

3) Ч. т. в теории вероятностей — см. *Больших чисел закон, Чебышева неравенство.*

ЧЕБЫШЁВА ФУ́НКЦИЯ — теоретико-числовая функция, введённая П. Л. Чебышевым (1851). См. *Чисел теория.*

ЧЕБЫШЁВСКИЙ ИТЕРАЦИО́ННЫЙ МЕ́ТОД — оптимальный, использующий свойства многочленов Чебышева итерационный алгоритм нахождения решения u линейного уравнения

$$Au=f \qquad (1)$$

с самосопряжённым оператором A, спектр которого принадлежит $[m, M]$, где $0<m<M$. Рассматривают два типа Ч. и. м.: двухшаговый (иначе, трёхчленный)

$$u^{k+1}=u^k-\alpha_{k+1}(Au^k-f)-\beta_{k+1}(u^k-u^{k-1}), \qquad (2)$$
$$\beta_1=0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,$$

и одношаговый (иначе, двухчленный)

$$u^{k+1}=u^k-\alpha_{k+1}(Au^k-f), \qquad (3)$$

$k=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$, N задано, в к-рых по начальному приближению u^0 образуют последовательность u^k.

Оптимальные значения параметров α_{k+1}, β_{k+1} в методе (2) определяют по формулам

$$\alpha_{k+1}=\frac{4\delta_{k+1}}{M-m},\quad \beta_{k+1}=-\delta_k\delta_{k+1}, \qquad (4)$$

где

$$\delta_0=0,\ \delta_1=\theta^{-1},\ \delta_{k+1}=(2\theta-\delta_k)^{-1},\ k=1,\ 2,\ \ldots,$$
$$\theta=(M+m)/(M-m).$$

Тогда, если $\varepsilon^k=u-u^k$, то для любого $k\geqslant 1$

$$\|\varepsilon^k\|\leqslant\frac{2\tau^k}{1+\tau^{2k}}\|\varepsilon^0\|, \qquad (5)$$

где

$$\tau=\frac{1-\sqrt{\frac{m}{M}}}{1+\sqrt{\frac{m}{M}}}.$$

Ч. и. м. (3) использует только одно предыдущее приближение; для получения оптимальной сходимости его на N-й итерации, где N заранее задано, параметры α_k выбирают из множества значений

$$\left\{\gamma_j=2\left(M+m-(M-m)\cos\frac{2j-1}{2N}\pi\right)^{-1},\ j=1, 2, \ldots, N\right\}. \qquad (6)$$

Для устойчивости метода к вычислительной погрешности параметры α_k берутся не в естественном порядке $\alpha_k=\gamma_k$, а подвергают специальному перемешиванию по правилу $\alpha_k=\gamma_{j_k}$, где $\varkappa_N=(j_1, j_2, \ldots, j_N)$ — специальная целочисленная перестановка; напр., при $N=2^n$ $\varkappa_N$ получают рекуррентным алгоритмом: $\varkappa_1=(1)$ и, если известна $\varkappa_{p/2}=(j_1, j_2, \ldots, j_{p/2})$, то

$$\varkappa_p=(j_1,\ 2^p+1-j_1,\ \ldots,\ j_{p/2},\ 2^p+1-j_{p/2}),$$
$$p=2,\ 3,\ \ldots,\ n;$$

для метода (3) неравенство (4) справедливо только при $k=N$.

Ч. и. м. (2), (3) применимы и для нахождения крайних собственных значений λ_i и соответствующих собственных векторов φ_i задачи

$$Au=\lambda u. \qquad (7)$$

Если $\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n$ в задаче (7), то, полагая в (2), (3) $f=0$, $m=\lambda_2$, $M=\lambda_H$, получают два Ч. и. м., в к-рых u^k, соответственно u^N, сходятся к вектору, пропорциональному φ_1.

Ч. и. м. применяется для решения нек-рых задач с несамосопряжёнными операторами, напр. с симметризуемыми операторами, или такими, спектр к-рых принадлежит специальным множествам. Они широко применяются также как стандартный метод для ускорения итераций: если имеется итерационный алгоритм, заданный формулой

$$v^{k+1}=Tv^k+f, \qquad (8)$$

то, полагая $A=I-T$ в (2), (3), можно ускорить сходимость итераций (8). *В. И. Лебедев.*

ЧЕБЫШЁВСКОЕ ПРИБЛИЖЕ́НИЕ — то же, что *равномерное приближение*, исследованное П. Л. Чебышевым (1854).

ЧЕ́ВЫ ТЕОРЕ́МА — теорема о соотношении между длинами отрезков некоторых прямых, пересекающих *треугольник*. Теорему доказал Дж. Чева (1678).

ЧЕЗА́РО МЕ́ТОД СУММИ́РОВАНИЯ — один из методов *суммирования*; введён Э. Чезаро (1890).

ЧЁРЧА ТЕ́ЗИС — принцип, согласно которому класс функций, вычислимых с помощью *алгоритмов* в широком интуитивном смысле, совпадает с классом частично *рекурсивных функций*. Ч. т.— это естественнонаучный факт, подтверждаемый опытом, накопленным в математике за всю её историю. Все известные в математике алгоритмы удовлетворяют ему.

Ч. т. впервые был высказан А. Чёрчем (1936). Различным уточнениям интуитивного понятия алгоритма соответствуют свои формулировки Ч. т. Тезис Тьюринга заключается в том, что всякая вычислимая в интуитивном смысле функция вычислима с помощью некрой *Тьюринга машины*, а принцип нормализации Маркова — в том, что всякая вычислимая в интуитивном смысле функция вычислима с помощью нек-рого *нормального алгорифма*. Из эквивалентности известных уточнений понятия алгоритма следует эквивалентность соответствующих вариантов Ч. т. Этот факт является ещё одним подтверждением Ч. т. Тезис Чёрча не может быть строго доказан, так как в его формулировке участвует неточное понятие «алгоритм в интуитивном смысле». Были попытки опровергнуть **Ч.** т., однако они к успеху не привели (1987). Принятие **Ч.** т. полезно в теории алгоритмов и её приложениях. Во-первых, при доказательстве существования тех или иных конкретных алгоритмов — машин Тьюринга, рекурсивных функций, нормальных алгорифмов и др.— можно, опираясь на Ч. т., ограничиваться интуитивно ясными построениями и не выписывать соответствующие формальные схемы.

Кроме того, Ч. т. является основанием для вывода о неразрешимости данной *алгоритмической проблемы* после того, как строго доказано, что эта проблема не может быть решена в рамках того или иного уточнения понятия алгоритма.

ЧЁТНАЯ ПОДСТАНО́ВКА — см. *Подстановка.*

ЧЁТНАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция $f(x)$, удовлетворяющая условию: $f(-x)=f(x)$ для всех x из области определения этой функции. Область определения Ч. ф. симметрична относительно точки $x=0$. Напр., x^2, $\cos x$, $\ln|x|$ — Ч. ф. График Ч. ф. симметричен относительно оси ординат. Сумма, разность, произведение и частное Ч. ф. являются Ч. ф.

См. также *Нечётная функция.*

ЧЁТНОЕ ЧИСЛО́ — целое число, делящееся без остатка на 2. Всякое Ч. ч. можно представить в виде $2m$, где m — целое число.

ЧЕТЫРЁХ КРА́СОК ЗАДА́ЧА: можно ли любую карту так раскрасить четырьмя цветами, чтобы никакие две области, имеющие общий участок границы, не были окрашены в один и тот же цвет?

В сер. 19 в. была сформулирована гипотеза о том, что ответ на Ч. к. з. утвердительный. В 1890 было доказано более слабое утверждение, что для такого раскрашивания любой карты достаточно пяти цветов. В 1976 было анонсировано положительное решение Ч. к. з. с использованием ЭВМ.

Многочисленные попытки решения Ч. к. з. оказали влияние на развитие ряда направлений теории графов.

ЧЕТЫРЁХВЕРШИННИК — см. *Проективная геометрия.*

ЧЕТЫРЁХМЕ́РНОЕ МНОГООБРА́ЗИЕ — топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную числовому пространству $\mathbb{R}^4$ или замкнутому подпространству $\mathbb{R}^4_+$. Это определение обычно дополняют требованием того, чтобы Ч. м. как топологич. пространство было хаусдорфовым и имело счётную базу. Топология Ч. м. занимает особое место. С одной стороны, размерность 4 слишком мала для беспрепятственного применения соображений общего положения и трансверсальности, столь продуктивных в многомерной топологии, и достаточно велика для того, чтобы исключить прямое использование более интуитивных методов трёхмерной топологии. С другой стороны, топология Ч. м. наследует многие трудности как трёхмерной, так и многомерной топологии многообразий. Это объясняется, напр., тем, что край Ч. м. может быть произвольным *трёхмерным многообразием*, и тем, что любая конечно определённая группа является *фундаментальной группой* нек-рого замкнутого Ч. м.

ЧЕТЫРЁХСТОРО́ННИК — см. *Проективная геометрия.*

ЧИСЕЛ ТЕО́РИЯ — наука о целых числах. Понятие целого числа, а также арифметич. операций над числами известно с древних времён и является одной из первых математич. абстракций.

Особое место среди целых чисел, т. е. чисел . . ., —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, . . ., занимают натуральные числа — целые положительные числа 1, 2, 3, . . . — их свойства и операции над ними. Все натуральные числа, бо́льшие единицы, распадаются на 2 класса: к 1-му классу относятся числа, имеющие ровно два натуральных делителя, именно единицу и самого себя, ко 2-му — все остальные. Числа 1-го класса стали называть простыми, а 2-го — составными. Свойства простых чисел и их связь со всеми натуральными числами изучались Евклидом (3 в. до н. э.). Если выписать простые числа подряд, то можно заметить, что относительная плотность их убывает: на первый десяток их приходится 4, т. е. 40%, на сотню — 25, т. е. 25%, на тысячу — 168, т. е. ≈17%, на миллион — 78 498, т. е. ≈8%, и т. д., однако их бесконечно много (Евклид). Среди простых чисел попадаются пары таких, разность между к-рыми равна двум (т. е. простые близнецы), однако конечность или бесконечность таких пар не доказана.

Евклид считал очевидным, что с помощью умножения только простых чисел можно получать все натуральные числа, причём каждое натуральное число представимо в виде произведения простых чисел единственным образом (с точностью до порядка множителей). Т. о., простые числа образуют мультипликативный базис натурального ряда. Первыми задачами о простых числах были такие: как часто они расположены в натуральном ряде и как далеко они отстоят друг от друга. Изучение распределения простых чисел привело к созданию алгоритма (правила), позволяющего получать таблицы простых чисел. Таким алгоритмом является решето Эратосфена (3 в. до н. э.). Евклид в «Началах» указал способ нахождения наибольшего общего делителя двух чисел (алгоритм Евклида), следствием к-рого является теорема об однозначном разложении натуральных чисел на простые сомножители.

Вопрос о целочисленных решениях различного вида уравнений также восходит к древности. Простейшим уравнением в целых числах является линейное уравнение

$$ax+by=c,$$

где a, b и c — попарно взаимно простые целые числа. С помощью алгоритма Евклида находится решение уравнения $ax+by=1$, из к-рого затем получаются все решения первоначального уравнения. Другим уравнением в целых числах является уравнение $x^2+y^2=z^2$ (решение $x=3$, $y=4$, $z=5$ связано с именем Пифагора), все целочисленные решения к-рого выписаны в «Началах» (кн. X, предложение 29):

$$x=r^2-q^2,\ y=2rq,\ z=r^2+q^2,$$

где r и q — целые числа. Евклиду было известно также и уравнение $ax^2+1=y^2$, названное впоследствии *Пелля уравнением*. В «Началах» (кн. X, предложение 9) Евклид показал, как находить все его решения исходя из наименьшего, для случая $a=2$. Систематич. изложение теории известных к тому времени уравнений в целых числах дано Диофантом в его «Арифметике» (3 в. н. э.). Эта книга сыграла большую роль в дальнейшем развитии той части Ч. т., к-рая занимается решением уравнений в целых числах, называемых теперь *диофантовыми уравнениями*.

Следующий этап в развитии Ч. т. связан с именем П. Ферма, к-рому принадлежит ряд выдающихся открытий в теории диофантовых уравнений и в теории, связанной с делимостью целых чисел. Им была выдвинута гипотеза, получившая название *Ферма великая теорема*, и доказана теорема, известная как *Ферма малая теорема*, к-рая играет важную роль в теории сравнений и её позднейших обобщениях. Продолжая исследования П. Ферма по теории делимости чисел, Л. Эйлер доказал теорему, обобщающую малую теорему Ферма. Ему принадлежат также и первые доказательства великой теоремы Ферма для показателя $n=3$.

К нач. 18 в. в науке о целых числах накопилось много фактов, позволивших создать стройные теории и общие методы решения задач Ч. т. Л. Эйлер был первым из математиков, кто стал создавать общие методы и применять др. разделы математики, в частности математический анализ, к решению задач Ч. т. Исследуя вопрос о числе решений линейных уравнений вида

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n=N,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — натуральные числа, в целых неотрицательных числах $x_1, \ldots, x_n$, Л. Эйлер построил производящую функцию $\Phi(z)$ от переменной z, коэффициенты к-рой при разложении по степеням z равняются числу решений указанного уравнения. Функция $\Phi(z)$ определяется как формальное произведение рядов

$$\Phi_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^{a_1k},\ \ldots,\ \Phi_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^{a_nk},$$

т. е. $\Phi(z)=\Phi_1(z)\cdot\ldots\cdot\Phi_k(z)$, каждый из к-рых сходится при $|z|<1$ и имеет достаточно простой вид, являясь суммой членов бесконечной геометрич. прогрессии:

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{1-z^{a_1}},\ \ldots,\ \Phi_n(z)=\frac{1}{1-z^{a_n}}.$$

Следовательно,

$$\Phi(z)=\frac{1}{(1-z^{a_1})\ldots(1-z^{a_n})}=\sum_{N=0}^{\infty} I(N)\,z^N,$$

причём $I(N)$ — число решений изучаемого уравнения. Метод производящих функций Эйлера послужил истоком кругового метода Харди — Литлвуда, далеко идущим развитием к-рого, в свою очередь, явился метод тригонометрич. сумм Виноградова.

Другой проблемой Ч. т., стимулировавшей создание мощного метода, была проблема простых чисел. Л. Эйлер, доказывая теорему Евклида о бесконечности числа простых чисел, рассмотрел произведение по всем простым числам p:

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\ldots\right)$$

при $s>1$. Это произведение сходится, и если его раскрыть, то в силу однозначности разложения натуральных чисел на простые сомножители получается, что оно равняется сумме ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, откуда следует тождество Эйлера:

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\ s>1.$$

Т. к. при $s=1$ ряд справа расходится (гармонический ряд), то из тождества Эйлера следует теорема Евклида. Эта идея

Л. Эйлера легла в основу позднейших теорий *дзета-функций*. Л. Эйлеру и Х. Гольдбаху принадлежат первые постановки аддитивных (т. е. связанных со сложением) задач с простыми числами.

К сер. 19 в. в основном было построено здание Ч. т.

К. Гаусс создал теорию сравнений, наз. иначе арифметикой остаточных классов, с помощью к-рой были доказаны теорема о том, что простое число является суммой двух квадратов тогда и только тогда, когда оно имеет вид $4n+1$, и теорема о представимости каждого натурального числа суммой четырёх квадратов целых чисел. Кроме того, теория сравнений привела к важным понятиям теоретико-числового *характера* и тригонометрич. суммы. Простейшим характером является *Лежандра символ*.

К. Гаусс изучил свойства *квадратичных вычетов* и невычетов. Основной теоремой в этом круге вопросов является т. н. квадратичный закон взаимности, при доказательстве к-рого К. Гаусс рассмотрел конечные суммы вида

$$S(a)=\sum_{n=1}^{p} e^{2\pi i a n^2/p},\ 0<a<p-1,\ a\text{—целое}.$$

Суммы такого вида и их обобщения стали называть тригонометрическими, т. к. в силу формулы Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ они могут быть представлены в виде сумм синусов и косинусов.

К. Гаусс, а затем П. Дирихле, продолжая исследования Л. Эйлера, создали теорию квадратичных форм, другими словами,— теорию о представлении натуральных чисел формами вида $ax^2+2bxy+cy^2$, где a, b, c — целые числа.

К. Гаусс и П. Дирихле первыми стали рассматривать проблему о количестве целых точек в областях на плоскости. К. Гаусс доказал, что число целых точек в круге $X^2+Y^2\leqslant R^2$ равно $\pi R^2+O(R)$, а П. Дирихле в свою очередь доказал, что число целых точек с положительными координатами под гиперболой $xy=N$ равно $N(\ln N+2C-1)+O(\sqrt{N})$, где C — постоянная Эйлера. Обобщения этих двух предложений, а также нахождение наилучших возможных остатков в написанных формулах (проблема целых точек в круге Гаусса и проблема делителей Дирихле) послужили источником большой главы Ч. т.

Теоремы о бесконечности числа простых чисел в арифметич. прогрессиях частного вида, таких, как $4k\pm1$, $6k\pm1$, были известны давно, однако только П. Дирихле удалось доказать общую теорему о бесконечности числа простых чисел в прогрессиях вида

$$nk+l,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где k (разность прогрессии) и l (первый её член) взаимно просты. Он рассмотрел аналог эйлерова произведения по всем простым числам вида

$$\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

где $\chi(p)$ удовлетворяет условиям: не равна тождественно нулю, периодическая $\chi(n+k)=\chi(n)$ с периодом k, вполне мультипликативная, т. е. $\chi(nm)=\chi(n)\,\chi(m)$ при любых целых n и m. Эту функцию назвали характером Дирихле. С помощью характеров Дирихле можно «вырезать» арифметич. прогрессии. Для каждого натурального k существует $\varphi(k)$ характеров Дирихле ($\varphi(k)$ — *Эйлера функция*), причём если рассмотреть сумму чисел $\chi(n)$ по всем возможным характерам, отвечающим k, то она будет равна $\varphi(k)$, если n при делении на k даёт остаток 1, в противном случае равна 0. При $s>1$ получается аналог тождества Эйлера:

$$\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Ряд справа в этом равенстве наз. рядом Дирихле. Изучая поведение таких рядов при $s\to1+0$, П. Дирихле доказал свою теорему о бесконечности числа простых чисел в арифметич. прогрессии.

Характеры играют важную роль как в самой Ч. т., так и в др. разделах математики (алгебре, топологии и др.), а ряды Дирихле составляют большую главу современной теории функций.

Новый подход к проблеме распределения простых чисел предложен П. Л. Чебышевым. Пусть $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x. Теорема Евклида утверждает, что $\pi(x)\to\infty$ при $x\to+\infty$. П. Л. Чебышев доказал более точный закон стремления к бесконечности $\pi(x)$:

$$a\frac{x}{\ln x}<\pi(x)<b\frac{x}{\ln x},$$

где $a>1/2\ln2$, $b<2\ln2$, и утверждение, что если существует предел

$$\frac{\pi(x)\ln x}{x}$$

при $x\to\infty$, то этот предел равен 1. П. Л. Чебышеву принадлежит и другое открытие в теории простых чисел. С помощью вычислений было замечено, что в интервале $(x,\ 2x)$, $x\geqslant2$, лежит простое число; эту гипотезу назвали постулатом Бертрана. П. Л. Чебышев доказал (1852) эту гипотезу, причём он получил более точный результат, уменьшив длину рассматриваемого интервала. Тем самым вместе с вопросом о простых близнецах, т. е. о наименьшем значении разности $p_{n+1}-p_n$, возник и стал решаться вопрос об оценке сверху этой разности.

Изучение неопределённых уравнений, и в первую очередь уравнения Ферма, привело к созданию нового раздела Ч. т.— теории алгебраич. чисел.

Э. Куммер, пытаясь доказать теорему Ферма, перешёл к соотношению

$$x^n=z^n-y^n=\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i y),$$

где α_i — корни n-й степени из единицы. Рассматривая числа вида $z+\alpha_i y$, где z и y — целые, как «новые целые числа», Э. Куммер построил арифметику целых чисел алгебраического числового поля, порождённого α_i, т. е. множества чисел, к-рое получается из α_i путём применения к нему всех четырёх арифметич. операций. Если бы в таком поле выполнялась теорема о единственности разложения целых чисел на простые сомножители, то тогда записанное выше равенство давало бы противоречие. Однако это не всегда так. Э. Куммер, чтобы сохранить справедливость этой теоремы, ввёл т. н. идеальные числа. Возник ряд проблем, решение к-рых привело к созданию алгебраич. теории чисел с большим количеством новых понятий и результатов.

Вместе с изучением свойств целых чисел возникло и стало развиваться новое направление Ч. т., изучающее арифметику числовой прямой. Уже Л. Эйлер отмечал, что квадратные корни из целых чисел и логарифмы целых чисел принципиально отличаются друг от друга. Последнее обстоятельство обрело точную математич. формулировку после работ Ж. Лиувилля (1844), к-рый ввёл понятия *алгебраических чисел* и *трансцендентных чисел*. Оказывается, алгебраич. числа «плохо» приближаются рациональными дробями. Ж. Лиувилль доказал, что если алгебраич. число является корнем уравнения степени n, то, приближаясь к нему дробями вида P/Q, где P и Q — целые взаимно простые числа, подойти существенно ближе, чем Q^{-n}, к нему нельзя (теорема Лиувилля). Отсюда сразу следует существование бесконечного числа неалгебраич. чисел, к-рые стали называть трансцендентными; напр., таким будет число $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n!}$. Однако вопросы об алгебраичности и трансцендентности конкретных чисел трудны; первыми были такие вопросы о классич. постоянных π и e. В кон. 19 — нач. 20 вв. Ч. т. продолжала развиваться по многим направлениям, причём для решения отдельных задач создавались общие методы, применимые к широкому кругу задач, иногда очень удалённых от первоначальных. Часто созданные здесь методы и понятия дают толчок развитию новых направлений.

Теория алгебраич. чисел разделилась на два направления: одно изучает конкретные числа, доказывая их трансцендентность, другое изучает степень приближения алгебраич. чисел рациональными или алгебраическими. В первом направлении общие методы были созданы Ш. Эрмитом (1873), доказавшим трансцендентность числа e, и Ф. Линдеманом (1882), доказавшим трансцендентность числа π и тем самым решившим задачу о квадратуре круга. Во втором — А. Туэ (1909) был предложен метод, с помощью к-рого он доказал, что в неравенстве Лиувилля к алгебраич. числу нельзя подойти существенно ближе, чем $Q^{-n/2}$. Следствием этого явилась теорема Туэ о конечности числа решений в целых числах x и y уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n=A,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, A$ — целые числа, $n\geqslant 3$.

Дальнейшее изучение простых чисел привело к новому методу в Ч. т., связанному с функцией $\zeta(s)$. Б. Риман доказал, что дзета-функция $\zeta(s)$ аналитически продолжается на всю плоскость комплексного переменного, является аналитической в каждой точке плоскости, за исключением $s=1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом, равным 1, удовлетворяет функциональному уравнению

$$\zeta(s)=\zeta(1-s),$$

где

$$\zeta(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

$\Gamma(s)$ — гамма-функция, и имеет бесконечно много нулей в полосе $0\leqslant \mathrm{Re}\, s\leqslant 1$ (эти нули называют нетривиальными, а полосу — критической). Он установил тесную связь между нетривиальными нулями $\zeta(s)$ и асимптотич. поведением $\pi(x)$. Изучение асимптотич. формулы для функции Чебышева

$$\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n),$$

где $\Lambda(n)=\ln p$, если $n=p^k$, и $\Lambda(n)=0$, если $n\neq p^k$, эквивалентно такой же задаче для функции $\pi(x)$. Функция $\psi(x)$ может быть выражена через интеграл от производящей функции $-\zeta'(s)/\zeta(s)$:

$$\psi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds.$$

Б. Риман высказал гипотезу, что все нетривиальные нули $\zeta(s)$ лежат на прямой $\mathrm{Re}\, s=1/2$, из чего следует, что

$$\psi(x)=x+O\left(\sqrt{x}\ln^2 x\right),$$

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{du}{\ln u}+O\left(\sqrt{x}\ln x\right).$$

Из справедливости любой из последних формул следует гипотеза Римана. По аналогичной схеме были изучены L-ряды Дирихле. В 1896 Ш. Ла Валле Пуссен и Ж. Адамар доказали, что $\zeta(s)\neq 0$ в области $\mathrm{Re}\, s\geqslant 1$, откуда следовала формула (асимптотич. закон распределения простых чисел)

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}.$$

Кроме этого, Ш. Ла Валле Пуссен доказал, что $\zeta(s)\neq 0$ в области

$$\mathrm{Re}\, s\geqslant 1-\frac{c}{\ln(|t|+2)}$$

и что

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{du}{\ln u}+O\left(xe^{-c_1\sqrt{\ln x}}\right),$$

где c и c_1 — положительные постоянные. Такой же результат был получен им и для простых чисел в арифметич. прогрессиях: если $\pi(x, k, l)$ — число простых чисел вида $kn+l$, $n\leqslant x$, k и l — взаимно простые числа, то

$$\pi(x, k, l)=\frac{1}{\varphi(k)}\int_2^x\frac{du}{\ln u}+O\left(xe^{-c_1\sqrt{\ln x}}\right).$$

Метод получения асимптотич. формул для $\pi(x)$, $\psi(x)$, $\pi(x, k, l)$, названный методом комплексного интегрирования, нашёл многочисленные применения. Основой этого метода служит формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{x^s}{s}\,ds=\begin{cases}1, & \text{если } 0<x<1,\\ 0, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

Теория квадратичных форм, начатая работами Л. Эйлера, К. Гаусса, П. Дирихле, продолжала своё развитие в работах А. Н. Коркина, Е. И. Золотарёва и А. А. Маркова. В частности, А. Н. Коркин и Е. И. Золотарёв доказали теорему: переменным любой положительной кватернарной квадратичной формы определителя D можно придать такие целые значения, что значение формы не будет превосходить величины $\sqrt[4]{4D}$, и существуют такие формы, минимумы к-рых равны $\sqrt[4]{4D}$. Примером такой формы является следующая:

$$\sqrt[4]{4D}\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4).$$

Исследования А. А. Маркова относились к изучению минимумов бинарных квадратичных форм положительного определителя и привели к целому ряду новых открытий.

Проблемы целых точек в областях на плоскости получили своё дальнейшее развитие в трудах Г. Ф. Вороного, создавшего (1903) метод, с помощью к-рого доказано, что остаточный член в асимптотич. формуле Дирихле для числа целых точек под гиперболой имеет порядок корня кубического из главного члена. Позднее (1906) метод Вороного был перенесён В. Серпиньским на проблему Гаусса целых точек в круге с тем же результатом. В это же время были предприняты попытки найти решения аддитивных проблем Ч. т. и, в частности, решить *Варинга проблему*. В 1909 она была решена Д. Гильбертом.

Второе, третье и четвёртое десятилетия 20 в. были исключительно богаты новыми идеями и методами в Ч. т. Г. Вейль, решая задачи, связанные с устойчивостью Солнечной системы, пришёл к понятию равномерного распределения дробных долей целочисленных функций: дробные доли действительнозначной функции $F(x)$ равномерно распределены на $[0,1)$ при $x=1, 2, 3, \ldots$, если число попаданий дробных долей $F(x)$ на любой интервал из $[0, 1)$ пропорционально длине этого интервала. Он доказал, что для равномерности распределения дробных долей $F(x)$ необходимо и достаточно выполнение соотношения:

$$S(F)=\sum_{0<x\leqslant p}e^{2\pi imF(x)}=o(p),$$

при любом фиксированном $|m|>0$, и получил нетривиальные оценки $|S(F)|$ в случае, когда $F(x)$ — многочлен, старший коэффициент к-рого есть иррациональное число. И. М. Виноградов, изучая распределение значений символа Лежандра на отрезках малой длины по сравнению с модулем, доказал (1914) неравенство

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{n+a}{p}\right)\right|<\sqrt{p}\ln p,\qquad x>0,$$

из к-рого следует, что квадратичных вычетов и невычетов на любом отрезке, длина к-рого чуть больше $\sqrt{p}\ln p$, асимптотически поровну. Кроме того, он высказал гипотезу, что это будет верно при $x>p^{\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое число. В 1917 И. М. Виноградов доказал, что число целых точек в области $0<y\leqslant f(x)$, $a<x\leqslant b$, при определённых ограничениях на порядок роста второй производной $f(x)$ равно площади этой области с точностью до слагаемого порядка корня кубического из главного члена. Точность этой формулы при сделанных предположениях относительно $f(x)$ нельзя существенно улучшить.

В. Бруном доказаны (1919) теоремы, к-рые в определённом смысле приближались к проблеме простых близнецов и проблеме Эйлера. А именно, им доказаны бесконечность пар u_1 и u_2 таких, что $u_2-u_1=2$ и число простых делителей u_1 и u_2 не превосходит девяти, а также разрешимость уравнения $u_1+u_2=2N$ (с теми же условиями на u_1 и u_2).

Г. Харди и Дж. Литлвуд опубликовали (1922—23) серию мемуаров, в к-рых развили общий метод решения аддитивных задач Ч. т., получивший впоследствии название «круговой». Этот метод (на примере решения проблемы Варинга) состоит в следующем: пусть

$$\Phi(z)=\sum_{x=0}^{\infty} z^{x^n},\ |z|<1,$$

тогда

$$\Phi^k(z)=\sum_{N=1}^{\infty} I_k(N)\,z^N,$$

где $I_k(N)$ — число решений уравнений Варинга, к-рое находят по формуле

$$I_k(N)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|<R<1} z^{-N-1}\Phi^k(z)\,dz.$$

Г. Харди и Дж. Литлвуд изучали последний интеграл при $R\to 1-0$. Окружность интегрирования определённым образом разбивается на «большие» и «малые» дуги (отчего и получил название метод), при этом интегралы по «большим» дугам дают главный член асимптотич. формулы для $I_k(N)$, а по «малым» — остаточный. Т. о. получают асимптотич. формулу

$$I_k(N)=\sigma(N)\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)}N^{k/n-1}+O\left(N^{k/n-1-\delta}\right),$$

где $\sigma(N)$ — нек-рый «особый ряд»; $\sigma(N)\geqslant c>0$, $\delta>0$ и $k\geqslant(n-2)2^{n-1}+5$. С помощью этого метода Г. Харди и Дж. Литлвуд получили следующие результаты: дали новое решение проблемы Варинга, условное решение проблемы Гольдбаха, сформулировали и выписали гипотетич. формулы для количества решений большого числа уравнений с простыми числами.

В нач. 30-х гг. 20 в. И. М. Виноградовым был найден т. н. метод тригонометрич. сумм, позволивший решить многие проблемы Ч. т. Так, занимаясь проблемой Варинга, И. М. Виноградов обнаружил (1929), что результат Харди — Литлвуда будет значительно проще, если вместо производящих рядов рассматривать тригонометрич. суммы вида

$$\sum_{0<x\leqslant p} e^{2\pi i F(x)},$$

где $F(x)$ — действительная функция, и пользоваться соотношением

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha m}d\alpha=\begin{cases}1, & m=0,\\ 0, & m\neq 0,\ m\text{ — целое.}\end{cases}$$

Тогда $I_k(N)$ в проблеме Варинга запишется так:

$$I_k(N)=\int_0^1 S^k(\alpha)\,e^{-2\pi i\alpha N}\,d\alpha,$$

где

$$S(\alpha)=\sum_{0<x<N^{1/n}} e^{2\pi i\alpha x^n}.$$

Далее интервал интегрирования $[0,1]$ разбивается рациональными несократимыми дробями вида a/b, $0\leqslant a<b\leqslant\tau$, τ — параметр, зависящий от N, на подинтервалы, подобные «большим» и «малым» дугам кругового метода. Интервалы, отвечающие дробям с малыми знаменателями, и сумма интегралов по ним дают главный член асимптотич. формулы для $I_k(N)$. Другие интервалы отвечают «малым» дугам; для них И. М. Виноградов оценивает $|S(\alpha)|$ методом Вейля и получает остаточный член. К тригонометрич. суммам сводятся и др. задачи Ч. т.: распределение дробных долей функций, целые точки в областях на плоскости и в пространстве, порядок роста дзета-функции в критич. полосе и др. Причём главным в таких задачах является вопрос о возможно более точной оценке модуля тригонометрич. суммы. И. М. Виноградов предложил два метода оценок тригонометрич. сумм. Первый метод (1934) дал возможность получить новые оценки сумм Вейля. Следствием этого явились современные оценки, выведена асимптотич. формула в проблеме Варинга при $k\geqslant 4n^2\ln n$, доказано, что для разрешимости уравнения Варинга при $N\geqslant N_0(n)$ достаточно не более $3n\ln n+11n$ слагаемых, получен новый остаточный член в асимптотич. формулах для $\pi(x)$ и $\psi(x)$ (И. М. Виноградов, 1957) порядка

$$O\left(xe^{-c(\ln x)^{0,6}}\right),\ c>0,$$

получено решение проблемы Гильберта — Камке (К. К. Марджанишвили, 1937).

Второй метод Виноградова (1937) позволил оценить такие тригонометрич. суммы, в к-рых суммирование ведётся по простым числам:

$$T=\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i\alpha p}.$$

Это привело к доказательству асимптотич. формулы для числа представлений нечётного числа суммой простых, из к-рой следовало, что все достаточно большие нечётные числа являются суммой трёх простых. Тем самым была решена *Гольдбаха проблема*. Этот метод привёл к решению других общих задач Ч. т., напр. проблемы Варинга в простых числах, проблемы распределения квадратичных вычетов и невычетов в последовательностях вида $p+a$, где p принимает значения простых чисел.

Развитие идей А. Туэ (построение вспомогательного многочлена с высокой кратностью корня) и Д. Пойа (целая аналитич. функция, принимающая в целых положительных точках целые значения и растущая медленнее $2^{\gamma|s|}$, $\gamma<1$, является многочленом) привело А. О. Гельфонда (1934) и Т. Шнайдера (1934) к решению 7-й проблемы Гильберта, утверждающей трансцендентность чисел вида α^β, $\alpha\neq 0$ или 1, β — алгебраич. число степени $\geqslant 2$. К. Зигель доказал ряд теорем о трансцендентности значений функций типа e^x (т. н. E-функции) в алгебраич. точках.

В алгебраич. Ч. т. доказан ряд теорем, обобщающих теоремы теории целых чисел на целые числа алгебраических числовых полей, нек-рые из них привели и к чисто арифметич. результатам, сюда, в частности, относится теория представлений чисел полными и неполными разложимыми формами (простейшей из таких задач является уравнение Пелля). Развита также теория решений сравнений от двух и более переменных, из к-рой, напр., следует, что сравнение

$$F(x,\ y)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p),$$

где F — абсолютно неприводимый многочлен, имеет $p+O(\sqrt{p})$ решений.

С кон. 40-х гг. в Ч. т. появилось много работ в самых различных направлениях. Исследования ведутся как в классич. областях, так и в новых.

Большое количество проблем Ч. т. ещё не решено, сюда относятся проблемы простых близнецов, бесконечности простых чисел вида n^2+1, целых точек в круге и под гиперболой, распределения нулей дзета-функции, трансцендентность чисел $\pi+e$ и постоянной Эйлера и др.

● Виноградов И. М., Основы теории чиссл, 9 изд., М., 1981; Бухштаб А. А., Теория чисел, 2 изд., М., 1966; Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, 3 изд., М., 1985; Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2 изд., М., 1980; с г о ж е, Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976; Карацуба А. А., Основы аналитической теории чисел, 2 изд., М., 1983; Дирихле П. Г. Л., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М.— Л., 1936; Хассе Г., Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953. *А. А. Карацуба.*

ЧИСЛИ́ТЕЛЬ дроби m/n — число m, показывающее, из скольких долей $1/n$ составлена дробь. Термин «Ч.» впервые встречается у Максима Плануда (кон. 13 в.).

ЧИСЛО́ — важнейшее математическое понятие. Возникнув в простейшем виде ещё в первобытном обществе, понятие Ч. изменялось на протяжении веков, постепенно обогащаясь содержанием по мере расширения сферы человеческой деятельности и связанного с ним расширения круга вопросов, требовавшего количественного описания и исследования. На первых ступенях развития понятие Ч. определялось потребностями счёта и измерения, возни-

кавшими в непосредственной практич. деятельности человека. Затем Ч. становится основным понятием математики, и дальнейшее развитие понятия Ч. определяется потребностями этой науки.

Понятие натурального числа, вызванное потребностью счёта предметов, возникло ещё в доисторич. времена. Процесс формирования понятия натурального Ч. протекал в общих чертах следующим образом. На низшей ступени первобытного общества понятие отвлечённого Ч. отсутствовало. Это не значит, что первобытный человек не мог отдавать себе отчёта о количестве предметов конкретно данной совокупности, напр. о количестве людей, участвующих в охоте, о количестве озёр, в к-рых можно ловить рыбу, и т. д. Но в сознании первобытного человека ещё не сформировалось то общее, что есть в объектах такого рода, как, напр., «три человека», «три озера» и т. д. Анализ языков первобытных народностей показывает, что для счёта предметов различного рода употреблялись различные словесные обороты. Слово «три» в контекстах «три человека», «три лодки» передавалось различно. Конечно, такие именованные числовые ряды были очень короткими и завершались неиндивидуализированным понятием («много») о большом количестве тех или других предметов, к-рое тоже являлось именованным, т. е. выражалось разными словами для предметов разного рода, такими, как «толпа», «стадо», «куча» и т. д.

Источником возникновения понятия отвлечённого Ч. является примитивный счёт предметов, заключающийся в сопоставлении предметов данной конкретной совокупности с предметами нек-рой определённой совокупности, играющей как бы роль эталона. У большинства народов первым таким эталоном являются пальцы («счёт на пальцах»), что с несомненностью подтверждается языковедческим анализом названий первых чисел. На этой ступени Ч. становится отвлечённым, не зависящим от качества считаемых объектов, но вместе с тем выступающим во вполне конкретном осуществлении, связанном с природой эталонной совокупности. Расширяющиеся потребности счёта заставили людей употреблять другие счётные эталоны, такие, как, напр., зарубки на палочке. Для фиксации сравнительно больших Ч. стала использоваться новая идея — обозначение нек-рого определённого Ч. (у большинства народов — десяти) новым знаком, напр. зарубкой на другой палочке.

С развитием письменности возможности воспроизведения Ч. значительно расширились. Сначала Ч. стали обозначаться чёрточками на материале, служащем для записи (папирус, глиняные таблички и т. д.). Затем были введены другие знаки для больших Ч. Вавилонские клинописные обозначения Ч., так же как и сохранившиеся до наших дней «римские цифры», ясно свидетельствуют именно об этом пути формирования обозначений для Ч. Крупным шагом вперёд было изобретение индийцами современной позиционной системы счисления, позволяющей записать любое натуральное Ч. при помощи десяти знаков — *цифр*. Таким образом, параллельно с развитием письменности понятие натурального Ч. принимает всё более отвлечённую форму, всё более закрепляется отвлечённое от всякой конкретности понятие Ч., воспроизводимого в форме слов в устной речи и в форме обозначения специальными знаками в письменной.

Важным шагом в развитии понятия натурального Ч. является осознание бесконечности натурального ряда Ч., т. е. потенциальной возможности его безграничного продолжения. Отчётливое представление о бесконечности натурального ряда отражено в знаменитых памятниках античной математики (3 в. до н. э.), в трудах Евклида и Архимеда. В «Началах» Евклида устанавливается даже безграничная продолжаемость ряда простых Ч. В книге Архимеда «Псаммит» устанавливаются принципы для построения названий и обозначений для сколь угодно больших Ч., в частности бо́льших, чем «число песчинок в мире».

С развитием понятия натурального Ч. как результата счёта предметов в обиход включаются действия над Ч. Действия сложения и вычитания возникают сначала как действия над самими совокупностями в форме объединения двух совокупностей в одну и отделения части совокупности. Умножение, по-видимому, возникло в результате счёта равными частями (по два, по три и т. д.), деление — как деление совокупности на равные части. Лишь в многовековом опыте сложилось представление об отвлечённом характере этих действий, о независимости количественного результата действия от природы предметов, составляющих совокупности, о том, что, напр., два предмета и три предмета составят пять предметов независимо от природы этих предметов. Тогда стали разрабатываться правила действий, изучаться их свойства, создаваться методы для решения задач, т. е. начинается развитие науки о Ч.— *арифметики*. В первую очередь, арифметика развивается как система знаний, имеющая непосредственно прикладную направленность. Но в самом процессе развития арифметики проявляется потребность в изучении свойств Ч. как таковых, в уяснении всё более сложных закономерностей в их взаимосвязях, обусловленных наличием действий. Начинается детализация понятия натурального Ч., выделяются классы чётных и нечётных Ч., простых и составных и т. д. Изучение глубоких закономерностей в натуральном ряду Ч. продолжается до настоящего времени и составляет раздел математики, носящий название *чисел теории*.

Натуральные Ч. кроме основной функции — характеристики количества предметов — несут ещё другую функцию — характеристику порядка предметов, расположенных в ряд. Возникающее в связи с этой функцией понятие порядкового Ч. (первый, второй и т. д.) тесно переплетается с понятием количественного Ч. (один, два и т. д.). В частности, расположение в ряд считаемых предметов и последующий их пересчёт с применением порядковых Ч. является наиболее употребительным с незапамятных времён способом счёта предметов (так, если последний из пересчитываемых предметов окажется седьмым, то это и означает, что имеется семь предметов).

Вопрос об обосновании понятия натурального Ч. долгое время в науке не ставился. Понятие натурального Ч. столь привычно и просто, что не возникало потребности в его определении в терминах к.-л. более простых понятий. Лишь в сер. 19 в. под влиянием развития аксиоматич. метода в математике, с одной стороны, и критич. пересмотра основ математич. анализа — с другой, назрела необходимость обоснования понятия количественного натурального Ч. Отчётливое определение понятия натурального Ч. на основе понятия множества (совокупности предметов) было дано в 70-х гг. 19 в. в работах Г. Кантора. Сначала он определяет понятие равномощности совокупностей. Именно две совокупности называются равномощными, если составляющие их предметы могут быть сопоставлены по одному. Затем число предметов, составляющих данную совокупность, определяется как то общее, что имеет данная совокупность и всякая другая, равномощная ей совокупность предметов, независимо от всяких качественных особенностей этих предметов. Такое определение отражает сущность натурального Ч. как результата счёта предметов, составляющих данную совокупность. Действительно, на всех историч. уровнях счёт заключается в сопоставлении по одному считаемых предметов и предметов, составляющих «эталонную» совокупность (на ранних ступенях — пальцы руки, зарубки на палочке и т. д., на современном этапе — слова или знаки, обозначающие Ч.).

Определение, данное Г. Кантором, было отправным пунктом для обобщения понятия количественной характеристики бесконечных множеств.

Другое обоснование понятия натурального Ч. базируется на анализе *порядка отношения*, к-рое, как оказывается, может быть аксиоматизировано. Построенная на

этом принципе система аксиом была сформулирована Дж. Пеано (1889).

Перенесение понятия порядкового Ч. на бесконечные совокупности (порядковые *трансфинитные числа* и, более общо, порядковые типы) резко расходится с обобщённым понятием количественного Ч., это обусловлено тем, что количественно одинаковые (равномощные) множества могут быть упорядочены различными способами.

Исторически первым расширением понятия Ч. является присоединение к натуральным Ч. дробных чисел. Введение в употребление дробных Ч. связано с потребностью производить измерения. Измерение к.-л. величины заключается в сравнении её с другой, качественно однородной с ней и принятой за единицу измерения. Это сравнение осуществляется посредством специфической для способа измерения операции «откладывания» единицы измерения на измеряемой величине и счёта таких откладываний. Так измеряются длина посредством откладывания отрезка, принятого за единицу измерения, количество жидкости при помощи мерного сосуда и т. д. Однако не всегда единица измерения укладывается на измеряемой величине целое число раз, и этим обстоятельством, даже в самой примитивной практич. деятельности, не всегда можно пренебречь. Здесь и содержится источник происхождения наиболее простых и «удобных» дробей, таких, как половина, треть, четверть и т. д. Но лишь с развитием арифметики как науки о Ч. созревает идея рассмотрения дробей с любым натуральным знаменателем и представление о дробном Ч. как о частном при делении двух натуральных Ч., из к-рых делимое не делится нацело на делитель (см. *Дробь*).

Дальнейшие расширения понятия Ч. обусловлены уже не непосредственными потребностями счёта и измерения, но явились следствием развития математики.

Введение отрицательных чисел было с необходимостью вызвано развитием алгебры как науки, дающей общие способы решения арифметич. задач, независимо от их конкретного содержания и исходных числовых данных. Необходимость введения в алгебру отрицательных Ч. возникает уже при решении задач, сводящихся к линейным уравнениям с одним неизвестным. Возможный отрицательный ответ в задачах такого рода может быть истолкован на примерах простейших направленных величин (таких, как противоположно направленные отрезки, передвижение в направлении, противоположном выбранному, имущество — долг и т. д.). В задачах же, приводящих к многократному применению действий сложения и вычитания, для решения без помощи отрицательных Ч. необходимо рассмотрение очень многих случаев; это может быть настолько обременительным, что теряется преимущество алгебраич. решения задачи перед арифметическим. Таким образом, широкое использование алгебраич. методов для решения задач весьма затруднительно без пользования отрицательными Ч. В Индии ещё в 6—11 вв. отрицательные Ч. систематически применялись при решении задач и истолковывались в основном так же, как это делается в настоящее время.

В европейской науке отрицательные Ч. окончательно вошли в употребление лишь со времени Р. Декарта (17 в.), давшего геометрич. истолкование отрицательных Ч. как направленных отрезков. Создание Р. Декартом аналитич. геометрии, позволившей рассматривать корни уравнения как координаты точек пересечения нек-рой кривой с осью абсцисс, окончательно стёрло принципиальное различие между положительными и отрицательными корнями уравнения, их истолкование оказалось по существу одинаковым.

Ч. целые, дробные (положительные и отрицательные) и нуль получили общее название рациональных чисел. Совокупность рациональных Ч. обладает свойством замкнутости по отношению к четырём арифметич. действиям. Это значит, что сумма, разность, произведение и частное (кроме частного при делении на нуль, к-рое не имеет смысла) любых двух рациональных Ч. являются снова рациональными Ч. Совокупность рациональных Ч. упорядочена в отношении понятий «больше» и «меньше». Далее, совокупность рациональных Ч. обладает свойством плотности: между любыми двумя различными рациональными Ч. находится бесконечно много рациональных Ч. Это даёт возможность при помощи рациональных Ч. осуществлять измерение (напр., длины отрезка в выбранной единице масштаба) с любой степенью точности. Таким образом, совокупность рациональных Ч. оказывается достаточной для удовлетворения многих практич. потребностей. Формальное обоснование понятий дробного и отрицательного Ч. было осуществлено в 19 в. и не представило, в отличие от обоснования натурального Ч., принципиальных затруднений.

Совокупность рациональных Ч. оказалась недостаточной для изучения непрерывно изменяющихся переменных величин. Здесь оказалось необходимым новое расширение понятия Ч., заключающееся в переходе от множества рациональных Ч. к множеству действительных (вещественных) чисел. Этот переход состоит в присоединении к рациональным Ч. т. н. иррациональных чисел. Ещё в Древней Греции было сделано в геометрии открытие огромной принципиальной важности, открытие того факта, что не всякие точно заданные (что само по себе является присущей геометрии идеализацией) отрезки соизмеримы, т. е. не всегда длина отрезка может быть выражена рациональным Ч., если за единицу принят другой отрезок. Классич. примером несоизмеримых отрезков является сторона квадрата и его диагональ. Факт существования несоизмеримых отрезков не явился тормозом для развития геометрии. Греками была разработана (изложенная в «Началах» Евклида) теория отношений отрезков, учитывающая возможность их несоизмеримости. Они умели сравнивать такие отношения по величине, производить над ними арифметич. действия (в чисто геометрич. форме), словом, греки обращались с такими отношениями, как с Ч. Однако идея о том, что отношение длин несоизмеримых отрезков может рассматриваться как Ч., у них не была осознана до конца. Это может быть объяснено культивировавшимся в школе, к к-рой принадлежал Евклид, отрывом теоретич. математики от прикладных вопросов. В работах Архимеда имеется значительно большая близость к прикладным вопросам, в частности приближённые вычисления отношений несоизмеримых отрезков, однако и у него не появляется понятие иррационального Ч. как Ч., выражающего отношение длин несоизмеримых отрезков.

В 17 в., в период зарождения современной науки и, в частности, современной математики, разрабатывается ряд методов изучения непрерывных процессов и методов приближённых вычислений. Отчётливое определение понятия действительного Ч. даётся одним из основоположников математич. анализа И. Ньютоном во «Всеобщей арифметике» (опубликована в 1707): «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу». Эта формулировка даёт единое определение действительного Ч., рационального или иррационального.

В дальнейшем, в 70-х гг.19 в., понятие действительного Ч. было уточнено на основе глубокого анализа понятия непрерывности в работах Р. Дедекинда, Г. Кантора и К. Вейерштрасса.

По Р. Дедекинду, свойство непрерывности прямой линии заключается в том, что если все точки, составляющие прямую, разбить на два класса так, что каждая точка первого класса лежит левее каждой точки второго класса («разорвать» прямую на две части), то либо в первом классе найдётся самая правая точка, либо во втором — самая левая точка, т. е. точка, в которой произошёл «разрыв» прямой.

Совокупность всех рациональных Ч. свойством непрерывности не обладает. Если совокупность всех рациональ-

ных Ч. разбить на два класса так, что каждое Ч. первого класса будет меньше каждого Ч. второго класса, то при таком разбиении («сечении» Дедекинда) может оказаться, что в первом классе не будет существовать наибольшего Ч., а во втором — наименьшего. Так будет, напр., если в первый класс отнести все отрицательные рациональные Ч., нуль и все положительные Ч., квадрат к-рых меньше двух, а во второй — все положительные Ч., квадрат к-рых больше двух. Такое сечение называется иррациональным. Затем даётся следующее определение иррационального Ч.: каждому иррациональному сечению в совокупности рациональных Ч. сопоставляется иррациональное Ч., к-рое считается бо́льшим, чем любое Ч. первого класса, и меньшим, чем любое Ч. верхнего класса. Совокупность всех действительных Ч. (рациональных и иррациональных) уже обладает свойством непрерывности.

Обоснование Г. Кантора понятия действительного Ч. отличается от обоснования Р. Дедекинда, но также основывается на анализе понятия непрерывности. Как в определении Р. Дедекинда, так и в определении Г. Кантора используется абстракция актуальной бесконечности. Так, в теории Р. Дедекинда иррациональное Ч. определяется посредством сечения в совокупности всех рациональных Ч., к-рая мыслится как данная вся целиком.

Заключительным этапом в развитии понятия Ч. явилось введение комплексных чисел. Источником возникновения понятия комплексного Ч. явилось развитие алгебры. По-видимому, впервые идея комплексного Ч. возникла в 16 в. (Дж. Кардано, Р. Бомбелли) в связи с открытием алгебраич. решения уравнений 3-й и 4-й степеней. Известно, что уже решение квадратного уравнения иногда приводит к действию извлечения квадратного корня из отрицательного Ч., невыполнимому в области действительных Ч. Но это происходит только в том случае, если уравнение не имеет действительных корней. Практич. задача, приводящая к решению такого квадратного уравнения, оказывается не имеющей решения. С открытием алгебраич. решения уравнений 3-й степени обнаружилось следующее удивительное обстоятельство. Как раз в том случае, когда все три корня уравнения являются действительными Ч., по ходу вычисления оказывается необходимо выполнить действие извлечения квадратного корня из отрицательного Ч. Возникающая при этом «мнимость» исчезает только по выполнении всех последующих действий. Это обстоятельство явилось первым стимулом к рассмотрению комплексных Ч. Однако комплексные Ч. и действия над ними с трудом прививались в деятельности математиков. Остатки недоверия к законности пользования ими отражаются в сохранившемся до наших дней термине мнимое число. Это недоверие рассеялось лишь после установления в конце 18 в. геометрич. истолкования комплексных Ч. в виде точек на плоскости и установления несомненной пользы от введения комплексных Ч. в теории алгебраич. уравнений, особенно после знаменитых работ К. Гаусса. Ещё до К. Гаусса в работах Л. Эйлера комплексные Ч. начинают играть существенную роль не только в алгебре, но и в математич. анализе. Эта роль стала исключительно большой в 19 в. в связи с развитием одной из замечательнейших по своей теоретич. и практич. значимости ветви математич. анализа — теории функций комплексного переменного.

Совокупность всех комплексных Ч. обладает, так же как совокупность действительных Ч., совокупность рациональных Ч., свойством замкнутости по отношению к действиям сложения, вычитания, умножения и деления. Более того, совокупность всех комплексных Ч. обладает свойством алгебраич. замкнутости, заключающейся в том, что каждое алгебраич. уравнение с комплексными коэффициентами имеет корни снова в области всех комплексных Ч. Совокупность всех действительных Ч. (и, подавно, рациональных) свойством алгебраич. замкнутости не обладает. Так, напр., уравнение с действительными коэффициентами может не иметь действительных корней. Как установлено К. Вейерштрассом, совокупность всех комплексных Ч. не может быть далее расширена за счёт присоединения новых Ч. так, чтобы в расширенной совокупности сохранились все законы действий, имеющие место в совокупности комплексных Ч.

Наряду с основной линией развития понятия Ч. (натуральные Ч. → рациональные Ч. → действительные Ч. → комплексные Ч.) специфические потребности нек-рых областей математики вызвали различные обобщения понятия Ч. в существенно других направлениях. Так, в разделах математики, связанных с теорией множеств, важную роль играют упоминавшиеся выше понятия количественных и порядковых трансфинитных Ч. В современной теории Ч. получили большое значение т. н. p-адические Ч., системы к-рых получаются из систем рациональных Ч. посредством присоединения новых объектов, отличных от иррациональных Ч. В алгебре изучаются различные системы объектов, обладающие свойствами, в бо́льшей или меньшей степени близкими к свойствам совокупности целых или рациональных Ч.— группы, алгебры, кольца, поля.

● Нечаев В. И., Числовые системы, М., 1975; Фефер ман С., Числовые системы, пер. с англ., М., 1971; История математики, т. 1—3, М., 1970—72; Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978.

Д. К. Фаддеев.

ЧИСЛОВА́Я ОСЬ — то же, что *числовая прямая*.

ЧИСЛОВА́Я ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНОСТЬ — числовая функция, определённая на множестве натуральных чисел. Ч. п. определена, если указан закон, по которому каждому натуральному числу n ставится в соответствие действительное число x_n.Ч. п. обозначается $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ или кратко $\{x_n\}$. Числа $x_1, x_2, \ldots$ наз. членами последовательности, x_n — общим или n-м членом.

Ч. п. может быть определена заданием её n-го члена формулой, позволяющей найти любой Ч. п. простой подстановкой номера искомого члена в эту формулу, напр.:

$$x_n=\frac{1}{n};\ x_1=1,\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=\frac{1}{3},\ \ldots \qquad (1)$$

$$x_n=(-1)^n;\ x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=-1,\ \ldots \qquad (2)$$

$$x_n=n\sin\frac{\pi n}{2};\ x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=-3,\ \ldots \qquad (3)$$

$$x_n=n^2;\ x_1=1,\ x_2=4,\ x_3=9,\ \ldots \qquad (4)$$

Закон образования Ч. п. может состоять в задании нескольких первых членов последовательности и рекуррентной формулы, с помощью к-рой каждый следующий член определяется через предыдущие, напр.:

$$x_1=\sqrt{2},\ x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}.$$

Рекуррентная формула позволяет по $x_1=\sqrt{2}$ найти $x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, по x_2 найти x_3 и т. д.

Возможны другие способы задания Ч. п., не сводящиеся к указанным. Напр., последовательность простых чисел $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=5,\ \ldots$; последовательность десятичных знаков числа π: $x_1=1,\ x_2=4,\ x_3=1,\ \ldots$

Ч. п. содержит бесконечное число членов, но её члены, стоящие на разных местах, могут совпадать. В Ч. п. (2) все члены с чётными номерами равны 1. Ч. п., все члены к-рой равны одному и тому же числу a, наз. постоянной и вместо $\{a\}$ обозначается просто a. Важными примерами Ч. п. являются арифметич. прогрессия $x_n=a+(n-1)d$ и геометрич. прогрессия $x_n=aq^{n-1}$.

Ч. п. наз. ограниченной сверху, если существует такое число M, что любой член последовательности не превышает его, т. е. для к-рого $x_n\leqslant M$ при всех $n=1, 2, \ldots$. Ч. п. наз. ограниченной снизу, если существует число M, для к-рого $x_n\geqslant M$ при всех $n=1, 2, \ldots$. Ч. п. наз. ограниченной, если она ограничена сверху и снизу, т. е. существует число M такое, что $|x_n|\leqslant M$ при всех $n=1, 2, \ldots$. В противном случае Ч. п. наз. неограниченной: $\{x_n\}$ — не ограничена, если для любого числа M найдётся элемент Ч. п. x_{n_0} такой, что $|x_{n_0}|>M$. Ч. п. (1), (2) ограничены: $\left|\frac{1}{n}\right|\leqslant 1$

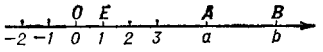
и $|(-1)^n| \leqslant 1$ при всех $n=1, 2, \ldots$. Ч. п. (4) ограничена снизу, но не ограничена сверху. Ч. п. (3) не ограничена; действительно, для любого числа M можно взять натуральное число $N > M$, тогда для элемента с номером $2N+1$ имеет место $|x_{2N+1}| = |(2N+1)\sin(\pi N + \frac{\pi}{2})| = 2N+1 > M$.

Ч. п. $\{x_n\}$ монотонно возрастает, если $x_n \leqslant x_{n+1}$ при всех $n=1, 2, \ldots$, и монотонно убывает, если $x_n \geqslant x_{n+1}$ при всех $n=1, 2, \ldots$. Если указанные неравенства для членов Ч. п. выполняются в строгом смысле, то Ч. п. наз. соответственно строго монотонно возрастающей и строго монотонно убывающей. Ч. п. (1) строго монотонно убывает: $x_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = x_{n+1}$; Ч. п. (4) строго монотонно возрастает: $x_n = n^2 < (n+1)^2 = x_{n+1}$; Ч. п. (2) и (3) немонотонные.

Особый интерес представляет поведение членов Ч. п. при неограниченном возрастании номера n (то, что n неограниченно возрастает, записывается в виде $n \to \infty$ и читается «n стремится к бесконечности»).

Если члены Ч. п. $\{x_n\}$ при достаточно больших номерах n сколь угодно мало отличаются от числа a, то Ч. п. $\{x_n\}$ наз. сходящейся, число a — её пределом, что записывается в виде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Напр., Ч. п. $x_n = \frac{1}{n}$ сходится к 0, а Ч. п. $x_n = \frac{n}{n+1}$ сходится к 1 (см. *Предел последовательности*).

ЧИСЛОВА́Я ПРЯМА́Я, числовая ось,— прямая, на которой изображаются действительные числа. На прямой выбираются две различные точки O и E (рис.). Точка O наз. началом отсчёта, точка E — единичной точкой, отрезок OE — масштабным или единичным отрезком, направление от O к E — положительным направлением, направление от E к O — отрицательным. Если A и B — две различные точки Ч. п. и направление от A к B положительное, то говорят, что точка B лежит правее точки A, а точка A — левее точки B. Длина отрезка OE принимается за единицу измерения длин всех отрезков Ч. п.



Каждое действительное число изображается точкой Ч. п.: положительное число a изображается точкой A, лежащей правее точки O, и такой, что длина отрезка OA равна a; отрицательное число a изображается точкой A, лежащей левее точки O, и такой, что длина отрезка OA равна a; число нуль изображается точкой O. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек Ч. п. Поэтому часто понятия «число» и «точка» не различаются. Если точка A является образом числа a, то число a наз. декартовой координатой или просто координатой точки A. Как правило, точку A обозначают её координатой (напр., точку E обозначают цифрой 1). При таких обозначениях геометрич. иллюстрация действительных чисел с помощью точек Ч. п. оказывается наиболее удобной. Напр., расстояние между точками O и a равно $|a|$, длина отрезка $[a, b]$ равна $b-a$, серединой отрезка $[a, b]$ является точка $\frac{a+b}{2}$. Множество действительных чисел и Ч. п. обозначаются одной и той же буквой $\mathbb{R}$.

ЧИСЛОВО́Й РЯД — см. *Ряд.*

ЧИ́СТАЯ СТРАТЕ́ГИЯ — см. *Матричная игра.*

ЧИ́СТАЯ ЧА́СТНАЯ ПРОИЗВО́ДНАЯ — см. *Частная производная.*

ЧИ́СТО МНИ́МОЕ ЧИСЛО́ — см. *Мнимое число.*

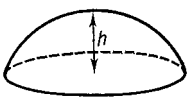
ШАР — 1) Ш.— геометрич. тело, получающееся при вращении круга вокруг своего диаметра; Ш. является множеством точек, расстояние которых от фиксированной точки O (центра Ш.) не превосходит заданного R (радиуса Ш.). Объём Ш. равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, площадь поверхности Ш. (сферы) равна $S = 4\pi R^2$.

2) Ш. в комбинаторике — см. *Размещение.*

3) Ш. замкнутый (открытый) в метрическом пространстве X — множество

$$V_r = \{x \in X,\ \rho(x_0, x) \leqslant r\ (<r)\}$$

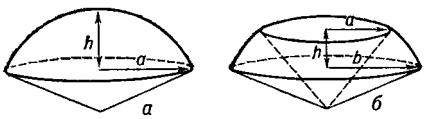
с некоторыми $x_0 \in X$, $r \in \mathbb{R}_+$. При этом x_0 наз. центром Ш., а r — радиусом Ш. Когда r пробегает множество всех чисел $\mathbb{R}_+$, Ш. образуют фундаментальную систему окрестностей точки x_0 (соответственно, замкнутых или открытых).



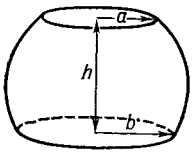
ШАРОВО́Й ПО́ЯС — см. *Шаровой слой.*

ШАРОВО́Й СЕГМЕ́НТ — часть шара, отсекаемая какой-нибудь плоскостью (рис.). Объём Ш. с. $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$; боковая поверхность $S = 2\pi Rh$, где R — радиус шара, h — высота Ш. с.

ШАРОВО́Й СЕ́КТОР — геометрич. тело, возникающее при вращении сектора вокруг одного из его радиусов (Ш. с. 1-го рода — рис., *а*) или вокруг диаметра, не пересекающего его дуги (Ш. с. 2-го рода — рис., *б*). Объём Ш. с. (1-го и 2-го родов): $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$, поверхность Ш. с. 1-го рода: $S_1 = \pi R(2h+a)$, 2-го рода: $S_2 = \pi R(2h+a+b)$, где R — радиус сектора, h — проекция хорды, стягивающей дугу сектора на ось вращения, a и b — расстояния от концов хорды до этой оси.



ШАРОВО́Й СЛОЙ — часть шара, заключённая между двумя пересекающими шар параллельными плоскостями (рис.). Объём Ш. с. $V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2+3b^2+h^2)$, боковая поверхность — шаровой (сферический) пояс: $S = 2\pi Rh$, где R — радиус шара, h — расстояние между плоскостями оснований Ш. с., a и b — радиусы оснований Ш. с.



ШАРОВЫЕ ФУ́НКЦИИ — однородные функции u_n порядка n от прямоугольных координат x, y, z, удовлетворяющие уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} = 0.$$

Существует $2n+1$ линейно независимых однородных многочленов от x, y, z целой положительной степени n, являющихся Ш. ф.; их линейная комбинация представляет общий вид такого многочлена степени n. Так, напр.,

$$u_0 = a,\ u_1 = ax + by + cz;$$
$$u_2 = a(x^2+z^2) + b(y^2+z^2) + cxy + dyz + ezx,$$

где a, b, c, d, e — произвольные постоянные, представляют общий вид однородных многочленов степеней 0, 1, 2, являющихся Ш. ф. Если вместо прямоугольных координат x, y, z ввести сферич. координаты r, θ, φ, то Ш. ф. выражаются через сферические функции $Y_n(\theta, \varphi)$ по формуле

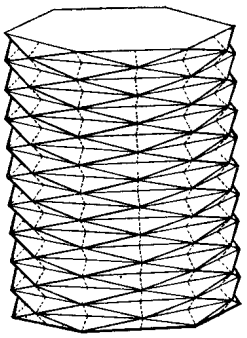
$$u_n = r^n Y_n(\theta, \varphi).$$

Каждой Ш. ф. u_n степени n соответствует Ш. ф. $r^{-2n-1}u_n$ степени $-n-1$.

ШВА́РЦА НЕРА́ВЕНСТВО — см. *Буняковского неравенства.*

ШВА́РЦА ПОВЕ́РХНОСТЬ — многогранная поверхность, вписанная в конечный круговой цилиндр так, что последовательность таких поверхностей при соответствующем подборе параметров может стремиться к любому пределу

(в том числе и бесконечному). Конструкция Ш. п. такова (рис.), что при стремлении к нулю максимальных диаметров её граней они оказываются вовсе не близкими по своему расположению в пространстве к касательной плоскости к поверхности цилиндра. Таким образом, грань Ш. п. не может с возрастающей точностью приближать элемент поверхности цилиндра. Поверхность приведена Г. Шварцем (1880).



ШЕ́ННОНА ТЕОРЕ́МА — одна из основных теорем *информации теории*. Ш. т. относится к передаче сигналов по *каналам* связи при наличии помех, приводящих к искажениям в процессе передачи.

Пусть надлежит передать последовательность символов, появляющихся с определёнными вероятностями, причём имеется нек-рая вероятность того, что передаваемый символ в процессе передачи будет искажён, т. е. будет воспринят как какой-то другой символ. Простейший способ, позволяющий надёжно восстановить передаваемую последовательность по получаемой, состоит в том, чтобы каждый передаваемый символ повторять большое число N раз. Однако это приведёт к уменьшению скорости передачи в N раз, т. е. сделает её близкой нулю. Теорема Шеннона утверждает, что можно указать такое зависящее только от рассматриваемых вероятностей положительное число N, что при сколь угодно малом $\varepsilon>0$ существуют способы передачи со скоростью $v'(v'<v)$ сколь угодно близкой к v, дающие возможность восстанавливать исходную последовательность с вероятностью ошибки, меньшей ε. В то же время при скорости передачи v', большей v, это уже невозможно. Упомянутые способы передачи используют надлежащие «помехоустойчивые» *коды*. Критич. скорость v определяется из соотношения $Hv=c$, где H — энтропия источника на символ, c — ёмкость канала в двоичных единицах в секунду.

Теорема установлена К. Шенноном (1957—61).

ШЕ́ФФЕРА ШТРИХ — *логическая операция*, которая обычно обозначается $|$ и задаётся следующей истинностной таблицей.

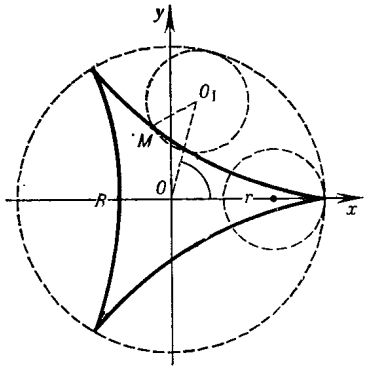
A	B	$A\mid B$
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	И

Высказывание $A|B$ означает, что A и B несовместны, т. е. не являются истинными одновременно. Ш. ш. обладает тем свойством, что через него выражаются все другие логич. операции. Напр., высказывание $\neg A$ (отрицание A) эквивалентно высказыванию $A|A$, дизъюнкция $A\vee B$ высказываний A и B выражается так: $(A|A)|(B|B)$.

Ш. ш. введён Г. Шеффером (1913).

ШИРОТА́ — одна из *сферических координат*.

ШТЕ́ЙНЕРА КРИВА́Я — плоская алгебраическая кривая 4-го порядка (рис.), которая описывается точкой M окружности радиуса r, катящейся по внутренней стороне окружности радиуса $R=3r$; *гипоциклоида* с модулем $m=\frac{1}{3}$.



Параметрич. уравнения:

$$x=2r\cos\frac{t}{3}+r\cos\frac{2t}{3};$$

$$y=2r\sin\frac{t}{3}-r\sin\frac{2t}{3}.$$

Ш. к. состоит из трёх ветвей. Имеет три точки возврата 1-го рода. Длина Ш. к. $L=16r$. Площадь, ограниченная Ш. к., $S=2\pi r^2$.

Кривая исследовалась Я. Штейнером.

ШТЕ́ЙНЕРА СИСТЕ́МА — уравновешенная неполная *блок-схема* с $\lambda=1$; если, кроме того, $k=3$, то Ш. с. наз. системой троек Штейнера. Эти системы изучались Я. Штейнером (1853).

ШТЕ́ЙНИЦА ТЕОРЕ́МА о многогранниках — доказанная Э. Штейницем (1917) теорема о выпуклых *многогранниках*.

ШТЁРМЕРА МЕ́ТОД, метод Стёрмера,— конечно-разностный метод решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка вида

$$y''=f(x,\ y),\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0'.$$

При интегрировании по сетке с постоянным шагом $x_n=x_0+nh$, $n=1, 2, \ldots$, расчётные формулы имеют вид:

а) экстраполяционные

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=h^2\sum_{\lambda=0}^{k}u_{-\lambda}f_{n-\lambda},$$

$$f_n=f(x_n,\ y_n),\quad n=0,\ 1,\ \ldots,$$

где

$$u_{-\lambda}=\sum_{p=\lambda}^{k}\binom{p}{\lambda}\beta_p,\ \lambda=0,\ 1,\ \ldots,\ k,$$

$$\beta_p=\frac{1}{p!}\left(\int_0^1(1-t)t\ldots(t+p-1)\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^{-1}(-1-t)\,t\ldots(t+p-1)\,dt\right),\ p=0,\ 1,\ \ldots,\ k,$$

б) интерполяционные

$$y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=h^2\sum_{\lambda=1}^{k}v_{-\lambda}f_{n-\lambda},\ n=0,\ 1,\ \ldots,$$

где

$$v_{-\lambda}=\sum_{p=\lambda}^{k}\binom{p}{\lambda}\gamma_p,\ \lambda=0,\ 1,\ \ldots,\ k,$$

$$\gamma_p=\frac{1}{p!}\left(\int_0^1(1-t)\,(t-1)\,t\ldots(t+p-2)\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^{-1}(-1-t)\,(t-1)\,t\ldots(t+p-2)\,dt\right),\ p=0,\ 1,\ \ldots,\ k.$$

Применение Ш. м. предполагает, что уже известны приближённые значения решения $y_0, y_1, \ldots, y_k$. Их вычисляют к.-л. другим методом (напр., методом Рунге — Кутты). На практике обычно используют формулы с $k=4$, 5, 6. Тогда

$$\beta_0=1,\ \beta_1=0,\ \beta_2=\beta_3=\frac{1}{12},\ \beta_n=\frac{19}{240};$$

$$\gamma_0=1,\ \gamma_1=-1,\ \gamma_2=\frac{1}{12},\ \gamma_3=0,\ \gamma_4=-\frac{1}{240}.$$

Метод предложен К. Штёрмером (1920).

ШТРАФНЫ́Х ФУ́НКЦИЙ МЕ́ТОД — см. *Нелинейное программирование*.

ШТУ́РМА ТЕОРЕ́МА, правило Штурма,— теорема о числе действительных корней многочлена с действительными коэффициентами. Пусть многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами не имеет кратных корней (в противном случае его следует разделить на наибольший общий делитель $P(x)$ и $P'(x)$). Системой Штурма или рядом Штурма для многочлена $P(x)$ наз. такая система многочленов с действительными коэффициентами

$$P(x)=P_0(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_s(x),\qquad (*)$$

для к-рой выполнены условия: 1) соседние многочлены в (*) не имеют общих корней; 2) многочлен $P_s(x)$ не имеет действительных корней; 3) если α — действительный корень одного из промежуточных многочленов $P_k(x)$ системы (*), то $P_{k-1}(\alpha)$ и $P_{k+1}(\alpha)$ имеют разные знаки; 4) если α — действительный корень многочлена $P(x)$, то произведение $P(x)P_1(x)$ меняет знак с минуса на плюс, когда x, возрастая, проходит через точку α.

Ш. т. утверждает, что если действительные числа a и b $(a<b)$ не являются корнями многочлена $P(x)$, то число

действительных корней многочлена $P(x)$, заключённых между a и b, равно разности $w(a)-w(b)$, где $w(c)$ — число перемен знаков в ряде чисел

$$P_0(c),\ P_1(c),\ \ldots,\ P_s(c)$$

(значения, равные нулю, не учитываются) для любой системы Штурма этого многочлена на отрезке (a, b). Пользуясь этой теоремой, можно разбить числовую прямую на промежутки, в каждом из к-рых содержится лишь один действительный корень многочлена $P(x)$.

Для каждого многочлена $P(x)$ с действительными коэффициентами без кратных корней можно построить систему Штурма, напр., положив: $P_0(x)=P(x)$, $P_1(x)=P'(x)$, и если уже построены многочлены $P_0(x)$, $P_1(x)$, . . . , $P_k(x)$, то за $P_{k+1}(x)$ берётся с обратным знаком остаток от деления $P_{k-1}(x)$ на $P_k(x)$. При этом $P_s(x)$ будет константой, отличной от нуля.

Ввиду громоздкости применения Ш. т. часто на практике применяются методы, лишь ограничивающие сверху число корней на данном отрезке (см. *Бюдана — Фурье теорема*, *Декарта теорема*).

Теорема доказана Ш. Штурмом (1829).

ШТУ́РМА—ЛИУВИ́ЛЛЯ ЗАДА́ЧА — задача о нахождении отличных от нуля решений дифференциального уравнения

$$-[p(x)\,y']'+q(x)\,y=\lambda y, \qquad (1)$$

удовлетворяющих граничным условиям вида

$$A_1y(a)+B_1y'(a)=0,\ A_2y(b)+B_2y'(b)=0$$

(т. н. собственных функций), а также о нахождении значений параметра λ (собственных значений), при которых существуют такие решения. При нек-рых условиях на коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ Ш.—Л. з. можно свести к рассмотрению аналогичной задачи для уравнения вида

$$-y''+q(x)\,y=\lambda y. \qquad (2)$$

Была впервые (1837—41) исследована Ж. Лиувиллем и Ш. Штурмом.

Решение нек-рых видов уравнений математич. физики методом Фурье приводит к Ш.—Л. з. Напр., задача о колебаниях однородной струны, закреплённой на концах, приводит к Ш.—Л. з. для уравнения $-y''=\lambda y$ с граничными условиями $y(0)=y(\pi)=0$. В этом случае существует бесконечная последовательность значений $1^2,\ 2^2,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$, к-рым соответствуют собственные функции $\sin nx$, образующие на отрезке $[0,\ \pi]$ полную ортогональную систему функций. Аналогично обстоит дело и в общем случае, возникающем, напр., при изучении распространения тепла в неоднородном стержне, и т. д. И здесь, если функция $q(x)$ в уравнении (2) непрерывна и действительна на отрезке $[a, b]$, а A_1, B_1, A_2, B_2 — действительные числа, существует возрастающая последовательность действительных собственных значений $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots$, стремящаяся к бесконечности, причём каждому из λ_n соответствует определённая с точностью до постоянного множителя собственная функция $\varphi_n(x)$, имеющая n нулей на участке $a<x<b$. Функции $\varphi_n(x)$ образуют на $[a, b]$ полную ортогональную систему функций (для уравнения (1) имеет место ортогональность с весом $p(x)$). Замкнутость такой системы функций была доказана В. А. Стекловым (1896). Весьма общие теоремы о разложении функций в ряды Фурье по системе $\varphi_n(x)$ доказал Д. Гильберт (1904) с помощью теории линейных интегральных уравнений. При возрастании n собственные значения и собственные функции Ш.—Л. з. для уравнения (2) стремятся к собственным значениям и собственным функциям для уравнения $-y''=\lambda y$ при тех же граничных условиях. Большинство встречающихся в математике ортогональных систем функций, напр. многочлены Лежандра, многочлены Эрмита, являются системами собственных функций нек-рых Ш.—Л. з.

Иногда Ш.—Л. з. называют краевую задачу для уравнения (1) при более общих краевых условиях:

$$\alpha_iy(a)+\beta_iy'(a)+\gamma_iy(b)+\delta_iy'(b)=0,\quad i=1,2,$$

где α_i, β_i, γ_i, δ_i — постоянные числа. Среди краевых условий такого вида наиболее важными являются $y(a)=y(b)$, $y'(a)=y'(b)$ (периодич. условия) и $y(a)=-y(b)$, $y'(a)=-y'(b)$ (полупериодич. условия).

Многие задачи математич. физики (напр., задача о распространении тепла в бесконечном неоднородном стержне) приводит к Ш.—Л.з. на полуоси или на всей оси. В первом случае рассматриваются решения уравнения(2), удовлетворяющие условию $A_1y(0)+B_1y'(0)=0$; вместо последовательности собственных функций здесь появляется совокупность собственных функций $\varphi(x,\ \lambda)$, зависящих от непрерывно изменяющегося параметра λ. Вместо разложения в ряды Фурье рассматриваются разложения вида

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\,\varphi(x,\ \lambda)\,d\rho(\lambda),$$

где $\rho(\lambda)$ — нек-рая неубывающая функция. Эти разложения аналогичны интегралу Фурье. При этом

$$F(\lambda)=\int_0^{\infty}f(x)\,\varphi(x,\ \lambda)\,dx$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty}F^2(\lambda)\,d\rho(\lambda)=\int_0^{\infty}f^2(x)\,dx.$$

Аналогичные факты имеют место и для Ш.—Л. з. на всей оси. Для нек-рых задач математич. физики важное значение имеет обратная Ш.—Л. з., т. е. задача о восстановлении дифференциального уравнения по функции $\rho(\lambda)$.

Ш.—Л. з. возникает также в нек-рых вопросах квантовой механики и вариац. исчисления.

● Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, М.— Л., 1950; Титчмарш Э. Ч., Разложения по собственным функциям..., пер. с англ., т. 1, М., 1960.

ШУМ — название для различных помех, искажающих сигналы в процессе передачи информации по каналу связи.

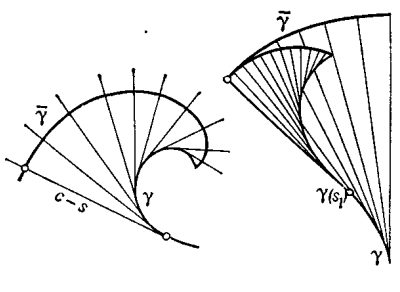
Э

ЭВОЛЬВЕ́НТА (от лат. evolvens, род. падеж evolventis — разворачивающий) — кривая $\bar\gamma$, для которой плоская кривая γ является *эволютой*. Если $\boldsymbol r=\boldsymbol r(s)$ (где s—натуральный параметр) — уравнение кривой γ, то уравнение её Э. имеет вид

$$\tilde{\boldsymbol r}=\boldsymbol r(s)+\tau(c-s),$$

где c — произвольная постоянная, τ — касательный вектор к γ.

На рис. показано построение эвольвенты в двух характерных случаях:



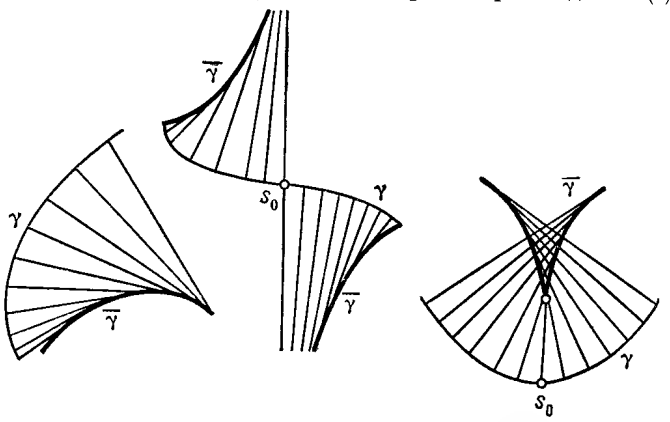
а) для всех $s<c$ кривизна $k(s)$ кривой $\bar\gamma$ не обращается в нуль (Э.— регулярная кривая); б) $k(s)$ обращается в нуль только при $s=s_1$, причём $k'(s_1)\neq0$ (точка Э., соответствующая $s=s_1$, является точкой возврата 2-го рода).

ЭВОЛЮ́ТА (от лат. evolutus — развёрнутый)— множество $\bar\gamma$ точек центров кривизны кривой γ. Если $\boldsymbol r=\boldsymbol r(s)$ (где s — натураль-

ный параметр) — уравнение кривой γ, то уравнение её Э. имеет вид

$$\tilde{r} = r + \frac{1}{k}\nu,$$

где $k = k(s)$ — кривизна, ν — нормаль кривой γ. На рис. показано строение Э. в трёх характерных случаях: а) вдоль всей кривой производная $k'(s)$ знакоопределена, $k(s)$ не обращается в нуль; б) вдоль всей кривой производная $k'(s)$



знакоопределена, $k(s)$ обращается в нуль при $s = s_0$; в) если $s < s_0$, то $k'(s) > 0$, если $s > s_0$, то $k'(s) < 0$, $k'(s_0) = 0$, k не обращается в нуль (точка Э., соответствующая $s = s_0$, является точкой возврата). Длина отрезка Э., соответствующего отрезку $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$ кривой γ, равна

$$\tilde{s}(s_1, s_2) = \left| \frac{1}{k(s_2)} - \frac{1}{k(s_1)} \right|.$$

Э. является огибающей нормалей кривой γ. Кривая γ по отношению к своей Э. наз. *эвольвентой*.

Понятие «Э.» и термин введены Х. Гюйгенсом (1673).

ЭЙЗЕНШТЕЙНА КРИТЕ́РИЙ — критерий неприводимости многочлена над полем рациональных чисел, установленный Ф. Эйзенштейном. См. *Алгебраическое уравнение*.

ЭЙЛЕРА ЗАДА́ЧА о кёнигсбергских мостах: на реке, протекающей через город Кёнигсберг и омывающей два острова, имеется семь мостов (рис. 1); может ли пешеход обойти все мосты, пройдя по каждому из них только один раз, и вернуться в исходную точку?

Рис. 1.

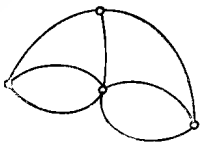


Рис. 2.

Полагая, что вершины соответствуют районам суши, а рёбра — мостам, эту задачу можно сформулировать в виде вопроса о возможности последовательного обхода графа, изображённого на рис. 2, с условием однократного использования его рёбер и возвращения в исходную точку. Л. Эйлер, рассмотревший эту задачу (1736), доказал её неразрешимость.

ЭЙЛЕРА МЕ́ТОД ЛО́МАНЫХ — простейший конечно-разностный метод численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \qquad (*)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0.$$

Выбирается достаточно малый шаг по оси x, строятся точки $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и искомая интегральная кривая $y(x)$ заменяется ломаной (ломаная Эйлера), звенья к-рой прямолинейны на отрезках $[x_i, x_{i+1}]$, а ординаты определяются по формулам

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Если правая часть $f(x, y)$ уравнения $(*)$ непрерывна, то на фиксированном отрезке $[x_0, x_0 + H]$ последовательность ломаных Эйлера при $h \to 0$ равномерно стремится к искомой интегральной кривой $y(x)$. При $f(x, y)$ дифференцируемой Э. м. имеет погрешность на шаге $O(h^2)$ и в целом $O(h)$.

Метод предложен Л. Эйлером (1768). См. также *Вариационное исчисление*.

ЭЙЛЕРА ПОДСТАНО́ВКА — замена переменной в интеграле вида

$$\int R(x, y)\, dx, \qquad (*)$$

где $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ и $R(x, y)$ — рациональная функция от x и y; Э. п. сводит интегралы $(*)$ к интегралам от рациональных функций. Предложены Л. Эйлером (1768). Первая Э. п.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}$$

применима, если $a > 0$; вторая Э. п.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$$

применима, если $c > 0$; третья Э. п.

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda),$$

где λ — один из корней трёхчлена $ax^2 + bx + c$, применима, если корни этого трёхчлена действительны. На практике Э. п. требуют громоздких преобразований и потому вместо них обычно пользуются теми или иными искусственными приёмами, упрощающими вычисление.

ЭЙЛЕРА ПОСТОЯ́ННАЯ, постоянная Эйлера — Маскерони, — число γ, определяемое как сумма сходящегося ряда

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right) = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right].$$

Используя связь Э. п. с гамма-функцией, Л. Эйлер (1740) вывел формулу, позволяющую вычислить C с любой точностью; напр., с 15 верными знаками:

$$C = 0{,}577\ 215\ 664\ 901\ 532\ldots$$

Л. Эйлер дал для C ряд представлений в форме рядов и интегралов; напр.:

$$C = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx,$$

$$1 - C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{\zeta(n) - 1\},$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция. Арифметич. природа Э. п. не изучена, неизвестно (1987), является ли она рациональным числом или нет.

ЭЙЛЕРА ПРОИЗВЕДЕ́НИЕ — представление дзета-функции Римана в виде

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

где p пробегает все простые числа. Найдено Л. Эйлером (1737).

ЭЙЛЕРА ПРЯМА́Я — прямая, на которой лежат точка пересечения высот *треугольника*, точка пересечения медиан и центр описанной окружности. Прямую впервые рассмотрел Л. Эйлер (1765).

ЭЙЛЕРА ТЕОРЕ́МА: число вершин B, рёбер P и граней Γ выпуклого многогранника связаны формулой $B - P + \Gamma = 2$. В неявном виде эта формула была известна Р. Декарту (1620), доказана Л. Эйлером (1758). См. также *Эйлерова характеристика*.

ЭЙЛЕРА УРАВНЕ́НИЕ — 1) дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)} = f(x), \qquad (*)$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — постоянные числа; при $x>0$ уравнение (*) подстановкой $x=e^t$ сводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Изучалось Л. Эйлером (1740). К уравнению (*) сводится подстановкой $x'=ax+b$ уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} A_k (ax+b)^k y^{(k)} = f(x).$$

2) Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

где

$$X(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4,$$
$$Y(y) = a_0y^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4.$$

Л. Эйлер рассматривал это уравнение в ряде работ с 1753. Он показал, что общее решение этого уравнения имеет вид $F(x, y)=0$, где $F(x, y)$ — симметрич. многочлен 4-й степени от x и y. Этот результат Л. Эйлера послужил основой теории эллиптич. интегралов.

3) Дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$

к-рому удовлетворяют экстремали интеграла

$$\int_a^b F(x, y, y')\,dx.$$

Выведено Л. Эйлером (1744).

ЭЙЛЕРА ФОРМУЛЫ — важнейшие формулы, установленные Л. Эйлером и носящие его имя.

1) Э. ф., связывающие тригонометрич. функции с показательной (1743):

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$
$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

2) Э. ф., дающая разложение функции $\sin x$ в бесконечное произведение (1740):

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

3) Тождество Эйлера о пятиугольных числах:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{3k^2+k}{2}}.$$

4) Тождество Эйлера о простых числах (1737):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

где произведение берётся по всем простым числам p.

5) Тождество Эйлера о четырёх квадратах:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = x^2+y^2+z^2+t^2,$$

где

$$x = ap+bq+cr+ds,$$
$$y = aq-bp \pm cs \mp dr,$$
$$z = ar \mp bs - cp \pm dq,$$
$$t = as \pm br \mp cq - dp.$$

6) Э. ф. о кривизнах (1760) — формула, связывающая кривизну k_n любого нормального сечения поверхности через её главные кривизны k_1 и k_2:

$$k_n = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi,$$

где φ — угол между одним из главных направлений и данным направлением.

ЭЙЛЕРА ФУНКЦИЯ — арифметическая функция $\varphi(a)$, значение которой равно количеству положительных целых чисел, не превосходящих a и взаимно простых с a. Если числа a и b взаимно просты, то $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.

Введена Л. Эйлером (1763).

ЭЙЛЕРА ЧИСЛА — целые числа E_n, являющиеся коэффициентами при $t^n/n!$ в разложении функции $1/\mathrm{ch}\ t$ в степенной ряд:

$$\frac{1}{\mathrm{ch}\ t} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{t^n}{n!}.$$

Введены Л. Эйлером (1755). Э. ч. связаны символич. рекуррентным соотношением

$$(E+1)^n - (E-1)^n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad E_0 = 1$$

(после возведения в степень надо вместо E^k подставить E_k) и с числами Бернулли B_n — соотношениями

$$E_{n-1} = \frac{(4B-1)^n-(4B-3)^n}{2n},$$

$$B_n = \frac{n(E-1)^{n-1}}{2^n(2^n-1)} \text{ и } \left(B-\frac{1}{4}\right)^{2n+1} = \frac{2n+1}{4^{2n+1}}E_{2n}.$$

ЭЙЛЕРОВ ТРЕУГОЛЬНИК — сферический треугольник, длины всех сторон которого меньше половины большого круга. См. *Сферическая геометрия*.

ЭЙЛЕРОВА ХАРАКТЕРИСТИКА конечного клеточного комплекса K — целое число

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \alpha_i,$$

где α_i — число i-мерных клеток комплекса. Названа в честь Л. Эйлера, к-рый доказал (1758), что числа вершин B, рёбер P и граней Γ выпуклого многогранника связаны формулой $B-P+\Gamma=2$. В неявном виде эта формула была известна ещё Р. Декарту (1620). Оказывается, что

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i p^i,$$

где p^i есть i-мерное *Бетти число* комплекса K. Э. х. комплекса K является гомологич., гомотопич. и топологич. инвариантом. В частности, Э. х. не зависит от способа разбиения пространства на клетки. Поэтому можно говорить, напр., об Э. х. произвольного компактного полиэдра, понимая под этим Э. х. какой-нибудь его триангуляции.

Э. х. сферы с g ручками и с k удалёнными открытыми дисками равна $2-2g-k$; Э. х. сферы с m листами Мёбиуса и k удалёнными дисками равна $2-m-k$; Э. х. произвольного компактного многообразия нечётной размерности равна половине Э. х. его края. В частности, Э. х. замкнутого нечётномерного многообразия равна нулю.

ЭЙЛЕРОВЫ ИНТЕГРАЛЫ — интегралы вида

$$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \qquad (1)$$

(Э. и. 1-го рода, или бета-функция, изученная Л. Эйлером в 1730—31, ранее рассматривалась И. Ньютоном и Дж. Валлисом) и

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx \qquad (2)$$

[Э. и. 2-го рода, или гамма-функция, рассмотренная Л. Эйлером в 1729—30 в форме, эквивалентной формуле (2); сама формула (2) встречается у Л. Эйлера в 1781 (опубл. 1794); назв. «Э. и.» дано А. Лежандром]. Э. и. позволяют обобщить понятия биномиальных коэффициентов C_m^n и факториала $n!$, ибо если a и b — натуральные числа, то

$$\mathrm{B}(a, b) = \frac{1}{bC_{a+b-1}^{a-1}}, \quad \Gamma(a+1) = a!$$

Интегралы (1) и (2) абсолютно сходятся, если a и b положительны, и перестают существовать, если a и b отрицательны. Имеют место соотношения

$$\mathrm{B}(a, b) = \mathrm{B}(b, a), \quad \mathrm{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)};$$

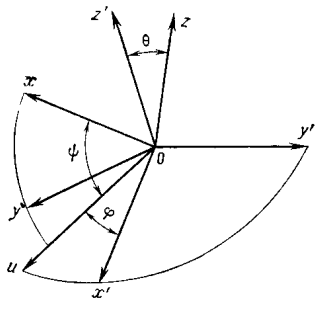
последнее сводит теорию бета-функции к гамма-функции. Существует ряд соотношений между Э. и. при различных значениях аргумента, обобщающих соответствующие соотношения между биномиальными коэффициентами. Э. и. можно рассматривать и при комплексных значениях аргументов a и b. Э. и. встречаются во многих вопросах теории специальных функций, к ним сводятся многие определённые интегралы, не выражаемые элементарно. Э. и.

наз. также интеграл

$$\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-ux)^{-a}\,du = \frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}F(a, b, c, x),$$

выражающий т. н. гипергеометрическую функцию $F(a, b, c, x)$.

ЭЙЛЕРОВЫ УГЛЫ́ — углы φ, ψ, θ, определяющие положение одной декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$ относительно другой декартовой прямоугольной системы координат $Ox'y'z'$ с тем же началом координат и с той же ориентацией. Э. у. рассматриваются как углы последовательных поворотов одной системы относительно осей другой, после к-рых обе системы совпадают. Пусть u — ось, совпадающая с линией пересечения плоскости Oxy с плоскостью $Ox'y'$ и направленная так, что три направления Oz, Oz' и u образуют правую тройку. Угол ψ — угол между осями Ox и u, отсчитываемый в плоскости Oxy от оси Ox в направлении кратчайшего поворота от Ox к Oy; θ — не превосходящий π угол между осями Oz и Oz'; φ — угол между осями u и Ox', отсчитываемый в плоскости $Ox'y'$ от оси u в направлении кратчайшего поворота Ox' к Oy'. Связь между координатами x, y, z и x', y', z':



$$x = (\cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi)\,x' + (-\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi)\,y' + (\sin\psi\sin\theta)\,z',$$

$$y = (\sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi)\,x' + (-\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi)\,y' + (-\cos\psi\sin\theta)\,z',$$

$$z = (\sin\theta\sin\varphi)\,x' + (\sin\theta\cos\varphi)\,y' + (\cos\theta)\,z'.$$

Э. у. введены Л. Эйлером (1748).

ЭКВА́ТОР (от позднелат. aequator — уравнитель) — некоторый фиксированный большой круг на сфере. См. *Сферическая геометрия.*

ЭКВИВАЛЕ́НТНАЯ ПРОЕ́КЦИЯ — см. *Картографическая проекция.*

ЭКВИВАЛЕ́НТНОСТЬ (позднелат. aequivalens, род. падеж aequivalentis, от лат. aequus — равный и valeo — имею значение, цену) — бинарное отношение на множестве, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Напр., конгруэнтность или подобие геометрич. фигур, изоморфизм, равномощность и т. п. порождают соответствующие Э. в том или ином множестве объектов. Если φ: $A \to B$ — отображение множеств, то отношение, состоящее из всех пар (a_1, a_2), для к-рых $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$, является Э. на множестве A.

Для произвольного $x_0 \in X$ множество $U \subseteq X$, состоящее из всех элементов x, эквивалентных x_0 по данной Э., наз. классом эквивалентности элемента x_0. Любые два класса одной эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают, т. е. любая Э. определяет разбиение множества. И обратно, любое разбиение множества на непересекающиеся классы порождает Э.

ЭКВИВАЛЕ́НТНОСТЬ, эквиваленция,— логическая операция, позволяющая из двух данных высказываний A и B получить новое высказывание «A равносильно B». В формализованных языках Э. высказываний A и B обычно обозначается $A \sim B$, $A \leftrightarrow B$, $A \equiv B$, $A \rightleftarrows B$ (читается: «A равносильно B»; «A, если и только если B»; «A тогда и только тогда, когда B»; «если A, то B, и обратно»; «для того, чтобы A, необходимо и достаточно B»; «A эквивалентно B». Высказывание $A \sim B$ означает то же, что и высказывание $(A \supset B)\&(B \supset A)$; оно истинно тогда и только тогда, когда A и B оба истинны или оба ложны. При этом не предполагается наличия смысловой связи между высказываниями A и B. В классич. логике операция Э. определяется следующей истинностной таблицей:

A	B	$A \sim B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Высказывания A и B наз. логически эквивалентными, если истинно высказывание $A \sim B$.

ЭКВИВАЛЕ́НТНЫЕ УРАВНЕ́НИЯ — то же, что *равносильные уравнения.*

ЭКВИДИСТА́НТА (от лат. aequidistans, род. падеж aequidistantis — равноудалённый), гиперцикл,— см. *Лобачевского геометрия.*

ЭКВИПОТЕНЦИА́ЛЬНЫЕ ПОВЕ́РХНОСТИ — см. *Потенциал.*

ЭКСПОНЕ́НТА (от лат. exponens, род. падеж exponentis — показывающий) — то же, что *экспоненциальная функция.*

ЭКСПОНЕНЦИА́ЛЬНАЯ КРИВА́Я — график *показательной функции.*

ЭКСПОНЕНЦИА́ЛЬНАЯ ФУ́НКЦИЯ, показательная функция, — функция $y = e^x$; обозначается также $y = \exp x$. Иногда Э. ф. наз. и функцию $y = a^x$ при любом основании $a > 0$. Термин «Э. ф.» ввёл Г. Лейбниц (1679, 1692).

ЭКСТРАПОЛИ́РОВАНИЕ (от лат. extra — сверх, вне и polio — приглаживаю, выправляю), экстраполяция, функции — продолжение функции за пределы её области определения, при котором продолженная функция (как правило, аналитическая) принадлежит заданному классу. Э. функций обычно производится с помощью формул, в к-рых использована информация о поведении функции в нек-ром конечном наборе точек (узлах интерполяции), принадлежащих её области определения.

Понятие интерполирования функций употребляется в качестве противопоставления понятию Э. функций (в узком смысле понимания этого термина), когда конструктивно восстанавливаются (быть может, приближённо) значения функций в областях их определений.

Пример. Если используется информация о значениях функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ в узлах $x_k \in [a, b]$, $k = 0, 1, \ldots, n$, то интерполяционный многочлен Лагранжа L_n (см. *Лагранжа интерполяционная формула*), будучи определён на всей числовой оси, является, в частности, Э. функции f вне отрезка $[a, b]$ в классе многочленов степени не выше n.

Обычно, как и в рассмотренном примере, при Э. функции используются её значения не во всей области определения, а только в её части, т. е. фактически производится Э. значений сужения заданной функции на указанной части. В этом случае экстраполяционные формулы дают также значения (вообще говоря, приближённые) функции и в соответствующих точках её области определения.

ЭКСТРАПОЛЯ́ЦИЯ — см. *Экстраполирование.*

ЭКСТРЕМА́ЛЬ (от лат. extremus — крайний) — гладкое решение уравнения Эйлера, являющегося необходимым условием в задаче *вариационного исчисления.* Свойство кривой быть Э. является не единственным необходимым условием для того, чтобы эта кривая действительно доставляла экстремум функционалу. Это объясняется тем, что уравнение Эйлера выводится как необходимое условие равенства нулю 1-й вариации функционала, так что остаётся ещё проблема исследования на знак 2-й вариации. Дальнейшее исследование Э. осуществляется с помощью необходимых условий Лежандра, Вейерштрасса и Якоби, а также достаточных условий, основанных на построении поля Э.

Термин «Э.» ввёл А. Кнезер (1900).

ЭКСТРЕМА́ЛЬНАЯ ЗАДА́ЧА — задача отыскания экстремумов функций или экстремумов функционалов, заключающаяся в выборе параметров или функций (управления) из условий минимума или максимума целевой функции или функционала при разного рода (фазовых, дифференциальных, интегральных и др.) ограничениях, накладываемых на них. Для численного решения Э. з., рассматривае-

мых в бесконечномерных функциональных пространствах (напр., задач оптимального управления процессами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями или уравнениями с частными производными), могут быть использованы после соответствующего обобщения многие методы математич. программирования, разработанные для задач минимизации или максимизации функций конечного числа переменных. При этом в конкретных задачах весьма важен правильный выбор подходящего функционального пространства, в к-ром следует её рассматривать. При выборе такого пространства обычно учитываются физич. соображения, свойства допустимых управлений, свойства решений соответствующих начально-краевых задач при фиксированном управлении и т. п.

Численная реализация многих методов решения задач оптимального управления предполагает использование тех или иных методов приближённого решения встречающихся начально-краевых задач, приближённого вычисления интегралов. В результате исходная задача оптимального управления заменяется нек-рым семейством апроксимирующих задач, зависящих от нек-рых параметров (напр., от шагов разностной сетки). Широкие классы Э. з. являются некорректно поставленными, и для их решения используются методы регуляризации.

● Васильев Ф. П., Численные методы решения экстремальных задач, М., 1980; его же, Методы решения экстремальных задач, М., 1981.

ЭКСТРЕМА́ЛЬНАЯ КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — то же, что *оптимальная квадратура*.

ЭКСТРЕ́МУМ (лат. extremum — крайнее) — значение непрерывной функции $f(x)$, являющееся её максимумом или минимумом. Точнее, непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в x_0 максимум (локальный максимум) или минимум (локальный минимум), если существует окрестность $(x_0+\delta; x_0-\delta)$ этой точки, содержащаяся в области определения $f(x)$, такая, что во всех точках этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0)\geqslant f(x)$ (соответственно $f(x_0)\leqslant f(x)$). Если при этом существует такая окрестность, что в ней $f(x_0)>f(x)$ (или $f(x_0)<f(x)$) при $x_0\neq x$, то говорят о строгом локальном максимуме (или строгом локальном минимуме), в противном случае — о нестрогом локальном максимуме (или нестрогом локальном минимуме). На рис. 1 в точке A достигается строгий локальный максимум, в точке B — нестрогий локальный минимум.

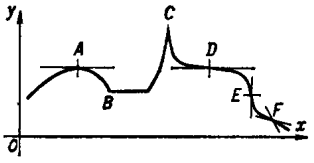


Рис. 1.

Максимум (минимум) функции на множестве E наз. абсолютным максимумом (абсолютным минимумом) на этом множестве в отличие от локального. Абсолютный максимум (минимум) функции является одновременно и локальным, однако локальный максимум (минимум) функции может быть меньше (больше) абсолютного. При отыскании абсолютного максимума (минимума) находят его локальные максимумы (минимумы) и среди них выбирают наибольший (наименьший).

Точки максимума и минимума наз. точками экстремума. Для того чтобы функция $f(x)$ имела Э. в нек-рой точке x_0, необходимо, чтобы она была непрерывна в x_0 и чтобы либо $f'(x_0)=0$ (точка A на рис. 1), либо $f'(x_0)$ не существовала (точка C на рис. 1). Если при этом в нек-рой окрестности точки x_0 производная $f'(x)$ слева от x_0 положительна, а справа отрицательна, то $f(x)$ имеет в x_0 максимум; если $f'(x)$ слева от x_0 отрицательна, а справа положительна, то — минимум (первое достаточное условие Э.). Если же $f'(x)$ не меняет знака при переходе через точку x_0, то функция $f(x)$ не имеет Э. в точке x_0 (точки D, E и F на рис. 1). Если $f(x)$ в точке x_0 имеет n последовательных производных, причём $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, а $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, то при n нечётном $f(x)$ не имеет Э. в точке x_0, а при n чётном имеет минимум, если $f^{(n)}(x_0)>0$, и максимум, если $f^{(n)}(x_0)<0$. Э. функции не следует смешивать с наибольшим и наименьшим значениями функции.

Аналогично Э. функции одного переменного определяется Э. функции нескольких переменных. Необходимым условием Э. является в этом случае обращение в нуль или же несуществование частных производных первого порядка. Напр., у поверхности, изображённой на рис. 2, частные производные равны нулю в точке M, на рис. 3 в

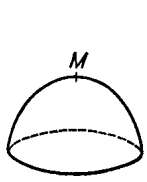


Рис. 2.

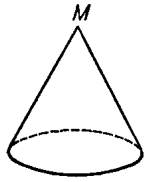


Рис. 3.

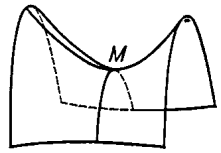


Рис. 4.

точке M они не существуют. Если в нек-рой окрестности точки $M(x_0, y_0)$ существуют и непрерывны 1-е и 2-е частные производные функции $f(x, y)$ и в самой точке

$$f'_x=f'_y=0,$$

$$\Delta=f''_{xx}f''_{yy}-(f''_{xy})^2>0,$$

то $f(x, y)$ в точке M имеет Э. (максимум при $f''_{xx}<0$ и минимум при $f''_{xx}>0$); Э. в точке M не существует, если $\Delta<0$ (в этом случае M является т. н. седловиной, или точкой минимакса; рис. 4).

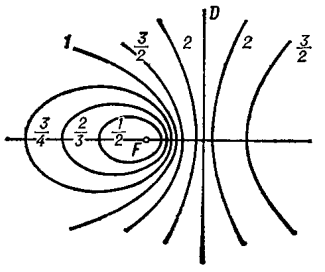
Достаточные условия Э. функции многих переменных сводятся к положительной (или отрицательной) определённости квадратичной формы

$$\sum_{i,\ k-1}^{n} a_{ik}\Delta x_i\Delta x_k,$$

где a_{ik} — значение $f''_{x_ix_k}$ в исследуемой точке. См. также *Условный экстремум*.

Термин «Э.» употребляется также при изучении наибольших и наименьших значений функционалов в вариационном исчислении.

ЭКСЦЕНТРИСИТЕ́Т (от лат. ex — вне и *центр*) конического сечения — число, характеризующее форму конического сечения, равное отношению расстояния r от любой точки конического сечения (эллипса, гиперболы, параболы) до фокуса к расстоянию d этой точки до директрисы: $e=r/d$. У эллипса $e<1$ (у окружности $e=0$), у гиперболы $e>1$, у параболы $e=1$. Зависимость формы конич. сечений с общими фокусом F и директрисой D от Э. показано на рис. Два конич. сечения, имеющие одинаковый Э., подобны.



Термин «Э.» ввёл И. Кеплер (1609).

ЭКСЦЕ́СС (от лат. excessus — выход, отступление) — то же, что *избыток треугольника*.

ЭКСЦЕ́ССА КОЭФФИЦИЕ́НТ, эксцесс,— скалярная характеристика островершинности графика плотности вероятности унимодального распределения, к-рую используют в качестве нек-рой меры отклонения рассматриваемого распределения от нормального. Э. к. γ_2 определяется по формуле

$$\gamma_2=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}-3,$$

где μ_2 и μ_4 суть 2-й и 4-й центральные моменты вероятностного распределения.

ЭЛЕМЕ́НТ АНАЛИТИ́ЧЕСКОЙ ФУ́НКЦИИ (лат. elementum — первоначальное вещество) — см. *Аналитическая функция*, *Аналитическое продолжение*.

ЭЛЕМЕНТА́РНАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ — часть геометрии, входящая в элементарную математику. Границы Э. г., как и вообще элементарной математики, не являются строго очерченными. Говорят, что Э. г. есть та часть геометрии, к-рая изучается в средней школе; это определение, однако, не только не вскрывает содержания и характера Э. г., но и никак её не исчерпывает, т. к. в Э. г. включается обширный материал, лежащий вне школьных программ (напр., аксиоматика, сферич. геометрия). Можно сказать, что Э. г. есть исторически и, соответственно, логически первая глава геометрии (поскольку из неё развились другие геометрич. направления); в своих основах она сложилась в Древней Греции, и изложение её основ дают уже «Начала» Евклида (3 в. до н. э.). Такое историч. определение закономерно, и оно также не уточняет общего содержания и характера Э. г., тем более что развитие Э. г. продолжается и в настоящее время. Поэтому это определение должно быть раскрыто и дополнено.

В Древней Греции исследовали не только многоугольники, окружность, многогранники и другие фигуры, рассматриваемые в школьном курсе, но также конич. сечения (эллипс, гипербола, парабола) и ряд других более сложных кривых и фигур (напр., квадратриса). Однако каждый раз кривая (фигура) задавалась конкретным геометрич. построением, только такие кривые (фигуры) считались геометрическими, т. е. могущими быть предметом геометрии; другие же возможные кривые назывались механическими. Эта точка зрения была отвергнута в 17 в. Р. Декартом при создании им *аналитической геометрии* и была полностью преодолена вместе с развитием анализа, когда предметом математики стали л ю б ы е, по крайней мере любые аналитические, функции и кривые. В этом исторически ясно обозначенном переходе от конкретно определённых кривых (окружность, эллипс и т. д.) и функций (данная степень x, синус и т. п.) к любым, по крайней мере из необозримо обширного класса, кривым и функциям и состоит логич. переход от элементарной математики, в частности от Э. г., к высшей. Э. г. совершенно исключает рассмотрение л ю б ы х аналитич. кривых и поверхностей, к-рые составляют уже предмет *дифференциальной геометрии*, л ю б ы х выпуклых тел, к-рые служат предметом геометрии выпуклых тел, и т. п. Вместе с тем каждая данная кривая, каждое д а н н о е выпуклое тело и т. п., определённые тем или иным построением или конкретным свойством (напр., эллипс, цилиндр и т. д.), могут стать предметом Э. г. Стало быть, Э. г. характеризуется в смысле её предмета тем, что в ней рассматриваются не вообще любые фигуры, но каждый раз те или иные достаточно определённые фигуры.

Точнее, Э. г. исходит из простейших фигур: точка, отрезок, прямая, угол, плоскость, и основного понятия о равенстве отрезков и углов или вообще о совмещении фигур при наложении, чем определяется их равенство. Кроме того, при строгом аксиоматич. построении Э. г. явно выделяются понятия: «точка лежит на прямой» или «на плоскости», «точка лежит между двумя другими». Предмет Э. г. составляют: 1) фигуры, определяемые конечным числом простейших фигур (напр., многоугольник определяется конечным числом отрезков, многогранник — конечным числом многоугольников, а стало быть, опять-таки отрезков); 2) фигуры, определённые тем или иным свойством, формулируемым в исходных понятиях (напр., эллипс с фокусами A, B есть множество таких точек X, что сумма отрезков AX и BX равна данному отрезку); 3) фигуры, определённые построением (напр., конус строится проведением прямых из данной точки O во все точки к.-л. данной окружности, не лежащей с O в одной плоскости, а конич. сечение определяется пересечением конуса плоскостью).

Фигура, как бы ни была она сложна, заданная подобным образом, может стать предметом исследования в рамках Э. г. Что касается свойств таких фигур, то Э. г. ограничивается изучением свойств, к-рые определяются опять-таки на основе указанных простейших понятий. Свойства эти суть прежде всего взаимное расположение и равенство тех или иных элементов фигуры, длина, площадь, объём. Соответственно, определения длины окружности, площади эллипса, объём шара и т. п. принадлежат Э. г. Однако общие понятия длины, площади и объёма лежат за пределами Э. г., напр. теорема о том, что среди всех замкнутых кривых данной длины наибольшую площадь ограничивает окружность, хотя и говорит о свойстве окружности, не принадлежит Э. г., так как в ней фигурирует понятие длины любой замкнутой кривой и ограничиваемой ею площади. В Э. г. рассматриваются свойства касательной к окружности, можно рассматривать и свойства касательных к эллипсу, гиперболе, параболе, но общее понятие касательной лежит за пределами Э. г. Это логич. различие в общности понятий и степени абстракции вполне отвечают историч. развитию, ибо общие понятия длины, площади, объёма, так же как общее понятие касательной к кривой, были постепенно выработаны только вместе с развитием анализа, а указанная теорема о максимальном свойстве окружности была строго доказана только в сер. 19 в. Геометрич. построения и преобразования, изучаемые в Э. г., определяются опять-таки конкретными геометрич. предписаниями на основе первичных понятий геометрии; таково, напр., преобразование обратных радиусов, или инверсия.

Соответственно предмету Э. г. ограничены и её методы; они заведомо исключают пользование общими понятиями любой фигуры, переменной, функции, исключают ссылки на общие теоремы теории пределов и т. п. Основной метод Э. г.— это вывод теорем путём наглядного рассуждения, основанного либо на исходных посылках — аксиомах, либо на уже известных теоремах Э. г., с применением того или иного вспомогательного построения, не употребляющего общих понятий кривой, тела и др. (напр., «продолжим отрезок AB», «разделим угол A пополам» и т. п.). Привлекаемые в Э. г. вычислительные средства из алгебры и тригонометрии допускают, по существу, сведение к таким построениям. Понятие предела не исключается из Э. г., поскольку оно фигурирует в теоремах о длине окружности, поверхности шара и др., бесспорно включаемых в Э. г. Однако в каждом таком случае речь идёт о конкретной последовательности, заданной элементарно-геометрич. построением, и приближение к пределу устанавливается непосредственно, без ссылок на общую теорию пределов. Примером может служить определение длины окружности посредством рассмотрения последовательности вписанных и описанных правильных многоугольников. Подобный приём в принципе возможен для любой данной кривой, но для произвольной кривой вообще ничего подобного сделать нельзя, поскольку «кривая вообще» не задана конкретно. Стало быть, разница между Э. г., вообще элементарной математикой, и высшей состоит, скорее, не в том, что во второй применяется понятие предела, а в первой — нет, а в степени общности этого понятия. Соответственно определению метода Э. г. та или иная теорема может принадлежать Э. г. по формулировке, но не по доказательству. Примером может служить теорема Минковского о существовании выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней (точную формулировку см. в ст. *Многогранник*). Эта теорема элементарна по формулировке, но известные её доказательства не элементарны, т. к. используют общие теоремы анализа либо даже топологии.

Коротко можно сказать, что Э. г. включает те вопросы геометрии, к-рые в своей постановке и решении не включают общей концепции бесконечного множества, но лишь конструктивно определённые множества (геометрич. места). Когда говорят, что евклидова геометрия основана, скажем, на системе аксиом Гильберта или на иной, близкой по характеру системе аксиом, то забывают, что при введении общих понятий кривой, выпуклого тела, длины и др. фактически используют способы образования понятий, вовсе не предусмотренные в аксиомах, а опирающие-

ся на общую концепцию множества, последовательности и предела, отображения или функции. То, что выводится из аксиом Гильберта без таких добавлений, и составляет элементарную часть евклидовой геометрии. Это разграничение можно уточнить в терминах математич. логики. Вместе с тем, соответственно пониманию Э. г., можно говорить об Э. г. n-мерного евклидова пространства, о Э. г. Лобачевского и др. При этом имеются в виду те разделы, теоремы и выводы из этих геометрич. теорий, к-рые характеризуются теми же чертами.

Исторический очерк. Расцвет математики в Вавилоне и Египте относится примерно к 1-й пол. 2-го тыс. до н. э. Дошедшие до нас тексты содержат лишь готовые рецепты для решения задач; из этого, однако, нельзя делать вывод о примитивно практическом или даже чисто эмпирич. характере всей древневосточной математики; интересно в этом отношении высказывание Демокрита: «никто не превзошёл меня в построении фигур из линий, сопровождающемся доказательством,— даже арпедонапты (землемеры) в Египте». Имеются данные, что в Египте и Вавилоне было разработано учение о подобии и пропорциональности; были известны «формулы» для площадей прямоугольников и трапеций и приближённые «формулы» для площади любых четырёхугольников; была найдена приближённо площадь круга: $\left(\frac{8}{9}d\right)^2 \approx 3{,}16\, r^2$. Вавилонянам и, вероятно, египтянам была известна «теорема Пифагора» (примерно в это же время она была известна и в Китае). Египтяне знали выражение для объёма правильной усечённой четырёхугольной пирамиды, не говоря уже об объёме куба, параллелепипеда и призмы с трапецией в поперечном сечении; вопрос о том, знали ли они выражение для поверхности шара, остаётся спорным.

Как стройная система взаимосвязанных теорем Э. г. сложилась в Древней Греции. Первыми известными нам математиками Древней Греции являются Фалес Милетский и Пифагор Самосский. Фалесу приписывается утверждение, что прямоугольные треугольники, имеющие равный катет и равный острый угол, равны, а имеющие равный острый угол — подобны (пользуясь этим, он определял расстояние корабля от берега и высоту пирамиды по её тени); что вертикальные углы, как и углы при основании равнобедренного треугольника, равны; что диаметр делит окружность на две равные части. Ещё меньше известно о Пифагоре: утверждение, что треугольник, вписанный в полукруг,— прямоугольный, приписывают то Фалесу, то Пифагору; что касается т. н. теоремы Пифагора, то о том, что она приписывалась Пифагору, сообщает только Прокл, причём сам он относится к этому с недоверием. Развитие геометрии в 5 в. до н. э. связано с именем Демокрита и руководимой им атомистич. школы. Эта школа, по-видимому, выводила уже геометрию из небольшого числа предпосылок. Демокрит, основываясь на созданном им атомистич. представлении о строении геометрич. фигур, установил, что объём пирамиды равен третьей части объёма призмы, а объём конуса — третьей части объёма цилиндра с теми же основаниями и высотой. Как сообщают Плутарх и Аристотель, он разбивал конус на ряд наложенных друг на друга кружков; подобным же образом он представлял себе шар состоящим из очень узких пирамид с вершиной в центре и заявлял, что шар «повсюду угловат», т. е. является многогранником с чрезвычайно большим числом граней. Наконец, Демокрит вслед за Анаксагором изучал теорию перспективы. Первым математиком, написавшим курс геометрии («Начала»), был Гиппократ Хиосский. Дошедшие отрывки из его работы напоминают по стилю и структуре «Начала» Евклида, но каковы были постулаты, от к-рых он отправляется, неизвестно. Гиппократ занимался проблемой квадратуры круга, волновавшей уже Анаксагора, и т. н. делосской задачей об удвоении куба. Эти задачи ему решить не удалось. Другой младший современник Демокрита Антифонт подошёл к методу исчерпывания: для определения площади круга он вписывал в него многоугольники, последовательно удваивая число их сторон, и мысленно продолжал это до тех пор, пока не доходил «до тех минимальных частиц, из к-рых состоит как прямая, так и окружность круга» (он исходил из атомистич. предпосылок). Ещё интереснее попытка, предпринятая в это же время Гиппием Элидским. По-видимому, впервые в истории математики он вычертил «квадрирующую кривую» (квадратрису), к-рая одновременно разрешала и задачу квадратуры круга, и задачу трисекции угла. Это открытие имело исключительное значение: была открыта первая трансцендентная кривая. Причинами крушения атомистич. геометрии были трудности, связанные с неоднородностью пространства в такой геометрии, и её несовместимость с открытым пифагорейцами существованием несоизмеримых величин, в частности несоизмеримостью стороны и диагонали квадрата. С нач. 4 в. до н. э. ведущая роль переходит к этой пифагорейской школе. Возможно, что уже пифагорейцами 5 в. до н. э. были сделаны нек-рые математич. открытия. Так, им приписывают доказательство теоремы, что сумма углов треугольника равна двум прямым; решение задачи: построить параллелограмм, подобный данному параллелограмму и равновеликий данному треугольнику; открытие додекаэдра. На математике того времени отразилось влияние Платона: из математики изгоняются числовые расчёты, увязка с практич. жизнью, приближённые решения. В центре внимания становятся игравшие большую роль в мистико-религиозных теориях Платона правильные многогранники, теория пропорций и учение об иррациональных величинах. Ученик Платона Теэтет изучил правильные многогранники, придав этому учению, вероятно, тот вид, какой оно имеет в «Началах» Евклида. Архит Тарентский углубил учение о пропорциях и решил задачу удвоения куба стереометрич. путём: он строил цилиндр, конус и тор и находил точку их пересечения. Таким путём были открыты конич. сечения — парабола и гипербола (эллипс был открыт раньше). Крупнейшим математиком этой эпохи был Евдокс Книдский. Основное его значение — в создании новой геометрич. аксиоматики и метода исчерпывания. От Архимеда известно, что именно Евдоксу принадлежит в своей основе т. н. аксиома Архимеда. Она по существу совпадает с определением, данным в кн. V «Начал» Евклида: «Две величины имеют отношение между собою, если меньшую из них можно повторить столько раз, чтобы результат был равен или больше»; это заменило атомистич. аксиому, к-рая ещё сохраняется у Евклида в сочинении «О делении струны»: «Если некоторую величину прибавлением или вычитанием можно довести до требуемой величины, то ... она состоит из частиц, а величины, состоящие из частиц, относятся как целые числа». На основании «аксиомы Архимеда» строится метод исчерпывания для определения площадей и объёмов, сходный с методом Антифонта (вписываются многоугольники со всё бо́льшим числом сторон), но окончательный вывод получается независимо от всяких атомистич. предпосылок путём ложного предположения и приведения к абсурду. Так, Евдокс дал точные выводы для объёмов пирамиды, конуса и шара; все эти объёмы были уже найдены в 5 в. до н. э., но атомистич. способом. Ученик Евдокса Менехм впервые дал связное учение о конич. сечениях. Дальнейшему уточнению математич. аксиоматики и стройности доказательства значительно содействовал Аристотель как основатель научной логики. Результатом всех этих разнообразных влияний и источников явились *«Начала» Евклида*. Евклид — первый античный математик, сочинения к-рого (хотя и не все) дошли до нас целиком. В «Началах» чувствуется влияние Платона и Аристотеля вплоть до того, что труд Евклида завершается учением о правильных многогранниках. Во всём сочинении нет ни слова о практич. приложениях геометрии — об измерении и счёте; даже вопрос об отношении длины окружности к диаметру, столь интересовавший геометров 5 в. до н. э., здесь опущен, как относящийся к измерению. Задача Евклида — вывести всю систему из

немногих основных положений, и с позиций своего времени он с ней блестяще справился.

Величайшим математиком античности был Архимед. Геометрич. работы Архимеда посвящены нахождению отношения длины окружности к диаметру (он даёт оценку $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$), нахождению площади параболич. сегмента, эллипса и его сегмента, а также нахождению объёма цилиндра, шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида и, наконец, изучению спирали, известной под названием спирали Архимеда. Площади и объёмы Архимед находил способом атомистов, разлагая плоские фигуры на прямые, а тела — на пластинки элементарной толщины. Но он считал это лишь способом нахождения решений, поэтому он всегда даёт также строгое доказательство найденных решений по методу исчерпывания. Из арабских источников известно, что определение площади треугольника по трём сторонам, т. е. так называемая «формула Герона», также принадлежит Архимеду. Если квадратуры и кубатуры Архимеда содержали в зародыше интегральное исчисление, то Аполлония Пергского, современника Архимеда, нужно считать предшественником создателей аналитич. геометрии. Его наиболее известной работой были «Конические сечения» в 8 книгах (8-я до нас не дошла). Аполлоний столь приблизил учение о конич. сечениях к нашим алгебраич. формулировкам, что почти каждую из его теорем можно сразу перевести на алгебраич. язык. После Аполлония исследования продолжаются, но уже с меньшей оригинальностью, показывая постепенный упадок. Римское господство не принесло успеха геометрии; на латинском языке до нас дошли только сборники по землемерному делу, дающие геометрич. формулы с грубым приближением. В римскую эпоху жило немало выдающихся греческих учёных, особенно в Александрии (Герон, Папп, Менелай), но и они создали мало нового. Так, Герон, живший около начала нашей эры, в «Метрике» и «Геометрии» приводит целый ряд интересных геометрич. формул, сопровождая их доказательствами, но этот материал только выписан из сочинений его предшественников. Ещё больше материала по самым различным областям Э. г. содержится в «Математическом собрании» Паппа. Отметим, что сам Папп открыл общую теорему об объёме тела вращения, известную под названием «теоремы Гюльдена».

В 4—14 вв. геометрия в Европе переживает глубокий упадок. Математика развивается в эту эпоху на Востоке (преимущественно арифметика и алгебра). Учёные Востока также полностью освоили творения греческих геометров, комментировали их и развивали в нек-рых специальных вопросах. К нач. 15 в. в Европе начинается пробуждение математич. мысли в связи с общими причинами, породившими эпоху Возрождения. Усвоив арабскую науку, европейские учёные обращаются непосредственно к Евклиду, Архимеду, Аполлонию, переводят их, комментируют и кое в чём дополняют. Но для того чтобы не только овладеть античной геометрией, а двинуть её вперёд, нужно было оторваться от её громоздкого оформления. Этот шаг сделал Ф. Виет, к-рый в своих сочинениях «Геометрические решения» и «Дополнение к геометрии» (1593) ввёл новые алгебраич. обозначения, применяя алгебру к геометрии и давая геометрич. построения алгебраич. формул. Тем самым была подготовлена почва для возникновения аналитич. геометрии. В этих новых направлениях геометрия выходит за рамки Э. г., и отсюда начинается новый период истории геометрии.

С 17 в. происходит также и новое развитие Э. г. К ней присоединяется едва намечавшееся у древних учение о простейших геометрич. преобразованиях, развивается учение о геометрич. построениях, теория многогранников и другие области Э. г. (геометрия треугольника, учение о площадях и объёмах и т. п.), позже возникает и разрабатывается учение о правильных системах фигур. Одновременно с созданием анализа формируется дифференциальная геометрия. Древнегреческие геометры употребляли наложение и совмещение фигур перемещением. Несколько позже начали пользоваться преобразованиями подобия и инверсии. После 17 в. различные преобразования становятся предметом исследования. В работах Ж. Д'Аламбера, Л. Эйлера, М. Шаля классифицируются движения на плоскости и в пространстве. В различных исследованиях от Ж. Дезарга до Ж. Понселе накапливаются принадлежащие Э. г. новые результаты, из к-рых складывается общее учение о проективных преобразованиях. В 19 в. аксиоматика движения становится уже одной из возможных форм аксиоматич. построения Э. г. Учение о геометрич. построениях обогащается не только новыми решениями, но и новыми постановками задач и приводит к решению лежащего уже вне Э. г. вопроса о границах возможностей классич. построений с помощью циркуля и линейки. В нач. 19 в. из анализа основ Э. г. вырастает *Лобачевского геометрия*. Подчёркивая происхождение столь важной для всей науки теории из вопросов Э. г., не надо забывать, что в своём первоначальном виде геометрия Лобачевского сохраняет элементарно-геометрич. характер. Поэтому многие вопросы Э. г. (теория многогранников, теория построений и т. п.) развивались и развиваются далее для различных геометрий.

Восходящая к древности теория многогранников обогащается в 18—20 вв. многими новыми результатами; она послужила одним из источников таких разделов современной геометрии, как общая теория выпуклых тел, теория нерегулярных поверхностей, комбинаторная топология. В связи с классификацией возможных симметрий возникает учение о правильных системах фигур. К этой теории примыкают многие вопросы дискретной геометрии. Во всех этих разделах до сих пор остаётся значительное число нерешённых вопросов, по своей формулировке принадлежащих Э. г. В создавшейся одновременно с анализом дифференциальной геометрии получают общее решение многие задачи, ставившиеся ранее для частных фигур в рамках Э. г. Так обстоит дело с измерением объёмов и площадей. Однако в 20 в. в Э. г. появляется новый результат о возможной неравносоставленности равновеликих многогранников в противовес равносоставленности равновеликих многоугольников. Словом, развитие задач Э. г. постоянно приводило и приводит к перерастанию тех или иных её направлений в качественно новые области геометрии, где применяются уже более далёкие абстракции и новые методы. Наряду с этим современное состояние таких вопросов, как теория треугольника и тетраэдра, показывает, какое неисчерпаемое разнообразие конкретных результатов Э. г. может содержать изучение даже таких простых фигур. *А. Д. Александров.*

ЭЛЕМЕНТА́РНАЯ ДИЗЪЮ́НКЦИЯ — формула вида $x_1^{\sigma_1}\vee\ldots\vee x_n^{\sigma_n}$, определяемая по аналогии с *элементарной конъюнкцией* (см. также *Алгебра логики*).

ЭЛЕМЕНТА́РНАЯ КОНЪЮ́НКЦИЯ — формула вида $x_1^{\sigma_1}\&\ldots\&x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ — какой-либо двоичный набор, а среди переменных могут быть одинаковые, при этом

$$x^\sigma=\begin{cases} x & \text{при } \sigma=1,\\ \bar{x} & \text{при } \sigma=0\end{cases}$$

(см. также *Алгебра логики*).

ЭЛЕМЕНТА́РНАЯ МАТЕМА́ТИКА — несколько неопределённое понятие, охватывающее совокупность таких разделов, задач и методов математики, в к-рых не пользуются общими понятиями переменной, функции, предела и тем более общим понятием множества. Иначе говоря, Э. м. пользуется теми общими математич. понятиями (абстракциями), к-рые сложились до появления математич. анализа, хотя Э. м. продолжает развиваться и теперь в ней появляются новые результаты, всё же это происходит в рамках тех же понятий.

Э. м. охватывает в основном арифметику и т. н. элементарную теорию чисел, элементарную алгебру, элементарную геометрию, тригонометрию. Коротко Э. м. можно характеризовать как «математику постоянных величин». Это, однако, не совсем точно, так как в Э. м. рассматривают не только постоянные величины, но и геометрич. фигуры (не обязательно интересуясь их величиной, но, напр., расположением); не только постоянные, но и переменные величины, напр. тригонометрич. функции. Но здесь речь идёт о нек-рых (конкретно определённых) функциях. Точно так же, напр., при определении длины окружности пользуются, по существу, понятием предела, но не в общем виде, а лишь для конкретно определённой последовательности (периметров вписанных и описанных многоугольников). Общие же понятия функции и предела, точно так же как общие понятия кривой, поверхности, фигуры вообще, не заданной каким-либо конкретным построением, заведомо выходят за пределы Э. м. Напр., в теории чисел отличают элементарные доказательства, в к-рых обходятся без методов математич. анализа. Кстати, эта «элементарная теория чисел» вовсе не является элементарной в смысле простоты.

ЭЛЕМЕНТА́РНАЯ ТЕО́РИЯ, теория первого порядка,— произвольное множество T предложений некоторого формализованного логико-математич. языка 1-го порядка, замкнутое относительно выводимости в исчислении предикатов.

Логико-математич. язык 1-го порядка — это *формализованный язык*, в к-ром различаются следующие синтаксич. объекты: пропозициональные связки $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$ и кванторы $\exists$, $\forall$; знаки пунктуации (,); счётное множество предметных переменных x_1, x_2,. . .; конечное или счётное множество предикатных символов P_1, P_2,. . .; конечное или счётное множество функциональных символов f_1, f_2,. . .; конечное или счётное множество предметных констант. Для каждого предикатного или функционального символа известно, к какому числу аргументов он может применяться. В конкретном языке функциональные символы и предметные константы могут отсутствовать.

Совокупность предикатных и функциональных символов и предметных констант наз. сигнатурой данного языка. Язык 1-го порядка с сигнатурой Ω далее обозначается L_Ω.

Из предметных переменных и констант с помощью функциональных символов строятся термы — выражения, являющиеся аналогом имён и именных форм обычного языка. Термами считаются предметные переменные, предметные константы и все выражения вида $f(t_1,\ldots, t_n)$, если f — функциональный символ, а $t_1,\ldots, t_n$ — термы. Из термов и предикатных символов строятся элементарные формулы — выражения вида $P(t_1,\ldots, t_n)$, где P есть n-местный предикатный символ, $t_1,\ldots, t_n$ — термы. Из элементарных формул с помощью пропозициональных связок и кванторов строятся формулы — выражения, соответствующие высказываниям и высказывательным формам обычного языка. При этом формулами считаются все элементарные формулы, а также выражения вида $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B})$, $\neg\mathfrak{A}$, $\forall x\mathfrak{A}$, $\exists x\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, x — предметная переменная.

Главной особенностью языков 1-го порядка является употребление кванторов лишь по предметным переменным (а не по предикатным или функциональным переменным), а также то, что при интерпретации таких языков всем предметным переменным придаётся одна и та же область допустимых значений.

Многие разделы математики могут быть изложены на подходящем логико-математич. языке 1-го порядка. Напр., утверждения теории групп могут излагаться на языке, содержащем кроме переменных лишь двуместный предикатный символ $=$, функциональный символ $\cdot$ и константу 1. При этом аксиомы группы записываются посредством формул:

$$\text{G1. } \forall x_1\forall x_2\forall x_3\,(x_1\cdot(x_2\cdot x_3)=(x_1\cdot x_2)\cdot x_3);$$

$$\text{G2. } \forall x_1\,(1\cdot x_1=x_1);$$

$$\text{G3. } \forall x_1\exists x_2\,(x_1\cdot x_2=1);$$

$$\text{G4. } \forall x_1\,(x_1=x_1);$$

$$\text{G5. } \forall x_1\forall x_2\,(x_1=x_2\supset x_2=x_1);$$

$$\text{G6. } \forall x_1\forall x_2\forall x_3\,(x_1=x_2\supset(x_2=x_3\supset x_1=x_3));$$

$$\text{G7. } \forall x_1\forall x_2\forall x_3\,(x_2=x_3\supset(x_1\cdot x_2=x_1\cdot x_3\,\&\,x_2\cdot x_1=x_3\cdot x_1)).$$

Элементарная теория чисел может излагаться на языке *формальной арифметики*, к-рый является языком 1-го порядка. *Аксиоматическая теория множеств* Цермело — Френкеля также развивается в языке 1-го порядка.

Наибольший интерес представляют следующие два типа Э. т., определяемые способом их задания. Один способ состоит в задании Э. т. как аксиоматич. теории. При этом Э. т. представляет собой множество предложений данного формализованного языка, выводимых средствами классич. исчисления предикатов из нек-рого фиксированного множества формул, наз. аксиомами. Примерами такого рода Э. т. являются формальная арифметика — множество формул языка арифметики, выводимых из аксиом Пеано, или система теории множеств Цермело — Френкеля.

Другой способ задания Э. т. состоит в указании её модели. С каждым языком 1-го порядка естественным образом связан класс алгебраич. систем, являющихся моделями этого языка, т. е. алгебраич. систем с той же сигнатурой. Если $\mathfrak{A}=\langle A,\ \Omega\rangle$ — нек-рая модель языка L_Ω, то имеет смысл говорить об истинности или ложности предложений языка L_Ω в алгебраич. системе $\mathfrak{A}$. Множество предложений, истинных в $\mathfrak{A}$, наз. элементарной теорией алгебраич. системы $\mathfrak{A}$ и обозначается $Th(\mathfrak{A})$. Если K — нек-рый класс алгебраич. систем одной и той же сигнатуры Ω, то совокупность предложений языка L_Ω, истинных на всех системах из K, наз. элементарной теорией класса K и обозначается $Th(K)$. Если $K_1\subseteq K_2$, то $Th(K_1)\supseteq Th(K_2)$. Так, Э. т. групп — это множество предложений описанного выше языка теории групп, истинных в любой группе. В силу определения группы, Э. т. групп совпадает с множеством предложений, выводимых из аксиом G1—G7. Э. т. групп не исчерпывает всего содержания раздела математики, именуемого теорией групп. Последняя занимается исследованием и таких вопросов, к-рые даже не могут быть сформулированы в языке 1-го порядка. Наряду с указанной выше аксиоматич. системой формальной арифметики, важную роль в математич. логике играет рассмотрение совокупности всех предложений языка арифметики, истинных при его обычной интерпретации, то есть Э. т. алгебраич. системы $\mathfrak{N}=\langle N=,\ +,\ \cdot,\ ',\ 0\rangle$, где N — множество натуральных чисел, $'$ — операция прибавления 1, а остальные символы имеют обычный смысл. В силу *Гёделя теоремы о неполноте*, эта Э. т. шире, чем аксиоматич. теория, задаваемая аксиомами Пеано.

Указанные два способа задания Э. т. формально не различаются между собой. Действительно, произвольная Э. т. может рассматриваться как аксиоматич. теория, аксиомами к-рой являются все предложения этой теории. Точно так же любая непротиворечивая Э. т. является Э. т. нек-рого класса алгебраич. систем, а именно класса всех моделей этой теории. Тем не менее на практике возникают вопросы простой аксиоматизации Э. т. той или иной модели и исследования всех моделей данной аксиоматич. теории, т. е. задачи перехода от одного способа задания Э. т. к другому. Вопросы такого рода исследуются в *моделей теории*.

● Мальцев А. И., Алгебраические системы, М., 1970; Мендельсон Э., Введение в математическую логику, пер. с англ., 2 изд., М., 1976; Столл Р.-Р., Множества. Логика. Аксиоматические теории, пер. с англ., М., 1968. *В. Е. Плиско.*

ЭЛЕМЕНТА́РНАЯ ТЕО́РИЯ ВЕРОЯ́ТНОСТЕЙ — см. *Вероятностей теория*.

ЭЛЕМЕНТА́РНАЯ ТЕО́РИЯ ЧИ́СЕЛ — раздел *чисел теории*, изучающий свойства чисел элементарными методами. Такие методы включают использование свойств делимости, различных форм аксиомы индукции и комбинаторные соображения. Иногда понятие элементарных методов расширяют за счёт привлечения простейших элементов математич. анализа. Традиционно неэлементарными считают доказательства, в к-рых используются мнимые числа.

К Э. т. ч. обычно относят задачи, возникающие в таких разделах теории чисел, как теория делимости, теория сравнений, теоретико-числовые функции, диофантовы уравнения, разбиения на слагаемые, аддитивные представления, приближения рациональными числами, цепные дроби. Нередко решение таких задач приводит к необходимости выходить за рамки элементарных методов. Иногда вслед за отысканием неэлементарного решения какой-нибудь задачи находят и её элементарное решение.

Задачи Э. т. ч. имеют, как правило, многовековую историю и нередко стоят у истоков современных направлений теории чисел и алгебры.

● Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.— Л., 1937; Виноградов И. М., Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981; Гельфонд А. О., Линник Ю. В., Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962.

ЭЛЕМЕНТА́РНОЕ СОБЫТИЕ — исходное понятие вероятностной модели, см. *Вероятностей теория*.

ЭЛЕМЕНТА́РНЫЕ ФУ́НКЦИИ — класс функций, состоящий из *степенных функций*, *многочленов*, *рациональных функций*, *показательных функций*, *логарифмических функций*, *тригонометрических функций*, *обратных тригонометрических функций*, *гиперболических функций*, *обратных гиперболических функций*, а также функций, получающихся из перечисленных выше с помощью четырёх арифметич. действий (сложения, вычитания, умножения, деления) и суперпозиций, применяемых конечное число раз. При этом рассматриваются Э. ф. одного или нескольких переменных.

Производная Э. ф. есть также Э. ф.; обратная функция к Э. ф. и первообразная Э. ф. могут не являться Э. ф.

При изучении функций, не принадлежащих классу Э. ф., важной задачей является выражение этих функций через Э. ф. при помощи бесконечных рядов, произведений, интегралов, асимптотич. приближений и т. п.

ЭЛЛИ́ПС (греч. ἔλλειψις — недостаток) — линия пересечения прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса и пересекающей все прямолинейные образующие одной полости этого конуса. Эллипс — множество точек M (рис. 1) плоскости, сумма расстояний $r_1=F_1M$ и $r_2=F_2M$ к-рых до двух определённых точек $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ этой плоскости (фокусов эллипса) постоянна: $r_1+r_2=2a$. Середина O отрезка F_1F_2 (фокусного расстояния) наз. центром эллипса.

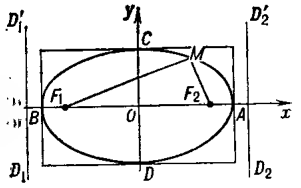


Рис. 1.

В прямоугольной системе координат Oxy с началом в центре Э., на оси Ox к-рой лежат фокусы Э., уравнение Э. принимает т. н. канонический вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ b^2=a^2-c^2,$$

где $a=OA=OB$ и $b=OC=OD$ — длины большой и малой полуосей Э. При $a=b$ фокусы F_1 и F_2 совпадают и указанное уравнение определяет окружность, к-рая рассматривается как частный случай Э.

Э.— центральная *линия второго порядка*. Э.— замкнутая линия, симметричная относительно осей Ox и Oy главных (большой и малой) осей и центра. Форма Э. (его «вытянутость») определяется значением эксцентриситета эллипса $e=c/a<1$ (для окружности $e=0$). Прямые D_1D_1' и D_2D_2' (рис. 1), параллельные малой оси Э. и отстоящие от его центра на расстояниях $d=\pm a/e$, наз. директрисами эллипса, соответствующими фокусам F_1 и F_2. Отношение расстояния любой точки Э. до фокуса к расстоянию её до соответствующей директрисы постоянно и равно эксцентриситету $\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=e$.

Диаметр эллипса — прямая, проходящая через середины параллельных хорд. Каждый из сопряжённых диаметров делит пополам хорды, параллельные другому (рис. 2). Полудлины сопряжённых диаметров a_1 и b_1 связаны с длинами полуосей соотношением $a_1^2+b_1^2=a^2+b^2$ (теорема Аполлония).

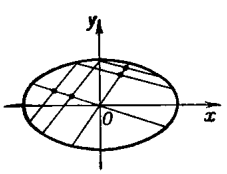


Рис. 2.

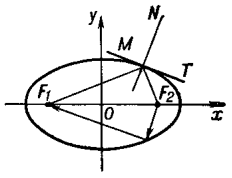


Рис. 3.

Касательная TM и нормаль NM к Э. в точке M (рис. 3) являются биссектрисами углов между фокальными радиус-векторами F_1M и F_2M точки M. Поэтому, если в одном фокусе Э. поместить источник света, то исходящие из него лучи после зеркального отражения от кривой пройдут через второй фокус Э.

Радиус кривизны Э. в точке $M(x, y)$:

$$R=a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{3/2}=\frac{(r_1r_2)^{3/2}}{ab}.$$

Площадь Э.: $S=\pi ab$; площадь сегмента (рис. 4) $MAN=ab\arccos\frac{x}{a}-xy$.

В полярной системе координат (полюс — в фокусе F_2, полярная ось направлена по оси Ox) уравнение Э. имеет вид

$$\rho=\frac{p}{1+\cos\varphi},$$

где $p=b^2/a$ — фокальный параметр (половина длины хорды, проходящей через фокус и параллельной малой оси), равный произведению эксцентриситета на расстояние от фокуса до соответствующей директрисы.

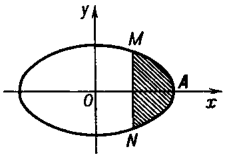


Рис. 4.

Назв. «Э.» ввёл Аполлоний Пергский, рассматривавший Э. как одно из *конических сечений*.

ЭЛЛИПС ГОРЛОВО́Й — одно из сечений *гиперболоида*.

ЭЛЛИПС ИСКАЖЕ́НИЙ — см. *Картографическая проекция*.

ЭЛЛИПСО́ИД (от *эллипс* и греч. εἶδος — вид) — замкнутая центральная *поверхность второго порядка*. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ с началом в центре симметрии Э., оси координат к-рой совпадают с осями симметрии Э., а координатные плоскости — с плоскостями симметрии Э. (рис. 1), уравнение Э. принимает т. н. канонический вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где числа a, b и c (и отрезки такой длины) наз. полуосями эллипсоида.

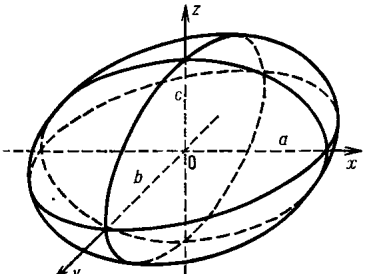


Рис. 1.

Если $a\neq b\neq c$, Э. наз. трёхосным. Если $a=b>c$, то Э.— сжатый эллипсоид вращения, или

сфероид, получаемый вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$, лежащего в плоскости xOz вокруг его малой оси (рис. 2). Если $a>b=c$, Э. — вытянутый эллипсоид вращения, получаемый вращением того же эллипса вокруг большой оси (рис. 3). Если $a=b=c$, Э. является сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$ радиуса a. Трёхосный Э. может быть получен из сферы равномерным сжатием от-

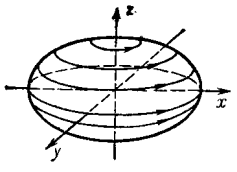


Рис. 2.

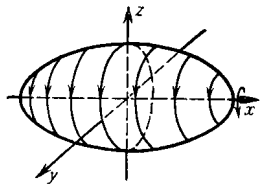


Рис. 3.

носительно двух перпендикулярных плоскостей. Все плоские сечения Э. являются эллипсами (в частном случае — окружностями). Объём Э. $v=\frac{4}{3}\pi abc$.

ЭЛЛИПСОИДА́ЛЬНЫЕ КООРДИНА́ТЫ — обобщение *эллиптических координат* в пространстве.

ЭЛЛИПТИ́ЧЕСКАЯ ГЕОМЕ́ТРИЯ — то же, что *Римана геометрия*, а также её многомерное обобщение.

ЭЛЛИПТИ́ЧЕСКАЯ ИНВЕ́РСИЯ — см. *Инверсия*.

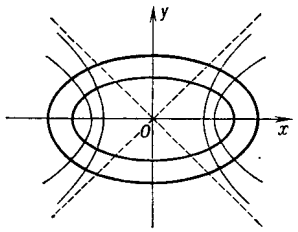
ЭЛЛИПТИ́ЧЕСКАЯ КРИВА́Я — см. *Абелево многообразие*, *Алгебраическая геометрия*, *Диофантова геометрия*.

ЭЛЛИПТИ́ЧЕСКАЯ ТО́ЧКА поверхности — точка, в которой *гауссова кривизна* поверхности положительна. См. также *Округления точка*, *Поверхностей теория*.

ЭЛЛИПТИ́ЧЕСКИЕ КООРДИНА́ТЫ — числа σ и τ, связанные с прямоугольными координатами формулами

$$x^2=\frac{(\sigma+a^2)(\tau+a^2)}{a^2-b^2},\quad y^2=\frac{(\sigma+b^2)(\tau+b^2)}{b^2-a^2}, \qquad (*)$$

где $-a^2<\tau<-b^2<\sigma<\infty$. Координатные линии (рис.): софокусные эллипсы ($\sigma=$const) и гиперболы ($\tau=$const) с фокусами $(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ и $(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$. Каждой паре чисел σ и τ соответствуют 4 точки, по одной в каждом квадранте плоскости Oxy, симметричные друг другу относительно осей Ox и Oy.



Коэффициенты Ламе:

$$L_\sigma=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma-\tau}{(\sigma+a^2)(\tau+b^2)}},$$

$$L_\tau=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau-\sigma}{(\sigma+a^2)(\tau+b^2)}}.$$

Вырожденными Э. к. наз. числа $\tilde\sigma$ и $\tilde\tau$, связанные с Э. к. σ и τ формулами (при $a=1$, $b=0$):

$$\sigma=\mathrm{sh}^2\tilde\sigma,\quad \tau=-\sin^2\tilde\tau$$

и с прямоугольными координатами x и y — формулами

$$x=\mathrm{ch}\,\tilde\sigma\cos\tilde\tau,\quad y=\mathrm{sh}\,\tilde\sigma\sin\tilde\tau,$$

где $0\leqslant\tilde\sigma<\infty$, $0\leqslant\tilde v<2\pi$. Иногда эти координаты также наз. эллиптическими.

Коэффициенты Ламе:

$$L_{\tilde\sigma}=L_{\tilde\tau}=\sqrt{\mathrm{ch}^2\tilde\sigma-\cos^2\tilde\tau}.$$

Элемент площади:

$$ds=(\mathrm{ch}^2\tilde\sigma-\cos^2\tilde\tau)\,d\tilde\sigma\,d\tilde\tau.$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta\varphi=\frac{1}{\mathrm{ch}^2\tilde\sigma-\cos^2\tilde\tau}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde\sigma^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde\tau^2}\right).$$

Э. к. в пространстве — числа σ, τ, ζ, связанные с прямоугольными координатами x, y, z формулами (*) для σ и τ, а $\zeta=z$. Координатные поверхности: эллиптич. цилиндры ($\sigma=$const), гиперболич. цилиндры ($\tau=$const), плоскости $\zeta=$const.

Другим обобщением Э. к. в пространстве являются эллипсоидальные координаты:

$$x^2=\frac{(\lambda+a^2)(\mu+a^2)(\nu+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)},$$

$$y^2=\frac{(\lambda+b^2)(\mu+b^2)(\nu+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)},$$

$$z^2=\frac{(\lambda+c^2)(\mu+c^2)(\nu+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

Координатные поверхности: эллипсоиды ($\lambda=$const), однополостные гиперболоиды ($\mu=$const) и двуполостные гиперболоиды ($\nu=$const). Коэффициенты Ламе:

$$L_\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{R^2(\lambda)}},\quad L_\mu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{R^2(\mu)}},$$

$$L_\nu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{R^2(\nu)}},$$

где

$$R(\xi)=\sqrt{(\xi+a^2)(\xi+b^2)(\xi+c^2)},$$
$$\xi=\lambda,\ \mu,\ \nu.$$

ЭЛЛИПТИ́ЧЕСКИЕ ФУ́НКЦИИ — функции, связанные с обращением *эллиптических интегралов*. Подобно тому как простейшая тригонометрич. функция $u=\sin x$ является обратной по отношению к интегралу $x=\int_0^u\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}$, так одна из Э. ф. Якоби $u=\mathrm{sn}(x;\ k)=\mathrm{sn}\,x$ является обратной по отношению к эллиптич. интегралу 1-го рода (в нормальной форме Якоби)

$$x=\int_0^u\frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} \qquad (1)$$

(k — постоянная, наз. модулем). К ней приводит, напр., задача о математич. маятнике, т. е. задача о совершаемых в вертикальной плоскости колебаниях тяжёлого шарика, подвешенного на нити. Пусть g — ускорение силы тяжести, l — длина нити, θ — переменный угол между нитью и вертикалью, θ_0 — максимальная величина θ (рис. 1), t — время, отсчитываемое от момента, когда $\theta=0$; применяя теорему живых сил, получают

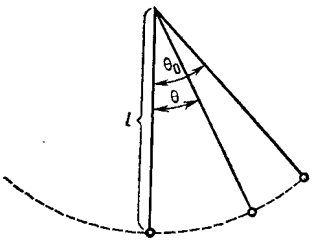


Рис. 1.

$$t=\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$$

или, производя замену $\sin\frac{\theta}{2}=\tau\sin\frac{\theta_0}{2}$,

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^\tau\frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)\left(1-\tau^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}}.$$

Отсюда

$$\tau=\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t;\ \sin\frac{\theta_0}{2}\right)$$

и

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\theta_0}{2}\,\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,\tau\right).$$

Итак, изучение колебания маятника сводится к изучению Э. ф. $\mathrm{sn}\,x$. Чтобы определить остальные Э. ф. Якоби, заменяют в (1) τ через $\sin\alpha$ и получают

$$x=\int_0^\varphi\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}\quad(\sin\varphi=u).$$

Функция, обратная x, наз. амплитудой и обозначается $\varphi=\mathrm{am}\,x$ (она не является Э. ф.); через неё $\mathrm{sn}\,x$ выражается так:

$$\mathrm{sn}\,x=\sin\varphi=\sin\mathrm{am}\,x$$

и потому наз. синусом амплитуды или эллиптическим синусом. Две другие Э. ф. Якоби — косинус амплитуды (или эллиптический косинус) и дельта амплитуды

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cn} x &= \cos\varphi = \cos \operatorname{am} x, \\ \operatorname{dn} x &= \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta \operatorname{am} x. \end{aligned}\right\}$$

Все эти функции были введены и изучены Н. Абелем (1827) и К. Якоби (1829). Функции $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ и $\operatorname{dn} x$ связаны двумя алгебраич. соотношениями:

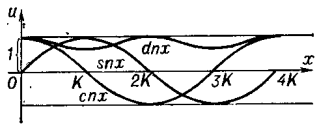


Рис. 2.

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1,$$
$$k^2 \operatorname{sn}^2 x + \operatorname{dn}^2 x = 1.$$

На рис. 2 представлен вид графиков Э. ф. Якоби для x действительного (при условии $0<k<1$); здесь

$$K = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}$$

— полный эллиптич. интеграл 1-го рода и $4K$ — основной период Э. ф. $\operatorname{sn} x$. В отличие от однопериодич. функции $\sin x$, функция $\operatorname{sn} x$ — двоякопериодическая. Её второй основной период равен $2iK'$, где

$$K' = \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)[1-(k')^2\tau^2]}}$$

и $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль. Можно показать, что все периоды, нули и полюсы Э. ф. Якоби даются выражениями, сведёнными в следующую табличку, в к-рой m и n — любые числа.

Функции	Периоды	Нули	Полюсы
$\operatorname{sn} z$	$4Km+2iK'n$	$2Km+2iK'n$	$2mK+$
$\operatorname{cn} z$	$4Km+(2K+2iK')n$	$(2m+1)K+2iK'n$	$+(2n+1)iK'$
$\operatorname{dn} z$	$2Km+4iK'n$	$(2m+1)K+(2n+1)iK'$	

Э. ф. Вейерштрасса (пэ-функция)

$$u = \wp(x)$$

может быть определена как обратная интегралу

$$x = \int_\infty^u \frac{d\tau}{\sqrt{4\tau^3-g_2\tau-g_3}} \qquad (2)$$

(g_2 и g_3 наз. инвариантами). При этом предполагается, что нули e_1, e_2 и e_3 многочлена $4\tau^3-g_2\tau-g_3$ различны между собой [в противном случае интеграл (2) выражался бы через элементарные функции]. Если, в частности, числа e_1, e_2 и e_3 действительные и различные [это будет при условии, что g_2 и g_3 — действительные числа и $\Delta = \frac{1}{16}(g_2^3-27g_3^2)>0$], причём $e_1>e_2>e_3$, то

$$2\omega_1 = \int_{e_1}^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau-e_1)(\tau-e_2)(\tau-e_3)}}$$

и

$$2\omega_3 = i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{d\tau}{\sqrt{(e_1-\tau)(e_2-\tau)(e_3-\tau)}}$$

будут основными периодами Э. ф. $\wp(z)$. Эта функция принимает тогда действительные значения не только при $z=x$, но и при $z=\omega_1+iy$, $z=x+i\omega_3$ и $z=iy$; на рис. 3 представлены соответствующие графики. Если z описывает прямоугольник $0<x<\omega_1$, $0<y<\omega_3/i$, то $w=\wp(z)$ описывает нижнюю полуплоскость, причём соответствие между z и w является взаимно однозначным и конформным. С $\operatorname{sn}(z;\ k)$ функция $\wp(z)$ связана зависимостью

$$\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{\wp(z)-e_3}} = \operatorname{sn}\left(\sqrt{e_1-e_3};\ \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}\right).$$

Общие свойства эллиптических функций. Определение: Э. ф.— любая мероморфная двоякопериодич. функция $f(z)$. Пусть $2\omega_1$ и $2\omega_3$ (отношение $\omega_3:\omega_1$ мнимое) — основные периоды функции $f(z)$, тогда $f(z+2\omega_1 m+2\omega_3 n)=f(z)$ при $m,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$. В силу этого достаточно изучить $f(z)$ в к.-л. её параллелограмме периодов $\boldsymbol{P}$ (рис. 4); к $\boldsymbol{P}$ кроме его внутренних точек, причисляются точки сторон OA и OB, исключая вершины A и B. Имеют место следующие теоремы Лиувилля: сумма, разность, произведение и частное Э. ф. есть Э. ф.; производная Э. ф. есть Э. ф.; если Э. ф. $\not\equiv$const, то число N полюсов в $\boldsymbol{P}$ (с учётом кратности полюсов) $\geqslant 2$; уравнение $f(z)=a$ при любом a имеет N корней в $\boldsymbol{P}$; суммы корней

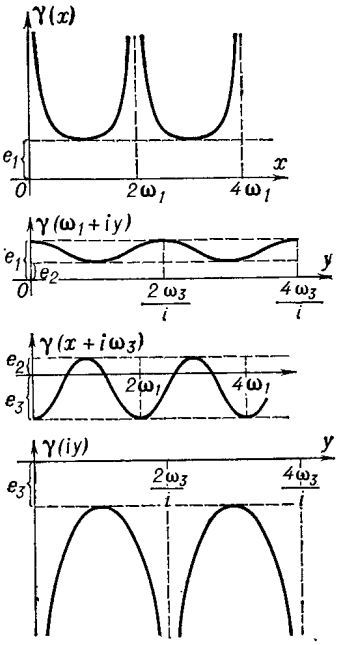


Рис. 3

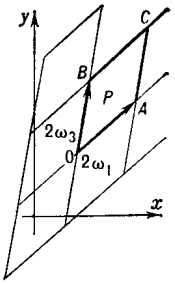


Рис. 4.

для двух разных a могут различаться только на нек-рый период Ω ($=2m\omega_1+2n\omega_3$). Построим функции:

$$\sigma(z) = z\prod{}'\left(1-\frac{z}{\Omega}\right)e^{\frac{z}{\Omega}+\frac{1}{2}\frac{z^2}{\Omega^2}},$$

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{1}{z}+\sum{}'\left[\frac{1}{z-\Omega}+\frac{1}{\Omega}+\frac{z}{\Omega^2}\right],$$

$$\wp(z) = -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(z-\Omega)^2}-\frac{1}{\Omega^2}\right],$$

где Π' и Σ' — знаки произведения и суммы, распространённые на все периоды $\Omega\neq0$. Функция $\sigma(z)$ — простейшая целая функция, имеющая нули 1-го порядка во всех точках Ω (т. н. сигма-функция), $\zeta(z)$ и $\wp(z)$ — простейшие мероморфные функции, имеющие полюсы в Ω соответственно 1-го и 2-го порядков. Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ и $\beta_1,\ldots,\beta_N$ — нули и полюсы Э. ф. $f(z)$, принадлежащие $\boldsymbol{P}$ (кратные нули и полюсы выписываются столько раз, какова их кратность), тогда $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = C_0\frac{\sigma(z-\alpha_1)\ldots\sigma(z-\alpha_N)}{\sigma(z-\beta_1)\ldots\sigma(z-\beta'_N)}, \qquad (3)$$

где C_0 — постоянная и $\beta'_N-(\alpha_1+\ldots+\alpha_N)-(\beta_1+\ldots+\beta_{N-1})$. Если $b_1,\ldots,b_n$ — различные между собой полюсы $f(z)$ и $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_n$ — их порядки ($\varkappa_1+\ldots+\varkappa_n=N$), причём главная часть разложения $f(z)$ в окрестности b_k есть

$$\frac{A^{(k)}}{z-b_k}+\ldots+\frac{A^{(k)}}{(z-b_k)^{\varkappa_k}},$$

то

$$f(z) = C+\sum_{k=1}^n\left\{A^{(k)}\zeta(z-b_k)-\frac{A_2^{(k)}}{2!}\zeta'(z-b_k)+\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^{\varkappa_k-1}\frac{A_{\varkappa_k}^{(k)}}{(\varkappa_k-1)!}\zeta^{(\varkappa_k-1)}(z-b_k)\right\}, \qquad (4)$$

где C — постоянная; формулы (3) и (4), принадлежащие К. Вейерштрассу, аналогичны формулам, представляющим рациональную функцию в виде частного двух произведений линейных множителей (многочленов) либо в виде суммы простейших дробей; на них основывается вся теория Э. ф.

Историческая справка. Изучению Э. ф. предшествовало накопление знаний об эллиптич. интегралах, получивших своё название оттого, что через один из них (интеграл 1-го рода в нормальной форме Лежандра) выражается длина дуги эллипса. Эллиптич. интегралы встречались в задачах об определении длин дуг различных кривых ещё у Дж. Валлиса (1655—69), Я. Бернулли (1691) и др. математиков 17 в. Дж. Фаньяно (1716, 1750) указал условия, при к-рых сумма или разность дуг, представляемых в отдельности эллиптич. интегралами, выражается в конечном виде. Все эти результаты оказались частными случаями теоремы сложения эллиптич. интегралов, открытой Л. Эйлером (1761 и последующие годы). Дальнейшая разработка теории была произведена А. Лежандром, установившим (1793—94), в частности, что каждый эллиптич. интеграл можно представить в виде суммы элементарной функции и умноженных на постоянные числа интегралов трёх родов:

$$F(u, k)=\int_0^u \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}},$$

$$E(u, k)=\int_0^u \sqrt{\frac{1-k^2\tau^2}{1-\tau^2}}\,d\tau$$

и

$$\Pi(u, n, k)=\int_0^u \frac{d\tau}{(1+n\tau^2)\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}.$$

Систематич. изложение теории эллиптич. интегралов было дано А. Лежандром (1825—28).

К идее обращения эллиптич. интегралов впервые пришёл К. Гаусс, получивший многие результаты теории Э. ф. ещё в кон. 18 в. (1797 и последующие годы), но не опубликовавший их. Фактически основателями Э. ф. являются Н. Абель и К. Якоби. Последний дал развёрнутое изложение теории Э. ф., названных его именем (они были введены Н. Абелем). В 1847 Ж. Лиувилль опубликовал изложение основ общей теории Э. ф., рассматриваемых как мероморфные двоякопериодич. функции; это изложение представляло пример применения к теории Э. ф. начал теории аналитич. функций комплексного переменного, развитых О. Коши.

К. Вейерштрасс пришёл к своим функциям $\sigma(z)$, $\zeta(z)$ и $\wp(z)$, по-видимому, ещё в 40-х гг. 19 в. [аналогичные функции встречаются в работах Ф. Эйзенштейна (1847) и др. учёных]. Краткое изложение теории Э. ф. в обозначениях К. Вейерштрасса было опубликовано Г. Шварцем (1883—84). Необходимо также отметить работы Ш. Эрмита, получившего с помощью Э. ф. решение общего алгебраич. уравнения 5-й степени.

● Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, 2 изд., М., 1970; Гурвиц А., Курант Р., Теория функций, пер. с нем., М., 1968.

А. И. Маркушевич.

ЭЛЛИПТИ́ЧЕСКИЙ ИНТЕГРА́Л — интеграл вида

$$\int R(x, w)\,dx,$$

где $R(x, w)$ — рациональная функция x и $w=\sqrt{P(x)}$, а $P(x)$ — многочлен третьей или четвёртой степени без кратных корней. Под Э. и. первого рода понимают интеграл

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}, \qquad (1)$$

под Э. и. второго рода — интеграл

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt=\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha, \qquad (2)$$

где k — постоянная, наз. модулем Э. и., обычно $0<k<1$ ($x=\sin\varphi$, $t=\sin\alpha$). Интегралы в левых частях равенств (1) и (2) наз. Э. и. в нормальной форме Якоби, интегралы в правых частях — Э. и. в нормальной форме Лежандра. При $x=1$ или $\varphi=\pi/2$ Э. и. наз. полными и обозначаются соответственно через

$$K=K(k)=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=\int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$$

и

$$E=E(k)=\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt=\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha.$$

Рассматриваются также Э. и. третьего рода, однако они редко встречаются.

Своё название Э. и. получили в связи с задачей вычисления длины дуги эллипса $u=a\sin\alpha$, $v=b\cos\alpha$ ($a>b$). Длина дуги этого эллипса выражается формулой

$$L=\int_0^\varphi \sqrt{\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{dv}{d\alpha}\right)^2}\,d\alpha=$$
$$=\int_0^\varphi \sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}\,d\alpha=a\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha,$$

где $k^2=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса. Длина дуги четверти эллипса равна $E(k)$. См. также *Эллиптические функции* (позволяющие в нек-ром смысле получить обращение Э. и.).

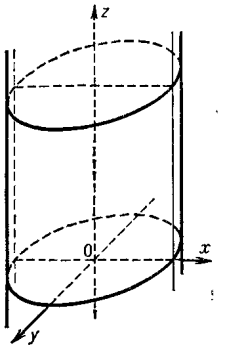
ЭЛЛИПТИ́ЧЕСКИЙ КО́СИНУС — одна из *эллиптических функций* Якоби.

ЭЛЛИПТИ́ЧЕСКИЙ ПАРАБОЛО́ИД — незамкнутая нецентральная *поверхность второго порядка*. См. *Параболоид*.

ЭЛЛИПТИ́ЧЕСКИЙ СИ́НУС — одна из *эллиптических функций* Якоби.

ЭЛЛИПТИ́ЧЕСКИЙ ЦИЛИ́НДР — цилиндрическая поверхность, направляющая линия которой — эллипс (рис.). Э. ц.— незамкнутая центральная *поверхность второго порядка*, канонич. уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



ЭЛЛИПТИ́ЧЕСКОГО ТИ́ПА УРАВНЕ́НИЕ — дифференциальное уравнение с частными производными вида

$$\sum_{i,j=1}^n D_i a_{ij}(x) D_j u+\sum_{i=1}^n a_i(x) D_i u+$$
$$+a(x)\,u=f(x),$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1, \ldots, n$, квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j$$

положительно определена.

Среди различных классов задач, к-рые ставятся для Э. т. у., наиболее хорошо изучены краевые задачи и задачи с данными Коши. Последние поставлены некорректно и требуют для решения специальных методов. Более типичны для Э. т. у. краевые задачи, и для их приближённого решения разработано много различных численных методов. Наиболее широкое распространение в вычислительной практике получили сеточные методы, а среди них — метод конечных разностей (см. *Разностных схем теория*) и метод конечных элементов (м. к. э.). Хотя указанные методы и различаются подходом к построению приближённого решения — в первом из них аппроксимируются уравнение и граничные (краевые) условия, а во втором — само искомое решение,— однако получающиеся алгебраич. системы близки по структуре, а в ряде случаев и вовсе совпадают.

Суть метода конечных разностей состоит в следующем: область непрерывного изменения аргументов исходной задачи заменяется дискретным множеством точек (узлов), называемым сеткой; производные, входящие в диффе-

ренциальное уравнение и граничные условия, аппроксимируются разностными отношениями; при этом краевая задача для дифференциального уравнения заменяется системой алгебраич. уравнений (р а з н о с т н о й с х е м о й). Если полученная таким образом разностная краевая задача разрешима (быть может, только на достаточно мелкой сетке) и её решение при безграничном измельчении сетки приближается (сходится) к решению исходной задачи для дифференциального уравнения, то полученное решение разностной задачи и принимается за приближённое решение исходной задачи.

Простейшим примером Э. т. у. является уравнение Пуассона (уравнение Лапласа, если $f(x, y)\equiv 0$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-f(x, y). \qquad (1)$$

В м. к. э. аппроксимируется обобщённое решение краевой задачи. Пусть уравнение (1) задано при $(x, y)\in\Omega$ и для него рассматривается однородная задача Дирихле, т. е.

$$u(x, y)|_{\partial\Omega}=0, \qquad (2)$$

где $\partial\Omega$ — граница Ω. Обобщённым решением задачи (1), (2) наз. функция $u\in\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)=\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$, к-рая при любой функции $v\in\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y_0}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_\Omega fv\,dx\,dy. \qquad (3)$$

Здесь $H^1(\Omega)$ — пространство Соболева функций, обращающихся в нуль (в смысле обобщённых функций) на $\partial\Omega$. Наиболее важный класс м. к. э. образуют м. к. э. галёркинского типа (т. н. конформные м. к. э.). В методе Галёркина приближённое решение ищется в конечномерном подпространстве того пространства, на к-ром задано интегральное тождество, определяющее обобщённое решение. Применительно к задаче (3) приближённым, по Галёркину, решением наз. такая функция $u_h\in S_h(\Omega)\subset\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$, к-рая при любой функции $v\in S_h(\Omega)$ удовлетворяет интегральному тождеству (3). В м. к. э. подпространство $S_h\in(\Omega)$ должно обладать нек-рыми специальными свойствами.

Специфику конечномерного подпространства, отличающую м. к. э. от других реализаций метода Галёркина, иллюстрирует следующий пример. Пусть область Ω, в к-рой ищется решение задачи (1), (2), есть многоугольник. Область Ω разбивается на малые треугольники (конечные элементы) так, чтобы любые два треугольника либо вовсе не содержали общих точек, либо имели одну общую вершину или одну общую сторону. В качестве конечномерного подпространства пространства $\overset{0}{H}{}^1(\Omega)$ выбирается пространство $S_h(\Omega)$ кусочно линейных, линейных над каждым треугольником, непрерывных и обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ функций. Размерность пространства $S_h(\Omega)$ совпадает с числом вершин треугольников (без учёта их кратности), не попавших на границу $\partial\Omega$. Указанные вершины наз. у з л а м и. В качестве базиса $S_h(\Omega)$ можно взять совокупность таких элементов $\varphi_i\in S_h(\Omega)$, к-рые отличны от нуля лишь в одном узле. Характерной особенностью этого базиса является то, что у каждого его элемента носитель минимален и образован объединением всех треугольников с общей вершиной в том узле, где данный базисный элемент отличен от нуля. Благодаря этому свойству на каждом конечном элементе (к. э.) отлично от нуля не более трёх (по числу вершин, не попавших на $\partial\Omega$) базисных функций, что позволяет использовать сужения указанных базисных функций на к. э. как базис на к. э. и проводить все вычисления на к. э. без привлечения информации о других к. э. Указанное свойство базиса делает м. к. э. весьма технологичным с точки зрения использования ЭВМ.

Если, напр., Ω — единичный квадрат, а разбиение Ω на к. э. осуществляется тремя семействами эквидистантных прямых

$$x=mh,\ y=nh,\ y-x+ph,\ m,\ n,\ p\in\mathbb{Z},\ h^{-1}-N\in\mathbb{N},$$

то при условии, что отличные от нуля значения базисных функций равны единице, для коэффициентов c_{mn} разложения приближённого решения

$$u_h(x, y)=\sum\nolimits_{m,\,n}c_{mn}\varphi_{mn}(x, y)$$

получают систему уравнений, в точности совпадающую с системой уравнений метода конечных разностей. При этом c_{mn} будут значениями приближённого решения в узлах.

Точность описанного м. к. э. характеризуется оценкой

$$\|u-u_n\|_{\overset{0}{H}_1(\Omega)}=O(h),$$

где h — максимальный линейный размер к. э. Чтобы получить большую точность, нужно приближённое решение искать не в пространстве кусочно линейных функций, а в пространстве кусочно квадратичных или, вообще, кусочно полиномиальных функций. Точность в этом случае при надлежащей гладкости искомого решения будет $O(h^k)$, где k — степень используемых многочленов.

Помимо треугольных к. э. можно использовать и четырёхугольные к. э., однако если стороны четырёхугольников не параллельны координатным осям, то необходимо применять изопараметрич. технику, т. е. сначала отобразить рассматриваемый к. э. на канонич. к. э. (в данном случае на прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям) при помощи невырожденного преобразования, обратное к к-рому задаётся теми же самыми функциями, что и приближённое решение на канонич. к.э. Можно использовать треугольники и четырёхугольники с криволинейными сторонами (снова применяя изопараметрич. технику), что необходимо при решении задач в областях с гладкой границей методами более высокого порядка точности, чем первый.

Помимо м. к. э. галёркинского типа существуют т. н. неконформные м. к. э., решения в к-рых ищутся в пространствах, не являющихся подпространствами исходных пространств. Особенно часто такие м. к. э. применяются для задач, связанных с Э. т. у. более высокого, чем второй, порядка.

И метод конечных разностей, и м. к. э. приводят к системам линейных алгебраич. уравнений большого порядка с разреженными матрицами — подавляющее большинство элементов этих матриц нулевые. Значительное развитие получил ещё один метод приближённого решения краевых задач для Э. т. у.— метод граничных элементов.

● С а м а р с к и й А. А., А н д р е е в В. Б., Разностные методы для эллиптических уравнений, М., 1976. *В. Б. Андреев.*

ЭЛЬ-76 — *программирования язык*, использующий русскую лексику. Разработан в сер. 70-х гг. (в СССР). Э.-76 предназначен для многомашинных вычислительных комплексов типа «Эльбрус». Объединяет в себе особенности машинного языка, непосредственно управляющего работой устройств ЭВМ, и изобразительные средства языка высокого уровня (во многом аналогичного *алголу*-68). Э.-76 поддерживает методику структурного программирования, т. е. композиции программы из процедур, линейных последовательностей операторов, циклов, альтернативных сочленений с выбором альтернативы по условию или по номеру альтернативы и параллельно выполняемых ветвей. Язык имеет специальные средства описания поведения программы в особых случаях — т. н. ситуации и структурные переходы. Основной особенностью Э.-76 является возможность хранения в памяти ЭВМ информации о типе переменной величины вместе с её значением и её изменения в ходе выполнения программы.

● П е н т к о в с к и й В. М., Автокод Эльбрус «Эль-76», М., 1982.

ЭМПИРИЧЕСКАЯ ДИСПЕРСИЯ (от греч. ἐμπειρία — опыт) — статистическая оценка дисперсии исходного распределения. См. также *Информация*.

ЭМПИРИ́ЧЕСКАЯ ЛИ́НИЯ РЕГРЕ́ССИИ — см. *Регрессионный анализ.*

ЭМПИРИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЯ — см. *Распределение, Эмпирическое распределение.*

ЭМПИРИ́ЧЕСКИЙ МОМЕ́НТ — см. *Эмпирическое распределение.*

ЭМПИРИ́ЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ, распределение выборки, выборочное распределение,— распределение вероятностей, которое определяется по выборке для оценки истинного распределения. Э. р., соответствующее выборке $x_1,\ldots, x_n$ объёма n, приписывает вероятности $1/n$ каждому значению x_k, а если какие-либо k из x_i совпадают между собой, то их общему значению приписывается вероятность k/n (при большом числе наблюдений n Э. р. задаётся с помощью частот $h_i=\frac{n_i}{n}$, $i=1,\ldots, r$, где r - число групп, на к-рые разбивается вся совокупность наблюдений x_k, а n_i — число значений x_k в i-й группе). Так определённое Э. р. есть дискретное распределение нек-рой случайной величины, принимающей конечное число значений с вероятностями, пропорциональными $1/n$. Соответствующая функция распределения является ступенчатой функцией со скачками $1/n$ в точках $x_1,\ldots, x_n$, если все они различны.

Пусть результаты наблюдений $X_1,\ldots, X_n$ представляют собой взаимно независимые случайные величины, имеющие одно и то же распределение с функцией распределения $F(x)$. Эмпирич. функция распределения, соответствующая случайной выборке $X_1,\ldots, X_n$, определяется при любом действительном x как

$$\hat{F}_n(x)=\hat{F}_n(X_1,\ \ldots,\ X_n;\ x)=\frac{\mu_n(X_1,\ \ldots,\ X_n;\ x)}{n},$$

где $\mu_n(X_1,\ldots, X_m;\ x)$ — число X_i, меньших x, или, если $X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\ldots\leqslant X_{(n)}$, соответствующий вариационный ряд, то как

$$\hat{F}_n(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant X_1,\\ \frac{k}{n}, & X_{(k)}<x\leqslant X_{(k+1)},\\ 1, & x>X_{(n)}.\end{cases}$$

При каждом фиксированном значении x $\hat{F}_n(x)$ является случайной величиной. Если случайные величины $X_1,\ldots, X_n$ принимают значения $x_1,\ldots, x_n$, то $\hat{F}_n(x)$ как функция x обладает всеми свойствами обычной функции распределения. Таким образом, Э. р., соответствующее $X_1,\ldots, X_n$, задаётся семейством случайных величин $\hat{F}_n(x)$, зависящим от действительного параметра x. При каждом фиксированном x случайная величина $\hat{F}_n(x)$ имеет распределение:

$$\mathrm{P}\left\{\hat{F}_n(x)=\frac{k}{n}\right\}=C_n^k\{F(x)\}^k\{1-F(x)\}^{n-k}.$$

При этом $\mathrm{E}\hat{F}_n(x)=F(x)$, $\mathrm{D}\hat{F}_n(x)=F(x)(1-F(x))$. В соответствии с теоремой Гливенко — Кантелли величина

$$D_n=\sup_x|\hat{F}(x)-F(x)|$$

сходится к 0 с вероятностью 1. Случайная величина D_n служит мерой близости $\hat{F}_n(x)$ к $F(x)$, при этом её распределение вероятностей не зависит в непрерывном случае от $F(x)$. Этот факт даёт возможность в случае, когда $F(x)$ неизвестна, построить критерий проверки статистич. гипотезы о том, что эта функция есть заданная функция $F_0(x)$. Выборочные, или эмпирические, моменты определяются как моменты Э. р., напр.

$$\hat{\alpha}_r=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^r$$

— выборочный момент r-го порядка,

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$$

— выборочное среднее,

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(X_k-\overline{X})^2$$

— выборочная дисперсия,

$$\mu=\mu(X_1,\ \ldots,\ X_n)=\begin{cases}X_{(m)} \text{ при } n=2m+1,\\ \frac{1}{2}[X_{(m-1)}+X_{(m)}] \text{ при } n=2m\end{cases}$$

— выборочная медиана.

Аналогично определяются другие числовые и функциональные характеристики Э. р., служащие статистич. оценками соответствующих характеристик исходного распределения.

● Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969.

А. В. Прохоров.

ЭНДОМОРФИ́ЗМ (от греч. ἔνδον — внутри и μορφή — вид, форма) — *гомоморфизм* алгебраической системы в себя. Все Э. произвольной алгебраич. системы относительно операции последовательного выполнения отображений образуют полугруппу с единицей (тождественный Э.). Э. векторного пространства наз. также *линейным преобразованием.*

ЭНТРОПИ́Я (от греч. ἐντροπία — поворот, превращение) в теории информации — мера неопределённости какого-либо опыта (испытания), который в зависимости от случая может заканчиваться различными исходами. При этом предполагают, что имеются определённые вероятности появления того или иного исхода. Пусть $x_1,\ x_2,\ldots, x_n$ — различные исходы опыта, $p_1,\ p_2,\ldots,$ p_n — соответствующие вероятности, $p_i\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^n p_i=1$. Тогда формально Э. определяется выражением

$$H=H(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)=\sum_{i=1}^n p_i\log_2(1/p_i)$$

(считается, что $0\log 0=0$).

Свойства Э.: 1) Э. равна нулю в том случае, когда одно из p_i равно единице, а остальные равны нулю, т. е. когда исход опыта достоверен; 2) Э. достигает максимального значения при данном n, когда все исходы равновероятны; 3) Э. объединения двух независимых опытов равна сумме их Э. H является единственной функцией от p_i, удовлетворяющей этим и ещё нескольким, столь же естественным требованиям. Однако ценность понятия Э. определяется не этим обстоятельством, а тем, что она играет важную роль во многих задачах кодирования и связи (см. *Канал*).

Для теории связи особый интерес представляет случай, когда x_i суть сообщения нек-рого источника *информации.* Сообщения при этом рассматривают как временны́е последовательности элементов (букв), выбираемых с некрыми вероятностями из какой-то определённой совокупности (алфавита). Выводы теории информации касаются сообщений, представляющихся «достаточно длинными» (в принципе неограниченно длинными) последовательностями букв, что соответствует предположению о весьма длительной работе рассматриваемых устройств. Поэтому «Э. источника на символ» (или скорость передачи сообщений, измеряемая в двоичных единицах на символ) определяется нек-рым предельным переходом. С этой целью наряду с сообщениями, представленными в форме неограниченных последовательностей $a_1,\ a_2,\ldots, a_N,\ldots$ букв нек-рого s-буквенного алфавита, рассматривают «урезанные» сообщения длины N, т. е. цепочки $a_1,\ a_2,\ldots, a_N$. Число их не превышает sN. Выбирая в определении Э. в качестве x_i эти N-членные цепочки и в качестве p_i — соответствующие вероятности, получают нек-рую величину H_N. Отношение H_N/N даёт Э. на букву для N-членных цепочек. В теории информации устанавливается, что при очень широком допущении устойчивости вероятностных закономерностей во времени (стационарности источника) величина H_N/N, убывая, стремится к пределу

$$H_\infty=\lim_{N\to\infty}H_N/N,$$

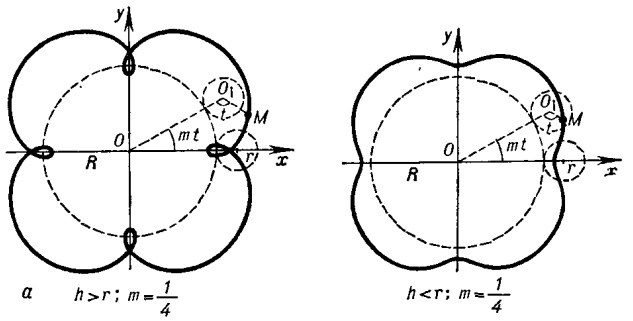
наз. энтропией сообщения на символ. Если все символы имеют нек-рую длительность и τ — их средняя

длительность, то отношение H_∞/τ даёт Э. источника на единицу времени. Эти две величины H_∞ и H_∞/τ являются основными информационными характеристиками источника сообщений. Так, H_∞ позволяет оценить максимально возможную степень «сжатия» сообщения при использовании того же алфавита (см. *Избыточность*, *Кодирование*). Соотношением между скоростью создания сообщений H_∞/τ и ёмкостью к.-л. канала с тем же входным алфавитом, что использован при записи сообщений, определяется возможность «почти безошибочной» передачи этих сообщений по каналу (см. *Шеннона теорема*).

Э. испытания с бесконечным числом исходов можно пытаться определить с помощью предельного перехода. Но этот путь приводит, как правило, к бесконечному значению Э. Поэтому задаются определённым уровнем точности ε и определяют ε-энтропию как Э. описываемого с точностью до ε исхода опыта. *Ю. В. Прохоров.*

ЭПИМОРФИ́ЗМ (от греч. ἐπί — на, над, при, после и μορφή — вид, форма) — морфизм категории, на который можно сокращать слева. В категории множеств Э.— это *сюръективное отображение*.

ЭПИТРОХО́ИДА (от греч. ἐπί — на, над, при, после и τροχός — колесо) — плоская кривая, траектория точки, жёстко связанной с производящей окружностью радиуса r, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности радиуса R вне её, причём вычерчивающая точка M находится на расстоянии h от центра производящей окружности. При $h>r$ кривая наз. удлинённой эпициклоидой (рис., *а*), при $h<r$ — укороченной (рис., *б*).



Параметрич. уравнения

$$x=(R+mR)\cos mt-h\cos(t+mt),$$
$$y=(R+mR)\sin mt-h\sin(t+mt),$$

где $m=r/R$. Э. при $r=R$ — улитка Паскаля, при $h=R+r$ — розы.

ЭПИЦИКЛО́ИДА (от греч. ἐπί — на, над, при, после и κυκλος — окружность, круг) — плоская кривая, траектория точки производящей окружности радиуса r, катящейся без скольжения по другой неподвижной окружности радиуса R вне её [см. рис. 1, где O и O_1 — центры неподвижной и производящей окружностей, N — точка их касания; M — вычерчивающая точка (A — её исходное положение), t — угол поворота производящей окружности, AM — участок кривой].

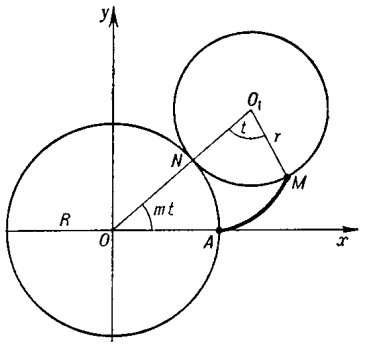


Рис. 1.

Параметрические уравнения:

$$x=(R+mR)\cos mt-mR\cos(t+mt),$$
$$y=(R+mR)\sin mt-mR\sin(t+mt),$$

где $m=r/R$. Форма кривой зависит от значения m (на рис. 2,*а* $m=1/3$, на рис. 2,*б* $m=2/3$). Если $m=p/q$ (p и q — взаимно простые числа), точка M после q полных оборотов производящей окружности возвращается в исходное положение и Э.— замкнутая кривая, состоящая из q ветвей с q точками возврата. Э. при $m=1$ — кардиоида. При m иррациональном число ветвей бесконечно, точка M в исходное положение не возвращается. Обобщением Э. является *эпитрохоида*.

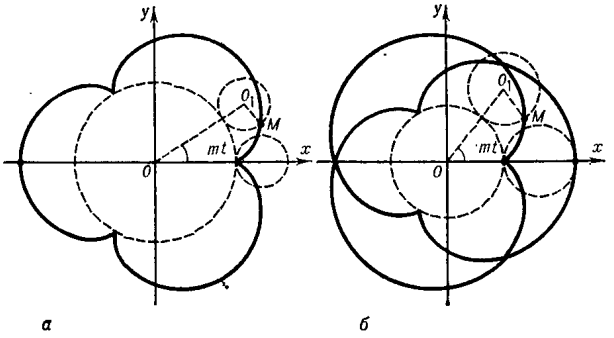


Рис. 2.

ЭПЮ́Р (от франц. épure — чертёж), эпюра,— комплексный чертёж, на котором пространственная фигура изображена методом ортогональных проекций (см. *Начертательная геометрия*).

ЭРАТОСФЕ́НА РЕШЕТО́ — метод, разработанный Эратосфеном и позволяющий отсеивать составные числа из натурального ряда. Сущность Э. р. заключается в следующем. Зачёркивается единица. Число 2 — простое. Зачёркиваются все натуральные числа, делящиеся на 2. Число 3 — первое незачёркнутое число — будет простым. Далее зачёркиваются все натуральные числа, к-рые делятся на 3. Число 5 — следующее незачёркнутое число — будет простым. Продолжая аналогичные вычисления, можно найти сколь угодно большой отрезок последовательности простых чисел. Э. р. как теоретич. метод исследования в теории чисел развит В. Бруном (1919).

ЭРГОДИ́ЧЕСКАЯ ТЕО́РИЯ (от греч. ἔργον — работа и ὁδός — путь) — метрическая теория динамических систем,— раздел теории динамических систем (д. с.), изучающий д. с. с инвариантной мерой μ и смежные вопросы. Д. с. может пониматься в широком и абстрактном смысле — как группа (полугруппа) преобразований, действующая в нек-ром фазовом пространстве M, а μ инвариантна (сохраняется) при преобразованиях группы (прообраз измеримого множества измерим и имеет ту же меру). При этом накладываются те или иные условия на M, μ и группу. Важнейшие случаи — потоки и каскады (см. *Динамическая система*).

В абстрактной (общей, или чисто метрической) части Э. т. изучаются: а) статистич. свойства д. с., отражающие их поведение на больших отрезках времени; б) вопросы, связанные с метрич. классификацией д. с., то есть классификацией относительно метрического изоморфизма (взаимно однозначного преобразования одного фазового пространства в другое, к-рое коммутирует с преобразованиями из соответствующих д. с. и при к-ром образы и прообразы измеримых множеств измеримы и имеют ту же меру). Пример к п. а) (эргодическая теорема Биркгофа): при весьма общих предположениях для любой функции $f\in L^1(M,\mu)$ существуют средние по времени вдоль почти каждой траектории каскада $\{\varphi^n\}$ или потока $\{\varphi_t\}$, т. е. при почти всех w существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k w),\quad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(\varphi_s w)\,ds.$$

Если они одинаковы при почти всех w, то д. с. наз. эргодической. Пример к п. б) (тривиальный): эргодические д. с. неизоморфны неэргодическим.

В более конкретной (прикладной) части Э. т. рассматриваются с тех же точек зрения разнообразные конкретные д. с. (и классы таковых), возникающие в различных разделах математики и в физике. Оказывается, напр., что у нек-рых «классических» д. с., движения в к-рых непосредственно описываются дифференциальными уравнениями, имеются сильные статистич. свойства, сходные со свойствами случайного процесса (к-рый тоже можно формализовать как нек-рую д. с., внешне совсем непохожую на «классические»); иногда «классическая» д. с. даже метрически изоморфна «вероятностной».

Помимо других разделов теории д. с., Э. т. тесно связана с функциональным анализом, теорией вероятностей, теорией информации; соответствующие идеи и методы могут выступать в Э. т. в существенно преобразованном виде. Её возникновение было связано с обсуждением эргодичности и др. статистич. свойств д. с., рассматриваемых в статистич. физике; само название «Э. т.» намекает на исследование поведения траекторий на многообразии постоянной энергии (позднее со статистич. физикой установились и др. контакты). Кроме того, Э. т. нашла применение при исследовании нек-рых д. с. физич. происхождения, имеющих качественно иной характер: с диссипацией и источниками энергии, с небольшим числом степеней свободы и совсем другими μ.

● Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В., Эргодическая теория, М., 1980.

Д. В. Аносов.

ЭРГОДИ́ЧЕСКАЯ ЦЕ́ПЬ МА́РКОВА — см. *Маркова цепь.*

ЭРЛА́НГА ФО́РМУЛЫ — формулы теории массового обслуживания, выражающие стационарную вероятность отказа для систем обслуживания с потерями. Если требования поступают в систему с n линиями обслуживания, то стационарная вероятность занятости k линий ($k=0, 1, \ldots, n$) равна по Э. ф.

$$p_k = \frac{\rho^k/k!}{\sum_{i=0}^{n} \rho^i/i!},$$

где ρ — отношение среднего времени обслуживания одного требования к среднему промежутку между моментами поступления требований. При $k=n$ Э. ф. дают вероятность отказа. Э. ф. получены А. Эрлангом (20-е гг. 20 в.) при решении задач, связанных с перегрузкой телефонных линий.

ЭРЛА́НГЕНСКАЯ ПРОГРА́ММА — единая точка зрения на различные геометрии (напр., евклидову, аффинную, проективную), сформулированная впервые Ф. Клейном на лекции, прочитанной в 1872 в ун-те г. Эрланген (Германия) и напечатанной в том же году под назв. «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» (см. сб. «Об основаниях геометрии», М., 1956, с. 399—434).

Сущность Э. п. состоит в следующем. Евклидова геометрия рассматривает те свойства фигур, к-рые не меняются при движениях; равные фигуры определяются как фигуры, к-рые можно перевести одну в другую движением. Но вместо движений можно выбрать к.-н. иную совокупность геометрич. преобразований и объявить «равными» фигуры, получающиеся одна из другой с помощью преобразований этой совокупности; при этом приходят к иной «геометрии», изучающей свойства фигур, не меняющиеся при рассматриваемых преобразованиях. Введённое «равенство» должно удовлетворять следующим трём естественным условиям: 1) каждая фигура F «равна» сама себе; 2) если фигура F «равна» фигуре F', то и F' «равна» F; 3) если фигура F «равна» F', а F' «равна» F'', то и F «равна» F''. Соответственно этому приходится накладывать на совокупность преобразований следующие три требования: 1) в совокупность должно входить тождественное преобразование, оставляющее всякую фигуру на месте; 2) наряду с каждым преобразованием Π, переводящим фигуру F в F', в совокупность должно входить «обратное» преобразование Π^{-1}, переводящее F' в F; 3) вместе с двумя преобразованиями Π_1 и Π_2, переводящими соответственно F в F' и F' в F'', в совокупность должно входить произведение $\Pi_2\Pi_1$ этих преобразований, переводящее F в F'' ($\Pi_2\Pi_1$ состоит в том, что сначала производится Π_1, а затем Π_2). Требования 1), 2) и 3) означают, что рассматриваемая совокупность является группой преобразований. Теория, к-рая изучает свойства фигур, сохраняющиеся при всех преобразованиях данной группы, наз. геометрией этой группы.

Выбирая по-разному группы преобразований, получают разные геометрии. Так, принимая за основу группу движений, приходят к обычной (евклидовой) геометрии; заменяя движения аффинными или проективными преобразованиями,— к аффинной или соответственно к проективной геометрии. Ф. Клейн показал, что принятие за основу группы проективных преобразований, переводящих в себя нек-рый круг (или произвольное конич. сечение), приводит к неевклидовой *Лобачевского геометрии.* Ф. Клейн ввёл в рассмотрение довольно широкий круг других геометрий, определяемых подобным же образом.

Э. п. не охватывает нек-рых важных разделов геометрии, напр. риманову геометрию. Однако Э. п. имела для дальнейшего развития геометрии существенное стимулирующее значение.

ЭРМИ́ТА ИНТЕРПОЛЯЦИО́ННАЯ ФО́РМУЛА — форма записи многочлена $H_m(x)$ степени m, решающего задачу интерполирования функции $f(x)$ по её значениям и значениям её производных в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, т. е. удовлетворяющего условиям:

$$H_m^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k),$$
$$j = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_k - 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$
$$m = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i - 1.$$

Э. п. ф. предложена Ш. Эрмитом (1878).

ЭРМИ́ТА КВАДРАТУ́РНАЯ ФО́РМУЛА — см. *Мелера квадратурная формула.*

ЭРМИ́ТА МНОГОЧЛЕ́НЫ — система ортогональных многочленов $\{H_n(x)\}$ на всей числовой оси $-\infty<x<+\infty$ с весом e^{-x^2}. Для $n=0, 1, \ldots$ Э. м. определяются формулой

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n};$$

в частности,

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2,$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

Дифференциальное уравнение и рекуррентная формула для Э. м. имеют соответственно вид

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$
$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Определение Э. м. встречается у П. Лапласа (1810). Подробное исследование этих многочленов опубликовал П. Л. Чебышев (1859). Затем эти многочлены изучал Ш. Эрмит (1864).

ЭРМИ́ТА ФУ́НКЦИИ — ортогональная система функций на всей числовой оси $-\infty<x<+\infty$ с весом 1, тесно связанная с *Эрмита многочленами* $H_n(x)$. Э. ф. $h_n(x)$ выражаются через многочлены Эрмита формулой

$$h_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n};$$

они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$u'' + (2n + 1 - x^2)\, u = 0.$$

ЭРМИ́ТОВ ОПЕРА́ТОР, симметрический оператор,— линейный оператор A в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $D(A)$ и такой, что $(Ax, y)=(x, Ay)$ для любых $x, y \in D(A)$. Это условие эквивалентно тому, что: 1) $D(A) \subset D(A^*)$, 2) $Ax=A^*x$ для всех $x \in D(A)$, где A^* — оператор, сопряжённый с A, т. е. что $A \subset A^*$. Ограниченный Э. о. либо

определён на всём H, либо по непрерывности расширяется до такого и при этом $A=A^*$, т.е. A — самосопряжённый оператор. Неограниченный Э. о. может как иметь, так и не иметь самосопряжённых расширений. Иногда эрмитовым наз. самосопряжённый оператор, сохраняя для оператора, эрмитова в указанном выше смысле, назв. «симметрический».

В конечномерном пространстве Э. о. описывается *эрмитовой матрицей*.

ЭРМИ́ТОВА МА́ТРИЦА, самосопряжённая матрица, эрмитово симметрическая матрица,— матрица $A=\|a_{ik}\|_1^n$ с комплексными элементами, совпадающая со своей сопряжённой, т. е. такая, что $a_{ik}=\overline{a}_{ki}$. Таким образом, диагональные элементы Э. м. действительны. Если все элементы Э. м. действительны, то Э. м.— симметрич. матрица. Если A и B — Э. м. одного порядка, то $A+B$ — Э. м.; произведение AB Э. м. является Э. м. тогда и только тогда, когда A и B перестановочны: $AB=BA$.

Все собственные значения Э. м. действительны. Для каждой Э. м. A существует унитарная матрица U такая, что $U^{-1}AU$ — диагональная действительная матрица.

Э. м. порядка n служат матрицами эрмитовых преобразований n-мерного унитарного пространства в ортонормированном базисе. С другой стороны, Э. м.— это матрицы эрмитовых форм в n-мерном комплексном векторном пространстве.

ЭРМИ́ТОВА ФО́РМА — многочлен вида

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i\overline{x}_j,$$

где $a_{ij}=\overline{a}_{ji}$ ($\overline{a}$ — число, комплексно сопряжённое с a). Скалярный квадрат вектора унитарного пространства является Э. ф. от координат этого вектора. Матрица, составленная из коэффициентов Э. ф., является *эрмитовой матрицей*. Теория Э. ф. во многом аналогична теории *квадратичных форм*. Ш. Эрмит (1854) исследовал вопрос о представлении целых чисел этими формами при целочисленных значениях аргументов.

ЭРМИ́ТОВО ПРЕОБРАЗОВА́НИЕ — линейное преобразование, задаваемое эрмитовой матрицей (см. также *Самосопряжённое линейное преобразование*).

ЭРМИ́ТОВО ПРОСТРА́НСТВО — то же, что *унитарное пространство*.

ЭРМИ́ТОВО СИММЕТРИ́ЧЕСКАЯ МА́ТРИЦА — то же, что *эрмитова матрица*.

ЭРМИ́ТОВО СОПРЯЖЁННАЯ МА́ТРИЦА — то же, что *сопряжённая матрица*.

ЭФФЕКТИ́ВНАЯ СТАТИСТИ́ЧЕСКАЯ ОЦЕ́НКА (от лат. effectivus — действенный) — см. *Статистическая оценка*.

Я

Я́ДЕРНОЕ ПРОСТРА́НСТВО — локально выпуклое пространство, у к-рого все линейные непрерывные отображения в каждое банахово пространство являются ядерными операторами. По своим свойствам Я. п. приближаются к конечномерным пространствам.

Я́ДЕРНЫЙ ОПЕРА́ТОР — линейный оператор, отображающий одно локально выпуклое пространство в другое и допускающий специального вида аппроксимации операторами конечного ранга, т. е. линейными непрерывными операторами с конечномерными образами. Я. о. обладает нек-рыми свойствами, присущими конечномерным операторам. В частности, Я. о., отображающий в себя пространство с базисом, имеет конечный след, совпадающий с суммой ряда, составленного из диагональных элементов матрицы этого оператора относительно произвольного базиса. Я. о. и появились первоначально под наименованием «операторов со следом». Интегральные операторы, в частности интегральные операторы Фредгольма, дают многочисленные примеры Я. о. и их модификаций.

Я́ДРО гомоморфизма φ: $A\to B$ алгебраических систем — совокупность всех элементов системы A, отображающихся в нуль системы B. Я. является подсистемой в A; Я. гомоморфизма групп — нормальная подгруппа; Я. гомоморфизма колец — идеал. Я. линейного отображения (гомоморфизма векторных пространств) — подпространство. Размерность Я. линейного преобразования наз. дефектом линейного преобразования.

Я́ДРО интегрального оператора — функция $K(s,\ t)$, задающая интегральное преобразование

$$\varphi(s)=\int_a^b K(s,\ t)\,f(t)\,dt,$$

к-рое переводит функцию $f(t)$ в функцию $\varphi(s)$. Теория таких преобразований связана с теорией линейных интегральных уравнений.

ЯКО́БИ МЕ́ТОД — 1) метод приведения квадратичной формы к каноническому виду при помощи треугольного преобразования переменных, предложенный К. Якоби (1834).

Пусть дана квадратичная форма

$$f=\sum_{i,\ k=1}^n a_{ki}x_iy_k$$

над нек-рым полем характеристики $\neq 2$, причём симметрическая матрица $A=\|a_{ki}\|$ этой формы удовлетворяет следующему условию:

$$\Delta_k\neq 0,\quad k=1,\ \ldots,\ n,$$

где Δ_k — минор k-го порядка, стоящий в её левом верхнем углу. Тогда форма f приводится к канонич. виду:

$$f=\sum_{k=1}^n \frac{u_k^2}{\Delta_{k-1}\Delta_k},\quad \Delta_0=1, \tag{1}$$

при помощи следующего невырожденного преобразования переменных:

$$u_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k-1} & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k-1} & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk-1} & \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_k}\end{vmatrix} \tag{2}$$

при $k=2,\ldots,n$, и

$$u_1=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

Это преобразование имеет треугольную матрицу и записывается в виде

$$u_k=\sum_{i=k}^n c_{ki}x_i, \tag{3}$$

где c_{ki} — минор матрицы A, стоящий в строках с номерами $1, 2,\ldots, k-1, k$ и столбцах с номерами $1, 2,\ldots, k-1, i$.

Формулы (1) — (3) наз. иногда формулами Якоби. В случае когда матрица квадратичной формы f удовлетворяет лишь условию

$$\Delta_i\neq 0,\quad i=1,\ \ldots,\ r,$$
$$\Delta_{r+1}=\ldots=\Delta_n=0,$$

где r — ранг формы, эта форма может быть приведена к

канонич. виду

$$f=\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{\Delta_{k-1}\Delta_k}u_k^2$$

(здесь $\Delta_0=1$) треугольным невырожденным преобразованием переменных. Приведение можно осуществить при помощи *Гаусса метода*.

2) Метод простой итерации для решения системы линейных алгебраич. уравнений $Ax=b$, в к-ром предварительное преобразование системы к виду $x=Bx+g$ осуществляется по правилу

$$B=E-D^{-1}A,\quad g=D^{-1}b,$$

$D=\|d_{ij}\|$, $d_{ii}=a_{ii}$, $i=1, 2, \ldots, n$, $d_{ij}=0$, $i\neq j$.

3) *Вращений метод* для решения полной проблемы собственных значений и собственных векторов эрмитовой матрицы.

ЯКО́БИ МНОГОЧЛЕ́НЫ — многочлены, определяемые формулой

$$P_n(x\ ;\ \alpha,\ \beta)=$$
$$=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Я. м. ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ относительно веса $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Введены К. Якоби (публикация в 1859). Частными случаями Я. м. являются многочлены Лежандра (при $\alpha=\beta=0$), многочлены Чебышева первого рода (при $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$) и второго рода (при $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$), ультрасферич. многочлены (при $\alpha=\beta$). В свою очередь, Я. м. являются частным случаем гипергеометрич. функции. Я. м. удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1+x^2)[P_n(x;\ \alpha,\ \beta)]''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\times$$
$$\times[P_n(x;\ \alpha,\ \beta)]'+n(\alpha+\beta+n-1)P_n(x;\ \alpha,\ \beta)=0.$$

Имеет место формула:

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^\alpha)(1+x)^\beta[P_n(x;\ \alpha,\ \beta)]^2\,dx=$$
$$=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+2n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

ЯКО́БИ СИ́МВОЛ — функция $\left(\frac{a}{P}\right)$, определяемая для всех целых a, взаимно простых с заданным нечётным целым числом $P>1$, следующим образом: если $P=p_1p_2\ldots p_r$ — разложение числа P на простые сомножители, не обязательно различные, то

$$\left(\frac{a}{P}\right)=\left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right)\ldots\left(\frac{a}{p_r}\right),$$

где $\left(\frac{a}{p_i}\right)$ — *Лежандра символы*. Я. с. является обобщением символа Лежандра и обладает аналогичными с ним свойствами. Я. с. введён К. Якоби в 1837. См. *Квадратичный вычет*.

ЯКО́БИ ТО́ЖДЕСТВО — одно из тождеств, определяющих *Ли алгебру*. Введено К. Якоби.

ЯКО́БИ УРАВНЕ́НИЕ — линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, важное для *вариационного исчисления*. Уравнение приведено К. Якоби (1837).

ЯКО́БИ УСЛО́ВИЕ — необходимое условие оптимальности в задачах *вариационного исчисления*. Условие установлено К. Якоби (1837).

ЯКО́БИ ЭЛЛИПТИ́ЧЕСКАЯ ФУ́НКЦИЯ — см. *Эллиптические функции*. Я. э. ф. введены и изучены К. Якоби (1829).

ЯКОБИА́Н, определитель Якоби,— функциональный определитель специального вида, составленный из частных производных 1-го порядка. Пусть заданы m функций $x_i=\varphi_i(t_1,\ldots, t_m, t_{m+1},\ldots, t_n)$, $i=1, 2,\ldots, m$, имеющих частные производные 1-го порядка по переменным $t_1, t_2,\ldots, t_m$, тогда Я. этих функций наз. определитель вида

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_m}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial t_2} & \ldots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial t_m}\end{vmatrix},$$

кратко обозначаемый символом

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_m)}.$$

Модуль Я. характеризует растяжение (сжатие) элементарного объёма при переходе от переменных $x_1, x_2,\ldots, x_m$ к переменным $t_1, t_2,\ldots, t_m$. К. Якоби (1833, 1841) впервые изучил его свойства и указал на применения.

ЯЧЕ́ЙКА в комбинаторике — см. *Размещение*.

ЯЩИКОВ ПРИ́НЦИП — то же, что *Дирихле принцип*.

БИОГРАФИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ

Биографиям учёных-математиков посвящено ок. 900 статей, многие из них сопровождаются портретами, списком основных сочинений и литературой об учёных. При составлении Биографического словаря редакция преследовала следующие цели. Во-первых, дать обстоятельные очерки о выдающихся математиках, чьё творчество сыграло первостепенную роль в развитии математики (в основном эти очерки заимствованы из 1—3-го изданий Большой советской энциклопедии); во-вторых, дать биографические справки о всех математиках — членах Академии наук нашей страны (название Академии с момента её основания менялось, о чём см. ниже); в-третьих, о всех учёных, упомянутых в Основной части Словаря. Для написания таких справок (коротких, как правило) редакция использовала всю доступную ей справочно-энциклопедическую литературу, в частности биографический справочник «Математики и механики» (автор А. Н. Боголюбов, Киев, 1983) и вышедший несколько ранее «Биографический словарь деятелей в области математики» (авторы А. И. Бородин, А. С. Бугай, редактор И. И. Гихман, Киев, 1979).

При указании в биографиях учёных членства в научных учреждениях различных стран редакция испытывала определённые затруднения, связанные с изменениями названий этих учреждений и подысканием русского эквивалента для некоторых из этих названий. В большинстве случаев редакция следовала в этом установившейся в русской литературе традиции (во избежание недоразумений ниже даются разъяснения, касающиеся старейших из этих учреждений).

Петербургская академия наук (АН). Под этим названием в Словаре понимается основанная в Петербурге указом Петра I [от 28 янв. (ст. ст.) 1724] академия наук; открытие её состоялось 27 дек. (ст. ст.) 1725. Первоначальное название — Академия наук и художеств, с 1803 — Императорская академия наук, с 1836 — Императорская Санкт-Петербургская академия наук. С февр. 1917 по 1925 — Российская академия наук и с июля 1925 — Академия наук СССР (к фактам, относящимся к этому периоду, в Словаре используется название АН СССР). Первые члены Петербургской АН должны были не только содействовать развитию науки, но и способствовать подготовке кадров в университете, поэтому их академическими званиями были: профессор, экстраординарный профессор (профессор мог иметь одного или двух помощников — адъюнктов), а после разделения (1747) Академии и университета звание профессора было сохранено за преподавателями университета; в нашем Словаре звание «акад. Петербургской АН» относится к лицам, которые были избраны академиками (профессорами) и экстраординарными академиками (профессорами), причём дата избрания относится к первому академическому званию. В Академию избирались также иностранные члены и почётные члены. В 1759 была учреждена новая категория сотрудников — членов-корреспондентов. В 1912 были упразднены звания экстраординарного академика и адъюнкта. Ныне в состав АН СССР входят действительные члены (академики), члены-корреспонденты и иностранные члены.

Парижская академия наук (АН) — французское научное учреждение, основанное в 1666 под названием (существовавшим до 1793) Королевской академии наук (L'Académie royal des sciences), а с 1795 входящее в Институт Франции (L'Institut de France) и с 1816 носящее название Академии наук, точнее Академии естественных наук (L'Académie des sciences); члены этого учреждения именуются «чл. Парижской АН».

Лондонское королевское общество (The Royal Society of London) — научное учреждение, созданное в Лондоне в 1660 и утверждённое Королевской хартией в 1662. В международных научных союзах выступает в качестве национальной академии наук Великобритании.

Национальная академия деи Линчеи в Риме (Accademia Nazionale dei Lincei) — итальянское научное учреждение, основанное в 1603; в деятельности академии имелись перерывы. Название происходит от слова lince — рысь (основатели академии поклялись познавать природу глазами, зоркими, как у рыси).

Берлинская академия наук (АН) — немецкое научное учреждение, основанное в 1700 и с 1711 называвшееся Прусской академией наук (Preussische Akademie der Wissenschaften), с 1946 по 1972 — Немецкой академией наук (Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin) и с 1972 — Академией наук ГДР (Akademie der Wissenschaften der DDR).

А

А́БЕЛЬ Нильс Хенрик (Abel Niels Henric) (5.8.1802, близ Ставангера,— 6.4.1829, близ Арендаля) — норвежский математик. Родился в семье пастора, учился в Кристиании (Осло). Исключительные математич. способности начал проявлять с 16 лет. В 1825—27 совершил путешествие по Европе, во время к-рого завязал дружеские отношения со многими известными математиками. На родине А. не был признан при жизни, жил в нужде, умер от туберкулёза. В 1908 в Осло воздвигнут памятник А.

Работы А. оказали большое влияние на развитие всей математики. Они привели к появлению ряда новых математич. дисциплин: теории Галуа, теории алгебраич. функций, и содействовали всеобщему признанию теории функций комплексного переменного. Первые исследования А. относятся к алгебре. А. доказал (1824, 1826), что алгебраич. уравнения степени выше 4-й в общем случае неразрешимы в радикалах, указал также частные типы уравнений, разрешимых в радикалах; связанные с ними группы наз. абелевыми группами. В интегральном исчислении изучал интегралы от алгебраич. функций — абелевы интегралы (1827). А.— один из создателей теории эллиптич. функций. Большое значение имеют его работы по обоснованию математич. анализа. А. систематически подчёркивал необходимость пользоваться только сходящимися рядами. Ему принадлежит исследование области сходимости биномиального ряда для комплексных значений переменных (1826) и свойств функций, представимых степенными рядами. А. написал первую работу (1823), посвящённую интегральным уравнениям. Работы А. оставили заметный след в теории интерполирования функций, теории функциональных уравнений и теории чисел.

■ Oeuvres complètes, t. 1—2, Kristiania, 1881.

● Оре О., Замечательный математик Нильс Хенрик Абель, пер. с англ., М., 1961.

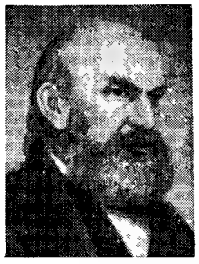
АБУ́ КАМИ́ЛЬ, Шуджа ибн Аслам ибн Мухаммед аль-Хасиб аль-Мисри (ок. 850—930) — египетский математик. Работал в Каире. Занимался решением неопределённых уравнений в целых числах. Считается первым учёным (после аль-Хорезми), писавшим алгебраич. труды. Его трактат «Книга об алгебре и алмукабале» оказал влияние на развитие алгебры в Европе.

● История математики, т. 1, М., 1970; Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А., Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды, кн. 2, М., 1983, с. 112—14.

Н. Х. Абель.

В. Е. Ададуров.

Ж. С. Адамар.



Дж. К. Адамс.

АБУ́-ЛЬ-ВЕФА́, Абу-ль-Уафа Мохаммед ибн Мохаммед аль-Бузджани [10.6.940—998 (по др. данным, 997)] — арабский астроном и математик из Хорасана. Автор оригинального сочинения о геометрич. построениях, а также переводчик трудов Диофанта.

■ Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений, в сб.: Физико-математические науки в странах Востока, М., 1966, в. 1 (4), с. 56—140.

● Медовой М. И., Об арифметическом трактате Абу-л-Вафы, в сб.: Историко-математические исследования, М., 1960, в. 13, с. 253—324; Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А., Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды, кн. 2, М., 1983, с. 177—81.

АДАДУ́РОВ, Ададуров Василий Евдокимович [15(26).3.1709, Новгород,— 5(16).11.1780, Петербург] — русский математик, почётный чл. Петербургской АН (1778), первый русский учёный, избранный адъюнктом АН (1733—41). Был попечителем Московского ун-та. Занимался вопросами преподавания математич. наук. Перевёл (СПБ, 1740) на русский язык 1-ю часть «Арифметики» Л. Эйлера. Издал первые правила русской орфографии.

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

АДАМА́Р Жак Саломон (Hadamard Jacques Salomon) (8.12.1865, Версаль,— 17.10.1963, Париж) — французский математик, иностранный чл.-корр. (1922) и иностранный почётный чл. (1929) АН СССР, чл. Парижской АН (1912), проф. Коллеж де Франс (1897—1935), Парижского ун-та (1900—12), Политехнич. школы (1912—35). Известен исследованиями в различных областях математики. В теории чисел доказал (1896) высказанный П. Л. Чебышевым асимптотич. закон распределения простых чисел, создал значительную часть современной теории целых аналитич. функций, получил существенные результаты в теории дифференциальных уравнений. Его идеи оказали большое влияние на создание функционального анализа. В механике занимался проблемами устойчивости и исследованием свойств траекторий механич. систем вблизи положения равновесия и др. Много занимался вопросами школьного преподавания и написал учебник геометрии.

■ Oeuvres, v. 1—4, P., 1968; Cours d'analyse, t. 1—2, P., 1927—30; Элементарная геометрия, 4 изд., ч. 1, М., 1957, 3 изд., ч. 2, М., 1958; Неевклидова геометрия в теории автоморфных функций, М.— Л., 1951; Исследование психологии процесса изобретения в области математики, М., 1970; Задача Копи для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, М., 1978.

● «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 3, с. 163—82.

АДАМС Джон Кауч (Куч) (Adams John Couch) (5.6.1819, Лейнаст,— 21.1.1892, Лондон) — английский астроном и математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1864), чл. Лондонского королевского общества. С 1861 директор Кембриджской астрономич. обсерватории. Основные труды по небесной механике и математич. физике. Одновременно с У. Леверье предсказал (1845) открытие планеты Нептун. Известен (1855) метод Адамса численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

АДАМС Джон Фрэнк (Adams John Frank) (р. 5.11.1930, Лондон) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1964). Окончил Кембриджский ун-т (1952), работает там же (в 1953—55, 1958—61 и с 1970). Основные труды по алгебраич. топологии.

■ Лекции по группам Ли, М., 1979.

А́ДЛЕР Август (Adler August) (24.1.1863, Троппау,— 17.10.1923) — немецкий математик. Преподавал математику в технич. учебных заведениях. Основные труды по геометрии.

■ Теория геометрических построений, 3 изд., Л., 1940.

АЛЕКСА́НДЕР Джеймс Уодделл (Alexander James Waddell) (19.9.1888, Си-Брайт, шт. Нью-Джерси,—23.9.1971, Принстон, шт. Нью-Джерси) — американский математик, чл. Национальной АН США (1936). Окончил Принстонский ун-т (1910) и преподавал там же (проф. с 1928). Проф. Принстонского ин-та перспективных исследований (1933—51). Работы в области топологии (в частности, А. доказал закон двойственности для полиэдров, 1923), а также в алгебраич. геометрии, теории функций и др.

■ Кольцо связности абстрактного пространства, «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 1, с. 156—65.

А. Д. Александров.

АЛЕКСА́НДРОВ Александр Данилович [р. 22.7(4.8).1912, с. Волынь, ныне Рязанской обл.] — советский математик, акад. АН СССР (1964; чл.-корр. 1946). Чл. КПСС с 1951.

П. С. Александров.

Н. Н. Алексеев.

Л. В. Альфорс.

А. М. Ампер.

Анаксагор.

К. А. Андреев.

По окончании Ленинградского ун-та (1933) работал там же (в 1952—64 ректор). В 1964—86 работал в Сибирском отделении АН СССР, с 1986 в Ленинградском отделении Математич. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды А. относятся к геометрии, где он открыл методы изучения метрич. свойств фигур, породившие новый объект исследования — т. н. нерегулярные метрич. многообразия, более общие, нежели римановы пространства. Эти методы существенно расширили область геометрич. исследований и привели к решению ряда классич. проблем теории поверхностей, а также нашли важные применения в теории дифференциальных уравнений. А. принадлежат также исследования по теории меры, основаниям теории относительности и философии. Государственная премия СССР (1942), Международная премия имени Н. И. Лобачевского АН СССР (1951). Награждён орденом Ленина (1961), 3 орденами Трудового Красного Знамени (1953, 1957, 1975), орденом Дружбы народов (1982). А.— мастер спорта СССР по альпинизму (1949).

■ Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, М.— Л., 1948; Выпуклые многогранники, М.— Л., 1950; Двумерные многообразия ограниченной кривизны, М. — Л., 1962 (соавтор В. А. Залгаллер); Основания геометрии, М., 1987.

● «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 6; 1973, т. 28, в. 2; «Вестник АН СССР», 1983, № 1.

АЛЕКСА́НДРОВ Павел Сергеевич [25.4(7.5).1896, Богородск, ныне Ногинск Московской обл.,— 16.11.1982, Москва] — советский математик, акад. АН СССР (1953; чл.-корр. 1929), Герой Социалистич. Труда (1969). В 1917 окончил Московский ун-т, с 1929 проф. там же. Почётный президент Московского математич. общества (1964; президент в 1932—64), чл. редколлегии «Математической энциклопедии», редактор журнала «Успехи математических наук» (с 1954). А.— создатель советской топологич. школы, получившей мировое признание. Начал научную работу в области теории множеств и теории функций, затем посвятил себя разработке топологии. Вместе с П. С. Урысоном основал и развил теорию бикомпактных пространств. Ввёл ряд фундаментальных понятий и конструкций топологии (нерв покрытия, аппроксимация общих топологич. пространств полиэдрами, обратные спектры топологич. пространств, теорема о мощности A-множеств). Создал теорию существенных отображений и гомологич. теорию размерности, позволившую получить в общем виде основные законы двойственности, связывающие топологич. свойства фигур и множеств с топологич. свойствами дополнительной части пространства.

А.— чл. Польского математич. общества (1935), иностранный чл. Гёттингенской АН (1945), Национальной АН США (1947), Американского философского общества (1947), АН ГДР (1950), чл. Польской АН (1959), Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина» (1959), почётный доктор наук Берлинского ун-та им. Гумбольдта (1961), почётный чл. Амстердамского математич. общества (1967), чл.-корр. Австрийской АН (1968), почётный доктор наук Ясского ун-та (1970). Государственная премия СССР (1943), Международная премия имени Н. И. Лобачевского АН СССР (1972). Награждён 6 орденами Ленина (1946, 1953, 1961, 1966, 1969, 1975), орденом Октябрьской Революции (1980), отеном Трудового Красного Знамени (1945), орденом «Знак Почёта» (1940).

■ Введение в теорию функций действительного переменного, 3 изд., М.— Л., 1938 (соавтор А. Н. Колмогоров); Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., 1948; Что такое неэвклидова геометрия, М., 1950; Лекции по аналитической геометрии, . . ., М., 1968; Введение в теорию множеств и общую топологию, М., 1977; Введение в теорию групп, М., 1980; Topologie, Bd 1, B., 1935 (соавтор H. Hopf); Комбинаторная топология, М.—Л., 1947; Введение в теорию размерности, М., 1973 (соавтор Б. А. Пасынков); Введение в гомологическую теорию размерности, М., 1975; Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств, М., 1978; Теория размерности и смежные вопросы, М., 1978; Общая теория гомологий, М., 1979; Страницы автобиографии, «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 6; 1980, т. 35, в. 3.

● «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 4; 1971, т. 26, в. 3; 1976, т. 31, в. 5; 1981, т. 36, в. 3; Колмогоров А. Н., Воспоминания о П. С. Александрове, «Успехи матем. наук», 1986, т. 41, в. 6, с. 187—203.

АЛЕКСЕ́ЕВ Николай Николаевич [5(17).5.1827—3(15).3.1881, Петербург] — русский математик, адъюнкт Петербургской АН (с 1879). Окончил Московский ун-т (1853). Основные труды по теории эллиптич. функций, дифференциальным уравнениям, теории рядов.

● История отечественной математики, т. 2, К., 1967.

АЛЬГА́ЗЕН — см. *Ибн аль-Хайсам.*

А́ЛЬФОРС Ларс Валериан (Ahlfors Lars Valerian) (р. 18.4.1907, Хельсинки) — финский математик, чл. Национальной АН США (1946). Окончил Хельсинкский ун-т. С 1946 живёт в США. С 1946 проф. Гарвардского ун-та. Основные труды по теории конформных и квазиконформных отображений и теории мероморфных функций. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1936).

■ Лекции по квазиконформным отображениям, М., 1969; Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве, М., 1986.

АМПЕ́Р Андре Мари (Ampère André Marie) (22.1.1775, Лион,— 10.6.1836, Марсель) — французский физик и математик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1830), чл. Парижской АН (1814), с 1824 проф. Коллеж де Франс. Основные труды по физике; математич. работы относятся к теории вероятностей, математич. анализу, приложениям вариационного исчисления.

● Белькинд Л. Д., А. М. Ампер. 1775—1836, М., 1968.

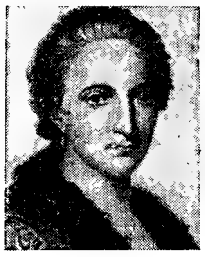
АНАКСАГО́Р ('Αναξαγόρας) из Клазомен в М. Азии (ок. 500—428 до н. э.) — древнегреческий философ. В Афинах преподавал философию. Занимался астрономией и математикой (проблемы перспективы, квадратура круга).

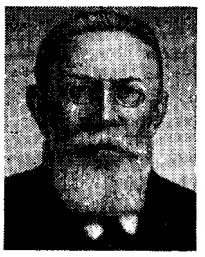
А́НГЕР Карл Теодор (Anger Karl Theodor) (31.7.1803, Данциг, ныне Гданьск,— 25.3.1858, там же) — немецкий астроном и математик, проф. гимназии в Данциге. Изучал цилиндрич. функции; в частности, рассматривал (1855) функции (функции Ангера), удовлетворяющие неоднородному уравнению Бесселя.

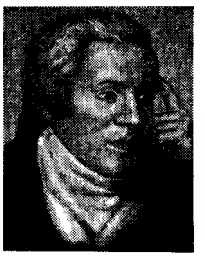
АНДРЕ́ЕВ Константин Алексеевич [14(26).3.1848, Москва, — 29.10.1921] — русский математик, чл.-корр. Петербургской АН (1884). Окончил Московский ун-т (1871). В 1874—98 работал в Харьковском ун-те (проф. с 1879), с 1898 проф. Московского ун-та. Основные труды по проективной геометрии и математич. анализу. Автор историко-биографич. очерков. Один из основателей Харьковского математич. общества (1879) и его председатель (1884—99).

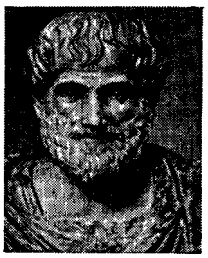
● Гордевский Д. З., К. А. Андреев — выдающийся русский геометр, Харьков, 1955.

АНТИФО́НТ, Антифон ('Αντιφῶν) (2-я пол. 5 в. до н. э.) — древнегреческий философ-софист. Занимался ква-


М. Г. Аньези.


П. Э. Аппель.


Арауху де Азеведу.


Аристотель.

В. И. Арнольд.

Э. Артин.

дратурой круга, близко подошёл к идее метода исчерпывания.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

АНЬЕ́ЗИ Мария Гаэтана (Agnesi Maria Gaetana) (16.5.1718, Милан,— 9.1.1799, там же) — итальянский математик, проф. ун-та в Болонье (с 1750). Сочинение А. «Основания анализа для употребления итальянского юношества» («Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana», v. 1—2, Mil., 1748) содержит изложение аналитич. геометрии, в частности там рассмотрена кривая 3-го порядка, наз. локоном Аньези.

АПОЛЛО́НИЙ Пергский (Ἀπολλώνιος) (ок. 260—170 до н. э.) — древнегреческий математик, один из представителей александрийской школы. Важнейший труд — «Конические сечения», первые 4 книги к-рого сохранились в греческом подлиннике, следующие 3 — в арабском переводе, а последняя, 8-я книга, утеряна. Труд А. оказал огромное влияние на развитие науки нового времени — астрономии, механики, оптики. Ему принадлежит также ряд других сочинений, не дошедших до нас. А. ввёл понятия и термины: «гипербола», «парабола», «эллипс», «фокус» (эллипса и гиперболы), «асимптота».

■ Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiques, ed. J. L. Heiberg, v. 1—2, Lipsiae, 1891—93; Конические сечения с комментариями Евтокия, «Известия Северо-Кавказского ун-та», 1928, т. 3(15), с. 130—52 (первые 20 предложений I книги).

● История математики, т. 1, М., 1970; Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

АППЕ́ЛЬ Поль Эмиль (Appell Paul Emile) (27.9.1855, Страсбур,— 24.10. 1930, Париж) — французский математик и механик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1911) и иностранный почётный чл. АН СССР (1925), чл. Парижской АН (1892), с 1885 проф. Парижского ун-та. Основные труды по механике, геометрии, теории аналитич. функций, где известны многочлены Аппеля (1880). Автор фундаментальных руководств по механике, теории эллиптич., алгебраич. и гипергеометрич. функций.

■ Элементы математического анализа, т. 1—2, М., 1923—24; Теоретическая механика, т. 1—2, М., 1960.

● Lebon E., Paul Appell, P., 1910.

АРА́УХУ ДЕ АЗЕВЕ́ДУ, Араужу ди Азеведу Антону, да Барка (Araujo de Azevedo Antônio da Barca) (1754—1817) — португальский математик, историк, натуралист, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1791).

АРБОГА́СТ Луи Франсуа Антуан (Arbogast Louis François Antoine) (4.10. 1759, Мютсиг,— 8.4.1803, Страсбур) — французский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1791), чл. Парижской АН (1796). В 1789 составил «Опыт о новых началах дифференциального и интегрального исчисления, независимых от теорий бесконечно малых и пределов», где придерживался в основаниях анализа алгебраич. принципов Ж. Лагранжа; рукопись не была опубликована. В 1800 опубликовал книгу «Об исчислении дериваций» [«Du calcul des dérivations», Strasburg, ann. VIII (1800)]. Ввёл термин «факториал» (1800).

● История математики, т. 3, М., 1972.

АРГА́Н Жан Робер (Argand Jean Robert) (22.7.1768, Женева,— 13.8.1822, Париж) — швейцарский математик. Дал геометрич. интерпретацию комплексных чисел на плоскости (1806), ввёл термин «модуль комплексного числа» (1814—15).

■ Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, 2 éd., P., 1874.

АРИАБХА́ТА (ок. 475 — г. смерти неизв.) — индийский астроном и математик. В его соч. «Ариабхатиам» изложены математич. сведения, необходимые главным образом для астрономич. вычислений, встречаются извлечение квадратного и кубич. корней из чисел, простейшие задачи на составление и решение уравнений (уравнения с двумя неизвестными в целых числах), суммирование кубов натуральных чисел и др., приводится приближённое значение $\pi=3{,}1416$.

● Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961; Володарский А. И., Ариабхата, М., 1977.

АРИСТА́РХ Самосский (Ἀρίσταρχος) (кон. 4 в.— 1-я пол. 3 в. до н. э.) — древнегреческий астроном и математик. В трактате «О расстояниях Солнца и Луны» использовал неравенства для тригонометрич. функций, рассматривая их как отрезки в окружности.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

АРИСТО́ТЕЛЬ (Ἀριστοτέλης) (384, Стагира во Фракии,— 322 до н. э., о. Эвбея) — древнегреческий учёный, участник Академии Платона, основатель философской школы в Афинах, оказавшей большое влияние на всё последующее развитие многих наук. Воспитатель Александра Македонского. Охватил почти все доступные для его времени отрасли знания. Дал первое систематич. построение и изложение логики, в частности теории доказательств. Исследовал идеи потенциальной и актуальной бесконечности, непрерывного и дискретного количества, занимался нек-рыми вопросами геометрии.

■ Аналитики первая и вторая, М., 1952.

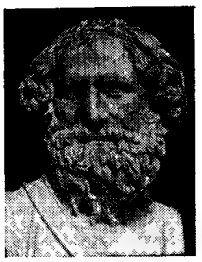
● Зубов В. П., Аристотель, М., 1963.

АРНО́ЛЬД Владимир Игоревич (р. 12.6.1937, Одесса) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1984). Окончил Московский ун-т (1959), с 1965 проф. там же. С 1986 работает в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды по теории функций, теории дифференциальных уравнений, геометрии и аналитич. механике. Почётный чл. Лондонского математич. общества (1976), почётный доктор Парижского ун-та (1979), иностранный чл. Национальной АН США (1983), Парижской АН (1984), АН ГДР (1987), Американской академии искусств и наук в Бостоне (1987). Ленинская премия (1965), Крафордская премия Королевской шведской АН (1982).

■ Обыкновенные дифференциальные уравнения, 3 изд., М., 1984; Математические методы классической механики, 2 изд., М., 1979; Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1978; Теория катастроф, 2 изд., М., 1983; Особенности дифференцируемых отображений, т. 1—2, М., 1982—84 (соавторы А. Н. Варченко и С. М. Гусейн-Заде).

А́РТИН Эмиль (Artin Emil) (3.3.1898, Вена,— 20.12.1962, Гамбург) — немецкий математик, с 1956 проф. Гамбургского ун-та. Основные труды по алгебре (теорема Веддербёрна — Артина о строении полупростых колец, артиново кольцо).

АРХИМЕ́Д (Ἀρχιμήδης) (ок. 287— 212 до н. э.) — древнегреческий учёный, математик и механик. Развил методы нахождения площадей, поверхностей и объёмов различных фигур и тел. Его математич. работы намного опередили своё время и были правильно оценены только в эпоху создания дифференциального и интегрального исчисления. А.— пионер математич. физики. Математика в его работах систематически применяется к исследованию задач естествознания и техники. А.— один из создателей меха-



Архимед.

ники как науки. Ему принадлежат различные технические изобретения.

А. родился в Сиракузах (о. Сицилия) и жил в этом городе в эпоху 1-й и 2-й Пунических войн. Предполагают, что он был сыном астронома Фидия. Научную деятельность начал как механик и техник. А. совершил поездку в Египет и сблизился с александрийскими учёными, в т. ч. с Кононом и Эратосфеном. Это послужило толчком к развитию его выдающихся способностей. А. был близок к сиракузскому царю Гиерону II. Во время 2-й Пунической войны А. организовал инженерную оборону Сиракуз от римских войск. Его военные машины заставили римлян отказаться от попыток взять город штурмом и вынудили их перейти к длительной осаде. При взятии города войсками Марцелла А. был убит римским солдатом, к-рого, по преданию, встретил словами: «Не трогай моих чертежей». На могиле А. был поставлен памятник с изображением шара и описанного около него цилиндра. Эпитафия указывала, что объёмы этих тел относятся, как 2 : 3,— открытие А., к-рое он особенно ценил.

Работы А. показывают, что он был прекрасно знаком с математикой и астрономией своего времени, и поражают глубиной проникновения в существо рассматриваемых им задач. Ряд работ имеет вид посланий к друзьям и коллегам. Иногда А. предварительно сообщал им без доказательств свои открытия, с тонкой иронией добавляя несколько неверных предложений.

В 9—11 вв. работы А. переводились на арабский язык, с 13 в. они появляются в Зап. Европе в латинском переводе. С 16 в. начинают выходить печатные издания А., в 17—19 вв. они переводятся на новые языки. Первое издание отдельных трудов А. на русском языке относится к 1823. Некоторые работы А. до нас не дошли или известны в отрывках, а его «Послание к Эратосфену» было найдено лишь в 1906.

Центральной темой математич. работ А. являются задачи на нахождение площадей поверхностей и объёмов. Решение многих задач этого типа А. первоначально нашёл, применяя механич. соображения, по существу сводящиеся к методу неделимых, а затем строго доказал методом исчерпывания, к-рый он значительно развил. Рассмотрение А. двусторонних оценок погрешности при проведении интегрирования процессов позволяет считать его предшественником не только И. Ньютона и Г. Лейбница, но и Б. Римана. А. вычислил площадь эллипса, параболич. сегмента, нашёл площадь поверхности конуса и шара, объём шара и сферич. сегмента, а также объёмы различных тел вращения и их сегментов. А. исследовал свойства т. н. архимедовой спирали. Дал построение касательной к этой спирали, нашёл площадь её витка. Здесь он выступает как предшественник методов дифференциального исчисления. А. рассмотрел также одну задачу изопериметрич. типа. В ходе своих исследований он нашёл сумму бесконечной геометрич. прогрессии со знаменателем $1/4$, что явилось первым примером появления в математике бесконечного ряда. При исследовании одной задачи, сводящейся к кубич. уравнению, А. выяснил роль характеристики, к-рая позже получила название дискриминанта. А. принадлежит формула для определения площади треугольника через три его стороны (традиционно именуемая формулой Герона). А. дал (не вполне исчерпывающую) теорию полуправильных выпуклых многогранников (архимедовы тела). Особое значение имеет аксиома Архимеда: из неравных отрезков меньший, будучи повторён достаточное число раз, превзойдёт больший. Эта аксиома определяет т. н. архимедовскую упорядоченность, к-рая играет важную роль в современной математике. А. построил счисление, позволяющее записывать и называть весьма большие числа. Он с большой точностью вычислил значение числа π и указал пределы погрешности:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Механика постоянно находилась в круге интересов А. В одной из своих первых работ он исследует распределение нагрузок между опорами балки. А. принадлежит определение понятия центра тяжести тела. Применяя, в частности, интегрирование методы, он нашёл положение центра тяжести различных фигур и тел. Дал математич. вывод законов рычага. Ему приписывают гордую фразу: «Дай мне, где стать, и я сдвину Землю». А. заложил основы гидростатики. Он сформулировал основные положения этой дисциплины, в т. ч. знаменитый закон Архимеда. Последняя работа А. посвящена исследованию равновесия плавающих тел. При этом он выделяет устойчивые положения равновесия. А. изобрёл водоподъёмный механизм, т. н. архимедов винт, к-рый явился прообразом корабельных, а также воздушных винтов. Рассказывают, что А. нашёл решение задачи об определении количества золота и серебра в жертвенной короне Гиерона, когда садился в ванну, и нагим побежал домой с криком «эврика!» («нашёл!»). А. занимался также астрономией. Он сконструировал прибор для определения видимого (углового) диаметра Солнца и нашёл значение этого угла с поразительной точностью. При этом А. ввёл поправку на размер зрачка. Он первым стал приводить наблюдения к центру Земли. Наконец, А. построил небесную сферу — механич. прибор, на к-ром можно было наблюдать движения планет, фазы Луны, солнечные и лунные затмения.

■ Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, ed. J. L. Heiberg, v. 1—3, Lipsiae, 1910—15; Сочинения, М., 1962.
● Лурье С. Я., Архимед, М.—Л., 1945; Каган В. Ф., Архимед. Краткий очерк о жизни и творчестве, 2 изд., М.—Л., 1951; Веселовский И. Н., Архимед, М., 1957; Heath T. L., Archimedes, L., 1920.

Архит.

М. Ф. Атья.

АРХИТ Тарентский (Ἀρχύτας) (ок. 428—365 до н. э.) — древнегреческий математик и астроном, государственный деятель и полководец. Последователь пифагорейской школы. Ему принадлежит решение задачи удвоения куба, основанное на построении пересечения нескольких поверхностей вращения. А. приписывается установление первых принципов механики, а также изобретение блока и винта.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

АТЬЯ, Атия Майкл Фрэнсис (Atiyah Michael Francis) (р. 22.4.1929, Лондон) — английский математик арабского происхождения, чл. Лондонского королевского общества (1962), чл. Парижской АН (1978). Окончил Кембриджский ун-т, в 1957—69 проф. Оксфордского ун-та. С 1969 работает в Ин-те перспективных исследований в Принстоне (США). Основные труды на стыке алгебраич. топологии и теории дифференциальных уравнений. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1966).

■ Лекции по K-теории, М., 1967; Введение в коммутативную алгебру, М., 1972 (соавтор И. Макдональд).

АХМЕ́С (ок. 2000 до н. э.) — египетский жрец и писец, составитель первого дошедшего до нас руководства по арифметике и геометрии (папируса Ринда).

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

Б

БАБЕ́НКО Константин Иванович (21.7.1919, Брянский рудник, ныне Ворошиловоградская обл.,— 10.6.

К. И. Бабенко.

П. П. Базен.

И. Я. Байер.

С. Банах.

И. Барроу.

М. Ф. Бартельс.

1987, Москва) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1976). Чл. КПСС с 1945. Окончил Харьковский ун-т (1941) и Военно-воздушную инженерную академию им. Н. Е. Жуковского (1945). С 1955 зав. отделом в Ин-те прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР, с 1970 проф. Московского ун-та. Основные труды по аэрогидромеханике, теории функций, вычислительной математике и математич. физике. Государственная премия СССР (1967), Серебряная медаль и премия 2-й степени им. Н. Е. Жуковского (1948). Награждён орденом Ленина (1979), орденом Октябрьской Революции (1971), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1955, 1956), орденом Отечественной войны 2-й степени (1985).

■ Основы численного анализа, М., 1986.
● «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, в. 2.

БАЗЕ́Н Пётр Петрович (Пьер Доминик) (Bazaine Pierre Dominique) (13.1.1786, Си, Франция,— 29.9.1838, Париж) — русский математик, механик, инженер, чл.-корр. (1817) и почётный чл. (1827) Петербургской АН. В 1824—34 проф. Петербургского ин-та корпуса инженеров путей сообщения. Основные работы по математич. анализу, геометрии, механике. Написал ряд учебников по математике и механике для русской Высшей технич. школы.

● Ожигова Е. П., Математика в Петербургской Академии наук в конце XVIII— первой половине XIX века, Л., 1980.

БА́ЙЕР, Бейер Иоганн Якоб (Baeyer Johann Jakob) (5.11.1794, Мюггельсхайм,— 11.9.1885, Берлин) — немецкий математик и геодезист, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1858), с 1869 президент Геодезич. ин-та в Берлине. Основные труды по топографии и геодезии.

БА́ЛЬТЦЕР, Бальцер Генрих Рихард (Baltzer Heinrich Richard) (27.1.1818, Майсен, близ Дрездена,— 7.11.1887, Гисен) — немецкий математик-педагог, проф. ун-та в Гисене. Один из первых изложил (1867) основы геометрии Лобачевского. Автор учебников по математике, переведённых на многие языки.

БА́НАХ Стефан (Banach Stefan) (30.3.1892, Краков,— 31.8.1945, Львов) — польский математик, проф. Львовского ун-та (с 1924), декан физико-математич. ф-та этого ун-та (с 1939). Один из создателей современного функционального анализа. Именем Б. обычно наз. векторные пространства, в к-рых наиболее плодотворно изучаются линейные функционалы и операторы. В годы немецко-фашистской оккупации Б. подвергался жестоким издевательствам фашистов. После освобождения Львова вновь возглавлял физико-математич. ф-т Львовского ун-та.

■ Œuvres, v. 1, Warsz., 1967; Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.
● «Успехи матем. наук», 1946, т. 1, в. 3—4.

БАРИ Нина Карловна [6(19).11.1901, Москва,— 15.7.1961, там же] — советский математик. Окончила Московский ун-т (1921), с 1926 работала там же (с 1934 проф.). Основные работы в области теории функций действительного переменного и теории приближения функций; Б. принадлежат глубокие исследования структуры непрерывных функций и единственности определения коэффициентов тригонометрич. ряда по изображаемой функции.

■ Тригонометрические ряды, М., 1961; Теория рядов, 2 изд., М., 1938.
● «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 1, с. 121—33.

БА́РЛОУ Питер (Barlow Peter) (13.10.1776, Норидж,— 5.3.1862, Вулидж) — английский математик и физик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1826). Автор распространённых «Таблиц квадратов, кубов, корней квадратных, корней кубических и обратных величин целых чисел от 1 до 10 000» (2 изд., М.— Л., 1936).

БА́РРОУ Исаак (Barrow Isaac) (1630, Лондон,— 4.5.1677, там же) — английский математик, филолог, богослов, проф. Кембриджского ун-та (1663—69). Автор труда «Лекции по оптике и геометрии» (1669—70), в к-ром выступает как один из предшественников И. Ньютона и Г. Лейбница в разработке исчисления бесконечно малых.

■ The mathematical works, pt 1—2, Camb., 1860.
● Osmond P. H., Isaak Barrow, his life and times, L., 1944.

БА́РТЕЛЬС Мартин Фёдорович (Иоганн Мартин Кристиан) (Bartels Johann Martin Christian) [23.8.1769, Брауншвейг,—7(19).12.1836, Дерпт, ныне Тарту] — русский математик, чл.-корр. Петербургской АН (1826), проф. Казанского (с 1803) и Дерптского (с 1820) ун-тов. Учитель Н. И. Лобачевского. Основные труды по математич. анализу и геометрии.

● Ожигова Е. П., Математика в Петербургской Академии наук в конце XVIII— первой половине XIX в., Л., 1980.

БАТТА́НИ, аль-Баттани Абу Абдаллах Мухаммед бен Джабир (858, Баттана, Сирия,— 929, близ Самарры) — арабский астроном и математик. Широко применял тригонометрич. функции (синус, тангенс и котангенс) и соотношение, по существу являющееся теоремой косинусов.

● Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961; Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А., Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды, т. 2, М., 1983, с. 119.

БАХВА́ЛОВ Николай Сергеевич (р. 29.5.1934, Москва) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1981). Окончил Московский ун-т (1955), с 1965 проф. там же. Чл. редколлегии «Математической энциклопедии». Основные труды в области вычислительной математики: оптимизация вычислительных алгоритмов, математич. теория осреднения процессов в многомерных периодич. средах. Государственная премия СССР (1985). Награждён орденом «Знак Почёта» (1980).

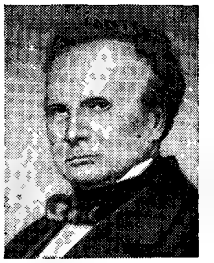
■ Численные методы, 2 изд., М., 1975; Нелинейная теория звуковых пучков, М., 1982 (соавторы Я. М. Жилейкин, Е. А. Заболотская); Осреднение процессов в периодических средах, М., 1984 (соавтор Г. П. Панасенко); Численные методы, М., 1987 (соавторы Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков).

БЕ́ББИДЖ, Бэббидж, Бэббедж Чарлз (Babbage Charles)

Н. К. Бари.

П. Барлоу.

Н. С. Бахвалов.



Ч. Беббидж.

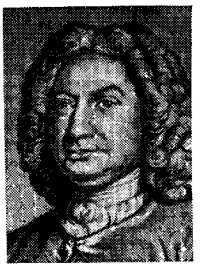
А. Бейкер.

Р. Э. Беллман.

Э. Бельтрами.

Дж. Беркли.

Я. Бернулли.



И. Бернулли.

26.12.1792, Тинмут, Девоншир,— 18.10.1871, Лондон) — английский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1832), чл. Лондонского королевского общества (1816). Сконструировал (1833) машину для вычисления таблиц величин, разности n-го порядка к-рых постоянны. В 30-е гг. 19 в. разработал идею вычислительной машины, осуществлённую лишь в сер. 20 в.

● Гутер Р. С., Полунов Ю. Л., Чарльз Бэббедж, М., 1973.

БЕЗУ́ Этьен (Bezout Étienne) (31.3. 1730, Немур,— 27.9.1783, Бас-Ложж, близ Фонтенбло) — французский математик, чл. Парижской АН (1758). Основные труды по алгебре (исследование свойств систем алгебраич. уравнений высших степеней и исключение неизвестных в таких системах); известна теорема Безу о делении многочлена на линейный двучлен.

■ Théorie générale des équations algébraiques, P., 1779.

● Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966.

БЕ́ЙЕС, Байес Томас (Bayes Thomas) (1702, Лондон,— 7.4.1761, Танбридж) — английский математик, чл. Лондонского королевского об-ва (1742). Основные труды относятся к теории вероятностей; в частности, Б. поставил и решил одну из основных задач элементарной теории вероятностей (теорема Бейеса, опубл. 1763).

БЕ́ЙКЕР Алан (Baker Alan) (р. 19.8. 1939, Лондон) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1973). Окончил университетский колледж в Лондоне, проф. Кембриджского ун-та. Основные труды по теории трансцендентных чисел и диофантовой геометрии. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1970).

БЕ́ЛЛМАН Ричард Эрнест (Bellman Richard Ernest) (26.8.1920, Нью-Йорк,— 19.3.1984, Лос-Анджелес) — американский математик. Окончил Бруклинский ун-т (1941), с 1948 проф. Станфордского ун-та. Основные труды по вычислительной математике и теории оптимального управления. Разработал метод динамич. программирования.

■ Динамическое программирование, М., 1960; Неравенства, М., 1965 (соавтор Э. Беккенбах); Дифференциально-разностные уравнения, М., 1967 (соавтор К. Л. Кук); Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, М., 1968 (соавтор Р. Калаба); Введение в теорию матриц, М., 1976; Математические методы в медицине, М., 1987.

БЕЛЬТРА́МИ Эудженио (Beltrami Eugenio) (16.11.1835, Кремона,— 18.2.1900, Рим) — итальянский математик, чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме (1873), проф. ун-тов в Болонье (1862) и Риме (1873). Основные труды по дифференциальной геометрии. Показал, что геометрия Лобачевского (планиметрия) реализуется на нек-рой поверхности, наз. псевдосферой.

■ Opere matematiche, t. 1—4, Mil., 1902—20; Опыт интерпретации неевклидовой геометрии, в сб.: Об основаниях геометрии, М., 1956, с. 180—212; Основы теории пространств постоянной кривизны, там же, с. 342—65.

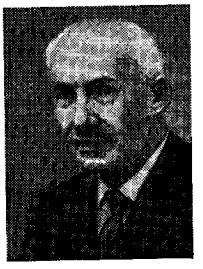
● «Math. Ann.», 1903, Bd 57, S. 65—107.

БЕ́РКЛИ Джордж (Berkeley George) (12.3.1685, близ Килкенни, Ирландия,— 14.1.1753, Оксфорд) — английский философ, представитель субъективного идеализма, епископ. Учился в Дублинском ун-те. Занимался вопросами обоснования математики. В соч. «Аналист, или Рассуждение, обращённое к неверующему математику...» («The Analyst: or, a discourse adressed to an infidel mathematician...», L., 1734) выступал против метода флюксий и исчисления бесконечно малых; при этом преследовал не только научные цели, но и стремился своей критикой принципов анализа подорвать влияние свободомыслящих учёных.

● История математики, т. 3, М., 1972.

БЕРНА́ЙС Исаак Пауль (Bernays Isaak Paul) (17.10.1888, Лондон,— 18.9.1977, Цюрих) — немецкий математик. Учился в Гёттингенском и Берлинском ун-тах, в 1917—33 работал в Гёттингенском ун-те, с 1945 в Цюрихе. Основные труды по основаниям математики, теории множеств и математич. логике. Широко известен написанный Б. совместно с Д. Гильбертом 2-томный трактат «Основания математики» (1934, 1939).

И. П. Бернайс.



У. Бёрнсайд.

■ Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, 2 изд., М., 1982 (соавтор Д. Гильберт); Основания математики. Теория доказательств, М., 1982 (соавтор Д. Гильберт).

БЁРНСАЙД Уильям (Burnside William) (2.7.1852, Лондон,— 21.8.1927, Уэст-Уикем) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества, проф. (с 1885) Морского колледжа в Гринвиче. Основные труды по теории групп, теории представлений и характеров групп; указал критерий непростоты конечных групп. Ему принадлежит также ряд работ по теории вероятностей, по автоморфным функциям, по теории волн в жидкостях и др.

■ Theory of groups of finite order, 2 ed., Camb., 1911.

БЕРНУ́ЛЛИ (Bernoulli) — семья швейцарских учёных, родоначальник к-рой Якоб Б. (ум. 1583) был выходцем из Голландии.

Якоб Бернулли (Jacob Bernoulli) (27.12.1654, Базель,— 16.8.1705, там же) — проф. математики Базельского ун-та (с 1687). Ознакомившись с первым мемуаром Г. Лейбница по дифференциальному исчислению (1684) в том же году, Б. вскоре блестяще применил новые идеи к изучению свойств ряда кривых. Совместно с братом Иоганном положил начало вариационному исчислению. При этом особое значение имели выдвинутая и частью решённая Якобом Б. изопериметрич. задача и найденное им решение поставленной Иоганном Б. задачи о брахистохроне. В «Искусстве предположений» («Ars conjectandi», Basileae, 1713) доказал т. н. теорему Бернулли — важный частный случай закона больших чисел. В связи с вычислением суммы одинаковых степеней натуральных чисел открыл числа Бернулли. Работал также в области физики (определение центра качения тел и сопротивления тел различной формы, движущихся в жидкости).

■ Opera omnia, v. 1—2, Genevae, 1744; О законе больших чисел, М., 1986.

Иоганн Бернулли (Johann Bernoulli) (27.7.1667, Базель,— 1.1. 1748, там же) — младший брат Якоба Б., иностранный почётный чл. Петербургской АН (1725), проф. математики Гронингенского (с 1695) и Базельского (с 1705) ун-тов. Был деятельным

сотрудником Г. Лейбница в разработке дифференциального и интегрального исчислений, в области к-рых им был сделан ряд открытий. Дал первое систематич. изложение дифференциального и интегрального исчислений, продвинул разработку методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, поставил классич. задачу о геодезич. линиях и нашёл характерное геометрич. свойство этих линий, а позднее вывел их дифференциальное уравнение. Ожесточённый спор о решении вариационных задач, разгоревшийся между Иоганном и Якобом Б., в нек-рой мере способствовал постановке новых проблем в этой области. Иоганну Б. принадлежат также исследования по механике: теория удара, движение тел в сопротивляющейся среде, учение о живой силе и др.

■ Opera omnia, v. 1—4, Lausannae — Genevae, 1742; Избранные сочинения по механике, М.—Л., 1937.

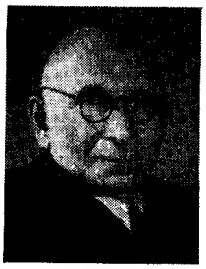
Николай Бернулли (Nicolas Bernoulli) (21.10.1687, Базель,— 29.11.1759, там же) — племянник Якоба и Иоганна Б., чл. Лондонского королевского общества (1714), с 1722 проф. Базельского ун-та. Изучал математику и юриспруденцию. Основные труды по теории вероятностей, теории рядов, дифференциальным уравнениям и демографии. Составил предисловие к «Искусству предположений» Якоба Б.

Николай Бернулли (Nicolas Bernoulli) (27.1.1695, Базель,— 29.7.1726, Петербург) — сын Иоганна Б., математик, философ и юрист, акад. Петербургской АН (1725). Основные труды по дифференциальным уравнениям и механике.

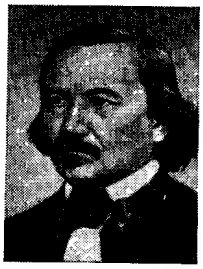
Даниил Бернулли (Daniel Bernoulli) (29.1.1700, Гронинген,— 17.3.1782, Базель) — сын Иоганна Б., акад. (1725—33) и иностранный почётный чл. (1733) Петербургской АН, чл. Болонской АН (1724), Берлинской АН (1747), Парижской АН (1748), Лондонского королевского общества (1750). Занимался физиологией и медициной, но больше всего математикой и механикой, опубликовал (в 1728—78) в изданиях Петербургской АН 47 работ. В Базеле был профессором анатомии и ботаники (1733) и затем физики (1750). В математике Даниилу Б. принадлежат: метод численного решения алгебраич. уравнений с помощью возвратных рядов, работы по обыкновенным дифференциальным уравнениям, по теории вероятностей с приложением к статистике народонаселения и отчасти к астрономии, по теории рядов. В работах, завершённых написанным в Петербурге трудом «Гидродинамика» (1738), вывел основное уравнение стационарного движения идеальной жидкости, носящее его имя. Разрабатывал кинетич. представления о газах.

Д. Бернулли.

И. Бернулли.



С. Н. Бернштейн.



Ж. Л. Ф. Бертран.

■ Гидродинамика, или Записки о силах и движениях жидкостей, Л., 1959.

Иоганн Бернулли (Johann Bernoulli) (4.11.1744, Базель,— 13.7.1807, Берлин) — внук Иоганна Б., математик и астроном, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1776). Основные труды по теории вероятностей и периодич. дробям.

Якоб Бернулли (Jacob Bernoulli) (17.10.1759, Базель,— 3.7.1789, Петербург) — внук Иоганна Б., акад. Петербургской АН (1787; адъюнкт с 1786). Основные труды по дифференциальным уравнениям, механике, музыкальной акустике.

● Никифоровский В. А., Великие математики Бернулли, М., 1984; Григорьян А. Т., Ковалев Б. Д., Даниил Бернулли, М., 1981; Юшкевич А. П., Николай Бернулли и издание «Искусства предположений» Якоба Бернулли, «Теория вероятностей и ее применения», 1986, т. 31, в. 2; Spiess O., Die Mathematiker Bernoulli, Basel, 1948; Fleckenstein J. O., Johann und Jakob Bernoulli, Basel, 1949.

БЕРНШТЕЙН Сергей Натанович [22.2(5.3).1880, Одесса,— 26.10.1968, Москва] — советский математик, акад. АН СССР (1929; чл.-корр. 1924) и АН УССР (1925). В 1907—33 преподавал в Харьковском ун-те (с 1920 проф.), в 1933—41 проф. Ленинградского политехнич. ин-та и Ленинградского ун-та. С 1935 работал в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды по теории дифференциальных уравнений, теории функций и теории вероятностей. Б. найдены условия аналитичности решений уравнений 2-го порядка эллиптич. и параболич. типов, разработаны новые методы решения граничных задач для нелинейных уравнений эллиптич. типа. Продолжая и развивая идеи П. Л. Чебышева о приближении функций многочленами, Б. и его ученики создали новую ветвь теории функций — конструктивную теорию функций. В теории вероятностей Б. разработал первую по времени (1917) аксиоматику, продолжил и в нек-ром отношении завершил исследования петербургской школы Чебышева — Маркова по предельным теоремам, разработал теорию слабозависимых величин, исследовал стахостич. дифференциальные уравнения и указал на ряд применений вероятностных методов в физике, статистике и биологии.

Б.— чл. Немецкого союза математиков (1926), Французского математич. общества (1944), почётный доктор наук Алжирского ун-та (1944), Парижского ун-та (1945), иностранный чл. Болгарской АН (1945), Парижской АН (1955; чл.-корр. 1928). Государственная премия СССР (1942). Награждён 2 орденами Ленина (1945, 1953), орденом Трудового Красного Знамени (1944).

■ Собр. соч., т. 1—4, М., 1952—64; Теория вероятностей, 4 изд., М.—Л., 1946.

● «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 2; 1969, т. 24, в. 3; 1983, т. 38, в. 3; «Вестник АН СССР», 1969, № 1.

БЕРС Липман (Bers Lipman) (р. 22.5.1914, Рига) — американский математик, чл. Национальной АН США (1964). Окончил Пражский ун-т (1938). С 1940 в США. С 1964 проф. Колумбийского ун-та. Основные труды по математич. анализу и уравнениям с частными производными.

■ Уравнения с частными производными, М., 1966 (соавторы Ф. Джон и М. Шехтер); Математический анализ, т. 1—2, М., 1975.

БЕРТРАН Жозеф Луи Франсуа (Bertrand Joseph Louis François) (11.3.1822, Париж,— 3.4.1900, там же) — французский математик, иностранный чл.-корр. (1859) и иностранный почётный чл. (1896) Петербургской АН, чл. Парижской АН (1856), с 1862 проф. Коллеж де Франс. Им установлены, в частности, нек-рые специальные признаки сходимости числовых рядов, одна теорема теории групп. Автор руководства по математике для средней и высшей школы.

■ Traité de calcul différentiel et de calcul intégral, t. 1—2, P., 1864—70; Calcul des probabilités, P., 1889; Дифференциальное исчисление, СПБ, 1911.

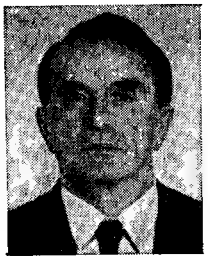
БЕССЕЛЬ Фридрих Вильгельм (Bessel Friedrich Wilhelm) (22.7.1784, Минден,— 17.3.1846, Кёнигсберг) — немецкий астроном, геодезист и математик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1814), чл. Берлинской АН (1812). Основные труды по астрономии. В математике имя Б. носят т. н. цилиндрич. функции 1-го рода (функции Бесселя) и дифференциальное уравнение, которому они удовлетворяют (уравнение Бесселя), неравенство для коэффициентов ряда Фурье (неравенство Бесселя), а также одна из интерполяционных формул (и н-

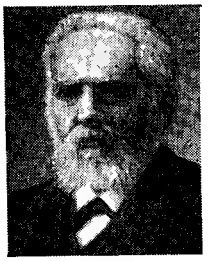
Ф. В. Бессель.

Л. Бианки.

Дж. Д. Биркгоф.

аль-Бируни.


А. В. Бицадзе.


В. В. Бобынин.

Н. Н. Боголюбов-отец.

терполяционная формула Бесселя).

■ Abhandlungen..., Bd 1—3, Lpz., 1875—76; Популярные чтения о научных предметах, М., 1859.

БЕТТИ Энрико (Betti Enrico) (21.10.1823, Пистоя,— 11.8.1892, Пиза) — итальянский математик. Окончил ун-т в Пизе (1846), с 1857 проф. там же. Основные труды относятся к алгебре, математич. анализу, теории функций, дифференциальной геометрии, математич. физике, топологии, где известны (1871) числа Бетти.

■ Opere matematiche, v. 1—2, Mil., 1903—14.

БИАНКИ Луиджи (Bianchi Luigi) (18.1.1856, Парма,— 6.6.1928, Пиза) — итальянский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1911). С 1886 преподаватель ун-та в Пизе. Известен трудами, способствовавшими разработке методов выражения геометрич. инвариантов (т. е. величин, значения к-рых не зависят от выбора координат) через т. н. дифференциальные параметры. Исследования Б. объединены им в соч. «Лекции по дифференциальной геометрии» («Lezioni di geometria differentiale», t. 1—2, Pisa, 1886).

● «Annali della Scuola normale superiore», Pisa, 1954, t. 8, N 1—2.

БИНЕ Жак Филипп Мари (Binet Jacques Philippe Marie) (2.2.1786, Рен,— 12.5.1856, Париж) — французский математик и астроном, чл. Парижской АН (1843). Основные труды по механике, математике и астрономии. Ввёл (1839) термин «бета-функция», изучал линейные разностные уравнения с переменными коэффициентами.

БИРКГОФ, Биркхоф Гарретт (Birkhoff Garrett) (р. 10.1.1911, Принстон) — американский математик и логик, чл. Национальной АН США и Американской академии искусств и наук в Бостоне. Основные труды по теории множеств, математич. логике, алгебре.

■ Теория структур, М., 1952; Гидродинамика, М., 1954, 2 изд., М., 1963; Струи, следы и каверны, М., 1964 (соавтор Э. Сарантонелло); Современная прикладная алгебра, М., 1976 (соавтор Т. Барти); Математика и психология, М., 1977; Теория решеток, М., 1984.

БИРКГОФ, Биркхоф Джордж Дейвид (Birkhoff George David) (21.3.1884, Оверайсел, Мичиган,— 12.11.1944, Кембридж, Массачусетс) — американский математик, чл. Национальной АН США. Ассистент, затем проф. Гарвардского ун-та (с 1912). Работы по статистич. механике (установил критерии устойчивости движения и существования периодич. движения), а также по общей теории дифференциальных и разностных уравнений и теории динамич. систем. В исследованиях по механике широко применял методы топологии и теории множеств.

■ Collected mathematical papers, v. 1—3, N. Y., 1950; Динамические системы, М.—Л., 1941.

БИРУНИ, аль-Бируни Абу Рейхан Мухаммед ибн Ахмед [4.10.973, Кята, Южный Хорезм (ныне Каракалпакская АССР),— 13.12.1048 (по другим данным, после 1050), Газни, Афганистан] — среднеазиатский учёный-энциклопедист. Основные математич. труды по арифметике, алгебре, геометрии, тригонометрии. Занимался также задачами трисекции угла и удвоения куба.

■ Избранные произведения, т. 1—6, Таш., 1957—75.

● Розенфельд Б. А., Рожанская М. М., Соколовская З. К., Абу-р-Райхан ал-Бируни, М., 1973; Тимофеев И., Бируни, М., 1986.

БИЦАДЗЕ Андрей Васильевич [р. 9(22).5.1916, сел. Цхруквети, Грузия] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1958), акад. АН Грузинской ССР (1969). Чл. КПСС с 1947. Окончил Тбилисский ун-т (1940). В 1959—71 работал в Ин-те математики Сибирского отделения АН СССР и Новосибирском ун-те (проф. с 1959), в 1948—1959 и с 1971 (зав. отделом) в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды по математич. теории упругости, теории функций, теории уравнений смешанного типа, теории краевых задач для эллиптич. систем уравнений, многомерным сингулярным уравнениям, нелинейным уравнениям с частными производными 2-го порядка. Премия имени Н. И. Мусхелишвили АН Грузинской ССР (1982). Награждён орденом Ленина (1971), орденом Октябрьской Революции (1986), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1966, 1975).

■ Уравнения смешанного типа, М., 1959; Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966; Основы теории аналитических функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1972; Уравнения математической физики, М., 1976; Некоторые классы уравнений в частных производных, М., 1981.

● «Сиб. матем. ж.», 1966, т. 7, № 4; «Дифференциальные уравнения», 1986, т. 22, № 12; «Вестник АН СССР», 1986, № 9; «Успехи матем. наук», 1987, т. 42, в. 3.

БОБЫНИН Виктор Викторович [8(20).11.1849, дер. Шили, ныне Смоленской обл.,— 15.11.1919, Москва] — первый историк математики в России. Окончил Московский ун-т (1872), преподавал математику в средних учебных заведениях, с 1882 начал чтение курса истории математики в Московском ун-те. Его магистерская диссертация «Математика древних египтян» (1882) представляла собой исследование, выполненное на основе опубликованного незадолго до этого математич. папируса Ринда. Более 40 лет своей жизни отдал изучению и популяризации истории математич. знаний. Б. основал и издавал (1885—94) журнал «Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем».

● Историко-математические исследования, в. 3, М.—Л., 1950.

БОГОЛЮБОВ Николай Николаевич [р. 8(21).8.1909, Н. Новгород] — советский математик и физик-теоретик, акад. АН СССР (1953; чл.-корр. 1946) и АН УССР (1948; чл.-корр. 1939), дважды Герой Социалистич. Труда (1969, 1979). В 1925 был принят непосредственно в аспирантуру АН УССР и затем работал в АН УССР и АН СССР. С 1963 акад.-секретарь Отделения математики АН СССР. С 1965 директор Объединённого ин-та ядерных исследований в Дубне и в 1983—87— Математич. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды по приближённым методам математич. анализа, математич. физике, асимптотич. методам нелинейной механики, теории динамич. систем, статистич. физике, квантовой теории поля и прикладной математике. Разработал прямые методы вариационного исчисления (1930), метод усреднения в нелинейной механике (1932), метод интегральных многообразий (1945), метод цепочек функций распределения для теории неравновесных процессов (1946), дал математич. обоснование микроскопич. теории сверхтекучести (1947), доказал дисперсионные соотношения в квантовой теории поля (1956), построил математич. теорию сверхпроводимости (1957), разработал метод ускоренной сходимости (1964). Методы, развитые Б. в теории сверхтекучести и сверхпроводимости, применяются и в др. областях теоретич. физики, напр. в теории ядра. Б. создал науч. школы в нелинейной механике, статистич. физике и квантовой теории поля.

Б. — иностранный почётный чл. Американской академии искусств и наук в Бостоне (1960), Болгарской АН (1961), иностранный чл. Польской АН (1962), АН ГДР (1966), иностранный чл.-корр. АН в Гейдельберге (ФРГ, 1968), иностранный почётный чл. Национальной АН США (1969), Венгерской АН (1970), иностранный чл. Чехословацкой АН (1980), иностранный действительный чл. Монгольской АН (1983), иностранный чл. Индийской АН (1983), а также иностранных научных обществ. Б.— почётный доктор многих ун-тов: в Аллахабаде (Индия, 1958), Берлине (ГДР, 1960), Чикаго (США, 1967), Турине (Италия, 1969), Вроцлаве (ПНР, 1970), Бухаресте (СРР, 1971), Хельсинки (Финляндия, 1973), Улан-Баторе (МНР, 1977), Варшаве (ПНР, 1977). Участник Пагуошского движения. Депутат Верховного Совета СССР 7—11-го созывов. Государственные премии СССР (1947, 1953, 1984), Ленинская премия (1958), премия им. М. В. Ломоносова АН СССР (1957), Золотая медаль и премия им. М. А. Лаврентьева АН СССР (1984), Золотая медаль им. М. В. Ломоносова АН СССР (1985), премия Болонской АН (1930), премия им. Д. Хайнемана Американского физического общества (1966), медаль им. Г. Гельмгольца АН ГДР (1969), Золотая медаль им. М. Планка Физич. общества ФРГ (1973), Золотая медаль им. Б. Франклина Ин-та Франклина США (1974), Золотая медаль «За заслуги перед наукой и человечеством» Словацкой АН (1975), премия им. А. П. Карпинского Фонда г. Гамбурга (1981). Совет Международного ин-та теоретич. физики г. Триеста учредил (1985) премию имени Н. Н. Боголюбова за лучшие работы в области математики и физики твёрдого тела. Награждён 6 орденами Ленина (1953, 1959, 1967, 1969, 1975, 1979), орденом Октябрьской Революции (1984), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1948, 1954), 2 орденами «Знак Почёта» (1944, 1944), а также болгарским орденом Кирилла и Мефодия I степени (1969), польским орденом «За заслуги» II класса (1977).

■ Введение в нелинейную механику, К., 1937 (соавтор Н. М. Крылов); О некоторых статистических методах в математической физике, К., 1945; Проблемы динамической теории в статистической физике, М.—Л., 1946; Лекції з квантової статистики. Питання статистичної механіки квантових систем, Київ, 1949; Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 3 изд., М., 1963 (соавтор Ю. А. Митропольский); Введение в теорию квантованных полей, М., 1957 (соавтор Д. В. Ширков); Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958 (соавторы Б. В. Медведев, М. К. Поливанов); Новый метод в теории сверхпроводимости, М., 1958 (соавторы В. В. Толмачев, Д. В. Ширков); Введение в квантовую статистическую механику, М., 1984 (соавтор Н. Н. Боголюбов-сын); Общие принципы квантовой теории поля, М., 1987 (соавторы А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров).

Н. Н. Боголюбов-сын.

В. В. Болотин.

П. Г. Боль.

Б. Больцано.

● «Успехи матсм. наук», 1969, т. 24, в. 4; там же, 1979, т. 34, в. 5; «Вестник АН СССР», 1980, № 1; Н. Н. Боголюбов, Дубна, 1974.

БОГОЛЮБОВ Николай Николаевич (р. 7.3.1940, Киев) — советский математик и физик-теоретик, чл.-корр. АН СССР (1984). Чл. КПСС с 1967. Сын Н. Н. Боголюбова. Окончил Московский ун-т (1962). С 1966 работает в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды по теоретич. и математич. физике, классич. и квантовой статистич. механике, кинетич. теории. Ряд исследований выполнен также по физике конденсированных сред, гидродинамике и теории дифференциальных уравнений с малым параметром. Многие результаты вошли в современный аппарат математич. физики: фундаментальная теорема Боголюбова (мл.) в теории модельных систем статистич. механики, неравенства для термодинамич. потенциалов, принцип минимакса Боголюбова (мл.) в задачах статистич. механики. Доказаны теоремы, обеспечивающие асимптотически точное вычисление термодинамич. функций и корреляционных средних в теории многих взаимодействующих частиц. В области статистич. механики построена мажорационная техника, нашедшая эффективное применение в теории сверхпроводимости, квантовой теории магнетизма, в теории взаимодействия излучения с веществом и в физике кристаллов. Государственная премия СССР (1983), Премии Объединенного института ядерных исследований (1982, 1985).

■ Метод исследования модельных гамильтонианов, М., 1974; Некоторые вопросы статистической механики, М., 1975 (соавтор Б. И. Садовников); Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике, София, 1981 (соавторы Й. Г. Бранков, В. А. Загребнов, А. М. Курбатов, Н. С. Тончев); A method for studying model hamiltonians. A minimax principle for problems in statistical physics, Oxf., 1972; Introduction to quantum statistical mechanics, Singapore, 1982 (соавтор Н. Н. Боголюбов-отец); Введение в квантовую статистическую механику, М., 1984 (соавтор Н. Н. Боголюбов-отец).

БОЙАИ Я.— см. *Больяй* Я.

БОЛОТИН Владимир Васильевич (р. 29.3.1926, Тамбов) — советский учёный в области механики, чл.-корр. АН СССР (1974). Чл. КПСС с 1954. Окончил Московский ин-т инженеров железнодорожного транспорта (1948). С 1953 проф. Московского энергетич. ин-та, с 1980 работает в Ин-те машиноведения АН СССР. Основные труды по теории колебаний, упругости, надёжности, механике композиционных материалов. Почётный доктор Будапештского технич. ун-та (1975), Золотая медаль «За заслуги перед наукой и человечеством» Чехословацкой АН (1977). Государственная премия СССР (1985). Награждён орденом Ленина (1971), орденом Октябрьской Революции (1986), орденом Трудового Красного Знамени (1975).

■ Неконсервативные задачи теории упругой неустойчивости, М., 1961; Статистические методы в строительной механике, 2 изд., М., 1965; Случайные колебания упругих систем, М., 1979; Прогнозирование ресурса машин и конструкций, М., 1984.

● «Изв. АН СССР. Механика твердого тела», 1976, № 3; «Вестник АН СССР», 1986, № 7.

БОЛЬ Пирс Георгиевич [11(23).10.1865, Валка, — 25.12.1921, Рига] — латвийский математик. Окончил Дерптский (ныне Тартуский) ун-т (1887), в 1895—1918 проф. Рижского и с 1918 Ивановского политехнич. ин-тов. В своей магистерской диссертации (1893) заложил основы теории почти периодич. функций, изучив т. н. квазипериодич. функции, т. е. конечные суммы периодич. функций с несоизмеримыми между собой периодами.

● Мышкис А. Д., Рабинович И. М., Математик Пирс Боль из Риги, Рига, 1965.

БОЛЬЦА́НО Бернард (Bolzano Bernard) (5.10.1781, Прага,— 18.12.1848, там же) — чешский математик, философ, теолог. Окончил философский (1800) и теологический (1805) ф-ты Пражского ун-та, занимал (1805—20) кафедру истории религии в том же ун-те; за вольнодумство был уволен (1820) и лишён права публичных выступлений, после чего работал в основном в области логики и математики. Главное логич. сочинение Б. «Наукоучение» (1837) — обширный историко-критич. обзор традиционных логич. учений с оригинальным изложением логики. Много работая над логич. основами математич. анализа, Б. первый (1817) выдвинул идею арифметич. теории действительного числа. В его сочинениях (опубликованных при жизни и входящих в его рукописное наследство) можно найти ряд фундаментальных понятий и теорем анализа, обычно связываемых с более поздними исследованиями др. математиков. В «Парадоксах бесконечного» (изд. 1851) Б. явился предшественником Г. Кантора в исследовании бесконечных множеств. Отправляясь от идеи Г. Лейбница, Б. отстаивал объективность актуально бесконечного.

Л. Н. Большев.

Ф. Больяй.

Я. Больяй.

Э. Бомбьери.

Дж. А. Борелли.

А. Борель.

При этом он различал два рода существования объективного: существование реальное — «непосредственно данное», и нереальное, но возможное — существование «в себе». Возможность нереального объективного существования не зависит от субъективного знания и создаётся не мышлением (согласно Б., возможность мыслить вещь никоим образом не является основанием для возможности её существования), а «чистыми понятиями», к-рые играют роль определяющего начала и для всего реального, и для всего объективно возможного. Поскольку истины, вытекающие из чистых понятий, объективно возможны, объективно возможно и существование бесконечных множеств, «по крайней мере среди вещей не реальных». Напр., существует бесконечное множество «всех истин в себе». В целом для философии Б. характерно сочетание диалектич. атомизма (простые субстанции непрерывно изменяются взаимодействуя) и платонизма (учение об «истинах в себе», о «чистых понятиях» и пр.), в к-ром идеи древних авторов трансформированы в соответствии с научной практикой «нового времени».

■ Парадоксы бесконечного, Од., 1911.

● Кольман Э. Б., Бернард Больцано, М., 1955.

БО́ЛЬШЕВ Логин Николаевич (6.3.1922, Москва,— 29.8.1978, там же) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1974). Окончил Московский ун-т (1951), с 1969 проф. там же. С 1951 работал в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР (с 1966 зав. отделом). Основные труды по математич. статистике и теории вероятностей. Построил теорию асимптотич. разложений для основных распределений вероятностей, широко применяемую в прикладных и теоретич. вопросах. Работал над созданием табличных пособий, необходимых для вероятностных и статистич. расчётов. Чл. Международного статистич. ин-та (1970). Награждён орденом Красной Звезды (1945), орденом «Знак Почёта» (1975).

■ Теория вероятностей и математическая статистика. Избранные труды, М., 1987; Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983 (соавтор Н. В. Смирнов).

● «Теория вероятностей и ее применения», 1979, т. 24, в. 1.

БО́ЛЬЯЙ, Бойаи Фаркаш (Bolyai Farkas) [9.2.1775, Бойаи (Секлерленд),— 20.11.1856] — венгерский математик. Занимался проблемами геометрии, пытался доказать пятый постулат Евклида.

● David L. von, Die beiden Bolyai, Basel, 1951.

БО́ЛЬЯЙ, Бойаи Янош (Bolyai Janos) [15.12.1802, Коложвар, ныне Клуж-Напока,— 27.1.1860, Марошвашархей (Тыргу-Муреш)] — венгерский математик. Наряду с Н. И. Лобачевским является одним из творцов неевклидовой геометрии. Ещё будучи студентом Военно-инженерной академии в Вене, Б. стал заниматься доказательством постулата о параллельных линиях. По окончании академии продолжал усиленно работать в том же направлении. Обработав свои исследования, издал их в 1832 в виде приложения («Аппендикс») к 1-му тому сочинений своего отца Ф. Больяй. Изложение «Аппендикса» отличается крайней сжатостью и схематичностью, но по продуманности каждого слова и обозначения «Аппендикс» принадлежит к числу наиболее совершенных произведений математич. литературы. Открытия Б. при жизни признания не получили, что отразилось на психике Б.

■ Appendix. Приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную, не зависящую от истинности или ложности XI аксиомы Евклида (что a priori никогда решено быть не может), с прибавлением, к случаю ложности, геометрической квадратуры круга, М.—Л., 1950.

● Tóth Imre, Johann Bolyai. Leben und Werk des grossen Mathematikers, Bukarest, 1955.

БОМБЕ́ЛЛИ Раффаэле (Bombelli Raffaele) (ок. 1530—1572) — итальянский математик и инженер. В «Алгебре» («L'Algebra . . .», Bologna, 1572) дано первое изложение простейших правил действий над комплексными величинами и их применение к исследованию т. н. неприводимого случая кубич. уравнения.

● История математики, т. 1, М., 1970.

БОМБЬЕ́РИ Энрико (Bombieri Enrico) (р. 26.11.1940, Милан) — итальянский математик, чл. Парижской АН (1984), проф. ун-та в Пизе. Основные труды по теории чисел, комплексному анализу и дифференциальным уравнениям. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1974).

П. О. Бонне.

Х. А. Бор.

БОННЕ́ Пьер Оссиан (Bonnet Pierre Ossian) (22.11.1819, Монпелье,— 22.6. 1892, Париж) — французский математик, чл. Парижской АН (1862), с 1878 проф. Парижского ун-та. Основные труды по математич. анализу и дифференциальной геометрии, где известна (1867) теорема Бонне о существовании и единственности поверхности с заданными 1-й и 2-й квадратичными формами.

БОР Харальд Август (Bohr Harald August) (22.4.1887, Копенгаген,— 22.1.1951, там же) — датский математик. Брат физика Н. Бора. С 1915 проф. Высшей технич. школы и с 1930 ун-та в Копенгагене. Основные труды по теории функций и теории чисел. В связи с исследованиями дзета-функции развил (1925) теорию почти периодич. функций. Эта теория, превратившаяся в самостоятельную математич. дисциплину, имеет многочисленные приложения в математич. анализе, небесной механике и физике.

■ Collected mathematical works, v. 1—3, Koebenhavn, 1952; Почти периодические функции, М.—Л., 1934.

● «Journal of London Mathematical Society», 1953, v. 28, № 109, p. 1.

БОРЕ́ЛЛИ Джованни Альфонсо (Borelli Giovanni Alfonso) (28.1.1608, Неаполь,— 31.12.1679, Рим) — итальянский математик, механик и физиолог, с 1656 проф. ун-та в Пизе. Издал (1658) переработанный им текст «Начал» Евклида, пытался доказать пятый постулат.

БОРЕ́ЛЬ Арман (Borel Armand) (р. 21.5.1923) — американский математик, иностранный чл. Парижской АН (1981), проф. Принстонского ин-та перспективных исследований. Основные труды по алгебре, алгебраич. топологии, алгебраич. геометрии и дифференциальной геометрии.

■ Линейные алгебраические группы, М., 1972.

БОРЕ́ЛЬ Феликс Эдуар Жюстен Эмиль (Borel Félix Édouard Justin Émile) (7.1.1871, Сент-Африк,— 3.2. 1956, Париж) — французский мате-

Ф. Э. Ж. Э. Борель.

А. А. Боровков.

Ш. Боссю.

С. Бохнер.

Л. Э. Я. Брауэр.

Н. Д. Брашман.

матик, иностранный чл.-корр. АН СССР (1929), чл. Парижской АН (1921), проф. в 1897—1920 (директор в 1911—20) Нормальной школы в Париже и в 1909—41 Парижского ун-та. Создатель нескольких отраслей современного математич. анализа (расходящиеся ряды, расширение понятия аналитич. функции, мера множеств, диофантовы приближения). Основанная (1895) Б. серия «Собрание монографий по теории функций» в течение многих лет оказывала существенное влияние на работы в области теории функций. Ряд работ посвящён вопросам математич. физики и теории вероятностей.

■ Leçons sur les fonctions entières, P., 1900; Selecta: Jubilé scientifique de M. E. Borel, P., 1940; Случай, М.—Л., 1923; Пространство и время, М., 1924; Основные идеи алгебры и анализа, М.—Л., 1927; Элементарная математика, 2 изд., ч. 1—2, Од., 1922—23; Вероятность и достоверность, 2 изд., М., 1964.

● Полищук Е. М., Эмиль Борель, Л., 1980.

БОРОВКО́В Александр Алексеевич (р. 6.3.1931, Москва) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1966). Окончил Московский ун-т (1954). С 1965 проф. Новосибирского ун-та, с 1981 зам. директора Ин-та математики Сибирского отделения АН СССР. Основные труды по теории вероятностей и математич. статистике. Установил основные асимптотич. законы в граничных задачах теории вероятностей, получил наиболее общие теоремы о сходимости мер и случайных процессов. Б. построены асимптотически оптимальные критерии для проверки сложных гипотез, разработаны общие асимптотич. методы теории систем обслуживания. Чл. Международного статистич. ин-та (1977) и чл. Общества Бернулли (1977). Государственная премия СССР (1979). Награждён орденом Дружбы народов (1981), орденом «Знак Почёта» (1975).

■ Теория вероятностей, 2 изд., М., 1986; Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез, М., 1984; Математическая статистика. Дополнительные главы, М., 1984; Асимптотические методы в теории массового обслуживания, М., 1980.

БО́РХАРДТ Карл Вильгельм (Borchardt Karl Wilhelm) (22.2.1817, Берлин,— 27.6.1880, близ Берлина) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1879), чл. Берлинской АН (1856). Основные труды по математич. анализу.

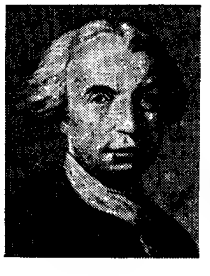
БОССЮ Шарль (Bossut Charles) (11.8.1730, Тарар, деп. Рона,— 14.1.1814, Париж) — французский математик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1778), чл. Парижской АН (1768). Основные труды по дифференциальному и интегральному исчислению, геометрии и гидродинамике. Пользовались известностью его 7-томный курс математики (1795) и 2-томная история математики (1802).

БО́ХНЕР Саломон (Bochner Salomon) (20.8.1899, Краков, — 2.5. 1982) — американский математик, член Национальной АН США (1950), с 1933 проф. Принстонского ун-та. Основные труды по дифференциальной геометрии, теории функций, функциональному анализу и гармонич. анализу, где известны преобразование Бохнера (1934) и теорема Бохнера — Хинчина.

■ Функции многих комплексных переменных, М., 1951 (соавтор У. Т. Мартин); Кривизна и числа Бетти, М., 1957 (соавтор К. Яно); Лекции об интегралах Фурье, М., 1962.

БО́ШКОВИЧ Руджер Иосип (Боскович Руджеро Джузеппе) (Boškovic Roger Joseph; Boscovich Ruggero Giuseppe) (18.5.1711, Рагуза, ныне Дубровник,— 13.2.1787, Милан) — хорватский натурфилософ, математик, астроном и физик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1760), чл.-корр. Парижской АН (1759), чл. Лондонского королевского общества. С 1773 жил и работал во Франции. Основные труды по астрономии и физике, дал математическую трактовку теории телескопа. Высказал идею, что множество действительных чисел является континуумом. Применял математические методы в инженерном деле.

Р. И. Бошкович.



Т. Браге.

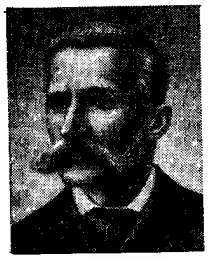
● Кольман Э., Жизнь и научная деятельность Р. Бошковича, в сб.: Вопросы истории естествознания и техники, в. 2, М., 1956.

БРА́ГЕ Тихо (Brahe Tyge; Tycho) (14.12.1546, Кнудструп, — 13.10.1601, Прага) — датский астроном. Работы Б. и его учеников сыграли большую роль в развитии тригонометрии.

БРА́ДВАРДИН Томас, Фома Брадвардин (Bradwardine Thomas) (ок. 1290—26.8.1349) — английский математик и богослов. Основные исследования посвящены арифметике, геометрии и механике. Изучал звездчатые многоугольники. Ввёл термин «иррациональный» в математич. смысле.

■ Tractatus de proportionibus, its significance for the development of mathematical physics, Madison, 1955.

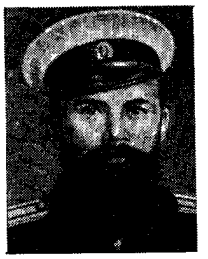
БРА́УЭР Лёйтзен Эгберт Ян (Brouwer Luitzen Egbert Jan) (27.2.1881, Оверсхи,— 2.12.1966, Амстердам) — голландский математик, чл. Нидерландской королевской АН (1912), чл.-корр. Парижской АН и Гёттингенской АН, проф. Амстердамского ун-та (1912—51). С 1904 Б. последовательно проводил критику т. н. чистых математич. доказательств существования, опирающихся на логич. принцип исключённого третьего, что в конечном счёте положило начало целому направлению в обоснованиях математики — математич. интуиционизму. Но независимую от философии интуиционизма ценность имеет проведённый Б. анализ математич. доказательств существования с точки зрения конструктивного построения тех объектов, существование к-рых доказывается. В частности, А. Н. Колмогоровым было показано, что правила т. н. интуиционистской логики находят своё реальное осуществление в логике конструктивного решения математич. проблем. В 1911—13 Б. установил ряд важных понятий и результатов в области топологии. В их числе: понятия симплициальной аппроксимации и степени непрерывного отображения; понятие гомотопич. классификации отображений; теорема о гомотопич. эквивалентности двух отображений (сферы на себя), имеющих одну и ту же степень; теорема об инвариантности числа измерений и инвариантности внутренних точек (при топологич. отображении множества, лежащего в n-мерном пространстве, в это же пространство); теорема



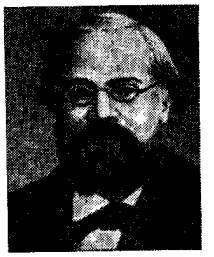
Ф. Бриоски.

У. Броункер.

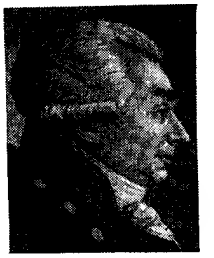
Я. В. Брюс.



И. Г. Бубнов.



Н. В. Бугаев.



Т. Бугге.

о неподвижной точке; n-мерная теорема Жордана и др. Эти результаты и методы, найденные для их доказательства, определили значительное влияние Б. на развитие топологии в период между 1-й и 2-й мировыми войнами.

● Александров П. С., Комбинаторная топология, М.—Л., 1947; Вейль Г., О философии математики. Сб. работ, пер. с нем., М.—Л., 1934.

БРАХМАГУ́ПТА, Брамагупта (ок. 598—660) — индийский математик и астроном. До нас дошло сочинение Б. «Усовершенствованное учение Брахмы» (628), значительная часть к-рого посвящена арифметике и алгебре. В нём изложены учение об арифметич. прогрессии (известное правило её суммирования) и решение квадратных уравнений, имеющих действительное решение.

■ Algebra, with arithmetic and mensuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhascara, L., 1817, Benares, 1927.
● История математики, т. 1, М., 1970.

БРА́ШМАН Николай Дмитриевич [14(25).6.1796, Росенов (Моравия),— 13(25).5.1866, Москва] — русский математик и механик, чл.-корр. Петербургской АН (1855), с 1834 проф. Московского ун-та. Основные труды по гидромеханике и принципу наименьшего действия. Был выдающимся педагогом. Б. много сделал для выработки научных основ преподавания механики, ему принадлежит один из лучших для того времени курсов аналитич. геометрии (Демидовская премия Петербургской АН, 1836). Основатель Московского математич. общества (1864) и его органа — журнала «Математический сборник», 1-й том к-рого вышел в год смерти Б.

■ Курс аналитической геометрии, М., 1836; Теоретическая механика, ч. 1, М., 1859.
● «Матем. сб.», 1866, т. 1 (посвящается памяти Николая Дмитриевича Брашмана); Лихолетов И. И., Майстров Л. Е., Николай Дмитриевич Брашман, М., 1971.

БРЕ́МИКЕР Карл (Bremiker Karl) (23.2.1804, Хаген,— 26.3.1877, Берлин)—немецкий астроном и математик. Выпустил первые безошибочные 10-значные логарифмич. таблицы (1857).

БРИАНШО́Н Шарль Жюльен (Brianchon Charles Julien) (19.12.1785, Севр,— 29.4.1864, Версаль) — французский математик. Окончил Политехнич. школу в Париже (1808). Основные труды по проективной геометрии, где известна теорема Брианшона (1806).

БРИГС Генри (Briggs Henry) (1561, близ Галифакса,— 26.1.1630, Оксфорд) — английский математик, с 1619 проф. Оксфордского ун-та. Составил и опубликовал первые таблицы десятичных логарифмов: 8-значные (1617) для чисел первой тысячи, 14-значные (1624) для чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000; в 1633 были изданы его таблицы логарифмов тригонометрич. функций.

● История математики, т. 2, М., 1970.

БРИО́СКИ Франческо (Brioschi Francesco) (22.12.1824, Милан,— 13.12.1897, там же) — итальянский математик, гидромеханик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1884), с 1861 проф. Высшей технич. школы в Милане. Основные труды по алгебре, дифференциальным уравнениям и математич. анализу.

БРОДЕ́Н Торстен (Brodén Torsten) (16.12.1857, Скара,— г. смерти неизв.) — шведский математик. Окончил Лундский ун-т (1886), с 1906 проф. там же. Основные труды по математич. анализу, в частности по уточнению понятия функции (1897).

БРО́УН, Браун Роберт (Brown Robert) (21.12.1773, Монтроз,— 10.6.1858, Лондон) — английский ботаник, иностранный почётный чл. (1827; чл.-корр. 1826) Петербургской АН. Открыл т. н. броуновское движение (1827), изучаемое в теории вероятностей как винеровский процесс.

БРО́УНКЕР Уильям (Brouncker William) (1620, Касл-Лайонс, Ирландия,— 5.4.1684, Лондон) — английский математик, один из основателей и первый президент Лондонского королевского общества (1662—77). В 1668 Б. опубликовал приём разложения логарифма рационального числа в бесконечный ряд, положив тем самым наряду с Н. Меркатором, И. Ньютоном и др. начало представлению функций с помощью бесконечных рядов.

● Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966.

БРУН Вигго (Brun Viggo) (13.10.1885, Лье,—15.8. 1978) — норвежский математик, чл. Норвежской академии наук и литературы. Основные труды по теории чисел. Ввёл (1919) решето Эратосфена как теоретич. метод исследования, создал как его развитие т. н. решето Бруна.

БРЮ́КНЕР Иоганн Георг Андреас (Bruckner Johann Georg Andreas) (29.3.1744, Хойбах, — 15(27).4.1814, Рига) — юрист, математик и астроном, чл.-корр. Петербургской АН (1808). Автор ряда статей по изучению Прибалтийского края.

БРЮС Яков Вилимович [1670 — 19 (30).4.1735, дер. Глинки, ныне Щёлковский р-н Московский обл.] — русский учёный и государственный деятель, сподвижник Петра I, генерал-фельдмаршал. Был одним из наиболее образованных людей своего времени; занимался математикой, астрономией, физикой. В 1702 оборудовал обсерваторию при Московской школе математических и навигацких наук. Выпускал календари (Брюсов календарь), занимался научными переводами, ему принадлежит заслуга пропаганды в России учения Коперника.

● История отечественной математики, т. 1, К., 1966.

БУ́БНОВ Иван Григорьевич [6(18).1.1872, Нижний Новгород,—13.3.1919]— русский корабельный инженер. Преподавал в Петербургском политехнич. ин-те (с 1904, с 1909 проф.) и в Морской академии (с 1910). Дал математич. обоснование вопросов местной и общей прочности судов. Разработал приближённый метод интегрирования дифференциальных уравнений теории упругости (метод Бубнова — Галёркина).

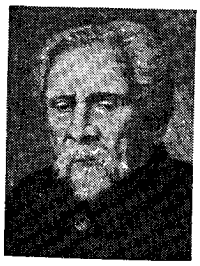
■ Труды по теории пластин, М., 1953.

БУГАЕВ Николай Васильевич [2(14).9.1837, Душети, Грузия,— 29.5(11.6).1903, Москва] — русский математик, чл.-корр. Петербургской АН (1897). Отец писателя А. Белого. Окончил Московский ун-т (1859), с 1866 проф. там же. Большая часть многочисленных математич. работ Б. относится к анализу и теории чисел. Б.— один из основателей Московского математич. общества (президент с 1891) и его органа — журнала «Математический сборник», где опубликованы основные труды Б.

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

БУ́ГГЕ Томас (Bugge Thomas) (12.10.1740, Копенгаген,— 15.1.1815) — датский астроном и математик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1803).

БУГЕ́ Пьер (Bouguer Pierre) (16.2.1698, Ле-Круазик, Бретань,— 15.8.1758, Париж) — французский фи-



Б. Я. Букреев.

Б. В. Булгаков.

Дж. Буль.

В. Я. Буняковский.

Н.Бурбаки. Вымышленный портрет.

зик и математик, чл. Парижской АН (1731) и Лондонского королевского общества. В математике впервые (1732) рассматривал плоские кривые преследования, или линии погони.

БУЗЕМАН Херберт (Busemann Herbert) (р. 12.5.1905, Берлин) — американский математик. Учился в ун-тах Мюнхена, Парижа, Гёттингена; с 1936 живёт в США, в 1947—64 проф. (с 1964 заслуженный проф.) Калифорнийского ун-та. Основные труды по многим разделам геометрии; известно пространство Буземана. Международная премия имени Н. И. Лобачевского АН СССР (1984).

■ Проективная геометрия и проективные метрики, М., 1957 (соавтор П. Келли); Геометрия геодезических, М., 1962; Выпуклые поверхности, М., 1964.

БУКРЕЕВ Борис Яковлевич [25.8(6.9).1859, Льгов, ныне Курской обл.,— 2.10.1962, Киев] — советский математик. Окончил Киевский ун-т (1882), проф. там же (1889—1959). Основные труды по теории функций комплексного переменного, математич. анализу и геометрии.

● История отечественной математики, т. 2, К., 1967.

БУЛГАКОВ Борис Владимирович [24.6(7.7).1900, Москва,— 29.4.1952, там же] — советский учёный в области механики, чл.-корр. АН СССР (1946). Окончил Московский ун-т (1928). С 1930 преподавал в Московском высшем технич. училище (с 1939 проф.). С 1941 работал в Ин-те механики АН СССР. Основные труды по прикладной теории гироскопов, теории нелинейных колебаний, следящим системам и гироскопич. приборам.

■ Прикладная теория гироскопов, 2 изд., М.—Л., 1955; Колебания, М., 1954.

БУЛЬ Джордж (Boole George) (2.11.1815, Линкольн,— 8.12.1864, Баллинтемпл, близ Корка) — английский математик и логик. Не имел специального математич. образования, с 1849 проф. математики в Куинс-колледже в Корке (Ирландия), где преподавал до конца жизни. Б. почти в равной мере интересовали логика, математич. анализ, теория вероятностей, этика Б. Спинозы, философские работы Аристотеля и Цицерона. В работах «Математический анализ логики» («The mathematical analysis of logic...», Camb., 1847), «Исследование законов мышления» («An investigation of the laws of thought...», L., 1854) Б. заложил основы математич. логики. Именем Б. названы т. н. булевы алгебры — особые алгебраич. системы, для элементов к-рых определены две операции.

● Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978.

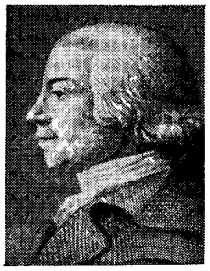
БУНЯКОВСКИЙ Виктор Яковлевич [4(16).12.1804, Баре Подольской губ., — 30.11(12.12).1889, Петербург] — русский математик, акад. Петербургской АН (1830; адъюнкт с 1828) и её вице-президент (с 1864, с сентября 1889 почётный вице-президент). Математич. образование получил в Париже. В 1825 защитил диссертацию и получил степень доктора математики. В 1826 Б. начал в Петербурге педагогич. и научную деятельность. В течение нескольких десятков лет Б. преподавал математику и механику в 1-м кадетском корпусе, в Морском корпусе, Ин-те путей сообщения. В 1846 по приглашению Э. Х. Ленца Б. читал курсы аналитич. механики, теории вероятностей и различных отделов математич. анализа в Петербургском ун-те. Наряду с М. В. Остроградским и П. Л. Чебышевым Б. сыграл значительную роль в повышении научного уровня преподавания математики в высшей школе и в расширении её учебной программы. Большое значение для математич. просвещения и установления твёрдой научной терминологии имел составленный Б. обширный «Лексикон чистой и прикладной математики» (вышел только 1-й том, 1839); он написал также учебники по арифметике для средней школы (1844, 1849). Научная работа Б. протекала главным образом в Академии наук. Из 128 научных трудов Б. около половины относится к теории чисел и теории вероятностей с её приложениями, а остальные — к вопросам анализа, геометрии и алгебры. Б. интересовался также практикой вычислений, предложил усовершенствованный вариант русских счётов.

Виднейшее место в деятельности Б. занимают труды по теории вероятностей. Его «Основания математической теории вероятностей» (1846) содержали оригинальное изложение как самой теории вероятностей, так и её приложений к страхованию, демографии и т. п. Ряд позднейших статей Б. относится к статистике народонаселения, подсчёту вероятных контингентов русской армии, организации эмеритальных касс и т. п. С 1858 Б. состоял главным экспертом правительства по вопросам статистики и страхования. Все эти работы Б., тесно связанные с развитием русской промышленности и хозяйства, содействовали успешным исследованиям по теории вероятностей в России и более широкой по объёму и глубокой по содержанию постановке её преподавания в русских университетах по сравнению с зарубежными. За трудами Б. вскоре последовали знаменитые исследования П. Л. Чебышева, создателя русской школы теории вероятностей. Теоретико-числовые работы Б. (по теории сравнений, о квадратичном законе взаимности и др.) возродили в русской науке интерес к теории чисел, столь успешно разрабатывавшейся в Петербургской АН в 18 в. В математич. анализе имеют большое значение работы Б. по теории неравенств (неравенство Буняковского). Работы Б. по геометрии относятся преимущественно к теории параллельных линий. В своих мемуарах (1844—72) он подвергал остроумной и систематич. критике различные попытки доказать аксиому Евклида о параллельных. Однако подобно большинству современников Б., находясь под влиянием вековых традиций, не смог оценить по достоинству великого открытия Н. И. Лобачевского, творца неевклидовой геометрии.

За выдающиеся заслуги перед русской наукой и просвещением Б. был избран почётным членом многих русских учёных обществ и университетов. В 1875 была учреждена премия имени В. Я. Буняковского за сочинения по математике.

● Прудников В. Е., В. Я. Буняковский — ученый и педагог, М., 1954.

БУРБАКИ Никола́ (Bourbaki Nicolas) — собирательный псевдоним, под к-рым группа математиков во Франции с 1939 выступает с попыткой осуществить идею, исходящую от Д. Гильберта,— обозреть различные математич. теории с позиций формального аксиоматич. метода. В многотомном (и далёком от завершения) трактате Н. Бурбаки «Элементы математики», выходящем с 1939, развивается формальная аксиоматич. система, к-рая, по замыслу авторов, должна охватить если не все, то главнейшие разделы математики как «частные аспекты общей концепции». Изложение носит сугубо абстрактный и формализованный характер, даётся лишь логич. каркас теорий. Основу изложения составляют т. н. структуры, определяемые посредством аксиом, напр. структуры порядка, группы, топологич. структуры. Способ рассужде-

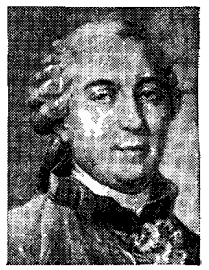

И. К. Буркхардт.

Н. П. Бусленко.

Г. Б. Бюльфингер.

Й. Бюрги.

А. Бюржа.


Ж. Л. Л. Бюффон.

ния — от общего к частному. Классификация математики, производимая по типам структур, значительно отличается от традиционной. Работает «Семинар Бурбаки», на к-ром, помимо подготовки трактата, заслушиваются доклады учёных (из разных стран). Группа образовалась в 1937 из бывших питомцев Высшей нормальной школы. Численность и точный состав группы не разглашаются.

■ Элементы математики:
Теория множеств, М., 1965 (гл. 1—4, сводка результатов); Алгебра: Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра, М., 1962 (гл. 1—3); Многочлены и поля. Упорядоченные группы, М., 1965 (гл. 4—6); Модули. Кольца. Формы, М., 1966 (гл. 7—9); Гомологическая алгебра, М., 1987 (гл. 10); Общая топология: Основные структуры, М., 1968 (гл. 1—2); Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства, М., 1969 (гл. 3—8); Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов, М., 1975 (гл. 9—10); Функции действительного переменного, М., 1965 (гл. 1—7); Топологические векторные пространства, М., 1959 (гл. 1—5, сводка результатов); Интегрирование. Меры, интегрирование мер, М., 1967 (гл. 1—5); Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления, М., 1970 (гл. 6—8); Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах, М., 1977 (гл. 3—5, 9); Коммутативная алгебра, М., 1971 (гл. 1—7); Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов, М., 1975; Спектральная теория, М., 1972 (гл. 1—2); Группы и алгебры Ли: Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, М., 1976 (гл. 1—3); Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней, М., 1972 (гл. 4—6); Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли, М., 1978 (гл. 7—8); Компактные вещественные группы Ли, М., 1986 (гл. 9); Очерки по истории математики, М., 1963.

● Дьедонне Ж., О деятельности Бурбаки, «Успехи матем. наук», 1973, т. 28, в. 3, с. 205—16; Очерки о математике, М., 1973, с. 44—55.

БУРКХА́РДТ, Буркгардт Иоганн Карл (Burckhardt Johann Karl) (30.4.1773, Лейпциг,— 21.6.1825, Париж) — французский астроном и математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1801). Вычислил (1814—17) таблицы делителей всех чисел до 3 036 000 вместе с простыми числами.

БУСЛЕ́НКО Николай Пантелеймонович (15.2.1922, Ржищев Киевской обл.,— 25.2.1977, Москва) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1966). Чл. КПСС с 1962. Окончил Московский ун-т (1952), работал в АН СССР. Основные труды по моделированию на ЭВМ сложных систем, функционирующих в условиях воздействия большого количества взаимозависимых случайных факторов, по методам количественного и качественного исследования больших систем. Государственная премия СССР (1986). Награждён 2 орденами Красного Знамени (1944, 1945), орденом Отечественной войны 2-й степени (1943), 2 орденами Красной Звезды (1943, 1956), орденом «Знак Почёта» (1975).

■ Математическое моделирование производственных процессов на цифровых вычислительных машинах, М., 1964.

БХАСКА́РА, Бхаскара Ачарья (р. 1114 — ум. позднее 1178) — индийский математик и астроном. Автор труда «Венец учения» (ок. 1150), содержащего методы решения ряда алгебраич. и теоретико-числовых задач.

■ Algebra, with arithmetic and mensuration, from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhâscara, L., 1817, Benares, 1927; История математики, т. 1, М., 1970.

БЬЕНЕМЕ́ Ирене Жюль (Bienaimé Irené Jules) (28.8.1796, Париж,— 19.10.1878, там же) — французский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1874), чл. Парижской АН (1852), с 1834 проф. Парижского ун-та. Занимался теорией вероятностей, где установил (1853) одно из важнейших неравенств (неравенство Бьенеме — Чебышева).

БЭР Рене Луи (Baire René Louis) (21.1.1874, Париж,— 5.7.1932, Шамбери) — французский математик. Окончил Высшую нормальную школу в Париже (1895). Один из основателей теории функций действительного переменного, а также дескриптивной теории множеств. Создал (1899) классификацию разрывных функций (классы Бэра).

■ Теория разрывных функций, м.—л., 1932.

БЮДА́Н Фердинан Франсуа Дезире (Budan Ferdinand François Désiré) (ок. 1800 — ок. 1853) — французский математик и врач. Независимо от Ж. Фурье доказал (1822) теорему о числе корней алгебраич. уравнения (теорема Бюдана — Фурье).

БЮЛЬФИНГЕР, Бильфингер Георг Бернхард (Bülfinger, Bilfinger Georg Bernhard) (23.1.1693, Канштатт, Вюртемберг,— 18.2.1750, Штутгарт) — немецкий математик, физик и философ, акад. (1725—30) и иностранный почётный чл. (1731) Петербургской АН, в 1721—25 и с 1731 проф. Тюбингенского ун-та. В 1725—30 работал в Петербурге. Основные труды по физике.

БЮРГИ Йобст (Юстус) (Bürgi Jobst) (28.2.1552, Лихтенштейн,— 31.1.1632, Кассель) — швейцарский математик, астроном и механик. Издал «Таблицы арифметической и геометрической прогрессий» (1620), представляющие по существу таблицы (с девятью верными цифрами) антилогарифмов с основанием, близким к числу e. Предложил метод для приближённого вычисления корней алгебраич. уравнений.

● История математики, т. 2, М., 1970.

БЮРЖА́ Абель (Burja Abel) (30.8.1752—16.2.1816, Берлин) — немецкий математик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1794), проф. Военной академии в Берлине.

БЮФФО́Н Жорж Луи Леклерк (Buffon Georges Louis Leclerc) (7.9.1707, Монбар,— 16.4.1788, Париж) — французский естествоиспытатель, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1776), чл. Парижской АН (1733). Уделял внимание двенадцатеричной системе счисления; первым стал заниматься задачами на геометрич. вероятности (напр., задача Бюффона об игле).

● Канаев И. И., Жорж Луи Леклерк де Бюффон, М.—Л., 1966.

B

ВАЛЕ́РИО Лука (Valerio Luca) (ок. 1552, Неаполь,— ок. 1618, Рим) — итальянский математик, чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме. Развивал инфинитезимальные методы древнегреческих учёных. Решил задачу о нахождении центров тяжести сегментов слоёв эллипсоидов и гиперболоидов вращения.

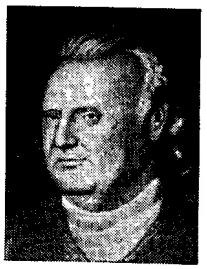
● История математики, т. 2, М., 1970.

ВАЛЛЕ́ ПУССЕ́Н Ш. Ж. де ла — см. *Ла Валле Пуссен* Ш. Ж. де.

ВА́ЛЛИС, Уоллис Джон (Wallis John) (23.11.1616, Ашфорд, Кент,— 28.10.1703, Оксфорд) — английский математик, с 1649 проф. геометрии Оксфордского ун-та. Один из основателей (1662) Лондонского королевского общества. Его основной труд «Арифметика бесконечного» («Arithmetica infinitorum», [Oxf.], 1655) сыг-

Дж. Валлис.

А. Вальд.



Э. Варинг.

П. Вариньон.

рал важную роль в предыстории интегрального исчисления. В. нашёл (1665) выражение для числа π в виде бесконечного произведения (формула Валлиса), ввёл (1655) общепринятый знак для бесконечности (∞).

■ Opera mathematica, v. 1—3, Oxoniae, 1693—99.

● История математики, т. 2, М., 1970; Scott J., The mathematical work of John Wallis, L., 1938.

ВАЛЬД Абрахам (Wald Abraham) (31.10.1902, Коложвар, ныне Клуж-Напока,— 13.12.1950) — американский математик, с 1941 проф. Колумбийского ун-та. Основные труды по математич. статистике; усовершенствовал теорию выборочного контроля, создал последовательный анализ и теорию статистич. решающих функций.

■ Последовательный анализ, М., 1960.

ВАН-ДЕР-ВАРДЕН Б. Л. —см. *Варден* Б. Л.

ВАНДЕРМО́НД Александр Теофиль (Vandermonde Alexandre Théophill) (28.2.1735, Париж,— 1.1.1796, там же) — французский математик, чл. Парижской АН (1771). Основные труды по алгебре, в частности по теории симметрич. функций. В. дал логич. изложение теории детерминантов, где известен определитель Вандермонда.

ВАН СЯОТУ́Н (7 в.) — китайский математик и астроном. Автор трактата «Продолжения старинной математики» (ок. 625). Решал числовые кубич. уравнения, задачи на определение элементов прямоугольного треугольника, сформулировал правило определения объёмов тел сложной формы путём разбиения их на призмы и пирамиды.

● Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961.

ВАНЦЕ́ЛЬ, Вантцель Пьер Лоран (Wantzell Pierre Laurent) (1814—1848) — французский математик. Работал в Политехнич. школе в Париже. Основные труды по алгебре и геометрии. Дал (1837) первое строгое доказательство невозможности удвоения куба и трисекции угла с помощью циркуля и линейки.

ВАРДЕН, Ван-дер-Варден Бартел Лендерт (van der Waerden Bartel Leendert) (р. 2.2.1903, Амстердам) — математик. По национальности голландец. Проф. ун-тов в Гронингене (1928—31), Лейпциге (1931—45), Амстердаме (1948—51) и Цюрихе (с 1951). Основные работы относятся к алгебре и алгебраич. геометрии. Его кн. «Современная алгебра» (1930—31) завершила период создания современной «общей» алгебры. Занимался также вопросами истории математики и астрономии.

■ Метод теории групп в квантовой механике, Харьков, 1938; Современная алгебра, ч. 1—2, 2 изд., М.—Л., 1947; Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции, М., 1959; Математическая статистика, М., 1960; Алгебра, 2 изд., М., 1979.

ВА́РИНГ, Уэринг Эдуард (Waring Edward) (1734, Олд-Хит, близ Шрусбери,— 15.8.1798, Плили в Понтсбери) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1763), с 1760 проф. Кембриджского ун-та. Основные труды по алгебре, теории алгебраич. кривых и теории чисел. Для теории чисел особенно важна постановка (1770) т. н. проблемы Варинга.

● Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966.

ВАРИНЬО́Н Пьер (Varignon Pierre) (1654 — 22.12.1722, Париж) — французский математик и механик, чл. Парижской АН (1688), с 1704 проф. Коллеж де Франс. Основные труды по геометрии и статике; одним из первых продолжил разработку дифференциального исчисления Г. Лейбница.

● История математики, т. 2, М., 1970.

ВАСИ́ЛЬЕВ Александр Васильевич [20.6(2.7).1853, Казань,— 6.10.1929, Москва] — русский математик. Окончил Петербургский ун-т (1874), проф. Казанского ун-та (1887—1906), затем работал в Петербурге и Москве. Один из основателей Казанского физико-математич. общества (его председатель в 1890—1907). В.— активный пропагандист идей Н. И. Лобачевского, первое собрание сочинений к-рого было выпущено (1883—86) под редакцией В., ему принадлежит первая научная биография Н. И. Лобачевского (СПБ, 1914). Ряд трудов В. относится к алгебре, теории функций и истории математики. В.— чл.-корр. Международной академии истории науки (1929).

■ Целое число, П., 1922.

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

ВА́ТСОН, Уатсон (правильнее Уотсон) Джордж Невилл (Watson George Nevill) (31.1.1886, Уэсту-орд-Хо, Девоншир,— 2.2.1965) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1919), с 1918 проф. Бирмингемского ун-та. Основные труды по математич. анализу (в частности, по теории интегральных преобразований) и специальным функциям (гипергеометрические и бесселевы функции), а также по теории дифракционных радиоволн.

■ Теория бесселевых функций, ч. 1—2, М., 1949; Курс современного анализа, 2 изд., ч. 1—2, М., 1963 (соавтор Э. Т. Уиттекер).

ВА́ЩЕНКО-ЗАХА́РЧЕНКО Михаил Егорович [31.10(12.11).1825, с. Малиевцы на Полтавщине,— 14(27).8.1912, Киев] — украинский математик, с 1867 проф. Киевского ун-та. Его докторская диссертация «Риманова теория функций составного переменного» (1866) — одно из первых русских сочинений по этому вопросу; автор «Истории математики» (т. 1, К., 1883), посвящённой древности и средним векам; перевёл «Начала» Евклида и дал пояснительное введение и примечания к ним (1880).

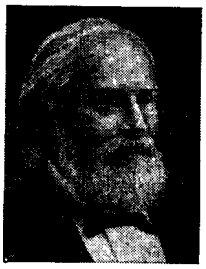
● История отечественной математики, т. 2, К., 1967; Грациансkая Л. Н., М. Е. Ващенко-Захарченко, в сб.: Историко-математические исслсдования, в. 14, М., 1961, с. 441—64.

ВЕ́БЕР Вильгельм Эдуард (Weber Wilhelm Eduard) (24.10.1804, Виттенберг,— 23.6.1891, Гёттинген) — немецкий физик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1853), в 1831—37 и с 1849 проф. Гёттингенского ун-та. Основные труды по физике электричества и магнитных явлений. Совместно с К. Гауссом создал абсолютную систему электромагнитных единиц.

■ Werke, Bd 1—6, B., 1892—94.

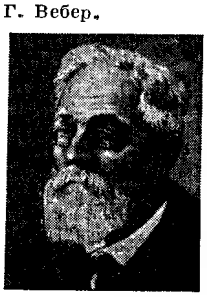
ВЕ́БЕР Генрих (Weber Heinrich) (5.3.1842, Гейдельберг,— 17.5.1913, Страсбург) — немецкий математик, проф. Цюрихского политехнич. ин-та (1870—73), Кёнигсбергского (1873—83), Марбургского, Гёттингенского (1892—94)

А. В. Васильев.



М. Е. Ващенко-Захарченко.

В. Э. Вебер.



Г. Вебер.

и Страсбургского (с 1895) ун-тов. Основные труды по теории алгебраич. чисел, алгебраич. функций, алгебраич. геометрии и математич. физике; в теории дифференциальных уравнений известны уравнения Вебера, функции Вебера. Совместно с Й. Вельштейном издал (1903—07) 3-томную «Энциклопедию элементарной математики» (рус. пер., 2 изд., Од., 1911—14).

ВЕ́БЛЕН Освалд (Veblen Oswald) (24.6.1880, Декора, шт. Айова,— 10.8.1960, Нью-Йорк) — американский математик, чл. Национальной АН США, Американской академии искусств и наук в Бостоне. Окончил Чикагский ун-т (1903). В 1905—32 работал в Принстонском ун-те (с 1910 проф.). Один из основателей Ин-та перспективных исследований в Принстоне (с 1932 проф., с 1950 заслуженный проф.). Основные труды по проективной и дифференциальной геометрии и топологии.

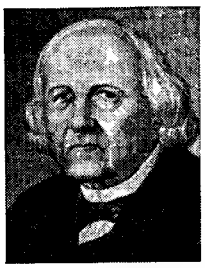
■ Инварианты дифференциальных квадратичных форм, М., 1948; Основания дифференциальной геометрии, М., 1949 (соавтор Дж. Уайтхед).

ВЕ́ГА Георг (Vega Georg) (1756— 26.9. 1802, близ Вены) — австрийский математик, морской офицер и артиллерист. С 1787 проф. артиллерийского училища в Вене. Известен изданием «Таблиц логарифмов» (1783), в своё время лучших по точности.

■ Таблицы семизначных логарифмов, 2 изд., М., 1966.

ВЕ́ДДЕРБЁРН, Уэддербёрн Джозеф Генри Маклаган (Wedderburn Joseph Henry Maclagan) (26.2.1882, Форфар, Шотландия, — 3.10.1948, Принстон) — американский математик, чл. Лондонского королевского общества (1933). Работал в Принстонском ун-те (1905—1945), с 1908 проф. там же. Основные труды по алгебре (теорема Веддербёрна — Артина о строении полупростых колец).

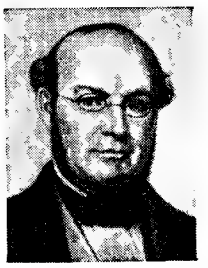
ВЕ́ЙЕРШТРАСС Карл Теодор Вильгельм (Weierstraß Karl Theodor Wilhelm) (31.10.1815, Остенфельде,— 19.2. 1897, Берлин) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. (1864) и иностранный почётный чл. (1895) Петербургской АН, с 1856 проф. Берлинского ун-та. Изучал юридич. науки в Бонне и математику в Мюнстере. Исследования В. посвящены математич. анализу, теории функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии и линейной алгебре. В. разработал систему логич. обоснования математич. анализа на основе построенной им теории действительных чисел. Он систематически использовал (аксиома Вейерштрасса) понятия верхней и нижней грани и предельной точки числовых множеств, дал строгое доказательство основных свойств функций, непрерывных на отрезке, и ввёл во всеобщее употребление понятие и признак равномерной сходимости функционального ряда (признак Вейерштрасса). В. построил пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке, доказал возможность сколь угодно точного приближения многочленами произвольной функции, непрерывной на отрезке (теорема Вейерштрасса). Центральное место в работах В. занимает теория аналитич. функций, в основу к-рой он кладёт степенные ряды. В. принадлежат: исследование поведения аналитич. функции в окрестности изолированной особой точки, построение теории аналитич. продолжения, теорема об аналитичности суммы равномерно сходящегося ряда аналитич. функций, разложение целых функций в бесконечные произведения, основы теории аналитич. функций многих переменных, новое построение теории эллиптич. функций и работы по теории алгебраич. функций и абелевых интегралов. К вариационному исчислению относятся: исследование достаточных условий экстремума функционала (условие Вейерштрасса), построение вариационного исчисления для случая параметрич. задания функций, изучение «разрывных» решений в задачах вариационного исчисления и др. В дифференциальной геометрии В. изучал геодезич. линии и минимальные поверхности. В линейной алгебре В. принадлежит построение теории элементарных делителей.



К. Т. В. Вейерштрасс.

А. Вейль.

Г. Вейль.



Л. Ю. Вейсбах.

■ Mathematische Werke, Bd 1—7, B.—Lpz., 1894—1927.

● Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.—Л., 1937; «Успехи матем. наук», 1966, т. 21, в. 3; Математика XIX в. Геометрия, теория аналитических функций, М., 1981; Кочина П. Я., Карл Вейерштрасс. 1815—1897, М., 1985; «Acta mathematica», 1923, v. 39, p. 1—57; Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass, Köln — Oplanden, 1966.

ВЕ́ЙЛЬ Андре (Weil Andrée) (р. 6.5. 1906, Париж) — французский математик, чл. Парижской АН (1982). Окончил Высшую нормальную школу в Париже (1928). С 1958 проф. Принстонского ин-та перспективных исследований. Один из основателей группы математиков Н. Бурбаки. Основные труды по теории непрерывных групп и абстрактной алгебраич. геометрии. Ввёл понятия абстрактного алгебраич. многообразия, равномерного пространства.

■ Foundations of algebraic geometry, N. Y., 1946; Providence, 1962; Интегрирование в топологических группах и его применения, М., 1950; Введение в теорию кэлеровых многообразий, М., 1961; Основы теории чисел, М., 1972; Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру, М., 1978.

ВЕ́ЙЛЬ Герман (Weyl Hermann) (9.11.1885, Эльмсхорн, Шлезвиг-Гольштейн,— 8.12.1955, Цюрих) — немецкий математик, чл. Национальной АН США. Окончил Гёттингенский ун-т (1908). В 1913—30 проф. Цюрихского политехнич. ин-та, в 1930—33 Гёттингенского ун-та. В 1933 эмигрировал в США, работал в Принстонском ин-те перспективных исследований. Труды посвящены тригонометрич. рядам и рядам по ортогональным функциям, теории функций комплексного переменного, дифференциальным и интегральным уравнениям. Ввёл в теорию чисел т. н. суммы Вейля. Наиболее значительны работы В. по теории непрерывных групп и их представлений с применениями к проблемам геометрии и физики. В области философии математики В.— представитель интуиционизма. В 1927 В. присуждена Международная премия имени Н. И. Лобачевского.

■ Gesammelte Abhandlungen, Bd 1—4, B., 1968; Алгебраическая теория чисел, М., 1947; Классические группы, их инварианты и представления, М., 1947; Симметрия, М., 1968; Математика. Теоретическая физика. Избранные труды, М., 1984; Теория групп и квантовая механика, М., 1986; Полвека математики, М., 1969.

● «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, в. 4; Яглом И. М., Герман Вейль, М., 1967; «Enseignement mathématique, sér. 2», 1957, t. 3, p. 157—87.

ВЕ́ЙСБАХ, Вайсбах Людвиг Юлиус (Weisbach Ludwig Julius) (10.8.1806, Аннаберг,— 24.2.1871, Фрайберг)—немецкий математик и специалист по горному делу, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1855).

ВЕ́КУА Илья Несторович [10(23).4. 1907, с. Шешелеты, Грузия,— 2.12. 1977, Тбилиси] — советский математик и механик, акад. АН СССР (1958; чл.-корр. 1946) и акад. (1946; чл.-корр. 1944) и президент (с 1972) АН Грузинской ССР, Герой Социалистич. Труда (1969). Чл. КПСС с 1943. Окончил Тбилисский ун-т (1930), в 1940—53 и с 1965 проф. там же, в 1952—59 проф. Московского ун-та, в 1959—64 ректор Новосибирского ун-та, в 1965—72 ректор Тбилисского ун-та. Работал в АН СССР, АН Грузинской ССР. Основные труды относятся к новым научным направлениям в современной математич. физике. Работы в области дифферен-

И. Н. Векуа.

Б. А. Венков.

циальных уравнений с частными производными в основном посвящены созданию аналитич. теории обширного класса уравнений эллиптич. типа. В. внёс большой вклад в теорию одномерных сингулярных интегральных уравнений, открыл и исследовал новый класс нефредгольмовых эллиптич. краевых задач. В области механики В. предложил новый вариант математич. теории упругих оболочек. Им решены трудные проблемы малых изгибаний поверхностей и тесно с ними связанные задачи безмоментной теории оболочек. В.— иностранный чл. АН ГДР (1958), Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина» (1968), почётный доктор Йенского ун-та (1969), иностранный чл. Польского общества теоретич. и прикладной механики, почётный доктор ун-та им. М. Лютера в ГДР (1977). Депутат Верховного Совета СССР 7—9-го созывов. Ленинская премия (1963), Государственные премии СССР (1950, 1984). Награждён 5 орденами Ленина (1961, 1966, 1969, 1975, 1977), орденом «Знак Почёта» (1946).

В 1978 в АН Грузинской ССР учреждена премия имени И. Н. Векуа.

■ Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., 1948; Обобщенные аналитические функции, М., 1959; Основы тензорного анализа и теории ковариантов, М., 1978; Теория тонких пологих оболочек переменной толщины, Тб., 1965; Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек, М., 1982.

● Бицадзе А. В., Илья Несторович Векуа, Тб., 1967; «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 5; 1977, т. 32, в. 2; «Вестник АН СССР», 1978, № 2; Илья Несторович Векуа, М., 1963 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР).

ВЕ́ЛЬШТЕЙН, Вельштайн Йозеф (Wellstein Josef) (17.10.1869 — 24.6.1919) — немецкий математик, с 1904 проф. Страсбургского ун-та. Основные труды по теории функций, теории римановых поверхностей. Совместно с Г. Вебером издал (1903—07) 3-томную «Энциклопедию элементарной математики» (рус. пер., 2 изд., Од., 1911—14).

ВЕНКО́В Борис Алексеевич [31.7 (13.8).1900, с. Кратово, ныне Псковской обл.,— 13.12.1962, Ленинград] — советский математик. Окончил Ленинградский ун-т (1925), с 1935 проф. там же. Основные труды по теории чисел. Получил (1928) элементарное доказательство формул Дирихле для числа классов бинарных квадратичных форм, построил (1940) континуум различных способов приведения положительных квадратичных форм. В. принадлежит абстрактная характеризация параллелоэдров.

■ Элементарная теория чисел, М.—Л., 1937.

● «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 4.

ВЕНН Джон (Venn John) (4.8.1834, Драйпул, близ Халла,— 4.4.1923, Кембридж) — английский логик. Работал в области логики классов, где создал особый графич. аппарат (диаграммы Венна), нашедший применение в логико-математич. теории «формальных нейронных сетей». В. принадлежит обоснование обратных операций в логич. исчислении Дж. Буля; занимался также вероятностной логикой.

■ The logic of chance, 3 ed., L., 1888; The principles of empirical or inductive logic, L., 1889; Symbolic logic, L., 1881.

● Стяжкин Н. И., Формирование математической логики, М., 1967; Кузичев А. С., Диаграммы Венна, М., 1968.

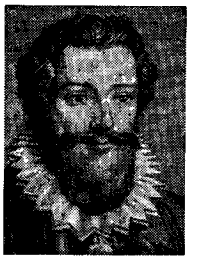
ВЕ́ССЕЛЬ Каспар (Wessel Caspar) (8.6.1745, Йонсруд, Норвегия,— 25.3.1818, Копенгаген) — датский математик. По профессии землемер. Автор соч. «Об аналитическом представлении направлений» (1799), посвящённого теории векторов на плоскости и в пространстве, в к-ром впервые дано геометрич. представление комплексных чисел. В течение столетия сочинение В. оставалось неизвестным, а его результаты открывались вновь.

● История математики, т. 3, М., 1972.

ВИ́ДМАН Ян (Йоханнес) [Widmann Jan (Johannes)] (1460, Хеб,— 1-я пол. 16 в.) — чешский математик. Преподавал математику в Лейпцигском ун-те. Ввёл (1489) в употребление знаки + (для сложения) и — (для вычитания) и первым напечатал таблицу умножения.

● Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961.

ВИЕ́Т, Вьет Франсуа (Viète François) (1540, Фонтене-ле-Конт,— 13.12.1603, Париж) — французский математик, по профессии — юрист. Заинтересовавшись астрономией, В. вынужден был заняться тригонометрией и алгеброй. Алгебра 16 в. ещё до В. обогатилась многими открытиями (решение в радикалах уравнений 3-й и 4-й степени, нек-рое развитие символики), но лишь в трудах В. она становится общей наукой об алгебраич. уравнениях, основанной на буквенном исчислении. В 1591 В. впервые ввёл буквенные обозначения не только для неизвестных величин, что иногда делалось и ранее, но и для данных, т. е. для коэффициентов уравнений. Благодаря этому стало впервые возможным выражение свойств уравнений и их корней общими формулами и сами алгебраич. выражения превратились в объекты, над к-рыми можно было производить те или иные действия. Ему принадлежит установление единообразного приёма решения уравнений 2-й, 3-й и 4-й степени, новый метод решения кубич. уравнения, тригонометрич. решение в т. н. неприводимом случае, различные рациональные преобразования корней и пр. Среди этих открытий сам В. особенно высоко ценил установление зависимости между корнями и коэффициентами уравнений (формулы Виета).



Ф. Виет.

А. М. Вильбрехт.

Находясь под сильным влиянием античной математики, В. построил алгебру общих непрерывных геометрич. и квази-геометрич. объектов, составляющих «скалу» величин: длин, площадей, тел, «площаде-площадей» и т. д. В этой «видовой» (т. е. рассматривающей величины под видом каких-либо символов, напр. букв) алгебре, к-рая противопоставлялась В. «числовой» алгебре, действовал «закон однородности», согласно к-рому складывать и вычитать можно лишь величины одинакового измерения. При умножении двух величин составлялась величина, измерение к-рой равно сумме измерений сомножителей, а при делении — разности измерений делимого и делителя. Т. о., в «видовой» алгебре возникал принципиальный разрыв между буквенной и числовой алгеброй. Дальнейшее развитие числовая алгебра получила в трудах Р. Декарта и И. Ньютона, к-рые вместе с тем устранили ряд недостатков, присущих алгебре В. (непризнание иррациональных, отрицательных и, тем более, мнимых чисел, отсутствие общего обозначения степени и иные). В тригонометрии В. дал полное решение задачи об определении всех элементов плоского или сферич. треугольника по трём данным, нашёл важные разложения $\cos nx$ и $\sin nx$ по степеням $\cos x$ и $\sin x$. В. впервые рассмотрел бесконечные произведения.

■ Opera mathematica, Lugduni Batavorum, 1646; Isagoge in artem analyticam, Tours, 1591.

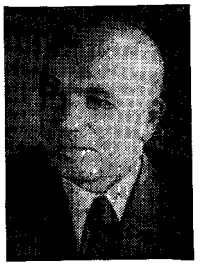
● История математики, т. 1, М., 1970; Ritter F., F. Viète. Notice sur la vie et son oeuvre, P., 1895.

ВИ́ЛЬБРЕХТ, Вильдбрехт Александр Михайлович [23.11(4.12).1757 — 2(14).12.1823] — русский математик, географ, картограф, астроном, чл.-корр. Петербургской АН (1814). Основные труды по картографии, преподавал высшую математику в Петербургском горном ин-те.

● История отечественной математики, т. 2, К., 1967.

ВИ́НЕР Норберт (Wiener Norbert) (26.11.1894, Колумбия, Миссури,— 19.3.1964, Стокгольм) — американский учёный. К 14 годам изучил высшую математику, в 18 лет стал доктором философии Гарвардского ун-та.

Н. Винер.



И. М. Виноградов.

Раннее развитие В. отражено в его кн. «Я вундеркинд» (1953). С 1919 преподаватель, с 1932 проф. Массачусетского технологич. ин-та. Занимался математикой, логикой и теоретич. физикой. В 20—30-е гг. получил известность как математик работами по теории потенциала, гармонич. функциям, рядам и преобразованиям Фурье, тауберовым теоремам, общему гармонич. анализу. Большое значение в теории случайных процессов (винеровских процессов) получила введённая В. мера в пространстве непрерывных функций (винеровская мера).

Во время 2-й мировой войны В. занимался электрич. сетями, вычислительной техникой, в частности в связи с баллистич. расчётами. Несколько позднее, но независимо от А. Н. Колмогорова, развил теорию интерполяции и экстраполяции стационарных случайных процессов. В. развил для таких процессов теорию их «фильтрации», получившую широкие технич. применения. В 1945—47 работал в кардиологич. ин-те в Мехико. В эти годы у В. возникла идея о необходимости создания единой науки, изучающей процессы хранения и переработки информации управления и контроля. Для этой науки В. предложил назв. кибернетика, получившее общее признание. Естественно, что конкретное содержание этой области знания не является созданием одного В. Не меньшую роль сыграли в формировании кибернетики, напр., идеи К. Шеннона. Но В. принадлежит, несомненно, первое место в пропаганде значения кибернетики во всей системе человеческих знаний.

Философские и социологич. взгляды В. эклектичны. Однако должны быть отмечены его настойчивые высказывания о моральной ответственности учёных в деле сохранения мира и борьбы против использования достижений науки в агрессивной военной политике. В сочинениях писателей-фантастов получила большой отклик идея В. о возможности «бунта машин».

■ Я — математик, 2 изд., М., 1967; Нелинейные задачи в теории случайных процессов, М., 1961; Интеграл Фурье и некоторые его приложения, М., 1963; Преобразование Фурье в комплексной области, М., 1964 (соавтор Р. Пэли); Кибернетика, 2 изд., М., 1968; Кибернетика и общество, М., 1958; Новые главы кибернетики, М., 1963.

ВИНОГРА́ДОВ Иван Матвеевич [2(14).9.1891, с. Милолюб, ныне Великолукский р-н Псковской обл.,— 20.3.1983, Москва] — советский математик, акад. АН СССР (1929), почётный чл. АН Армянской ССР (1952), почётный чл. АН Грузинской ССР (1974), дважды Герой Социалистич. Труда (1945, 1971). Родился в семье сельского священника. После окончания Петербургского ун-та (1914) был оставлен при ун-те для подготовки к профессорскому званию. В 1918—20 доцент и проф. Пермского ун-та, в 1920—34 Ленинградского политехнич. ин-та и Ленинградского ун-та. С 1932 директор Математич. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. Главный редактор «Математической энциклопедии» (т. 1—5, М., 1977—85), главный редактор журнала «Известия АН СССР. Серия математическая» (с 1948).

Основные труды посвящены аналитич. теории чисел. Им решены проблемы, к-рые считались недоступными математике 20 в. В. создал один из самых сильных и общих методов аналитич. теории чисел — метод тригонометрич. сумм. Почти все проблемы аналитической теории чисел довольно просто формулируются на языке конечных сумм слагаемых вида $\cos F(x_1,\ldots,x_n) + i\sin F(x_1,\ldots,x_n)$, где F — действительная целочисленная функция, $i=\sqrt{-1}$. Таким образом, центр тяжести многих проблем переносится на задачу изучения таких сумм и, в частности, на задачу получения возможно более точной оценки модуля таких сумм. В., используя глубокие арифметич. свойства рассматриваемых сумм, получил исключительно сильные оценки модуля широкого класса таких сумм. Это позволило ему получить фундаментальные, близкие к предельно возможным результаты в целом ряде вопросов теории чисел в таких классич. задачах, как проблема Варинга, проблема Гильберта — Камке, проблема оценок сумм Вейля (1934—35). Другим следствием метода (1935—37) было решение ряда аддитивных проблем с простыми числами и, в частности, решение проблемы Гольдбаха. Ставшие классическими, методы В. развиваются и применяются многими учёными в разных областях математики.

В.— чл. Математич. общества в Польше (1936), почётный иностранный чл. Амстердамского математич. общества (1938), почётный чл. Лондонского математич. общества (1939), иностранный чл. Лондонского королевского общества (1942), Американского философского общества в Филадельфии (1942), иностранный чл.-корр. Парижской АН (1946), почётный иностранный чл. Американской академии искусств и наук в Бостоне (1947), иностранный чл.-корр. Болгарской АН (1947), иностранный чл. Датской королевской АН (1947), почётный чл. Индийского математич. общества (1947), иностранный чл. АН ГДР (1950), почётный доктор философии ун-та в Осло (1950), иностранный чл. Венгерской АН (1950), иностранный чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме (1958), Сербской академии наук и искусств (1959), Королевского ин-та Великобритании (1960), Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина» (1962). Ленинская премия (1972), Государственные премии СССР (1941, 1983), Золотая медаль имени М. В. Ломоносова АН СССР (1971), Золотая медаль «За заслуги перед наукой и человечеством» Чехословацкой АН (1981). Награждён 6 орденами Ленина (1944, 1945, 1953, 1961, 1971, 1975), орденом Октябрьской Революции (1981).

А. Г. Витушкин.

■ Избр. труды, М., 1952; Основы теории чисел, 9 изд., М., 1981; Метод тригонометрических сумм в теории чисел, 2 изд., М., 1980; Особые варианты метода тригонометрических сумм, М., 1976.

● «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 2; 1971, т. 26, в. 6; 1981, т. 36, в. 6; 1983, т. 38, в. 6; Иван Матвеевич Виноградов, М., 1978 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР).

ВИСКОВА́ТОВ Василий Иванович [26.12.1779 (6.1.1780), Петербург,— 8(20).10.1812, там же] — русский математик, акад. Петербургской АН (1807; адъюнкт с 1803, чл.-корр. 1799). В.— один из активных последователей С. Е. Гурьева в пропаганде новых передовых математич. идей. Наиболее важны труды В. по математич. анализу и вариационному исчислению; ему принадлежит термин «производная функция» (1810).

● Ожигова Е. П., Математика в Петербургской Академии наук в конце XVIII—первой половине XIX в., Л., 1980.

ВИТА́ЛИ Джузеппе (Vitali Guseppe) (26.8.1875, Ровенна,— 29.2.1932) — итальянский математик, чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме (1930), Болонской АН (1931). Окончил Пизанский ун-т (1899), проф. ун-тов в Модене, Падуе, Болонье. Основные труды по теории множеств, теории аналитических и измеримых функций, функциональному анализу.

ВИТТ Ян (Йохан) де [Witt Jan(Johan) de] (24.9.1625, Дордрехт,— 20.8.1672, Гаага) — голландский государственный деятель и математик. Основные работы в области аналитич. геометрии.

● Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966.

ВИТУ́ШКИН Анатолий Георгиевич (р. 25.6.1931, Москва) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1976). Окончил Московский ун-т (1954), с 1965 работает в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды по теории функций, теории информации, комплексному анализу и геометрии. Государственная премия

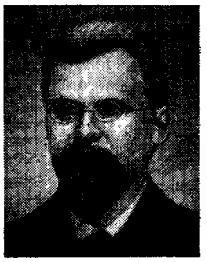
В. С. Владимиров.

А. К. Власов.

В. Вольтерра.

Х. Вольф.

И. И. Ворович.


Г. Ф. Вороной.

СССР (1967). Награждён орденом «Знак Почёта» (1981).

■ О многомерных вариациях, М., 1955; Оценка сложности задачи табулирования, М., 1959; Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений, «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 6; Кодирование сигналов с конечным спектром и проблемы звукозаписи, в кн.: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver, 1974; Вещественно-аналитические гиперповерхности комплексных многообразий, «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, в. 2.

● «Вестник АН СССР», 1981, № 12.

ВЛАДИ́МИРОВ Василий Сергеевич (р. 9.1.1923, дер. Дяглево Ленинградской обл.) — советский математик, акад. АН СССР (1970; чл.-корр. 1968), Герой Социалистич. Труда (1983). Чл. КПСС с 1944. Окончил Ленинградский ун-т (1948). С 1948 работает в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР (с 1969 зав. отделом, с 1988 директор), в 1964—86 проф. Московского физико-технич. ин-та. Главный редактор журнала «Известия АН СССР. Серия математическая» (с 1984).

Основные труды по математич. физике, обобщённым функциям, теории функций многих комплексных переменных, вычислительной математике. Создал метод численного интегрирования уравнения переноса по характеристикам (1958), установил новый вариационный принцип для односкоростного уравнения переноса (1957) и вывел наилучшие граничные условия в методе сферич. гармоник для выпуклых областей (1960). В. принадлежит доказательство дисперсионных соотношений в квантовой теории поля для максимально возможных передач импульса (1959), он установил т. н. теорему о «*C*-выпуклой оболочке» и применил её к вопросам единственности обобщённых решений уравнений в свёртках (1960). В. дал решение задачи линейного сопряжения голоморфных функций многих комплексных переменных (1965), описал класс голоморфных функций в трубчатых областях над острыми конусами с неотрицательной мнимой частью (1969) и применил это к построению теории многомерных линейных пассивных систем (1970). Имеет работы по обобщённым функциям, геометрич. теории чисел, тауберовой теории, квадратурным формулам для функциональных интегралов, методу Монте-Карло, плюрисубгармонич. функциям, статистич. физике, суперанализу, нелинейным интегрируемым системам, истории математики. В.— чл. Международной ассоциации математической физики (1980), иностранный чл. Саксонской АН (ГДР, 1985), Воеводинской академии наук и искусств (СФРЮ). Государственные премии СССР (1953, 1987), Золотая медаль имени А. М. Ляпунова АН СССР (1971), Золотая медаль имени Б. Больцано Чехословацкой АН (1982). Награждён 2 орденами Ленина (1975, 1983), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1967, 1973), орденом Отечественной войны 2-й степени (1985).

■ Математические задачи односкоростной теории переноса частиц, М., 1961; Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964; Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1981; Обобщенные функции в математической физике, 2 изд., М., 1979; Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций, М., 1986 (соавторы Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов).

● «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 1; «Вестник АН СССР», 1983, № 5; Василий Сергеевич Владимиров, М., 1987 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР).

ВЛАКК Адриан (Vlacg Adrian) (1600—1667) — голландский математик. Закончил составление начатых Г. Бриггсом 10-значных таблиц логарифмов от 1 до 100 000 (издал их в 1629) и таблицы десятичных логарифмов тригонометрич. функций.

ВЛА́СОВ Алексей Константинович (1868, с. Власовка, ныне Владимирской обл.,— 21.5.1922) — русский математик, окончил Московский ун-т (1832), в 1897—1910 и с 1917 проф. там же. Основные труды по проективной геометрии. В. вёл большую педагогич. работу; его 2-томный «Курс высшей математики», впервые вышедший в 1914, имел большое распространение (5 изд., М., 1952).

● «Матем. сб.», 1925, т. 32, в. 2.

ВОЕВО́ДИН В. В.— см. стр. 771.

ВОЛЬТЕ́РРА Вито (Volterra Vito) (3.5.1860, Анкона,— 11.10.1940, Рим) — итальянский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1908) и иностранный почётный чл. АН СССР (1926), чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме (1899), проф. ун-тов в Пизе (с 1883), Турине (с 1893), Риме (с 1900). Основные труды по дифференциальным уравнениям с частными производными, интегральным (уравнения Вольтерры) и интегро-дифференциальным уравнениям, функциональному анализу и теории упругости.

■ Opere matematiche. Memorie e note, v. 1—5, Roma, 1954—62; Математическая теория борьбы за существование, М., 1976; Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, М., 1982.

● Полищук Е. М., Вито Вольтерра, Л., 1977.

ВОЛЬФ Христиан (Кристиан) фон [Wolf (Wolff) Christian von] (24.1.1679, Бреслау, ныне Вроцлав, — 9.4.1754, Галле) — немецкий философ, математик, физик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1725), проф. математики и философии в Галле (1706—23 и с 1740) и Марбурге (1723—40), где в числе его слушателей был М. В. Ломоносов. Сыграл большую роль при создании Петербургской АН, содействовал приглашению в Петербург видных учёных. Автор работ по физике и математике и нескольких учебников, а также «Математического лексикона» («Mathematisches Lexicon», Lpz., 1716), где, в частности, впервые появляются термины «уменьшаемое», «вычитаемое», «возведение в степень». Ему же принадлежит термин «квадратное уравнение» (1710).

● Историко-математические исследования, в. 26, М., 1982, с. 295—96.

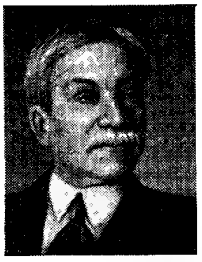
ВОРО́ВИЧ Иосиф Израилевич (р. 21.6.1920, г. Стародуб Брянской обл.) — советский учёный в области механики, чл.-корр. АН СССР (1970). Чл. КПСС с 1950. Окончил Военно-воздушную инженерную академию им. Н. Е. Жуковского (1944). С 1950 работает в Ростовском ун-те (проф. с 1960), с 1971 директор НИИ механики и прикладной математики при ун-те. Основные труды по математич. вопросам механики сплошной среды, нелинейной теории оболочек, смешанным задачам теории упругости, математич. экологии. Государственная премия СССР (1983). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1980), орденом Отечественной войны 2-й степени (1985), 2 орденами «Знак Почёта» (1967, 1975).

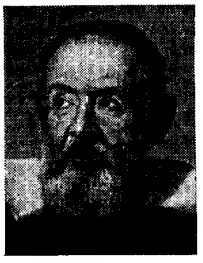
■ Неклассические смешанные задачи теории упругости, М., 1974 (соавторы В. М. Александров, В. А. Бабешко); Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей, М., 1979 (соавтор В. А. Бабешко); Экосистема Азовского моря как система регулирования и управления, в кн.: Рациональное использование водных ресурсов Азовского моря. Математические модели, М., 1981, гл. 7.

● «Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела», 1980, № 4.

ВОРОНО́Й Георгий Феодосьевич [16(28).4.1868, с. Журавка, ныне Черниговской обл.,— 7(20).11.1908, Варшава] — русский математик, чл.-корр. Петербургской АН (1907). Окончил

Ю. М. Вроньский.


Б. Г. Галёркин.


Г. Галилей.

Л. А. Галин.

Э. Галлей.

Э. Галуа.

Петербургский ун-т (1889), с 1897 проф. Варшавского ун-та. В 1897 защитил докторскую диссертацию «Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей». Важные открытия сделаны В. в геометрии многогранников и геометрии чисел. Работа «Об одной задаче из теории асимптотических функций» (1903) стимулировала развитие современной аналитич. теории чисел.

■ Собр. соч., т. 1—3, К., 1952—53.
● Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, Л.—М., 1947.

ВРО́НЬСКИЙ Юзеф Мария (Wroński Józef Maria) (наст. фам.— Хёне, Hoene; известен также как Гёне-Вронский) (24.8.1776, Вольштын,— 9.8.1853, Париж) — польский математик и философ-мистик. Был артиллерийским офицером в армии Костюшко, впоследствии служил в штабе А. В. Суворова, с 1797 в отставке. Его работы по математике, публиковавшиеся с 1811, характеризуются чрезвычайной широтой и общностью постановки задач. Однако сложность обозначений, к-рыми он пользовался, склоняющийся к мистицизму стиль затрудняли изучение его произведений. Уже после смерти В., во 2-й пол. 19 в., многие математики, занимаясь разработкой его научного наследия, выявили значительное число методов и отдельных фактов, к-рые к тому времени частично были уже вновь открыты др. учёными. Имя В. сохранилось во всех курсах анализа за введённый им впервые (1812) функциональный определитель (вронскиан), имеющий основное значение в теории линейных дифференциальных уравнений.

■ Oeuvres mathématiques, t. 1—4, P., 1925.

ВУ — см. *У Вэньцзюнь*.

ВЬЕТ Ф.— см. *Виет* Ф.

ВЬЕТО́РИС, Виеторис Леопольд (Vietoris Leopold) (р. 4.6.1891, Радкерсбург) — австрийский математик, с 1930 проф. ун-та в Инсбруке. Основные труды по топологии.

Г

ГАЛЁРКИН Борис Григорьевич [20.2(4.3).1871, Полоцк,— 12.7.1945, Ленинград] — советский инженер и учёный в области теории упругости, акад. АН СССР (1935; чл.-корр. 1928). Окончил Петербургский технологич. ин-т (1899). Разработал эффективные методы точного и приближённого интегрирования уравнений теории упругости (метод Галёркина). Государственная премия СССР (1942). Награждён 2 орденами Ленина (1941, 1945).

● «Изв. АН СССР. Отделение технических наук», 1951, № 8.

ГАЛИЛЕ́Й Галилео (Galilei Galileo) (15.2.1564, Пиза,— 8.1.1642, Арчетри, близ Флоренции) — итальянский физик, механик, астроном и математик, чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме (1611). В 1589 получил кафедру математики в Пизе, в 1592 занял кафедру математики в Падуе. Основные работы в области механики: открытие закона инерции, закона падения тел и др. Г. первый явно сформулировал нек-рые вероятностные свойства обычных случайных погрешностей.

■ Избранные труды, т. 1—2, М., 1964.
● Кузнецов Б. Г., Галилей, [М.], 1964; Шмутцер Э., Шютц В., Галилео Галилей, пер. с нем., М., 1987.

ГА́ЛИН Лев Александрович [р. 15(28).9.1912, Богородск, ныне Горьковской обл.,— 16.12.1981, Москва] — советский учёный в области механики и математики, чл.-корр. АН СССР (1953). Чл. КПСС с 1951. Окончил Московский технологич. ин-т лёгкой промышленности (1939), с 1934 работал в Ин-те механики АН СССР, с 1956 проф. Московского ун-та. Основные труды по теории упругости, упругопластич. задачам и вопросам неустановившейся фильтрации жидкостей. Государственная премия СССР (1986). Награждён орденом Ленина (1956), 3 орденами Трудового Красного Знамени (1954, 1972, 1975).

■ Контактные задачи теории упругости, М., 1953.

ГАЛЛЕ́Й, Халли Эдмунд (Halley Edmund) (29.10.1656, Хаггерстон,— 14.1.1742, Гринвич) — английский астроном, геофизик и математик, чл. Лондонского королевского общества (1678). Учился в Оксфордском ун-те, с 1703 проф. там же. С 1720 директор Гринвичской обсерватории, королевский астроном. По инициативе Г. в 1687 впервые были изданы «Математические начала натуральной философии» И. Ньютона. Перевёл с арабского и издал (1710) математич. труды Аполлония Пергского. В работах по математике предложил методы расчёта логарифмов тригонометрич. функций. Автор исследований по теории вероятностей и математич. статистике. В 1705 Г. предсказал появление кометы в 1758, к-рую назвали его именем.

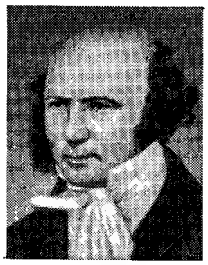
ГА́ЛЛЕР ФОН ГА́ЛЛЕРШТЕЙН Августин (Haller von Hallerstein Augustin) (18.8.1703, Крайн,— 1774, Пекин) — математик и астроном, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1765). Иезуит, с 1735 миссионер в Китае. Основные труды по астрономии.

ГАЛУА́ Эварист (Galois Évariste) (26.10.1811, Бур-ла-Рен, близ Парижа,— 30.5.1832, Париж) — французский математик. Учился в лицее Луи-де-Гран, к моменту окончания к-рого уже вёл творческую работу по математике. В 1830 поступил в Высшую нормальную школу. Был исключён (1831) из неё по политич. мотивам. К этому времени относится начало активной политич. деятельности Г.; он входил в тайное республиканское общество «Друзья народа». За публичное выступление против королевского режима дважды подвергался тюремному заключению. Почти сразу после освобождения, в возрасте 21 г., был убит на дуэли, по всей видимости, спровоцированной его политич. противниками.

Математич. наследие Г. составляет небольшое число очень сжато написанных работ, не понятых современниками. Г., по существу, построил всю теорию конечных полей (называемых ныне полями Галуа). В письме к другу, написанном накануне дуэли, Г. формулирует основные теоремы об интегралах от алгебраич. функций, вновь открытые значительно позже в работах Б. Римана. Основной заслугой Г. является формулировка комплекса идей, к к-рым он пришёл в связи с продолжением исследований о разрешимости в радикалах алгебраич. уравнений, начатых Ж. Лагранжем, Н. Абелем и др. Построенная в результате этого теории Галуа, устанавливая описание расширений полей в терминах групп, напоминающее описание симметрий многогранника, сводит вопросы, касающиеся полей, к вопросам теории групп (возникшей именно отсюда).

■ Сочинения, М.— Л., 1936.
● Инфельд Л., Эварист Галуа. Избранник богов, пер. с англ., [М.], 1958; Дальма А., Эварист Галуа, революционер и математик, пер. с франц., 2 изд., М., 1984.

Ф. Гальтон.


У. Р. Гамильтон.

Р. В. Гамкрелидзе.

Г. Ганкель.

К. Ганстен.

К. Ф. Гаусс.

ГА́ЛЬТОН, Голтон Фрэнсис (Galton Francis) (16.2.1822, Бирмингем,— 17.1.1911, Лондон) — английский психолог и антрополог. В математике Г. разработал методы статистич. обработки результатов исследований (в частности, метод исчисления корреляций между переменными); ввёл коэффициент корреляции; создал т. н. биометрич. школу.

● Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978.

ГА́МИЛЬТОН, Хамилтон Уильям Роуан (Hamilton William Rowan) (4.8.1805, Дублин,— 2.9.1865, Дансинк, близ Дублина) — ирландский математик и астроном, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1837), чл. Ирландской королевской АН, с 1827 проф. астрономии в Дублинском ун-те и директор университетской астрономич. обсерватории. В 1833—35 в «Трудах» Ирландской АН опубликовал работу, в к-рой почти одновременно с Г. Грассманом дал точное формальное изложение теории комплексных чисел, построил своеобразную систему чисел, т. н. кватернионов. Это учение было одним из источников развития векторного исчисления. В механике Г. применил вариационный метод (т. н. принцип наименьшего действия).

■ The mathematical papers, v. 1—2, Camb., 1931—40.

● Graves R. P., Life of sir W. R. Hamilton, v. 1—3, Dublin, 1882—91.

ГАМКРЕЛИ́ДЗЕ Реваз Валерианович (р. 4.2.1927, Кутаиси) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1981), акад. АН Грузинской ССР (1969). Чл. КПСС с 1972. Окончил Московский ун-т (1950), с 1953 работает в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. Главный редактор реферативного журнала «Математика» (с 1961). Основные труды по топологии, теории оптимизации и управления. Ленинская премия (1962).

■ Математическая теория оптимальных процессов, 3 изд., М., 1976 (соавторы Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Е. Ф. Мищенко); Основы оптимального управления, 2 изд., Тб., 1977.

ГА́НКЕЛЬ, Ханкель Герман (Hankel Hermann) (14.2.1839, Галле,— 29.8.1873, Шрамберг) — немецкий математик, с 1869 проф. Тюбингенского ун-та. Ему принадлежит ряд формул теории цилиндрич. функций. Исследования Г. по основаниям арифметики содействовали развитию учения о кватернионах и общих гиперкомплексных числовых системах. Г. принадлежат работы по истории античной и средневековой математики.

■ Theorie der complexen Zahlensysteme, Lpz., 1867; Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter, Lpz., 1874.

● «Mathematische Annalen», 1874, Bd 7, S. 583—90.

ГА́НСТЕН Кристофер (Hansteen Christopher) (26.9.1784, Кристиания, ныне Осло,— 15.4.1873, там же) — норвежский астроном, математик, физик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1830). Основные труды по физике.

ГА́РДИНЕР Уильям (Gardiner William) (18 в.) — английский математик. Усовершенствовал логарифмич. и тригонометрич. таблицы (1742), в частности уменьшил (до 19) число ошибок в таблицах А. Влакка.

ГА́РНАК, Харнак Карл Густав Аксель (Harnack Carl Gustav Axel) (7.5.1851, Дерпт, ныне Тарту,— 3.4.1888, Дрезден) — немецкий математик, с 1877 проф. Политехнич. школы в Дрездене. Основные труды по геометрии, тригонометрич. рядам, теории интегрирования, теории гармонич. функций (теоремы Гарнака).

ГА́РРИОТ, Харриот Томас (Harriot Thomas) (1560, Оксфорд,— 2.7.1621, Лондон) — английский математик. В труде «Практика аналитического искусства...» («Artis analyticae praxis...», Londinae, 1631) Г. ввёл знаки $<$ (меньше) и $>$ (больше), пользовался для обозначения чисел строчными буквами алфавита, строил уравнения по их корням, нашёл выражение площади сферич. треугольника и т. п.

● История математики, т. 2, М., 1970; «Centaurus», 1965, v. 11, p. 19—45.

ГАТО́ Рене Эжен (Gâteaux René Eugène) (г. рожд. неизв.— ум. 1914) — французский математик. Основные труды по функциональному анализу (производная Гато, дифференциал Гато и др.).

ГА́УСС Карл Фридрих (Gauss Carl Friedrich) (30.4.1777, Брауншвейг,— 23.2.1855, Гёттинген) — немецкий математик, внёсший фундаментальный вклад также в астрономию и геодезию, иностранный чл.-корр. (1802) и иностранный почётный чл. (1824) Петербургской АН. Родился в семье водопроводчика. Учился в Гёттингенском ун-те (1795—98). В 1799 получил доцентуру в Брауншвейге, в 1807 — кафедру математики и астрономии в Гёттингенском ун-те, с к-рой была также связана должность директора Гёттингенской астрономич. обсерватории. На этом посту Г. оставался до конца жизни.

Отличительными чертами творчества Г. являются глубокая органич. связь в его исследованиях между теоретич. и прикладной математикой, необычайная широта проблематики. Работы Г. оказали большое влияние на развитие алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории тяготения, классич. теории электричества и магнетизма, геодезии, целых отраслей теоретич. астрономии. Во многих областях математики труды Г. содействовали повышению требований к логич. отчётливости доказательств, однако сам Г. оставался в стороне от работ по строгому обоснованию математич. анализа, к-рые проводил в его время О. Коши.

Первое крупное сочинение Г. по теории чисел и высшей алгебре («Арифметические исследования», 1801) во многом предопределило дальнейшее развитие этих дисциплин. Г. даёт здесь обстоятельную теорию квадратичных вычетов, первое доказательство квадратичного закона взаимности — одной из центральных теорем теории чисел. Г. даёт также новое подробное изложение арифметич. теории квадратичных форм, до того построенной Ж. Лагранжем, в частности тщательную разработку теории композиции классов таких форм. В конце книги излагается теория уравнений деления круга (т. е. уравнений $x^n-1=0$), к-рая во многом была прообразом теории Галуа. Помимо общих методов решения этих уравнений Г. установил связь между ними и построением правильных многоугольников. Он, впервые после древнегреческих учёных, сделал значительный шаг вперёд в этом вопросе, а именно: Г. нашёл все те значения n, для к-рых правильный n-угольник можно построить циркулем и линейкой; в частности, решив уравнение $x^{17}-1=0$, он дал построение правильного 17-угольника при помощи циркуля и линейки. Г. придавал этому открытию очень большое значение и завещал выгравировать правильный 17-угольник, вписанный в круг, на своём надгробном памятнике, что и было исполнено. Алгебраич. интересы Г. связаны с основной теоремой алгебры; он дал несколько её

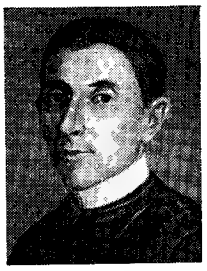
доказательств — первое из них в 1799.

Астрономич. работы Г. (1800—20) в основном связаны с решением проблемы определения орбит малых планет и исследованием их возмущений. Г. как астроном получил широкую известность после разработки метода вычисления эллиптич. орбит планет по трём наблюдениям, успешно применённого им к первым открытым малым планетам Церера (1801) и Паллада (1802). Результаты исследований по вычислению орбит Г. опубликовал в соч. «Теория движения небесных тел» (1809). В 1794—95 открыл и в 1821—23 разработал основной математич. метод обработки неравноценных наблюдательных данных (метод наименьших квадратов). В связи с астрономич. вычислениями, основанными на разложении интегралов соответствующих дифференциальных уравнений в бесконечные ряды, Г. занялся исследованием вопроса о сходимости бесконечных рядов [в работе, посвящённой изучению гипергеометрич. ряда (1812)].

Работы Г. по геодезии (1820—30) связаны с поручением провести геодезич. съёмку и составить детальную карту Ганноверского королевства; Г. организовал измерение дуги меридиана Гёттинген — Альтона, в результате теоретич. разработки проблемы создал основы высшей геодезии («Исследования о предметах высшей геодезии», 1842—47). Для оптич. сигнализации Г. изобрёл специальный прибор — гелиотроп. Изучение формы земной поверхности потребовало углублённого общего геометрич. метода для исследования поверхностей. Выдвинутые Г. в этой области идеи получили выражение в соч. «Общие исследования о кривых поверхностях» (1827). Руководящая мысль этого сочинения заключается в том, что при изучении поверхности как бесконечно тонкой гибкой плёнки основное значение имеет не уравнение поверхности в декартовых координатах, а дифференциальная квадратичная форма, через к-рую выражается квадрат элемента длины и инвариантами к-рой являются все собственные свойства поверхности — прежде всего её кривизна в каждой точке. Другими словами, Г. предложил рассматривать те свойства поверхности (т. н. внутренние), к-рые не зависят от изгибаний поверхности, не изменяющих длин линий на ней. Созданная таким образом внутренняя геометрия поверхностей послужила образцом для создания n-мерной римановой геометрии.

Исследования Г. по теоретич. физике (1830—40) являются в значительной мере результатом тесного общения и совместной научной работы с В. Вебером. Вместе с В. Вебером Г. создал абсолютную систему электромагнитных единиц и сконструировал в 1833 первый в Германии электромагнитный телеграф. В 1835 Г. основал магнитную обсерваторию при Гёттингенской астрономич. обсерватории. В 1838 он издал труд «Общая теория земного магнетизма». Небольшое соч. «О силах, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния» (1834—40) содержит основы теории потенциала. К теоретич. физике примыкают также разработка (1829) Г. принципа наименьшего принуждения (п р и н ц и п Г а у с с а) и работы по теории капиллярности (1830). К числу физич. исследований Г. относятся и его «Диоптрические исследования» (1840), в к-рых он заложил основы теории построения изображения в системах линз.

К. Гёдель.



П. Й. Гейнрих.

Очень многие исследования Г. остались неопубликованными и в виде очерков, незаконченных работ, переписки с друзьями входят в его научное наследие. Вплоть до 2-й мировой войны 1939—45 оно тщательно разрабатывалось Гёттингенским учёным обществом, к-рое издало 12 томов сочинений Г. Наиболее интересными в этом наследии являются дневник Г. и материалы по неевклидовой геометрии и теории эллиптич. функций. Дневник содержит 146 записей, относящихся к периоду от 30 марта 1796, когда 19-летний Г. отметил открытие построения правильного 17-угольника, по 9 июля 1814. Эти записи дают отчётливую картину творчества Г. в первой половине его научной деятельности; они очень кратки, написаны на латинском языке и излагают обычно сущность открытых теорем. Материалы, относящиеся к неевклидовой геометрии, обнаруживают, что Г. пришёл к мысли о возможности построения наряду с евклидовой геометрией и геометрии неевклидовой в 1818, но опасение, что эти идеи не будут поняты, было причиной того, что Г. их не разрабатывал далее и не опубликовывал. Более того, он категорически запрещал опубликовывать их тем, кого посвящал в свои взгляды. Когда вне всякого отношения к этим попыткам Г. неевклидова геометрия была построена и опубликована Н. И. Лобачевским, Г. отнёсся к публикациям Н. И. Лобачевского с большим вниманием, был инициатором избрания его чл.-корр. Гёттингенского учёного общества, но своей оценки великого открытия Н. И. Лобачевского по существу не дал. Архивы Г. содержат также обильные материалы по теории эллиптич. функций и своеобразную их теорию; однако заслуга самостоятельной разработки и публикации теории эллиптич. функций принадлежит К. Якоби и Н. Абелю.

А. Гейтинг.

■ Werke, Bd 1—12, Lpz.—B., 1863—1933; Mathematisches Tagebuch, 1796—1814, 3 Aufl., Lpz., 1981; Общие исследования о кривых поверхностях, в сб.: Об основаниях геометрии, М., 1956; Теоретическая астрономия. (Лекции, читанные в Гёттингене в 1820—26 гг., записанные Купфером), в кн.: К р ы л о в А. Н., Собр. трудов, т. 6, М.—Л., 1936; Письма П. С. Лапласа, К. Ф. Гаусса, Ф. В. Бесселя и др. к академику Ф. И. Шуберту, в сб.: Научное наследство, т. 1, М.—Л., 1948, с. 801—22.
● К л е й н Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.—Л., 1937; Карл Фридрих Гаусс. Сб. ст., М., 1956; D u n n i n g t o n G. W., Carl Friedrich Gauss: Titan of Science. A study of his life and work, N. Y., 1955; D i e u d o n n e J., L'oeuvre mathématique de C. F. Gauss, P., 1962.

ГЕ́ГЕНБАУЭР Леопольд Бернхард (Gegenbauer Leopold Bernhard) (2.2.1849, Асперхофен,— 3.6.1903) — австрийский математик. Окончил Венский ун-т, с 1893 проф. там же. Основные труды по теории чисел и специальных функций (м н о г о ч л е н ы Г е г е н б а у э р а).

ГЁДЕЛЬ Курт (Gödel Kurt) [28.4.1906, Брюнн (Брно),— 14.1.1978, Принстон] — австрийский логик и математик, приват-доцент Венского ун-та (1933—38). В 1940 эмигрировал в США; с 1953 проф. Принстонского ин-та перспективных исследований, чл. Национальной АН США и Американского философского общества. Основные труды в области математич. логики и теории множеств. Автор т е о р е м Г ё д е л я о н е п о л н о т е и о п о л н о т е.

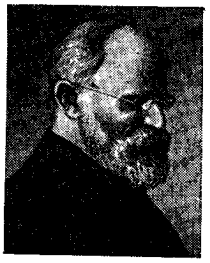
● Н а г е л ь Э., Ньюмен Д. Р., Теорема Гёделя, пер. с англ., М., 1970.

ГЕ́ЙНЕ, Х а й н е Генрих Эдуард (Heine Heinrich Eduard) (15.3.1821, Берлин,— 24.10.1881) — немецкий математик, чл.-корр. Берлинской АН. Работал в ун-тах в Бонне и Галле (проф. с 1856). Основные труды по теории множеств (т е о р е м а Г е й н е — Б о р е л я), математич. физике (теория потенциала); предложил термин «цилиндрическая функция».

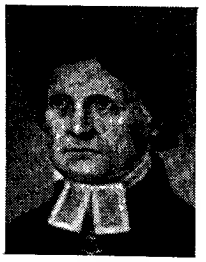
ГЕ́ЙНРИХ, Х а й н р и х Плацидус Йозеф (Heinrich Placidus Joseph) (19.10.1758, Регенкрайс, Бавария,— 18.1.1825, Регенсбург) — немецкий физик и математик, иностранный чл.-корр. (1811), иностранный почётный чл. (1822) Петербургской АН. Основные труды по физике.

ГЕ́ЙТИНГ Аренд (Heyting Arend) (р. 9.5.1898, Амстердам) — голландский математик, чл. Нидерландской королевской АН, с 1948 проф. Амстер-

Г. Л.Ф. Гельмгольц.



Ф. Р. Гельмерт.



Г. Г. Гельстрём.

И. М. Гельфанд.

А. О. Гельфонд.

Герберт.

дамского ун-та. Основные труды по основаниям математики. Один из виднейших представителей интуиционизма, последователь Л. Брауэра. Предложил аксиоматич. построение проективной геометрии.

■ Обзор исследований по основаниям математики, М.—Л., 1936; Интуиционизм, М., 1965.

ГЕ́ЛЬДЕР, Хёльдер Людвиг Отто (Hölder Ludwig Otto) (22.12.1859, Штутгарт,— 29.8.1937, Лейпциг) — немецкий математик, с 1899 проф. Лейпцигского ун-та. Основные труды в области алгебры, математич. анализа (неравенство Гёльдера), оснований математики.

ГЕ́ЛЬМГОЛЬЦ, Хельмхольц Герман Людвиг Фердинанд (Helmholtz Hermann Ludwig Ferdinand) (31.8.1821, Потсдам,— 8.9.1894, Берлин) — немецкий физик, математик, физиолог и психолог, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1868), проф. физиологии ун-тов в Кёнигсберге (с 1849), Бонне (с 1855), Гейдельберге (с 1858), с 1871 проф. физики в Берлинском ун-те, с 1888 директор Физико-технич. ин-та в Берлине. Основные труды по физике. В исследованиях по геометрии доказывал, что все её аксиомы имеют опытное происхождение, что опытным путём можно выяснить форму пространства. В математич. физике важное значение имеет уравнение Гельмгольца.

● Лебединский А. В., Франкфурт У. И., Френк А. М., Гельмгольц, М., 1966.

ГЕ́ЛЬМЕРТ Фридрих Роберт (Helmert Friedrich Robert) (31.7.1843, Фрайберг,— 15.6.1917, Потсдам) — немецкий математик, геодезист и гравиметрист, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1907), с 1887 проф. Берлинского ун-та, директор Геодезич. ин-та в Берлине (с 1886, позднее в Потсдаме). Автор 2-томного руководства «Математическая и физическая теория высшей геодезии» (1880—84).

ГЕ́ЛЬСТРЁМ Густав Габриель (Hällström Gustaf Gabriel) (25.11.1775 — 2.6.1844, Гельсингфорс) — математик, физик, метеоролог, чл.-корр. Петербургской АН (1826), чл. Шведской королевской АН. Один из основателей Финляндского учёного общества.

ГЕЛЬФА́НД Израиль Моисеевич [р. 20.8(2.9).1913, местечко Окны, ныне Красный Окны Одесской обл.] — советский математик, акад. АН СССР (1984; чл.-корр. 1953). Окончил аспирантуру Московского ун-та (1935), с 1935 работает там же (проф. с 1940). С 1953 зав. отделом Ин-та прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР. Главный редактор журнала «Функциональный анализ и его приложения» (с 1967). Президент (1968—70) и почётный чл. (1971) Московского математич. общества. В 1940 построил теорию коммутативных нормированных колец, к-рая послужила отправным пунктом в созданных Г. (совместно с М. А. Наймарком и др.) теории колец с инволюцией и теории бесконечномерных представлений групп Ли. В других работах Г. разработаны различные аспекты теории обобщённых функций; решена обратная задача для уравнения Штурма — Лиувилля; заложены основы интегральной геометрии и разработаны её применения; построена общая теория гипергеометрич. функций; исследованы когомологии бесконечномерных алгебр Ли (когомологии Гельфанда — Фукса); создан метод прогонки для решения уравнений с частными производными. В работах Г. по нейрофизиологии введены представления о неиндивидуализированном управлении и о синергиях (совместно с М. Л. Цетлиным), получены важные результаты по физиологии мозжечка и регуляции ритмич. движений. В работах по клеточной биологии определены механизмы, регулирующие форму и направление движений нормальных и опухолевых клеток в культуре (совместно с Ю. М. Васильевым и др.). Г.— иностранный чл. Американской академии искусств и наук в Бостоне (1964), чл. Лондонского математич. общества (1966), Ирландской королевской АН (1970), иностранный чл. Национальной АН США (1970), почётный доктор Оксфордского (1973) и Парижского (1973) ун-тов, иностранный чл. Шведской королевской АН (1974), почётный доктор Гарвардского ун-та (1976), иностранный чл. Лондонского королевского общества (1977), почётный доктор наук Принстонского (1977) и почётный доктор Упсальского (1977), Лионского (1984) и Пизанского (1985) университетов. Ленинская премия (1961), Государственные премии СССР (1951, 1953), Международная премия Вольфа, Золотая медаль Вигнера (1980). Награждён 3 орденами Ленина (1954, 1956, 1973), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1963, 1983), орденом Дружбы народов (1975), орденом «Знак Почёта» (1953).

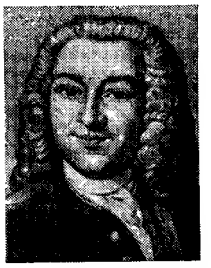
■ Лекции по линейной алгебре, 4 изд., М., 1971; Вариационное исчисление, М., 1961 (соавтор С. В. Фомин); Унитарные представления классических групп, М.—Л., 1950 (соавтор М. А. Наймарк); Представления группы вращений и группы Лоренца, М., 1958 (соавторы Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро); Коммутативные нормированные кольца, М., 1960 (соавторы Д. А. Райков, Г. Е. Шилов); Обобщенные функции и действия над ними, 2 изд., М., 1959 (соавтор Г. Е. Шилов); Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958 (соавтор Г. Е. Шилов); Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений, М., 1958 (соавтор Г. Е. Шилов); Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства, М., 1961 (соавтор Н. Я. Виленкин); Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., 1962 (соавторы М. И. Граев, Н. Я. Виленкин); Теория представлений и автоморфные функции, М., 1966 (соавторы М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро); Интегральная геометрия в аффинном и проективном пространствах, в кн.: Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики, т. 16, М., 1980, с. 53—226 (соавторы С. Г. Гиндикин, М. И. Граев).

● «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 3; 1974, т. 29, в. 1; 1983, т. 38, в. 6; «Вестник АН СССР», 1983, № 12.

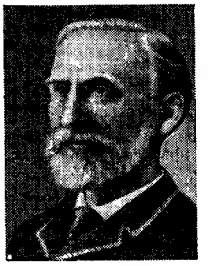
ГЕЛЬФО́НД Александр Осипович [11(24).10.1906, Петербург,— 7.11.1968, Москва] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1939). Чл. КПСС с 1940. Окончил Московский ун-т (1927), с 1931 проф. там же. Основные направления научной деятельности — теория чисел и теория функций комплексного переменного. Установил глубокие связи между аналитич. свойствами функций комплексного переменного и арифметикой. Им созданы аналитич. методы доказательства трансцендентности чисел. В работах 1929 и 1934 им решена седьмая проблема Гильберта о трансцендентности чисел вида a^b при a алгебраическом ($a \neq 0$, $a \neq 1$) и b алгебраическом иррациональном, а в 1949 установлен ряд теорем о взаимной трансцендентности чисел. В теории функций наиболее известны работы Г. по интерполированию целых функций и связи между ростом целых функций и арифметич. свойствами их значений. Чл.-корр. Международной академии истории науки (1967). Награждён орденом Ленина (1953), 3 орденами Трудового Красного Знамени (1945, 1945, 1966).

■ Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952; Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962 (соавтор Ю. В. Линник); Вычеты и их приложения, М.,

Я. Герман.



И. Геснер.



Дж. У. Гиббс.

Д. Гильберт.

1966; Исчисление конечных разностей, 3 изд., М., 1967; Решение уравнений в целых числах, 4 изд., М., 1983.

● «Успехи матем. наук», 1967, т. 22, в. 3; 1969, т. 24, в. 3.

ГЕ́НЦЕН Герхард Карл Эрих (Gentzen Gerhard Karl Erich) (24.11.1909, Грайфсвальд,— 4.8.1945, Прага) — немецкий математик. В 1944—45 работал в Пражском ун-те. Основные труды по основаниям математики и математич. логике (формальная система Генцена).

ГЕ́РБЕРТ из Орийака (папа Сильвестр II) [Gerbert d'Aurillac (Sylvestrus II)] (930, Орийак,— 12.5.1003, Рим) — французский математик. Преподавал в Реймсе (972—982). Г. приписывают несколько математич. сочинений, в частности книгу об абаке (счётной доске). У Г. появляются термины «делимое» и «делитель».

● История математики, т. 1, М., 1970.

ГЕ́РВИН П. (Gerwien P.) (19 в.) — немецкий математик. Независимо от Ф. Больяй доказал (1833), что равновеликие многоугольники являются равносоставленными (теорема Больяй — Гервина).

ГЕ́РМАН Яков (Якоб) (Hermann Jacob) (16.7.1678, Базель,— 14.7.1733, там же) — швейцарский математик, первый академик (1725) и иностранный почётный чл. (1731) Петербургской АН. Широко применял полярные координаты, разрабатывал аналитич. геометрию в пространстве, изучал кривые на сфере. Первый в России занимался историей математики.

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

ГЕРО́Н Александрийский ('Ηρων ὁ 'Αλεξανδρεύς) (гг. рождения и смерти неизвестны, вероятно, 1 в.) — древнегреческий учёный, работавший в Александрии. Математич. работы Г. являются энциклопедией античной прикладной математики: он дал правила и формулы для точного и приближённого расчёта различных геометрич. фигур (напр., формула Герона для определения площади треугольника по трём сторонам), правила численного решения квадратных уравнений и приближённого извлечения квадратных и кубич. корней и др.

● История математики, т. 1, М., 1970.

ГЕ́СНЕР Иоганн (Gesner Johann) (28.3.1709, Цюрих,— 6.5.1790, там же) — швейцарский математик и физик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1764), проф. математики в Цюрихе. Основные труды по физике.

ГЕ́ССЕ Людвиг Отто (Hesse Ludwig Otto) (22.4.1811, Кёнигсберг,— 4.8.1874, Мюнхен) — немецкий математик, чл. Баварской АН (1868), с 1869 проф. Политехнич. школы в Мюнхене. Основные работы относятся к геометрии (аналитической, проективной и дифференциальной), линейной алгебре, вариационному исчислению; ввёл понятие гессиана.

● Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966.

ГЕТА́ЛДИЧ, Гетальди Марин (Getaldić Marin) (1566, Дубровник,— 1627) — сербохорватский математик. Ученик Ф. Виета. Работал в Италии. В «Собрании различных задач» («Variorum problematum collectio», Venetiae, 1607) дал решение задач на деление отрезков и построение треугольников; эти задачи выражаются уравнениями 1-й и 2-й степеней.

● История математики, т. 2, М., 1970.

ГИББС Джозайя Уиллард (Gibbs Josiah Willard) — (11.2.1839, Нью-Хейвен,— 28.4.1903, там же) — американский физик, механик и математик, с 1871 проф. в Йельском ун-те. Один из основоположников термодинамики и статистич. механики (распределение Гиббса). Занимался также разработкой векторного анализа; ему принадлежит этот термин.

● Франкфурт У. И., Френк А. М., Джозайя Виллард Гиббс, М., 1964.

ГИ́ЛЬБЕРТ, Хильберт Давид (Hilbert David) (23.1.1862, Велау, близ Кёнигсберга,— 14.2.1943, Гёттинген) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. (1922) и иностранный почётный чл. (1934) АН СССР. Окончил Кёнигсбергский ун-т, в 1893—95 проф. там же, в 1895—1930 проф. Гёттингенского ун-та, до 1933 продолжал читать лекции в ун-те. После прихода гитлеровцев к власти в Германии (1933) жил в Гёттингене в стороне от университетских дел. Исследования Г. оказали большое влияние на развитие многих разделов математики, а его деятельность в Гёттингенском ун-те в значительной мере содействовала тому, что Гёттинген в 1-й трети 20 в. являлся одним из основных мировых центров математич. мысли. Диссертации большого числа крупных математиков (среди них Г. Вейль, Р. Курант) были написаны под руководством Г.

Научная биография Г. резко распадается на периоды, посвящённые работе в к.-л. одной области математики: а) теория инвариантов (1885—93); б) теория алгебраич. чисел (1893—98); в) основания геометрии (1898—1902); г) принцип Дирихле и примыкающие к нему проблемы вариационного исчисления и дифференциальных уравнений (1900—06); д) теория интегральных уравнений (1900—10); е) решение проблемы Варинга в теории чисел (1908—09); ж) основы математич. физики (1910—22); з) логич. основы математики (1922—39).

В теории инвариантов исследования Г. явились завершением периода бурного развития этой области математики во 2-й пол. 19 в. Им доказана основная теорема о существовании конечного базиса системы инвариантов. Работы Г. по теории алгебраич. чисел преобразовали эту область математики и стали исходным пунктом её последующего развития. Данное Г. решение проблемы Дирихле положило начало разработке т. н. прямых методов в вариационном исчислении. Построенная Г. теория интегральных уравнений с симметрич. ядром составила одну из основ современного функционального анализа и особенно спектральной теории линейных операторов. «Основания геометрии» Г. (1899) стали образцом для дальнейших работ по аксиоматич. построению геометрии. К 1922 у Г. сложился значительно более обширный план обоснования всей математики путём её полной формализации с последующим «метаматематическим» доказательством непротиворечивости формализованной математики. Два тома «Оснований математики», написанные Г. совместно с П. Бернайсом, в к-рых эта концепция подробно развивается, вышли в 1934 и 1939. Первоначальные надежды Г. в этой области не оправдались: проблема непротиворечивости формализованных математич. теорий оказалась глубже и труднее, чем Г. предполагал сначала. Но вся дальнейшая работа над логич. основами математики в большой мере идёт по путям, намеченным Г., и пользуется созданными им концепциями. Считая с логич. точки зрения необходимой полную формализацию математики, Г. в то же время верил в силу творческой математич. интуиции. Он был большим мастером в высшей степени наглядного изложения математич. теорий. В этом отношении замечательна «Наглядная геометрия» (1932), написанная Г. совместно с С. Кон-Фоссеном. Для творчества Г. характерны уверенность в неограниченной силе человеческого разума, убеждение в единстве математич. науки и единстве математики и естествознания. Собрание сочинений Г., изданное под его наблюдением (1932—35), кончается статьёй «Познание природы», а эта статья лозунгом «Мы должны знать — мы будем знать».

В 1904 Г. присуждена Международная премия имени Н. И. Лобачевского.

■ Gesammelte Abhandlungen, Bd 1—3, B., 1932—35; Основания геометрии, М.—Л., 1948; Основы теоретической логики, М., 1947 (соавтор В. Аккерман); Наглядная геометрия, 3 изд., М., 1979 (соавтор С. Кон-Фоссен); Методы математической физики, 3 изд., т. 1; 2 изд., т. 2, М.—Л., 1951 (соавтор Р. Курант); Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики, 2 изд., М., 1979 (соавтор П. Бернайс); Основания математики. Теория доказательств, М., 1979 (соавтор П. Бернайс).

● Проблемы Гильберта. Сборник, под ред. П. С. Александрова, М., 1969; Пуанкаре А., Давид Гильберт, в сб.: Об основаниях геометрии, М., 1956, с. 453—78; Рид К., Гильберт, М., 1977.

ГИ́НДЕНБУРГ Карл Фридрих (Hindenburg Karl Friedrich) (13.7.1741, Дрезден,— 17.3.1808, Лейпциг) — немецкий философ и математик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1794), с 1781 проф. Лейпцигского ун-та. Основные труды по комбинаторике.

● История математики, т. 3, М., 1972.

ГИПА́ТИЯ, Ипатия из Александрии (Ὑπατία) (370—415) — женщина-математик, астроном и философ-неоплатоник. Преподавала в Александрийском музее. Г. принадлежали труды по толкованию произведений греческих философов, математике и астрономии. Сочинения Г. до нас не дошли. Г. стала жертвой религиозного фанатизма христиан: по наущению епископа Кирилла была растерзана толпой.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

ГИППА́РХ из Никеи (Ἵππαρχος) [ок. 180 (190), Никея,— 125 до н. э., Родос] — древнегреческий астроном и математик. О сочинениях Г. известно только по свидетельству других авторов. Как математик Г. ввёл географич. координаты (широту и долготу) для определения положения точки на земной поверхности; составил таблицу хорд, к-рая заменяла в то время таблицу синусов.

ГИ́ППИЙ Элидский (Ἱππίας) (5 в. до н. э.) — древнегреческий философ. Занимался задачей трисекции угла, для к-рой ввёл кривую, позднее названную Г. Лейбницем квадратрисой.

ГИППОКРА́Т Хиосский (Ἱπποκράτης) (2-я пол. 5 в. до н. э.) — древнегреческий геометр, автор первого систематич. сочинения по геометрии (не дошедшего до нас), к-рое, вероятно, охватывало материал первых 4 книг «Начал» Евклида. В поисках решения квадратуры круга Г. нашёл квадратуры трёх т. н. гиппократовых луночек.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

ГИПСИ́КЛ Александрийский (Ὑψικλῆς) (2 в. до н. э.) — древнегреческий геометр. Г. принадлежит XIV книга «Начал» Евклида — о правильных многоугольниках.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

В. И. Гливенко.

В. М. Глушков.

ГЛИВЕ́НКО Валерий Иванович [21.12.1896 (2.1.1897), Киев,— 15.2.1940, Москва] — советский математик, с 1928 проф. Московского городского педагогич. ин-та. Основные труды по основаниям математики и математич. логике, теории функций действительного переменного и теории вероятностей (напр., теорема Гливенко — Кантелли об эмпирич. распределении).

■ Интеграл Стилтьеса, М.—Л., 1936; Курс теории вероятностей, М., 1939.

● «Успехи матем. наук», 1941, в. 8.

ГЛУШКО́В Виктор Михайлович (24.8.1923, Ростов-на-Дону,— 30.1.1982, Киев) — советский учёный в области математики, кибернетики, вычислительной техники и систем управления, акад. АН СССР (1964), акад. АН УССР (1961; чл.-корр. 1958), вице-президент АН УССР (с 1962), засл. деятель науки УССР (1978), Герой Социалистич. Труда (1969). Чл. КПСС с 1958. Окончил Ростовский ун-т (1948). С 1956 работал в АН УССР, директор Вычислительного центра АН УССР (с 1957) и Ин-та кибернетики АН УССР (с 1962), главный редактор журнала «Кибернетика» (с 1965).

Основные труды по алгебре, теории автоматов и ЭВМ, экономич. кибернетике, теории автоматизированных систем управления и систем искусственного интеллекта. Г. на основе построенной им теории бикомпактных групп решил обобщённую пятую проблему Гильберта. Большое значение имеют работы Г. в области отечественного электронного машиностроения, в создании систем управления, эффективных методов решения народнохозяйственных задач с помощью ЭВМ, развёртывания и проведения научных исследований по вычислительной математике и технике. Под его руководством созданы первая в стране управляющая ЭВМ «Днепр», серия ЭВМ «МИР» и др. Г.— автор общей теории автоматов и дискретных преобразований, к-рая применяется в действующих системах автоматизации проектирования и изготовления компонентов ЭВМ. Г. первым предложил принципиально новый подход к решению оптимизационных задач в процессе народнохозяйственного планирования и управления. Он создал новые методы научно-технич. прогнозирования, используемые в странах социалистич. содружества и рекомендованные СЭВ как типовые. Г. внёс значительный вклад в создание принципов построения математич. моделей, методов и методик решения различных задач управления и планирования поведения сложных экономич. систем, реализованных в разработках эффективных систем управления разного уровня и назначения. Г.— автор идеи Общегосударственной автоматизированной системы (ОГАС). Под его руководством Главная редакция Украинской советской энциклопедии издала (1974) 2-томную «Энциклопедию кибернетики» на украинском и русском языках, отмеченную Государственной премией УССР в области науки и техники (1978). Г.— иностранный чл. Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина» (1970), Болгарской АН (1974), АН ГДР (1975), почётный доктор Дрезденского технич. ун-та (1975), почётный иностранный чл. Кибернетич. общества Польши (1975), иностранный чл. Польской АН (1977). Депутат Верховного Совета СССР 8—10-го созывов. Ленинская премия (1964), Государственные премии СССР (1968, 1977), Государственная премия УССР (1970), премия имени А. Н. Крылова АН СССР (1980), премия имени С. А. Лебедева АН УССР (1979). Награждён 3 орденами Ленина (1967, 1969, 1975), орденом Октябрьской Революции (1973), а также иностранными орденами.

В 1982 в АН УССР учреждена премия имени В. М. Глушкова.

■ Синтез цифровых автоматов, М., 1962; Введение в кибернетику, К., 1964; Вычислительные машины с развитыми системами интерпретации, К., 1970 (соавторы А. А. Барабанов, Л. А. Калиниченко и др.); Алгебра. Языки. Программирование, 2 изд., К., 1978 (соавторы Г. Е. Цейтлин, Е. Л. Ющенко); Макроэкономические модели и принципы построения ОГАС, М., 1975; Автоматизация проектирования вычислительных машин, К., 1975 (соавторы Ю. В. Капитонова, А. А. Летичевский); Сети ЭВМ, М., 1977 (соавторы Л. А. Калиниченко, В. Г. Лазарев, В. И. Сифоров); Основы безбумажной информатики, М., 1982.

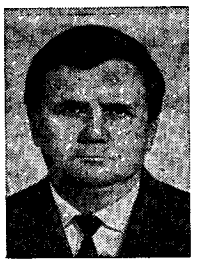
● В. М. Глушков. Указатель литературы, К., 1975.

ГНЕДЕ́НКО Борис Владимирович [р. 19.12.1911 (1.1.1912), Симбирск] — советский математик, акад. АН УССР (1948; чл.-корр. 1945). Окончил Саратовский ун-т (1930), в 1934—45 работал в Московском ун-те (проф. с 1942), в 1945—50 проф. Львовского, в 1950—58 — Киевского и с 1960 — Московского ун-тов. В 1945—60 в Ин-те математики АН УССР (в 1955—58 директор). Основные труды по теории вероятностей, математич. статистике, истории математики. Автор известного университетского курса теории вероятностей. Чл. Международного статистич. ин-та (1957), Международной ассоциации по применению статистики в физич. науках (1959), Американского ин-та математич. статистики (1960), почётный чл. Лондонского статистич. общества. Награждён орденами Трудового Красного Знамени, Дружбы народов и орденом ГДР «За заслуги перед отечеством».

■ Курс теории вероятностей, 5 изд., М., 1969 (1 изд. 1950); Элементарное введение

Б. В. Гнеденко.

Н. Н. Говорун.



С. К. Годунов.

В. В. Голубев.

Г. М. Голузин.

А. А. Гончар.

в теорию вероятностей, 9 изд., М., 1982 (1 изд. 1946) (соавтор А. Я. Хинчин); Очерки по истории математики в России, М.—Л., 1946; Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1949 (соавтор А. Н. Колмогоров); Математические методы в теории надежности, М., 1965 (соавторы Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев); Введение в теорию массового обслуживания, 2 изд., М., 1987 (соавтор И. Н. Коваленко).

● «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 2; 1982, т. 37, в. 6.

ГОВОРУ́Н Николай Николаевич (р. 18.3.1930, с. Андрианополь Ворошиловградской обл.) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1972). Чл. КПСС с 1961. Окончил Московский ун-т (1953). С 1958 работает в Объединённом ин-те ядерных исследований (Дубна Московской обл.), главный редактор журнала «Программирование» (с 1977). Основные труды по интегральным уравнениям, дифракции электромагнитных волн, созданию математич. обеспечения для ЭВМ и их систем, применению ЭВМ в научных исследованиях, автоматизации эксперимента и обработки данных. Премия Совета Министров СССР (1986). Награждён 2 орденами Трудового Красного Знамени (1971, 1975), а также болгарским орденом Кирилла и Мефодия 1-й степени (1977).

■ Математическое обеспечение многоабонентной системы для обмера снимков с трековых камер, «Программирование», 1976, № 4 (соавтор З. М. Иванченко); Обработка экспериментальных данных в физике высоких энергий (соавтор В. Г. Иванов), в кн.: Актуальные проблемы математической физики и вычислительной математики, М., 1984; Применение вычислительных машин в научных исследованиях ОИЯИ, в кн.: Кибернетика и вычислительная техника, в. 1, М., 1985.

ГОДУНО́В Сергей Константинович (р. 17.7.1929, Москва) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1976). Окончил Московский ун-т (1951). С 1969 работает в Сибирском отделении АН СССР (с 1980 зав. отделом Ин-та математики). Основные труды по численным методам решения уравнений математич. физики (теория разностных схем), качественным исследованиям квазилинейных гиперболич. уравнений, численным методам линейной алгебры. Ленинская премия (1959), премия имени А. Н. Крылова АН СССР (1972). Награждён 2 орденами Трудового Красного Знамени (1956, 1975), 2 орденами «Знак Почёта» (1954, 1981).

■ Введение в теорию разностных схем, М., 1962 (соавтор В. С. Рябенький); Численное решение многомерных задач газовой динамики, М., 1976 (соавторы А. Ь. Забродин, М. Я. Иванов и др.); Элементы механики сплошной среды, М., 1978; Уравнения математической физики, 2 изд., М., 1979; Решение систем линейных уравнений, Новосиб., 1980; «Сиб. матем. ж.», 1985, № 5, с.71—85 (соавторы В. И. Костин, А. Д. Митченко); там же, 1986, № 5, с. 24—37.

● «Сиб. матем. ж.», 1980, т. 21, № 3.

ГОЛОВИ́Н Михаил Евсевьевич [1756, с. Матигоры, ныне Архангельской обл.,— 8(19).6.1790] — русский математик, адъюнкт (1776) и почётный чл. (1786) Петербургской АН. Племянник М. В. Ломоносова. Участвовал в организации системы народных училищ в России. Изучал математику у Л. Эйлера. Работы посвящены элементарной математике и механике. Автор учебных руководств по геометрии, арифметике, географии, тригонометрии и др. для народных училищ. Издавал академич. словари.

■ Краткое руководство к геометрии, СПБ, 1786; Краткое руководство к математической географии и к познанию небесного шара, СПБ, 1787; Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами ..., СПБ, 1789.

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968; «Природа», 1987, № 4.

ГО́ЛУБЕВ Владимир Васильевич [21.11(3.12).1884, г. Сергиев Посад, ныне Загорск Московской обл.,— 4.12.1954, Москва] — советский математик и механик, чл.-корр. АН СССР (1934), засл. деятель науки и техники РСФСР (1943), генерал-майор инженерно-технич. службы (1951). Окончил Московский ун-т (1908), с 1917 проф. Саратовского ун-та, с 1930 проф. Московского ун-та. Г. принадлежат метод расчёта крыла конечного размаха, теория крыла малого удлинения и развитие теории ламинарного пограничного слоя. Им создана теория машущего крыла. Основные математич. работы Г. относятся к теории аналитич. функций и аналитич. теории дифференциальных уравнений. Награждён орденом Ленина (1953), орденом Трудового Красного Знамени (1944), 4 орденами Красной Звезды (1936, 1944, 1945, 1954).

■ Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1950; Лекции по теории крыла, М.—Л., 1949; Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки, М., 1953; Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, М., 1961.

● Протасова Л. А., Тюлина И. А., Владимир Васильевич Голубев, М., 1986; «Успехи матем. наук», 1985, т. 40, в. 1.

ГОЛУ́ЗИН Геннадий Михайлович [11(24).1.1906, Торжок,— 17.1.1952, Ленинград] — советский математик. Окончил Ленинградский ун-т (1929), с 1938 проф. там же. Основные труды по теории аналитич. функций. Государственная премия СССР (1948).

■ Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2 изд., М., 1966.

● «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 3.

ГО́ЛЬДБАХ Христиан (Goldbach Christian) [18.3.1690, Кёнигсберг,— 20.11(1.12).1764, Москва] — математик, акад. (1725), почётный чл. (1742) Петербургской АН. По национальности немец. Окончил юридич. ф-т Кёнигсбергского ун-та, увлёкся математикой. Приехал в Россию в 1725. В 1742 перешёл на службу в Коллегию иностранных дел, переехал в Москву. Вёл регулярную переписку (с 1729) с Л. Эйлером, в одном из писем (1742) Г. высказал Л. Эйлеру гипотезу, известную под назв. проблемы Гольдбаха. В первых томах «Комментариев Петербургской АН» Г. напечатал 6 работ, из них две о дифференциальных уравнениях и две, наиболее интересные, о бесконечных рядах.

● Юшкевич А. П., Копелевич Ю. Х., Христиан Гольдбах, М., 1983.

ГОНЧА́Р Андрей Александрович (р. 21.11.1931, Ленинград) — советский математик, акад. (1987; чл.-корр. 1974) АН СССР. Окончил Московский университет (1954), с 1967 проф. там же. С 1965 работает в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР (с 1973 зав. отделом), чл. редколлегии «Математической энциклопедии». Основные труды по теории аналитич. функций и теории приближений. Награждён 2 орденами Трудового Красного Знамени (1975, 1981).

■ Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций, в кн.: Труды Международного конгресса математиков (Москва — 1966), М., 1968; Локальное условие однозначности аналитических функций нескольких переменных, «Матем. сб.», 1974, т. 93, в. 2; Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций, там же, 1981, т. 115, в. 4; О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде, там же, 1982, т. 118, в. 4; О скорости рациональной аппроксимации аналитических функций, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1984, т. 166.

● «Вестник АН СССР», 1982, № 3.

ГОПФ Х.— см. *Хопф* Х.

ГОПФ Э.— см. *Хопф* Э.

ГО́РНЕР, Хорнер Уильям Джордж (Horner William George) (1786, Бристоль,— 22.9.1837, Бат) — английский математик. Основные труды по теории алгебраич. уравнений. С его именем связана (1819) схема

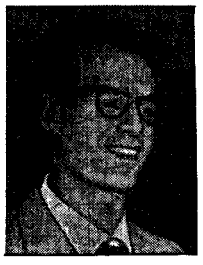
Д. А. Граве.

Г. Г. Грассман.

Дж. Грегори.

Э. И. Григолюк.

Г. А. Гринберг.



А. Гротендик.

Горнера деления многочлена на двучлен $x—a$.

ГОССЕТ У., псевдоним — *Стьюдент*.

ГРАВЕ Дмитрий Александрович [25.8(6.9).1863, Кириллов, ныне Вологодской обл.,— 19.12.1939, Киев] — советский математик, чл.-корр. (1924) и почётный чл. (1929) АН СССР, акад. АН УССР (1919). Окончил Петербургский ун-т (1885). Проф. Харьковского (с 1897), а затем Киевского (с 1899) ун-тов, создатель первой крупной отечественной (в Киеве) алгебраич. школы. Г. решил проблему о нахождении всех интегралов системы дифференциальных уравнений задачи трёх тел, не зависящих от закона действия сил. Награждён орденом Трудового Красного Знамени.

● Сборник, посвященный памяти акад. Дмитрия Александровича Граве, М.—Л., 1940; Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968; Добровольский В. А., Дмитрий Александрович Граве, М., 1968.

ГРАМ Йёрген Педерсен (Gram Jørgen Pedersen) (27.6.1850, Нуструп, близ Хадерслева,— 29.4.1916, Копенгаген) — датский математик. Основные труды по математич. статистике, теории чисел, теории приближения функций (определитель Грама).

ГРАССМАН Герман Гюнтер (Grassmann Hermann Günter) (15.4.1809, Штеттин,— 26.9.1877, там же) — немецкий математик, занимавшийся также физикой и филологией, чл.-корр. Гёттингенской АН. С 1842 работал в Штеттинской гимназии. В соч. «Учение о линейном протяжении» («Lineale Ausdehnungslehre», Lpz., 1844) дал первое систематич. построение учения о многомерном евклидовом пространстве, способствовавшее развитию векторного и тензорного исчислений. Однако из-за абстрактного изложения и необычайной терминологии сочинение было малодоступным. В области физики Г. принадлежат работы по акустике и магнитному взаимодействию токов. Общие идеи Г. об абстрактных векторных пространствах привели его к открытию важного положения — возможности рассматривать цветовые ощущения как трёхмерные векторы, что лежит в основе современного учения о цвете. Им установлены (1853) законы сложения цветов. Г. составил (1875) полный словарь к гимнам Ригведы (памятнику древнеиндийской литературы).

■ Gesammelte mathematische und physikalische Werke, Bd 1—3, Lpz., 1894—1911.

● Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.—Л., 1937.

ГРЕГОРИ Джеймс (Gregory James) (1638, Абердин,— 1675, Эдинбург) — шотландский математик и астроном, чл. Лондонского королевского общества (1668), проф. ун-та в Сент-Андрусе (с 1669), Эдинбургского ун-та (с 1674). Автор одного из первых проектов зеркального телескопа (1663). Разработал приём вычисления площади сектора круга, гиперболы и эллипса; с этим связана его попытка доказать, что круговые и логарифмич. функции не могут быть сведены к алгебраич. операциям. Для вычисления площадей пользовался рядами. Вывел разложение в степенные ряды многих функций и, по существу, владел рядом Тейлора, вывел (1668) формулу приближённого интегрирования, впоследствии вновь найденную Т. Симпсоном.

● Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966; James Gregory tercentenary memorial volume, L., 1939.

ГРЕФФЕ Карл Генрих (Gräffe Carl Heinrich) (7.11.1799, Брауншвейг,— 2.12.1873, Цюрих) — швейцарский математик, с 1860 проф. Цюрихского ун-та. Основные труды по алгебре, особенно по алгебраич. уравнениям, для к-рых Г. детально разработал (1837) метод приближённого вычисления корней, предложенный ранее Ж. Данделеном (1828) и независимо Н. И. Лобачевским (1834).

ГРИГОЛЮК Эдуард Иванович (р. 13.12.1923, Москва) — советский учёный в области механики, чл.-корр. АН СССР (1958). Окончил Московский авиационный ин-т (1944), с 1977 проф. Московского автомеханич. ин-та. Основные труды по механике деформирующих сред. Действительный чл. Международной академии астронавтики (1969). Государственная премия УССР (1975). Награждён орденом Дружбы народов (1986), орденом «Знак Почёта» (1975).

■ Тонкие биметаллические оболочки и пластины, «Инж. сб.», 1953, т. 17; Уравнения трехслойных оболочек с легким заполнителем, «Изв. АН СССР. Отделение технических наук», 1957, № 1.

ГРИГОРИЙ из Сен-Винцента (Gregorius a Sancto Vincentio) (1584, Брюгге,— 27.1.1667, Гент) — бельгийский математик. В своём «Геометрическом труде» («Opus geometricum», 1647) занимался вычислением площадей криволинейных фигур и объёмов тел. Для этого он, следуя древнегреческим учёным, вписывал в те и другие столько параллелограммов и параллелепипедов, чтобы они «исчерпали» (термин впервые употреблён Г.) площадь или (соответственно) объём (метод исчерпывания). Г. был чл. ордена иезуитов.

● Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966.

ГРИН Джордж (Green George) (14.7.1793, Снейнтон, близ Ноттингема,— 31.3.1841, там же) — английский математик и физик. Самостоятельно изучал математику и лишь в 1837 окончил Кембриджский ун-т. В соч. «Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма» (1828) ввёл понятие и термин «потенциал» и развил теорию электричества и магнетизма, опираясь на найденное им соотношение между интегралом по объёму и интегралом по поверхности, ограничивающей объём (формулы Грина). Эта работа оставалась неизвестной до её переиздания (1845). В 1839 выполнил важную работу об отражении и преломлении света в кристаллических средах, в которой также вывел основные уравнения теории упругости.

■ The mathematical papers, L., 1871.

● Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, пер. с нем., 3 изд., М., 1978.

ГРИНБЕРГ Георгий Абрамович [р. 3(16).6.1900, Петербург] — советский физик и математик, чл.-корр. АН СССР (1946). Окончил Петроградский политехнич. ин-т (1923), в 1924—55 преподавал там же (с 1930 проф.). С 1941 работает в Физико-технич. ин-те АН СССР. Основные труды по теоретич. электронике, теории распространения электромагнитных волн, математич. физике, теории упругости. Государственная премия СССР (1949). Награждён орденом Ленина (1954), 3 орденами Трудового Красного Знамени (1945, 1970, 1975), орденом Дружбы народов (1980).

■ Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, М., 1948.

● «Вестник АН СССР», 1980, № 11.

ГРОТЕНДИК Александр (Grothendieck Alexander) (р. 28.3.1928, Берлин) — французский математик. Проф. Парижского ун-та. Основные труды по

А. Гурвиц.

Э. Ж. Б. Гурса.

Х. Гюйгенс.

Н. М. Гюнтер.

топологии, гомологич. алгебре и алгебраич. геометрии. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1966).

■ О некоторых вопросах гомологической алгебры, М., 1961.

ГУ́ДДЕ, Гюдде, Хюдде Иоганн (Hudde Johann) (ок. 1633, Амстердам,— 16.4.1704, там же) — голландский математик. Основные труды по алгебре и исчислению бесконечно малых. Открыл правило нахождения кратных корней алгебраич. уравнения.

● История математики, т. 2, М., 1970.

ГУК, Хук Роберт (Hooke Robert) (18.7.1635, о. Уайт,— 3.3.1703, Лондон) — английский учёный, один из основателей Лондонского королевского общества (1662), с 1665 проф. Лондонского ун-та. Основные труды в различных областях физики и астрономии. Начал разработку основ математич. теории упругости.

● История математики, т. 2, М., 1970.

ГУ́ЛЬДИН, Гюльден Пауль (Guldin Paul) (12.6.1577, Санкт-Галлен,— 3.11.1643, Грац) — швейцарский математик. Написал трактат «О центре тяжести» («De centro gravitatis», Viennae, 1635—41), во 2-й книге к-рого содержатся вопросы, связанные с определением объёмов и поверхностей тел вращения. Г. наметил зачатки комбинаторики (задача о сочетаниях, 1622).

● История математики, т. 2, М., 1970.

ГУ́РВИЦ, Гурвиц Адольф (Hurwitz Adolf) (26.3.1859, Хильдесхайм,— 18.11.1919, Цюрих) — немецкий математик, с 1892 проф. Политехнич. школы в Цюрихе. Основные труды по математич. анализу, теории функций, алгебре (критерий Гурвица) и теории чисел.

■ Теория функций, М., 1968 (соавтор Р. Курант).

ГУРСА Эдуар Жан Батист (Goursat Édouard Jean Baptiste) (21.5.1858, Ланзак, деп. Ло,— 25.11.1936, Париж) — французский математик, чл. Парижской АН (1919), с 1897 проф. Парижского ун-та. Основные труды по дифференциальным уравнениям с частными производными 2-го порядка и по теории аналитич. функций. Им поставлена задача интегрирования дифференциальных уравнений при граничных условиях, заданных вдоль характеристик (задача Гурса).

■ Курс математического анализа, 2 изд., т. 1—3, М.—Л., 1933—34.

ГУ́РЬЕВ Семён Емельянович [10(21).9.1766— 11(23).12.1813, Петербург] — русский математик и механик, акад. Петербургской АН (1798; адъюнкт с 1796), чл. Российской академии (1800), проф. ряда высших учебных заведений. Характерной чертой деятельности Г. была забота о подготовке кадров русских учёных и о распространении научных знаний на русском языке. Много сделал для создания русской учебной и научной литературы. Научные работы Г. относились к аналитич. и дифференциальной геометрии, математич. анализу и механике. Более всего интересовали Г. проблемы методики и методологии математики, к-рым посвящён его «Опыт о усовершении елементов геометрии» (1798).

■ Основания геометрии, 2 изд., СПБ, 1811; Основания трансцендентной геометрии кривых поверхностей, СПБ, 1806; Основания дифференциального исчисления, с приложением оного к аналитике, СПБ, 1811; Основания механики, ч. 1, СПБ, 1815.

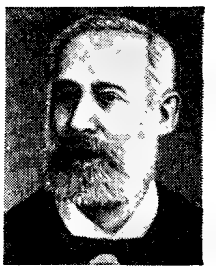
● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

ГЮЙГЕНС, Хёйгенс Христиан (Huygens Christian) (14.4.1629, Гаага,— 8.7.1695, там же) — голландский механик, физик и математик, чл. Парижской АН (1666), Лондонского королевского общества (1663). Создал волновую теорию света (1678, опубл. 1690). Развил ряд важнейших понятий механики. Заложил основы теории удара. Построил первые часы с маятником (1657), изучение колебаний к-рого привело его к ряду важных механич. и математич. открытий. Усовершенствовал астрономич. трубу. В 1655 открыл спутник (Титан) планеты Сатурн и определил период его обращения вокруг Сатурна. Установил, что наблюдавшиеся ранее около Сатурна придатки представляют собой кольцо. Открытия Г., изложенные им в работе «Система Сатурна» (1659), явились подтверждением правильности учения Н. Коперника о гелиоцентрич. системе мира. Совместно с Р. Гуком установил постоянные точки термометра — точку таяния льда и точку кипения воды. Сконструировал окуляр, носящий его имя. В 22 года Г. опубликовал первую математич. работу об определении длины дуг окружности, эллипса и гиперболы. Затем последовали другие значительные математич. трактаты по исследованию циклоиды, логарифмич. и цепной линии и др. Его трактат «О расчётах при игре в кости» (1657) — одно из первых исследований в области теории вероятностей.

■ Oeuvres complètes, t. 1—22, 28 (supplement), La Haye, 1905—50; Три трактата о механике, М.— Л., 1951; Трактат о свете, М.—Л., 1935; О найденной величине круга, в кн.: О квадратуре круга. (Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр), 3 изд., М.— Л., 1936.

● Франкфурт У. М., Френк А. М., Христиан Гюйгенс, М., 1962.

ГЮЛЬДЕН П.— см. *Гульдин* П.



А. Ю. Давидов.

ГЮ́НТЕР Адам Вильгельм Зигмунд (Günter Adam Wilhelm Siegmund) (6.2.1848, Нюрнберг,— 5.2.1923, Мюнхен) — немецкий физик и математик, с 1886 проф. Технич. школы в Мюнхене. Основные математич. труды по анализу и истории математики. Ввёл (1882) знак ≈ для приближённого равенства.

ГЮНТЕР Николай Максимович [5(17).12.1871, Петербург,— 4.5.1941, Ленинград] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1924). Окончил Петербургский ун-т (1894), с 1904 проф. там же. Основные труды по дифференциальным уравнениям и математич. физике. Впервые дал строгое и систематич. изложение современного состояния теории потенциала (1934). Им широко использовались идеи и методы теории функций и функционального анализа при решении задач математич. физики.

■ Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, М., 1953.

● «Уч. зап. ЛГУ. Серия матем. наук», 1948, в. 15.

ДАВЕНПОРТ, Дэвенпорт Харолд (Davenport Harold) (30.10.1907, Акрингтон,— 9.6.1969, Кембридж) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1940). Автор работ по аналитич. теории диофантовых уравнений. Наиболее значительны работы Д. по оценке тригонометрич. сумм и характеров в конечных полях, оказавшие значительное влияние на современную алгебраич. теорию чисел.

■ Высшая арифметика. Введение в теорию чисел, М., 1965; Мультипликативная теория чисел, М., 1971.

ДАВИ́ДОВ Август Юльевич [15(27).12.1823, Либава,— 22.12.1885 (3.1.1886), Москва] — русский механик и математик, окончил Московский ун-т (1845), с 1853 проф. там же, один из учредителей Московского математич. общества (1867) и его президент (с 1867). Автор ряда учебников по математике для средней школы, выдержавших десятки изданий. Его работы «Теория равновесия тел, погружённых в жидкость» (М., 1848) и «Теория капиллярных яв-

Ж. Л. Д'Аламбер.

А. Данжуа.

лений» (М., 1851) удостоены Демидовских премий Петербургской АН (1848, 1850). Математич. труды по дифференциальным уравнениям с частными производными, определённым интегралам и применению теории вероятностей к статистике.

■ Начальная алгебра, М., 1866 (24 изд., 1922); Элементарная геометрия, М., 1864 (39 изд., 1922); Геометрия для уездных училищ, М., 1873 (32 изд., 1918).

● Симонов Р. А., Педагогическое наследие профессора математики Московского университета А. Ю. Давидова, М., 1957.

Д'АЛАМБЕ́Р Жан Лерон (D'Alembert Jean Le Rond) (16.11.1717, Париж,— 29.10.1783, там же) — французский математик и философ, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1764), чл. Парижской АН (1741), Французской академии (1754) и др. академий. С 1751 Д. работал вместе с Д. Дидро над созданием «Энциклопедии наук, искусств и ремёсел». В «Энциклопедии» Д. вёл отделы математики и физики. В 1757, не выдержав преследований реакции, к-рым подвергалась его деятельность в «Энциклопедии», он отошёл от её издания и целиком посвятил себя научной работе. Впервые сформулировал (1743) общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем, сведя задачи динамики к статике — т. н. принцип Д'Аламбера. Этот принцип был применён (1774) им для обоснования гидродинамики (доказал существование наряду с океанскими также воздушных приливов). В астрономии Д. обосновал теорию возмущения планет и первым строго объяснил теорию предварения равнодействий и нутации.

Основные математич. труды Д. относятся к теории дифференциальных уравнений, где он дал метод решения дифференциального уравнения 2-го порядка с частными производными, выражающего малые колебания бесконечно тонкой однородной струны (волнового уравнения), в виде суммы двух произвольных функций и по т. н. граничным условиям сумел выразить одну из них через другую. Эти работы Д., а также последующие работы Л. Эйлера и Д. Бернулли составили основу математич. физики. При решении одного дифференциального уравнения с частными производными эллиптич. типа, встретившегося в гидродинамике, Д. впервые применил функции комплексного переменного. У Д. (а вместе с тем и у Л. Эйлера) встречаются те уравнения, связывающие действительную и мнимую части аналитич. функции, к-рые впоследствии получили назв. уравнений Коши — Римана. Д. принадлежат также важные результаты в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений 1-го и 2-го порядков. Исчисление бесконечно малых Д. стремился обосновать с помощью теории пределов, в теории рядов его имя носит широко употребительный достаточный признак сходимости (признак Д'Аламбера). В алгебре Д. дал первое (не вполне строгое) доказательство основной теоремы о существовании корня у алгебраич. уравнения. В первых томах «Энциклопедии» Д. поместил важные статьи: «Дифференциалы», «Уравнения», «Динамика», «Геометрия».

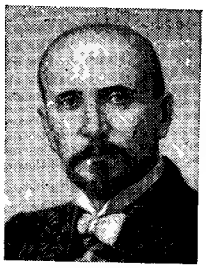
Из философских работ наиболее важное значение имеют вступительная статья к «Энциклопедии» «Очерк происхождения и развития наук» (1751), в к-рой дана классификация наук, и «Элементы философии» (1759). В теории познания Д. придерживался сенсуализма. В решении основных философских вопросов Д. склонялся к скептицизму, считая невозможным что-либо достоверно утверждать о боге, взаимодействии его с материей, вечности или сотворённости материи и т. п. Сомневаясь в существовании бога и выступая с антиклерикальной критикой, Д., однако, не встал на позиции атеизма. В отличие от франц. материалистов, Д. считал, что существуют неизменные, не зависящие от общественной среды нравственные принципы. Взгляды Д. по вопросам теории познания и религии были подвергнуты критике со стороны Д. Дидро в произведениях: «Сон Д'Аламбера» (1769), «Разговор Д'Аламбера и Дидро» (1769) и др.

Д. принадлежат также работы по вопросам музыкальной теории и музыкальной эстетики.

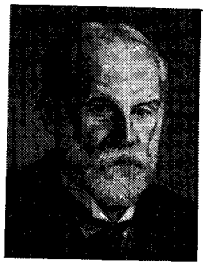
■ Oeuvres, t. 1—5, P., 1821—22; Очерк происхождения и развития наук, в кн.: Родоначальники позитивизма, в. 1, СПБ, 1910, с. 95—168; Извлечение из мемуара «О равновесии жидкостей» и «О фигуре Земли», в кн.: Клеро А., Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики, пер. с франц., М.—Л., 1947; Динамика, М.—Л., 1950.

● История математики, т. 3, М., 1972; Добровольский В. А., Даламбер, М., 1968; Grimsley R., Jean d'Alembert, Oxf., 1963.

ДАНДЕЛЕ́Н Жерминаль Пьер (Dandelin Germinal Pierre) (12.4.1794, Ле-Бурже,— 15.2.1847, Брюссель) — бельгийский математик и инженер, чл. Бельгийской АН (1825). Работал в Льеже, Намюре, Брюсселе. Основные труды по геометрии и алгебре. Доказал (1822) теорему о сферах (т. н. шарах Данделена), вписанных в конус. Предложил (1828) способ приближённого вычисления корней алгебраич. уравнения.



Ж. Г. Дарбу.



Дж. Х. Дарвин.

ДАНЖУА́ Арно (Denjoy Arnaud) (5.1.1884, Ош, деп. Жер,— 27.1.1974, Париж) — французский математик, иностранный чл. АН СССР (1971), чл. Парижской АН (1942), с 1922 проф. Парижского ун-та. Основные труды по теории функций действительного переменного. Дал полное решение классич. задачи о примитивной функции, для к-рого ввёл новое понятие интеграла, названного его именем. Золотая медаль имени М. В. Ломоносова АН СССР (1971).

■ Leçons sur le calcul des coefficients des séries trigonométriques, P., 1941.

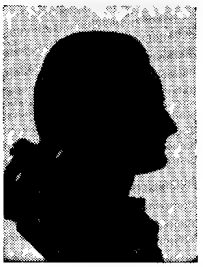
ДАРБУ́ Жан Гастон (Darboux Jean Gaston) (13.8.1842, Ним,— 23.2.1917, Париж) — французский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1895), чл. Парижской АН (1884), чл. Лондонского королевского общества (1902), с 1873 проф. Парижского ун-та. Основные труды по дифференциальной геометрии (теория поверхностей, теория криволинейных координат) — «Лекции по общей теории поверхностей» («Leçons sur la théorie générale des surfaces...», t. 1—4, P., 1887—96; 2 éd., P., 1914—25) и «Лекции об ортогональных системах и криволинейных координатах» («Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnée curvilignes», P., 1897; 2 éd., P., 1910). Геометрич. исследования привели Д. к рассмотрению различных вопросов интегрирования дифференциальных уравнений. Из работ, относящихся к другим областям математики, важны мемуары по теории интегрирования (суммы Дарбу), теории аналитич. функций, а также исследования по вопросу о разложении функций по ортогональным функциям, в частности полиномам Якоби. В механике плодотворно занимался различными вопросами кинематики, равновесия, малых колебаний системы точек и др.

■ Принципы аналитической геометрии, Л.—М., 1938.

● «Изв. АН», 1917, т. 11, с. 351—52; «Acta mathematica», 1920, v. 42, p. 269—73.

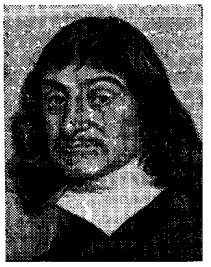
ДА́РВИН Джордж Хауард (Говард) (Darwin George Howard) (9.7.1845, Даун, близ Лондона,— 7.12.1912, Кембридж) — английский астроном, метеоролог, математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1907), чл. Лондонского королевского общества (1879), с 1883 проф. Кембриджско-

И. Э. Л. Девелей.



К. Ф. Деген.

Ю. В. Р. Дедекинд.



Р. Декарт.

го ун-та. Сын естествоиспытателя Ч. Дарвина. Основные труды по небесной механике. Занимался изучением периодич. решений задачи трёх тел, разработал графич. методы интерполирования и интегрирования.

ДЕБО́Н, де Бон Флоримон (Debeaune Florimond) (7.10.1601, Блуа,— 18.8.1652, там же) — французский математик. Комментировал геометрию Декарта; в исчислении бесконечно малых изучал (1638) т. н. обратную задачу на касательные.

● История математики, т. 2, М., 1970.

ДЕВЕЛЕ́Й Исаак Эммануэль Луи (Develey Isaac Emmanuel Louis) (27.5.1764, Пайерн,— 22.5.1839, Лозанна) — швейцарский математик и астроном, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1808), проф. математики в Лозанне. Автор учебников по математике и астрономии.

ДЕ́ГЕН Карл Фердинанд (Degen Carl Ferdinand) (1.11.1766, Брауншвейг,— 18.4.1825, Копенгаген) — датский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1819), чл. Датской королевской АН (1800). Основные труды по алгебре, теории чисел, интерполяции.

ДЕ́ДЕКИНД Юлиус Вильгельм Рихард (Dedekind Julius Wilhelm Richard) (6.10.1831, Брауншвейг,— 12.2.1916, там же) — немецкий математик, чл. Берлинской АН (1880), чл. Парижской АН (1910). Учился у К. Гаусса и П. Дирихле в Гёттингенском ун-те. В 1862—1912 проф. Высшей технич. школы в Брауншвейге. Основные труды по теории алгебраич. чисел. Создал ряд общих концепций, лежащих в основе современной алгебры (дедекиндово кольцо, дедекиндова решётка), в частности ему принадлежит современное определение идеала. Д.— автор одной из первых систем строгого обоснования теории действительных чисел, где известны аксиома Дедекинда, дедекиндово сечение. Издал лекции по теории чисел, читанные П. Дирихле, а также (совместно с Г. Вебером) полное собрание сочинений Б. Римана.

■ Gesammelte mathematische Werke, Bd 1—3, Braunschweig, 1930—32; Непрерывность и иррациональные числа, 4 изд., Од., 1923.
● Dugac P., Richard Dedekind et les fondements des mathématiques, P., 1976.

ДЕЗА́РГ Жерар (Désargues Gérard) (2.3.1593, Лион,— 8.10.1662, там же) — французский математик. Был военным инженером. Заложил основы проективной и начертательной геометрии. В своих исследованиях систематически применял перспективное изображение. Первым ввёл в геометрию бесконечно удалённые элементы. Д. принадлежит одна из основных теорем проективной геометрии — т. н. предложение Дезарга. В сочинениях о резьбе по камню и о солнечных часах Д. даёт геометрич. обоснования практич. операциям.

■ Oeuvres, t. 1—2, P., 1864.
● Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966.

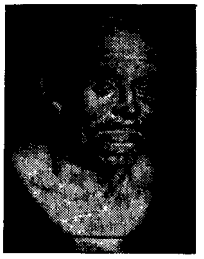
ДЕКА́РТ Рене (Descartes René) (латинизированное имя — Картезий; Cartesius) [31.3.1596, Лаэ (Турень),— 11.2.1650, Стокгольм] — французский философ и математик. Происходил из старинного дворянского рода. Образование получил в иезуитской школе Ла Флеш в Анжу. В начале Тридцатилетней войны служил в армии, к-рую оставил в 1621; после нескольких лет путешествий переселился в Нидерланды (1629), где провёл двадцать лет в уединённых научных занятиях. В 1649 по приглашению шведской королевы переселился в Стокгольм, где вскоре умер.

Д. заложил основы аналитич. геометрии, ввёл многие современные алгебраич. обозначения. Высказал закон сохранения количества движения, дал понятие импульса силы. Автор теории, объясняющей образование и движение небесных тел вихревым движением частиц материи. Ввёл представление о рефлексе. В основе философии Д.— дуализм души и тела, «мыслящей» и «протяжённой» субстанции. Материю отождествлял с протяжением (или пространством), движение сводил к перемещению тел. Общая причина движения, по Д.,— бог, к-рый сотворил материю, движение и покой. Человек — связь безжизненного телесного механизма с душой, обладающей мышлением и волей. Безусловное основоположение всего знания, по Д.,— непосредственная достоверность сознания («... я мыслю, следовательно, я существую...»). Пытался доказать существование бога как источника объективной значимости человеческого мышления. В учении о познании Д.— родоначальник рационализма и сторонник учения о врождённых идеях.

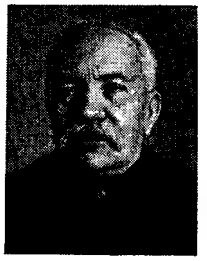
В «Геометрии» (1637) Д. широкое применение получило понятие переменной величины. Переменная величина у Д. выступала в двойной форме: как отрезок переменной длины и постоянного направления — текущая координата точки, описывающей своим движением кривую, и как непрерывная числовая переменная, пробегающая совокупность чисел, выражающих этот отрезок. Двоякий образ переменной обусловил взаимопроникновение геометрии и алгебры. У Д. действительное число трактовалось как отношение любого отрезка к единичному, хотя сформулировал такое определение лишь И. Ньютон; отрицательные числа получили у Д. реальное истолкование в виде направленных ординат. Д. значительно улучшил систему обозначений, введя общепринятые знаки для переменных величин (x, y, z, ...) и коэффициентов (a, b, c, ...), а также обозначения степеней (x^4, a^5, ...). Запись формул у Д. почти ничем не отличается от современной. Д. положил начало ряду исследований свойств уравнений; сформулировал правило знаков для определения числа положительных и отрицательных корней (правило Декарта); поставил вопрос о границах действительных корней и выдвинул проблему приводимости (представления целой рациональной функции с рациональными коэффициентами в виде произведения двух функций такого же рода); указал, что уравнение 3-й степени разрешимо в квадратных радикалах и его корни находятся с помощью циркуля и линейки, когда оно приводимо. В аналитической геометрии, которую одновременно с Д. разрабатывал П. Ферма, основным достижением Д. явился созданный им метод координат (декартовы координаты). В область изучения геометрии Д. включил «геометрические» линии (названные позднее Г. Лейбницем алгебраическими), к-рые можно описать движениями шарнирных механизмов, и исключил «механические» (трансцендентные) кривые. В «Геометрии» Д. изложил способ построения нормалей и касательных к плоским кривым (в связи с исследованиями линз) и применил его, в частности, к нек-рым кривым 4-го порядка, т. н. овалам Декарта. Заложив основы аналитич. геометрии, сам Д. продвинулся в этой области недалеко — не рассматривались отрицательные абсциссы, не затронуты вопросы аналитич. геометрии трёхмерного пространства. Тем не менее его «Геометрия» оказала огромное влияние на развитие математики. В переписке Д. содержатся и др. его открытия: вычисление площади, ограниченной циклоидой, проведение касательных к циклоиде, определение свойств логарифмич. спирали. Из рукописей Д. видно, что он знал (открытое позднее Л. Эйлером)

П. Р. Делинь.

Б. Н. Делоне.



Демокрит.



А. Н. Динник.

соотношение между числами граней, вершин и рёбер выпуклых многогранников.

■ Oeuvres, t. 1—12, P., 1897—1913; Correspondance, v. 1—6, P., 1936—56; Сочинения, т. 1, Каз., 1914; Избранные произведения, [М.], 1950; Геометрия, М.—Л., 1938; Рассуждение о методе. С приложением: «Диоптрика», «Метеоры», «Геометрия», [М.], 1953.

● Матвиевская Г. П., Рене Декарт, М., 1976.

ДЕЛА́МБР Жан Батист Жозеф (Delambre Jean Baptiste Joseph) (19.9.1749, Амьен,— 19.8.1822, Париж) — французский астроном, геодезист, метролог, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1810), чл. Парижской АН (1792). Основные труды по астрономии и геодезии; в сферич. геометрии известны формулы Делам бра.

ДЕЛИ́НЬ Пьер Рене (Deligne Pierre René) (р. 3.10.1944, Брюссель) — бельгийский математик, чл. Парижской АН (1978). Основные труды по алгебраич. теории чисел. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1978).

ДЕЛОНЕ́ Борис Николаевич [3(15).3.1890, Петербург,— 17.7.1980, Москва] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1929). Окончил Киевский ун-т (1913), проф. Ленинградского (1923—35) и Московского (с 1935) ун-тов, с 1932 в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР (с 1945 зав. отделом). Основные труды по теории чисел относятся к теории неопределённых уравнений 3-й степени с двумя неизвестными, по алгебре — к геометризации теории Галуа, по геометрии — к теории правильного разбиения пространства, теории приведения квадратичных форм, теории решётчатых покрытий пространства сферами, теории стереоэдров, математич. кристаллографии. Д.— один из старейших советских альпинистов, имел звание мастера альпинизма (1937). Чл. Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина» (1962). Премия имени Е. С. Фёдорова АН СССР (1959), международная премия имени Н. И. Лобачевского АН СССР (1977). Награждён орденом Ленина (1953), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1945, 1980).

■ Сборник геометрических задач, 2 изд., М., 1951 (соавторы О. К. Житомирский и А. И. Фетисов); Петербургская школа теории чисел, М.—Л., 1947; Аналитическая геометрия, т. 1—2, М.—Л., 1948—49 (соавтор Д. А. Райков); Задачник по геометрии, 7 изд., М., 1959 (соавтор О. К. Житомирский); Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского, М., 1953.

● «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 3; 1971, т. 26, в. 1; «Вестник АН СССР», 1980, № 7; Борис Николаевич Делоне, М., 1967 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР).

ДЕЛОНЕ́ Шарль Эжен (Delaunay Charles Eugène) (9.4.1816, Люзиньи-сюр-Барс, деп. Об,— 5.8.1872, Шербур) — французский математик, астроном, горный инженер, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1871), чл. Парижской АН (1885), чл. Лондонского королевского общества (1869). Основные труды по небесной механике. Математич. труды по анализу.

ДЕМОКРИ́Т (Δημόκριτος) [ок. 460, Абдеры (Фракия),— ок. 370 до н. э.] — древнегреческий философ. В математике Д. одним из первых стал разрабатывать вопросы стереометрии; наметил приёмы математич. исследования, предвосхитившие позднейшие метод неделимых и принцип Кавальери.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

ДЕН Макс (Dehn Max) (13.2.1878, Гамбург,— 27.6.1952, Блэк-Маунтин) — немецкий математик. В 1939 эмигрировал в США, где работал в различных ун-тах. Основные труды по геометрии, теории групп и топологии. Решил (1901) одну из 23 проблем Гильберта — о конгруэнтных тетраэдрах (теорема Дена). Ряд работ посвящён истории и философии математики.

ДЖЕ́КСОН, Джэксон Данем (Jackson Dunham) (24.7.1888, Бриджуотер, Массачусетс,— 6.11.1946) — американский математик, с 1919 проф. ун-та в Миннесоте. Основные труды по теории приближения функций.

■ Ряды Фурье и ортогональные полиномы, М., 1948.

ДЖОН, Йон Фриц (John Fritz) (р. 14.6.1910, Берлин) — американский математик, чл. Национальной АН США. Окончил Гёттингенский ун-т (1933). С 1945 работает в Нью-Йоркском ун-те. Основные труды по дифференциальным уравнениям с частными производными, некорректным задачам, численному анализу, математич. теории упругости.

■ Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, М., 1958; Уравнения с частными производными, М., 1966 (соавторы Л. Берс и М. Шехтер).

ДЖОНС, Джоунз Уильям (Jones William) (1675 — 3.7.1749, Лондон) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1711). Основные труды по дифференциальному и интегральному исчислениям и рядам. У Д. впервые (1706) встречается обозначение π для отношения длины окружности к диаметру.

ДИКСОН Леонард Юджин (Dickson Leonard Eugene) (22.1.1874, Индепенденс,— 17.1.1954) — американский математик, чл. Национальной АН США (1913), Американской академии искусств и наук в Бостоне. Окончил Техасский ун-т (1893). С 1900 преподавал в Чикагском ун-те (в 1910—39 проф.). Основные труды по теории чисел, алгебре, истории математики (3-томная история теории чисел, 1934).

■ Введение в теорию чисел, М.—Л., 1941.

ДИННИК Александр Николаевич [19(31).1.1876, Ставрополь, — 22.9.1950, Киев] — советский учёный в области механики и теории упругости, акад. АН СССР (1946), акад. АН УССР (1929), заслуженный деятель науки и техники УССР (1943). Окончил Киевский ун-т (1899). В 1914—41 проф. Горного и Металлургич. ин-тов Днепропетровска, с 1944 Киевского ун-та. Основные труды по исследованию устойчивости элементов сооружений, в частности стержней и арок; устойчивости колебаний пластин, мембран; применению теории упругости к вопросам горного давления и др. Награждён орденом Ленина (1946), орденом Трудового Красного Знамени (1944).

В 1972 в АН УССР учреждена премия имени А. Н. Динника.

■ Устойчивость упругих систем, М.—Л., 1950.

● «Прикладная математика и механика», 1951, т. 15, в. 2.

ДИНОСТРА́Т (Δινόστρατος) (4 в. до н. э., Афины) — древнегреческий математик. Занимался исследованием конич. сечений; о трудах Д. известно лишь по свидетельству других авторов. Предложил решение квадратуры круга с помощью найденной им трансцендентной кривой, названной позднее квадратрисой Диностра та.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

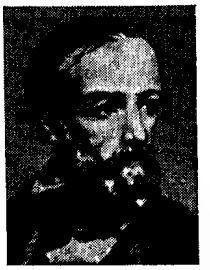
ДИОКЛЕ́С, Диокл (Διοκλῆς) (2-я пол. 2 в. до н. э.) — древнегреческий математик. Ввёл и изучил кривую для построения двух средних пропорциональных (впоследствии названную циссоидой Диоклеса), к-рую использовал для решения задачи об удвоении куба.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

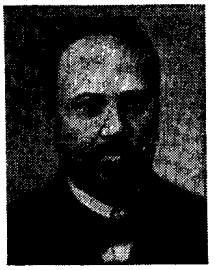
ДИОФА́НТ (Διόφαντος) (вероятно, 3 в.) — древнегреческий математик из Александрии. Сохранилась часть его математич. трактата «Арифметика» (6 книг из 13), где даётся решение задач, в большинстве приводящихся к неопределённым уравнениям (т. н. диофантовым уравнениям) до 4-й степени, решение к-рых ищется в рациональных положительных числах (отрицательных чисел у

Диофант.

П. А. М. Дирак.



П. Г. Л. Дирихле.



И. П. Долбня.

И. Г. Доппельмайр.

А. А. Дородницын.

Д. нет). Для обозначения неизвестного и его степеней (до шестой), знака равенства Д. употреблял сокращённую запись соответствующих слов. Д. располагал достаточно общими приёмами решения неопределённых уравнений. Недавно обнаружен под именем Д. арабский текст ещё 4 книг «Арифметики». Сочинения Д. явились отправной точкой для исследований П. Ферма, Л. Эйлера, К. Гаусса и др.

■ Арифметика и книга о многоугольных числах, М., 1974.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

ДИРАК Поль Адриен Морис (Dirac Paul Adrien Maurice) (8.8.1902, Бристоль,— 20.9.1984, Таллахасси) — английский физик-теоретик, один из основателей квантовой механики, иностранный чл. АН СССР (1931), чл. Лондонского королевского общества (1930) и ряда др. зарубежных академий и научных обществ, с 1932 проф. Кембриджского ун-та. Основные труды в математике по функциональному анализу и математич. физике (уравнение Дирака, дельта-функция Дирака, статистика Ферми — Дирака). Нобелевская премия (1933).

■ Спиноры в гильбертовом пространстве, М., 1978.

ДИРИХЛЕ Петер Густав Лежён (Dirichlet Peter Gustav Lejeune) (13.2.1805, Дюрен,— 5.5.1859, Гёттинген) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1837), чл. Лондонского королевского общества (1855), Парижской АН (1854), Берлинской АН. В 1831—55 проф. Берлинского, с 1855 Гёттингенского ун-тов. Основные труды по теории чисел и математич. анализу. Д. доказал теорему о существовании бесконечно большого числа простых чисел во всякой арифметич. прогрессии из целых чисел, первый член и разность к-рой — числа взаимно простые и изучал (1837) закон распределения простых чисел в арифметич. прогрессиях, в связи с чем ввёл функциональные ряды особого вида (т. н. ряды Дирихле). В области математич. анализа Д. впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда, установил признак сходимости ряда (т. н. признак Дирихле, 1862), дал (1829) строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье функции, имеющей конечное число максимумов и минимумов. Значительные работы Д. посвящены механике и математич. физике (принцип Дирихле в теории гармонич. функции).

■ Werke, Bd 1—2, B., 1889—97; Лекции по теории чисел, М.—Л., 1936.

● Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.—Л., 1937; Историко-математические исследования, в. 27, М., 1983.

ДОЛБНЯ Иван Петрович [31.1(12.2).1853 — 2(15).2.1912, Петербург] — русский математик. Окончил Петербургский горный ин-т (1875), преподавал математику в средних учебных заведениях Оренбурга и Нижнего Новгорода. Проф. (с 1896) и ректор (с 1910) Петербургского горного ин-та. При теоретич. разработке специальных дисциплин горнозаводского дела применял методы математич. анализа. Основные труды по алгебре, теории абелевых интегралов; исследовал вопрос о приведении абелевых интегралов к элементарным функциям.

■ Oeuvres mathématiques, P., 1913.

● История отечественной математики, т. 2, К., 1967.

ДОНАЛДСОН Саймон Кёруан (Donaldson Simon Kirwan) (р. 20.8.1957, Кембридж) — английский математик. Окончил Кембриджский ун-т (1983), с 1985 проф. Оксфордского ун-та. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1986).

ДОППЕЛЬМАЙР Иоганн Габриель (Doppelmayr Johann Gabriel) (27.9.1677, Нюрнберг,— 1.12.1750, там же) — немецкий математик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1740). Основные труды по геометрии и сферич. тригонометрии.

ДОРОДНИЦЫН Анатолий Алексеевич [р. 19.11(2.12).1910, с. Башино, ныне Тульской обл.] — советский математик, геофизик и механик, акад. АН СССР (1953), Герой Социалистич. Труда (1970). Окончил Грозненский нефтяной ин-т (1931), в 1945—55 в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. С 1955 директор Вычислительного центра АН СССР. Проф. Московского физико-технич. ин-та (с 1947). Главный редактор «Журнала вычислительной математики и математической физики» (с 1961).

Основные труды по проблемам динамич. метеорологии, аэродинамике и прикладной математике. Изучал вопросы асимптотич. поведения решений нек-рых классов нелинейных дифференциальных уравнений. Развил вихревую теорию крыльев сложных форм, предложил методы расчёта осесимметрич. сверхзвуковых течений газа. Разработал численный метод интегральных соотношений для решений уравнений с частными производными и методы численного решения уравнения Навье — Стокса. Дал теоретич. описание воздушных течений над горными хребтами. Построил теорию пограничного слоя в сжимаемом газе. Иностранный чл. Болгарской АН (1970), Технической академии Финляндии, чл. Международной федерации по обработке информации, Международного комитета по проблемам окружающей среды, почётный доктор Дрезденского технич. ун-та. Ленинская премия (1984). Государственные премии СССР (1946, 1947, 1951). Премия имени Н. М. Крылова АН УССР (1973), премия имени А. Н. Крылова АН СССР (1978), премия Совета Министров СССР (1981), премия имени В. М. Глушкова АН УССР (1983). Награждён 5 орденами Ленина (1956, 1959, 1963, 1970, 1980), орденом Октябрьской Революции (1975), орденом Трудового Красного Знамени (1959), орденом Красной Звезды (1945), орденом Дружбы народов (1985), орденом «Знак Почёта» (1943), а также болгарским орденом Кирилла и Мефодия I степени (1979), вьетнамским орденом «Дружба» (1981).

■ Некоторые задачи обтекания неровностей поверхности земли воздушным потоком, «Труды Главной геофизич. обсерватории», 1940, в. 31, с. 3—41; Пограничный слой в сжимаемом газе, «Прикладная математика и механика», 1942, № 6, с. 449—86; Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка, «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 6, с. 3—96; Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя, «Ж. прикладной механики и технич. физики», 1960, № 3, с. 111—18; О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье—Стокса, там же, 1968, т. 8, № 2, с. 393—402 (соавтор Н. А. Меллер).

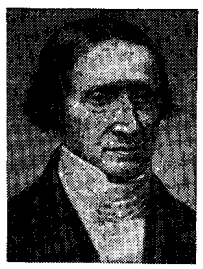
● «Прикладная математика и механика», 1971, т. 35, в. 1; «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 2; «Вестник АН СССР», 1981, № 4; Анатолий Алексеевич Дородницын, М., 1974 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР).

ДУБ Джозеф Лео (Doob Joseph Leo) (р. 27.10.1910, Цинциннати) — американский математик, чл. Национальной АН США (1957), Американской академии искусств и наук в Бостоне, Парижской АН (1975). Окончил Гар-

Дж. Л. Дуб.

Дж. Дуглас.

Ж. А. Э. Дьёдонне.


Ж. М. К. Дюамель.

Ф. П. Ш. Дюпен.

А. Дюрер. Автопортрет.

вардский ун-т (1930), с 1935 проф. Иллинойского ун-та. Основные труды по теории вероятностей и теории случайных процессов.

■ Вероятностные процессы, М., 1956.

ДУ́ГЛАС Джессе (Douglas Jesse) (3.7.1897, Нью-Йорк,— 7.10.1965) — американский математик. Работал в Нью-Йорке и Массачусетском технологич. ин-те. Основные труды по вариационному исчислению (обобщённая задача Плато). Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1936).

ДЬЁДОННЕ́ Жан Александр Эжен (Dieudonné Jean Alexandre Eugène) (р. 1.7.1906, Лилль) — французский математик, чл. Парижской АН (1968). Окончил Высшую нормальную школу в Париже (1927). Работал во многих ун-тах Франции и США. Один из основателей группы Бурбаки. Основные труды по математич. анализу, топологии, функциональному анализу, спектральной теории операторов, алгебраич. геометрии.

■ Основы современного анализа, М., 1964; Линейная алгебра и элементарная геометрия, М., 1972; Геометрия классических групп, М., 1974.

ДЮАМЕ́ЛЬ Жан Мари Констан (Duhamel Jean Marie Constant) (5.2.1797, Сен-Мало,— 29.4.1872, Париж) — французский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1859), чл. Парижской АН (1840), в 1830—69 проф. Политехнич. школы в Париже. Автор учебников по математич. анализу и механике. Основные труды по математич. анализу и геометрии.

ДЮБУА́-РЕЙМО́Н Пауль Давид Густав (Du Bois-Reymond Paul David Gustav) (2.12.1831, Берлин,— 7.4.1889, Фрайбург) — немецкий математик. Окончил Берлинский ун-т (1859). Работал в Гейдельберге, Фрайбурге, Тюбингене, Берлине. Основные труды по математич. анализу, теории функций, вариационному исчислению, дифференциальным уравнениям с частными производными, математич. физике.

ДЮПЕ́Н Франсуа Пьер Шарль (Dupin François Pierre Charles) (6.10.1784, Варзи, Ниверне,— 18.1.1873, Париж) — французский математик, экономист и политич. деятель, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1826), чл. Парижской АН (1818). По образованию был морским инженером. Математич. труды по дифференциальной геометрии; им введена (1813) кривая, позволяющая наглядно представить распределение кривизны поверхности в различных нормальных её сечениях (индикатриса Дюпена). Как экономист Д. выступал сторонником протекционизма.

■ Développement de géométrie..., P., 1813.

● Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, пер. с нем., 3 изд., М., 1978.

ДЮ́РЕР Альбрехт (Dürer Albrecht) (21.5.1471, Нюрнберг,— 6.4.1528, там же) — немецкий художник, теоретик искусства, математик. Занимался геометрич. построениями; заложил основы ортогонального проектирования; вывел математич. правила перспективных построений; дал построение нек-рых эпициклоид. Составлял магич. квадраты.

■ Дневники, письма, трактаты, т. 1—2, Л.—М., 1957.

● [Гершензон-Чегодаева Н.], Альбрехт Дюрер, М., 1964; Матвиевская Г. П., Альбрехт Дюрер — ученый, М., 1987.

Е

ЕВБУЛИ́Д из Милета (Εὔβουλίδης) (4 в. до н. э.) — древнегреческий философ. Автор ряда антиномий (напр., парадокс «Куча», парадокс лжеца).

ЕВДЕ́М Родосский (Εὔδημος) (4 в. до н. э.) — древнегреческий историк математики. Согласно свидетельствам других авторов, написал «Историю геометрии и астрономии».

ЕВДО́КС Книдский (Εὔδοξος) (ок. 408 — ок. 355 до н. э.) — древнегреческий математик и астроном. Путешествовал по Греции и Египту, затем поселился на родине в г. Книд; основал школу математиков и астрономов. Е. первый дал общую теорию пропорций (изложена в V кн. «Начал» Евклида); по свидетельству Архимеда, Е. принадлежит приём доказательства методом исчерпывания. В астрономии сделал одну из первых попыток построения теории движения планет. Сочинения Е. до нас не дошли.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

ЕВКЛИ́Д (Εὐκλείδης) — древнегреческий математик. Автор первого из дошедших до нас теоретич. трактатов по математике. Биографич. сведения об Е. крайне скудны. Достоверным можно считать лишь то, что его научная деятельность протекала в Александрии в 3 в. до н. э.

Е.— первый математик александрийской школы. Его главная работа «Начала» (в латинизированной форме — «Элементы») содержит изложение планиметрии, стереометрии и ряда вопросов теории чисел; в ней он подвёл итог предшествующему развитию греческой математики и создал фундамент дальнейшего развития математики. Из др. сочинений по математике надо отметить «О делении фигур», сохранившееся в арабском переводе, 4 кн. «Конические сечения», материал к-рых вошёл в произведение того же названия Аполлония Пергского, а также «Поризмы», представление о к-рых можно получить из «Математического собрания» Паппа Александрийского. Е.— автор работ по астрономии, оптике, музыке и др. Дошедшие до нас произведения Е. собраны в издании «Euclidis Opera omnia» (ed. J. L. Heiberg et H. Menge, v. 1—8, Lipsiae, 1883—1916), дающем их греческие подлинники, латинские переводы и комментарии позднейших авторов.

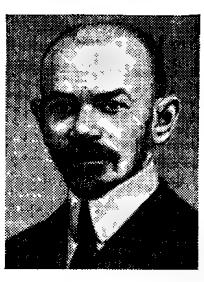
■ Начала Евклида, кн. 1—6, 7—10, 11—15, пер. с греч. и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, т. 1—3, М.—Л., 1948—50.

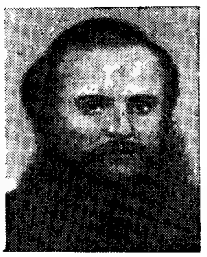
● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

ЕГО́РОВ Дмитрий Фёдорович [10(22). 12.1869, Москва,— 10.9.1931, Казань] — советский математик, чл.-корр. (1924) и почётный чл. (1929) АН СССР. Президент Московского математич. общества (1922—31). Окончил Московский ун-т (1891), с 1903 проф. там же. Основные труды по дифференциальной геометрии, теории интегральных уравнений, вариационному исчислению и теории функций действительного переменного. Теорема Егорова (1911) о последовательности измеримых функций, почти

Евклид.

Д. Ф. Егоров.





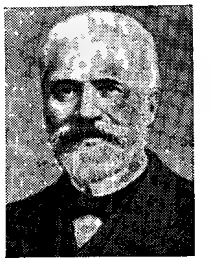
В. П. Ермаков.

А. П. Ершов.

Ю. Л. Ершов.

Н. В. Ефимов.

И. И. Жегалкин.



М. Э. К. Жордан.

всюду сходящихся на данном отрезке, послужила исходной точкой работ по теории функций действительного переменного.

■ Работы по дифференциальной геометрии, М., 1970.

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

ЕРМАКО́В Василий Петрович [27.2 (11.3).1845, с. Терюха, ныне Гомельской обл. БССР,— 16.3.1922, Киев] — русский математик, чл.-корр. Петербургской АН (1884). Окончил Киевский ун-т (1868), с 1877 проф. там же. Открыл (1870) весьма чувствительный признак сходимости рядов. Уделял много времени педагогич. деятельности, в 1884—86 издавал «Журнал элементарной математики».

● Добровольский В. А., Василий Петрович Ермаков, М., 1981.

ЕРШО́В Андрей Петрович (р. 19.4. 1931, Москва) — советский математик, акад. (1984; чл.-корр. 1970) АН СССР. Окончил Московский ун-т (1954). С 1960 работает в Сибирском отделении АН СССР, с 1969 проф. Новосибирского ун-та, с 1987 председатель Научного совета по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР. Главный редактор журнала «Микропроцессорные средства и системы» (с 1984). Основные труды по информатике: теоретич. и системному программированию, языкам программирования, теории схем программ, смешанным вычислениям. Чл. Американской ассоциации по вычислительной технике (1965), почётный чл. Британского общества по вычислительной технике (1974). Премия имени А. Н. Крылова АН СССР (1984), премия Совета Министров СССР (1985). Награждён 2 орденами Трудового Красного Знамени (1967, 1975), орденом «Знак Почёта» (1981).

■ Введение в теоретическое программирование, М., 1977; АЛЬФА — система автоматизации программирования, Новосиб., 1967 (соавторы Г. И. Бабецкий, М. М. Бежанова, Ю. М. Волошин и др.); Программирующая программа для быстродействующей электронной счетной машины, М., 1958; Человек и машина, М., 1985; Основы информатики и вычислительной техники, ч. 1—2, М., 1985—86 (соавторы В. М. Монахов и др.).

● Андрей Петрович Ершов (Библиографический указатель литературы), Новосиб., 1981 (ротапринт).

ЕРШО́В Юрий Леонидович (р. 1.5. 1940, Новосибирск) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1970). Чл. КПСС с 1980. Окончил Новосибирский ун-т (1963), с 1967 проф., с 1985 ректор там же. Основные труды по теории алгоритмов, теории моделей, теории иерархий, теории нумераций, теории чисел. Чл. Международной ассоциации по символич. логике (1968). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1975), орденом «Знак Почёта» (1981).

■ Теория нумераций, М., 1977; Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., 1980.

ЕФИ́МОВ Николай Владимирович [18(31).5.1910, Оренбург,— 14.8.1982, Москва] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1979). Окончил Северо-Кавказский (ныне Ростовский) ун-т (1931), в 1934—41 работал в Воронежском ун-те, с 1946 проф. Московского ун-та (в 1962—69 декан механико-математич. ф-та), чл. редколлегии «Математической энциклопедии». Основные труды по геометрии: теории деформаций поверхностей (открыл явление локальной жёсткости и неизгибаемости поверхностей) и теории поверхностей отрицательной кривизны (доказал теорему о том, что не существует полной поверхности с отделённой от нуля отрицательной кривизной). Е. разработаны геометрич. и аналитич. методы изучения различных классов поверхностей и отображений, связанных с нелинейными уравнениями с частными производными. Ленинская премия (1966), Международная премия имени Н. И. Лобачевского АН СССР (1951). Награждён 2 орденами. Трудового Красного Знамени (1953, 1971).

■ Краткий курс аналитической геометрии, 12 изд., М., 1975 (1 изд., М., 1950); Высшая геометрия, 6 изд., М., 1978 (1 изд., М., 1945); Квадратичные формы и матрицы, 6 изд., М., 1975 (1 изд., М., 1962); Линейная алгебра и многомерная геометрия, 2 изд., М., 1974 (соавтор Э. Р. Розендорн); Качественные вопросы деформации поверхностей, «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 2; Качественные вопросы теории деформаций поверхностей «в малом», М.—Л., 1949; Введение в теорию внешних форм, М., 1977.

● «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 1; 1983, т. 38, в. 5.

Ж

ЖЕГА́ЛКИН Иван Иванович [22.7 (3.8).1869, Мценск, ныне Орловской обл.,— 28.3.1947, Москва] — советский математик, засл. деятель науки РСФСР (1945). Окончил Московский ун-т (1893), в 1902—11 и с 1917 работал там же. Магистерская диссертация Ж. «Трансфинитные числа» (М., 1907) была первой русской монографией по теории множеств. В математич. логике Ж. принадлежат построение (1927) алгебры логики как арифметики вычетов по модулю 2 и ряд работ, посвящённых нек-рым важным случаям, допускающим алгоритмич. решение т. н. проблемы разрешимости. Награждён орденом Трудового Красного Знамени.

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

ЖЕРГО́НН Жозеф Дьез (Gergonne Joseph Diez) (19.6.1771, Нанси,— 4.5. 1859, Монпелье) — французский астроном и математик. Основные труды по алгебре, аналитич. и проективной геометрии. Ввёл термин «поляра» (1812), предложил классификацию кривых (1827).

● Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966.

ЖИРА́Р Альбер (Girard Albert) (1595, Сен-Михил,— 8.12.1632, Гаага) — голландский математик. Одним из первых высказал (1629) основную теорему алгебры, учитывая наряду с положительными корнями отрицательные и мнимые. Ж. привёл в систему известные до него теоремы плоской и сферич. тригонометрии.

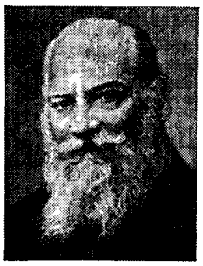
● Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966.

ЖОРДА́Н Мари Энмон Камиль (Jordan Marie Ennemond Camille) (5.1. 1838, Лион,— 21.1.1922, Париж) — французский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1895), чл. Парижской АН (1881). Издатель «Journal de mathématiques pures et appliquées» (1885—1921). Основные труды по алгебре, теории функций, а также топологии и кристаллографии. С именем Ж. связаны: теорема Жордана — Гёльдера о композиционных рядах групп, нормальная (жорданова) форма матриц, кривая Жордана; им введено понятие функции с ограниченным изменением. Ж. принадлежат первый систематич. курс теории групп и теории Галуа (1870) и трёхтомный курс анализа (1882—87).

■ Oeuvres, t. 1—4, P., 1961—64.

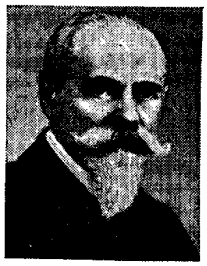
● Стройк Д. Я., Краткий очерк истории математики, пер. с нем., 3 изд., М., 1978; «Enseignement mathématique, Sér. 2», 1957, t. 3, p. 81—106.

ЖУКО́ВСКИЙ Николай Егорович [5(17).1.1847, с. Орехово, ныне Вла-



Н. Е. Жуковский.

Ю. И. Журавлёв.



С. Заремба.

О. Зариский.

И. А. Зегнер.

Д. Н. Зейлигер.

димирской обл.,— 17.3.1921, Москва] — русский учёный в области механики, основоположник современной гидроаэродинамики, чл.-корр. Петербургской АН (1894). Окончил Московский ун-т (1868). С 1872 преподавал в Московском высшем технич. училище и одновременно с 1885 в Московском ун-те. Основные труды по теории авиации, механике твёрдого тела, гидродинамике. В области математики Ж. принадлежат исследования по уравнениям с частными производными, приближённому интегрированию дифференциальных уравнений; он первый стал широко применять методы теории функций комплексного переменного в гидро- и аэродинамике, где известна функция Жуковского (1911), важная для расчёта профилей крыла самолёта.

● Космодемьянский А. А., Н. Е. Жуковский, М., 1969.

ЖУРАВЛЁВ Юрий Иванович (р. 14.1.1935, Воронеж) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1984). Чл. КПСС с 1963. Окончил Московский ун-т (1957). С 1969 работает в Вычислительном центре АН СССР, с 1970 проф. Московского физико-технич. ин-та. Основные труды по математич. кибернетике, алгебре и математич. логике. Ленинская премия (1966), премия Совета Министров СССР (1986). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1967) и орденом Дружбы народов (1986).

■ Теоретико-множественные методы в алгебре логики, в сб.: Проблемы кибернетики, в. 8, М., 1962; Локальные алгоритмы вычисления информации, «Кибернетика», 1965—1966, № 1—2; Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов, «Кибернетика», 1977, № 4; 1977, № 6; 1978, № 2; Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации, в сб.: Проблемы кибернетики, в. 33, М., 1978.

З

ЗАРЕ́МБА Станислав (Zaremba Stanisław) [3(15).10.1863, Романовка, ныне УССР,— 23.10.1942] — польский математик, иностранный чл.-корр. АН СССР (1924), чл. Польской академии знаний в Кракове (1903), с 1900 проф. Краковского ун-та. Основные труды по дифференциальным уравнениям с частными производными 2-го порядка и математич. физике.

ЗАРИ́ЙСКИЙ, Зариски Оскар (Zariski Oscar) (24.4.1899, Кобрин, ныне БССР,— 4.7.1986) — американский математик, чл. Американской академии искусств и наук в Бостоне. Основные труды по алгебраич. геометрии и коммутативной алгебре.

■ Коммутативная алгебра, т. 1—2, М., 1963 (соавтор П. Самюэль).

ЗЕ́ГНЕР Иоганн Андреас фон (Сегнер Янош Андраш) (Segner Johann Andreas von) (9.10.1704, Пресбург, ныне Братислава,— 5.10.1777, Галле) — математик, естествоиспытатель и медик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1754). По национальности венгр. Был врачом в Пресбурге и Дебрецене, с 1733 в ун-тах Германии. Работал над вопросами гидромеханики (сегнерово колесо). Автор 3-томного курса анализа («Elementa analyseos finitorum», Halle, 1758; «Elementorum analyseos infinitorum», p. 1—2, Halle, 1761, 1763). Ввёл термины «правильная дробь» и «неправильная дробь» (1747).

ЗЕ́ЙДЕЛЬ, Зайдель Филипп Людвиг (Seidel Philipp Ludwig) (24.10.1821, Цвайбрюккен,— 13.8.1896, Мюнхен) — немецкий астроном и математик, чл. Баварской АН (1851), чл.-корр. Гёттингенской АН (1854). Основные математич. труды по теории рядов. Одновременно с Дж. Стоксом и независимо от него ввёл (1848) понятие равномерной сходимости последовательности и ряда; предложил (1874) итерационный метод решения системы линейных алгебраич. уравнений (метод Зейделя).

ЗЕ́ЙЛИГЕР Дмитрий Николаевич [12(24).5.1864 — 25.7.1936] — советский математик и механик, засл. деятель науки РСФСР (1927). Окончил Новороссийский (Одесса) ун-т (1887), работал там же, затем в Казани (с 1895 проф.), Петрограде, Донецке. Основные труды по линейчатой геометрии и её приложениям к механике.

● Слугинов С. П., Д. Н. Зейлигер, Пермь, 1927.

ЗЕНО́Н Элейский (Ζήνων) (ок. 490—430 до н. э.) — древнегреческий философ. Автор более 40 апорий (парадоксов), направленных против множественности, бесконечности и движения, а также наивного представления о континууме (напр., апория «Ахиллес и черепаха»).

● История математики, т. 1, М., 1970.

ЗЕРНО́В Николай Ефимович [7(19).11.1804, Москва,— 23.11(5.12).1862] — русский математик. Окончил Московский ун-т (1822), с 1835 проф. там же. Основные труды по теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории вероятностей.

● История отечественной математики, т. 2, К., 1967.

ЗЙГЕЛЬ Карл Людвиг (Siegel Karl Ludwig) (р. 31.12.1896, Берлин) — немецкий математик. В 1922—58 проф. математики во Франкфурте-на-Майне, Гёттингене и Принстоне (США). Основные труды по аналитич. теории чисел (трансцендентные числа, квадратичные формы) и теории функций; работал также над проблемой трёх тел в небесной механике.

■ Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, М., 1954; Лекции по небесной механике, М., 1959.

ЗЙГМУНД Антони (Zygmund Antoni) (р. 26.12.1900, Варшава) — американский математик, чл. Польской АН (1961). Окончил Варшавский ун-т (1928). В 1940 эмигрировал в США, где преподавал в ряде учебных заведений. Основные труды по классич. анализу, теории функций действительного и комплексного переменного.

■ Тригонометрические ряды, т. 1—2, М., 1965.

ЗОЛОТАРЁВ Егор Иванович [31.3(12.4).1847, Петербург,— 7(19).7.1878, там же] — русский математик, акад. Петербургской АН (1878; адъюнкт с 1876). Окончил Петербургский ун-т (1867), с 1876 проф. там же. С 1870 совместно с А. Н. Коркиным З. занимался исследованием вопроса о минимумах положительных квадратичных форм; ими, в частности, дано исчерпывающее решение проблемы для числа переменных $n=4$ и 5. Одновременно с Р. Дедекиндом З. разрабатывал свою теорию делимости целых алгебраич. чисел, к-рую изложил в докторской диссертации «Теория целых комплекс-

Н. Е. Зернов.

А. Зигмунд.

Е. И. Золотарёв.

Е. В. Золотов.

А. Зоммерфельд.

В. И. Зубов.

Л. Г. Илиев.

ных чисел с приложением к интегральному исчислению» (СПБ, 1874). З. распространил свою теорию на случай любого алгебраич. поля. С помощью своей теории З. эффективно решил поставленный П. Л. Чебышевым вопрос о том, существуют ли значения параметра A, при к-рых интеграл $\int \frac{(x-A)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ выражается в логарифмах, где $R(x)$ — многочлен 4-й степени с действительными коэффициентами. З. также дал решение нескольких частных проблем из теории наилучшего приближения функций.

■ Полное собрание сочинений, в. 1—2, Л., 1931—32.

● Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, М.—Л., 1947; Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968; Ожигова Е. П., Егор Иванович Золотарев, М.—Л., 1966.

ЗОЛОТОВ Евгений Васильевич (р. 29.4.1922, Тула) — советский инженер и математик, акад. (1987; чл.-корр. 1970) АН СССР. Чл. КПСС с 1955. Окончил Артиллерийскую академию им. Ф. Э. Дзержинского (1945), директор Вычислительного центра Дальневосточного отделения АН СССР. Основные труды по математич. моделированию больших систем на ЭВМ, экспериментальным, аналитическим и машинным методам оценки эффективности систем, прикладным вопросам теории случайных процессов. Награждён орденом Дружбы народов (1983).

ЗОММЕРФЕЛЬД Арнольд (Sommerfeld Arnold) (5.12.1868, Кёнигсберг,— 26.4.1951, Мюнхен) — немецкий физик и математик, один из создателей квантовой теории, иностранный чл.-корр. (1925) и иностранный почётный чл. (1929) АН СССР, с 1906 проф. Мюнхенского ун-та. Создал строгую математич. теорию дифракции (1895), получил интегральное представление бесселевых функций (интеграл Зоммерфельда).

■ Дифференциальные уравнения в частных производных физики, М., 1950.

ЗУБОВ Владимир Иванович (р. 14.4.1930, Кашира Московской обл.) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1981). Чл. КПСС с 1952. Окончил Ленинградский ун-т (1953), с 1963 проф. там же. Основные труды по дифференциальным уравнениям динамики управляемых систем. Государственная премия СССР (1968).

■ Методы А. М. Ляпунова и их применение, Л., 1957; Колебания в нелинейных и управляемых системах, Л., 1962; Лекции по теории управления, М., 1975.

И, Й

ИБН АЛЬ-ХАЙСА́М, Альгазен, Абу Али аль-Хасан ибн аль-Хасан ибн аль-Хайсам (965, Басра,— ок. 1039, Каир) — арабский учёный, работал в Каире. Посвятил анализу «Начал» Евклида два трактата, где рассмотрены определения, аксиомы и постулаты, теория параллельных. Ему принадлежат новые кубатуры, исследование изопериметрич. задач, работы в области физики (наиболее полное изложение оптики того времени), медицины (данные о строении глаза, приближающиеся к современным) и философии.

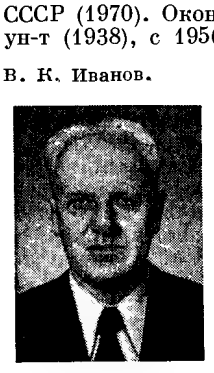
● Историко-математические исследования, в. 11, М., 1958, с. 733—82; в. 17, М., 1966, с. 399—448; Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961; Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А., Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды, кн. 2, М., 1983, с. 240—55.

ИБН КУ́РРА, Ибн Корра, Абуль-Хасан Сабит ибн Корра ас-Саби аль-Харрани (836, Харран,— 901) — багдадский математик. Перевёл «Начала» Евклида, написал к ним пояснения, в частности к V книге, и специальный комментарий к теории параллельных. Познакомил арабских учёных с соч. Архимеда о правильном семиугольнике.

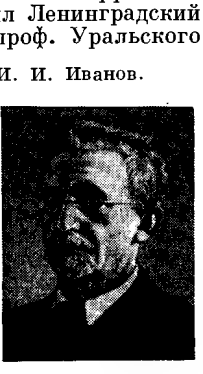
● История математики, т. 1, М., 1970; Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А., Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды, кн. 2, М., 1983, с. 85—103.

ИВАНО́В Валентин Константинович [р. 18.9(1.10).1908, Петербург] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1970). Окончил Ленинградский ун-т (1938), с 1956 проф. Уральского

В. К. Иванов.



И. И. Иванов.



(Свердловск) ун-та. Основные труды по теории обобщённых функций, теории приближений, обратной задаче теории потенциала с приложениями к геофизике, теории гармонич. функций и целых функций многих комплексных переменных, некорректным задачам. Ленинская премия (1966). Награждён орденом «Знак Почёта» (1975).

■ Обратная задача потенциала для тела, близкого к данному, «Изв. АН СССР. Сер. математическая», 1956, т. 20, № 6; О линейных некорректных задачах, «Докл. АН СССР», 1962, т. 145, № 2; Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала, там же, 1955, т. 105, № 3; Ассоциативная алгебра простейших обобщенных функций, «Сиб. матем. ж.», 1979, т. 20, № 4.

● «Успехи матем. наук», 1969, т. 24, в. 2; 1979, т. 34, в. 2.

ИВАНО́В Иван Иванович [30.7(11.8).1862, Петербург,— 17.12.1939, Ленинград] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1924). Окончил Петербургский ун-т (1886), с 1902 проф. Петербургского политехнич. ин-та. Установил (1891), что различные по форме теории алгебраич. чисел Е. И. Золотарёва и Р. Дедекинда эквивалентны между собой. И. получил ряд результатов относительно распределения простых чисел (1901).

● «Изв. АН СССР. Сер. математическая», 1940, т. 4, № 4—5.

ИВАШИНЦО́В, Ивашинцев Николай Алексеевич [19.4(1.5).1819 — 13(25).1.1871, Петербург] — гидрограф и математик, чл.-корр. Петербургской АН (1866), контр-адмирал. Основные труды по гидрографии.

ИЕ́НСЕН, Йенсен Иоганн Людвиг (Jensen Johann Ludwig) (8.5.1859, Накскоп,— 5.3.1925, Копенгаген) — датский математик. Основные труды по теории функций, где известно неравенство Иенсена для выпуклых функций (1906).

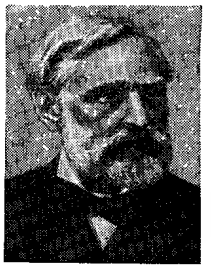
ИЛИ́ЕВ Любомир Георгиев (р. 7.4.1913, Тырново) — болгарский математик, иностранный чл. АН СССР (1976), акад. Болгарской АН (1967). С 1952 проф. Софийского ун-та. Основные труды по теории аналитич. функций и теории приближения. Димитровские премии (1951, 1969).

■ Analytische Nichtfortsetzbarkeit und Überkonvergenz einiger Klassen von Potenzreihen, B., 1960.

ИЛЬИ́Н В. А.— см. стр. 771.

ИМАНАЛИ́ЕВ Мурзабек Иманалиевич (р. 13.9.1931, с. Каинда Киргизской ССР) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1981), акад. АН Киргизской ССР (1979; чл.-корр. 1969). Чл. КПСС с 1961. Окончил Киргизский ун-т (1953), с 1966 работает в АН Киргизской ССР (в 1979—86 президент). Основные труды по дифференци-

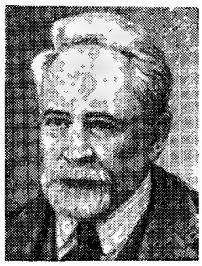
М. И. Иманалиев.



В. Г. Имшенецкий.

А. Ю. Ишлинский.

Б. Кавальери.



В. Ф. Каган.

альным и интегральным уравнениям. Депутат Верховного Совета СССР 10—11-го созывов. Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1981).

■ Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение, Фрунзе, 1977.

● «Дифференциальные уравнения», 1981, т. 17, № 9.

ИМШЕНЕ́ЦКИЙ Василий Григорьевич [4(16).1.1832, Ижевский Завод,— 24.5(5.6).1892, Москва] — русский математик и механик, акад. Петербургской АН (1881). Один из основателей Харьковского (1879) и Петербургского (1890) математич. обществ. Основные труды по теории дифференциальных уравнений с частными производными.

● Андреев К. А. [и др.], Жизнь и научная деятельность Василия Григорьевича Имшенецкого, М., 1896; Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

ИОСИ́ДА Косаку (Yoshida Kosaku) (р. 7.2.1909) — японский математик, иностранный чл. АН СССР (1982), чл. Японской АН (1971), проф. ун-та в Токио. Основные труды по функциональному анализу, дифференциальным уравнениям и теории вероятностей.

■ Функциональный анализ, М., 1967.

ИШЛИ́НСКИЙ Александр Юльевич [р. 24.7(6.8).1913, Москва] — советский учёный в области механики, акад. АН СССР (1960) и АН УССР (1948), Герой Социалистич. Труда (1961). Чл. КПСС с 1940. Окончил Московский ун-т (1935), с 1944 проф. там же. Директор Ин-та математики АН УССР (1948—55), с 1964 директор Ин-та проблем механики АН СССР. Основные труды по общей механике, теории упругости, пластичности, теории колебаний и гироскопов. Исследовал закономерности трения качения по деформируемому основанию (1938); разработал оригинальную теорию динамич. устойчивости (1949); развил общую теорию пластичности с линейным упрочнением (1954); предложил новую схему деформирования грунта при взрыве (1954), исследовал вопросы амортизации приборов при резком торможении (1957), разработал теорию пространственного гирокомпаса и др. гироскопич. приборов (1952—63), провёл важные исследования по общей теории инерциальной навигации и автономного управления (1957—68). И.— почётный чл. Польского общества теоретич. и прикладной механики (1969), Чехословацкого научно-технич. общества (1977), иностранный чл. Польской АН (1977), Чехословацкой АН (1977), Председатель Всесоюзного совета научно-технич. обществ (1970). Депутат Верховного Совета СССР 9—12-го созывов. Ленинская премия (1960), Государственная премия СССР (1981). Награждён 3 орденами Ленина (1956, 1961, 1973), орденом Октябрьской Революции (1975), орденом Красного Знамени (1957), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1969, 1981), орденом «Знак Почёта» (1954), болгарским орденом Кирилла и Мефодия I степени (1969).

■ Механика гироскопических систем, М., 1963; Инерциальное управление баллистическими ракетами, М., 1968; Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация, М., 1981; Механика относительного движения и силы инерции, М., 1981.

● А. Ю. Ишлинский, М., 1984 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР).

ЙО́РДАН, Иордан Эрнст Паскуаль (Jordan Ernst Pascual) (18.10.1902, Ганновер,— 31.7.1980) — немецкий физик, проф. Берлинского (1944—51) и Гамбургского (с 1951) ун-тов. Основные труды по квантовой механике; развивал методы матричной механики; ввёл (1933) и исследовал т. н. йордановы алгебры.

К

КАВАЛЬЕ́РИ Бонавентура (Cavalieri Bonaventura) (1598, Милан,— 3.11.1647, Болонья) — итальянский математик. Монах ордена иеронимитов. С 1629 по рекомендации Г. Галилея занимал кафедру математики в Болонском ун-те. В труде «Геометрия» (1635) К. развил новый метод определения площадей и объёмов, т. н. метод неделимых. Неделимыми К. называл параллельные между собой хорды плоской фигуры и параллельные плоские сечения тела. Ввёл понятие «суммы всех» неделимых, проведённых внутри контура фигуры. Отношение двух «сумм всех» неделимых явилось зародышевой формой отношения двух определённых интегралов. Труды К. сыграли большую роль в формировании исчисления бесконечно малых.

■ Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного, М.—Л., 1940.

● История математики, т. 2, М., 1970.

КА́ГАН Вениамин Фёдорович [25.2 (9.3).1869, Шяуляй Литовской ССР,— 8.5.1953, Москва] — советский математик. Окончил Киевский ун-т (1892), с 1923 проф. Московского ун-та. Заслуженный деятель науки РСФСР (1929). Начиная с 90-х гг. 19 в. К. популяризировал наследие Н. И. Лобачевского. В «Основаниях геометрии» (т. 1—2, Од., 1905—07) дал аксиоматику евклидова пространства с подробным анализом непротиворечивости и независимости аксиом. Создал теорию т. н. субпроективных пространств, представляющих собой широкое обобщение пространства Лобачевского. Государственная премия СССР (1943).

■ Основы теории поверхностей в тензорном изложении, ч. 1—2, М.—Л., 1947—48; Основания геометрии, ч. 1, М.—Л., 1949; ч. 2, М., 1956; Субпроективные пространства, М., 1961; Очерки по геометрии, М., 1963; Лобачевский, 2 изд., М.—Л., 1948.

● Лопшиц А. М., Рашевский П. К., Вениамин Федорович Каган, М., 1969.

КАЗИ-ЗАДЕ ар-Руми, Салах ад-Дин Муса ибн Мухаммед Кази-заде ар-Руми (ок. 1360, Брусса, Турция,— ок. 1437, Самарканд) — математик и астроном. Работал в Самарканде в обсерватории Улугбека. Один из составителей астрономич. таблиц «Зидж Улугбек» и автор «Трактата об определении синуса одного градуса», в к-ром содержатся вывод и решение уравнения для хорды 2° (т. е. для удвоенного синуса 1°).

● Историко-математические исследования, в. 13, М., 1960, с. 533—56; Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А., Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды, кн. 2, М., 1983, с. 487—89.

КАЛАСА́ДИ, аль-Каласади Абу-ль-Хасан ибн Мухаммед (1412 — 1486) — мавританский математик. Работал в Гренаде, затем в Тунисе. В трактате «Снятие покрывала с науки губар» нет существенно новых результатов, но его алгебраич. символика столь развита, что невозможно считать её созданием только самого К.

● История математики, т. 1, М., 1970; Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А., Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды, кн. 2, М., 1983, с. 510—12.

КАМПА́НО, Кампанус Джованни (Campano Giovanni) (13 в., Новара, близ Милана) — итальянский математик. Сделал (ок. 1250—60) новый перевод на латинский язык «Начал» Евклида в 15 книгах, дополнив его ценными комментариями.

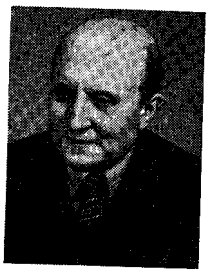
● Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961.

КАНТЕ́ЛЛИ Франческо Паоло (Cantelli Francesco Paolo) (20.12.1875, Палермо,— ?) — итальянский математик, проф. Высшей школы экономики и торговли в Риме. Основные труды по

Г. Кантор.

М. Б. Кантор.

Л. В. Канторович.



К. Каратеодори.

математич. статистике, где известна теорема Гливенко — Кантелли о сходимости эмпирич. распределения к заданному теоретическому.

КАНТОР Георг (Cantor Georg) [19.2 (3.3).1845, Петербург,— 6.1.1918, Галле] — немецкий математик. В 1867 окончил Берлинский ун-т, в 1879—1913 проф. ун-та в Галле. К. разработал теорию бесконечных множеств и теорию трансфинитных чисел. В 1874 он доказал несчётность множества всех действительных чисел, установив таким образом существование неэквивалентных (т. е. имеющих разные мощности) бесконечных множеств, сформулировал (1878) общее понятие мощности множества. В 1879—84 К. систематически изложил принципы своего учения о бесконечности. Ввёл понятия предельной точки, производного множества; построил пример совершенного множества (канторова множества); развил одну из теорий иррациональных чисел; сформулировал одну из аксиом непрерывности (аксиому Кантора). В 1897 отошёл от научного творчества. Идеи Кантора встретили со стороны современников резкое сопротивление, в частности со стороны Л. Кронекера, но впоследствии оказали большое влияние на развитие математики.

■ Труды по теории множеств, М., 1985.

КАНТОР Мориц Бенедикт (Cantor Moritz Benedikt) (23.8.1829, Мангейм,— 10.4.1920, Гейдельберг) — немецкий историк математики, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1900). Работал в Гейдельбергском ун-те (1853—1913). Труд К. («Лекции по истории математики», т. 1—4) содержит справочный материал по истории математики и охватывает период от древнейших времён до 1799 (4-й том создан коллективом авторов под редакцией К.).

■ Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1—3, Aufl., Bd 1—4, Lpz., 1893—1924.

КАНТОРОВИЧ Леонид Витальевич [6(19).1.1912, Петербург,— 7.4.1986, Москва] — советский математик и экономист, акад. АН СССР (1964; чл.-корр. 1958). Окончил Ленинградский ун-т (1930), в 1932—34 преподаватель и в 1934—60 проф. там же. В 1958—71 в Сибирском отделении АН СССР, в 1971—76 в Ин-те управления народным хозяйством Государственного комитета Совета Министров СССР по науке и технике, с 1976 во Всесоюзном научно-исследовательском ин-те системных исследований Госплана и АН СССР. Первые научные труды К. относились к теории проективных множеств. В функциональном анализе он ввёл и изучил класс полуупорядоченных пространств (K-пространств). Впервые применил функциональный анализ в вычислит. математике. Развил общую теорию приближённых методов, построил эффективные методы решения операторных уравнений (в том числе метод наискорейшего спуска и метод Ньютона для таких уравнений). В 1939—40 положил начало линейному программированию — теории и методам решения экстремальных задач с ограничениями. Установил важное значение возникающих при анализе оптимальных экономич. моделей объективно обусловленных оценок. Эти исследования способствовали созданию теории оптимального планирования и управления народным хозяйством и разработке проблем социалистич. экономики: ценообразования, теории ренты, эффективности капиталовложений.

К.— почётный доктор наук Гренобльского ун-та (1966), почётный доктор права ун-та в Глазго (1966), чл. Эконометрич. общества США (1967), почётный доктор наук Варшавской высшей школы планирования и статистики (1967), чл. Международного эконометрич. общества (1967, с 1973 почётный чл.), почётный чл. Венгерской АН (1967), почётный доктор ун-та в Ницце (1968), почётный чл. Американской академии искусств и наук в Бостоне (1969), почётный доктор наук Хельсинкского (1971), Йельского (1971), Парижского (1975), Кембриджского (1976) и Пенсильванского (1976) ун-тов, чл.-корр. Национальной инженерной академии Мексики (1977), почётный доктор наук Индийского статистич. ин-та в Калькутте (1977), иностранный чл. АН ГДР (1977), иностранный чл.-корр. Югославской академии наук и искусств (1979), почётный доктор наук ун-та имени Мартина Лютера в Галле (1984). Ленинская премия (1965), Государственная премия СССР (1949), Нобелевская премия (1975). Награждён 2 орденами Ленина (1967, 1982), 3 орденами Трудового Красного Знамени (1949, 1953, 1975), орденом Отечественной войны 1-й степени (1985), орденом «Знак Почёта» (1944).

■ Математические методы организации и планирования производства, Л., 1939; Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.— Л., 1950 (соавторы Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер); Расчет рационального раскроя промышленных материалов, Л., 1951 (соавтор В. А. Залгаллер); Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, М., 1959; Приближенные методы высшего анализа, 5 изд., М.—Л., 1962 (соавтор В. И. Крылов); Функциональный анализ, 2 изд., М., 1977 (соавтор Г. П. Акилов).

● «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 4; 1972, т. 27, в. 3; 1982, т. 37, в. 3; «Вестник АН СССР», 1986, № 6.

КАПЕ́ЛЛИ Альфредо (Capelli Alfredo) (5.8.1855, Милан,—28.1.1910, Неаполь)—итальянский математик, чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме (1901), проф. ун-тов в Палермо (с 1881) и Неаполе (с 1886). Основные труды по алгебраич. формам, подстановкам, алгебраич. уравнениям (теорема Кронекера — Капелли), эллиптич. функциям.

КАРА́ДЖИ, Абу Бакр Мухаммед ибн аль-Хасан аль-Караджи (г. рожд. неизв.— ок. 1030) — иранский математик. Его называют также аль-Кархи. В трактате «Аль-Фахри» (ок. 1010) содержатся все известные его предшественникам алгебраич. знания, ряд собственных добавлений, а также решения более 250 алгебраич. задач.

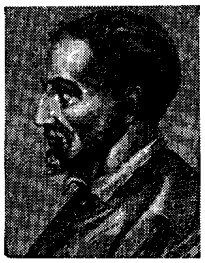
● Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А., Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды, кн.2, М., 1983, с. 219—23.

КАРАТЕОДО́РИ Константин (Carathéodory Constantin) (13.9.1873, Берлин,— 2.2.1950, Мюнхен) — немецкий математик. Окончил Бельгийскую военную академию (1895), математику изучал в Берлине и Гёттингене, проф. ун-та в Мюнхене (1924—39), с 1939 ректор Афинского ун-та. Основные труды по теории конформных отображений, общей теории меры множеств, новому построению теории поля экстремалей (в вариационном исчислении). В 1909 дал логически чёткое аксиоматич. построение основ термодинамики.

■ Gesammelte mathematische Schriften, Bd 1—5, Münch., 1954—57; Funktionentheorie, Bd 1—2, Basel, 1950; Конформное отображение, М.—Л., 1934.

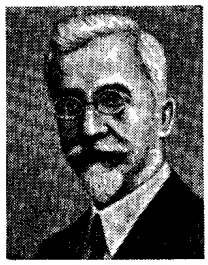
КАРГАПО́ЛОВ Михаил Иванович (9.11.1928, дер. Русакова Курганской обл.,— 20.2.1976, Новосибирск) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1966). Чл. КПСС с 1965. Окончил Уральский (Свердловск) ун-т (1951), с 1964 проф. Новосибирского ун-та. Основные труды, относящиеся к алгебре, посвящены главным образом исследованию свойств бесконечных дискретных групп, в том числе обобщённо разрешимых и упорядочиваемых групп, а также исследованию алгоритмич. проблем. Награждён 2 орденами Трудового Красного Знамени (1967, 1975).

М. И. Каргаполов.


Дж. Кардано.

Л. Н. М. Карно.

А. П. Картан,


Э. Ж. Картан.

Дж. Д. Кассини.

■ Основы теории групп, 3 изд., М., 1982 (соавтор Ю. И. Мерзляков).
● «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 1.

КАРДА́НО Джероламо (Иеронимус) (Cardano Girolamo) (24.9.1501, Павия,— 21.9.1576, Рим) — итальянский математик, философ и врач. С именем К. связывают формулу решения в радикалах неполного кубич. уравнения (ф о р м у л у К а р д а н о). Работы К. сыграли большую роль в развитии алгебры. Одним из первых в Европе он стал допускать отрицательные и мнимые корни уравнений. Занимался вопросами передачи движения, теорией рычагов (карданная передача, карданов подвес). Развивал своеобразную натурфилософию под влиянием Николая Кузанского.

■ Opera omnia, v. 1—10, Lugdini, 1663.
● Г у т е р Р. С., П о л у н о в Ю. Л., Джероламо Кардано, М., 1980.

КА́РЛЕМАН Таге Йиллис Торстен (Carleman Tage Gillis Torsten) (8.7.1892, Виссельтофта,— 11.1.1949, Юрсхольм) — шведский математик, с 1924 проф. Стокгольмского ун-та. Основные труды по теории функций (квазианалитич. классы, приближение функций, тригонометрич. ряды и др.), интегральным уравнениям, спектральной теории.

■ Edition complète des articles, Malmö, 1960.
● «Acta Math.», 1950, Bd 82, p. 1—6.

КА́РЛЕСОН Леннарт Аксель Эдвард (Carleson Lennart Axel Edvard) (р. 18.3.1928, Стокгольм) — шведский математик, иностранный чл. АН СССР (1982), чл. Шведской королевской АН (1957). Окончил Упсальский ун-т (1953), с 1955 проф. там же. Основные труды по теории функций, где он доказал (1966) сходимость почти всюду рядов Фурье для квадратично интегрируемых функций. Президент Международного математич. союза (1978—1983).

■ Избранные проблемы теории исключительных множеств, М., 1971.

КАРНО́ Лазар Никола Маргерит (Carnot Lasare Nicola Marguerite) (13.5.1753, Ноле,— 2.8.1823, Магдебург) — французский математик, государственный и военный деятель, чл. Парижской АН (1796). Чл. Законодательного собрания (1791—92) и Конвента (1792—1795).

Математич. труды К. относятся к анализу и геометрии. К. сделал попытку обосновать правильность результатов исчисления бесконечно малых. Разбор К. различных способов обоснования анализа — метода исчерпывания, неделимых, пределов — и его критика теории аналитич. функций Лагранжа отчасти подготовили реформу анализа в нач. 19 в. К. принадлежат также труды по прикладной механике. Ввёл (1803) термин «комплексное число».

■ Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых, 2 изд., М.—Л., 1936.

КАРТА́Н Анри Поль (Cartan Henri Paul) (р. 8.7.1904, Нанси) — французский математик, чл. Парижской АН (1974). Сын Э. Картана. Окончил Высшую нормальную школу в Париже (1926), проф. Парижского ун-та (1940—69). Основные труды по теории аналитич. функций многих переменных, топологии и гомологич. алгебре.

■ Гомологическая алгебра, М., 1960 (соавтор С. Эйленберг); Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных, М., 1963; Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы, М., 1971.

КАРТА́Н Эли Жозеф (Cartan Élie Joseph) (9.4.1869, Доломьё,— 6.5.1951, Париж) — французский математик, чл. Парижской АН (1931). Окончил Высшую нормальную школу в Париже (1891), с 1912 проф. Парижского ун-та. Основные труды по теории непрерывных групп, теории дифференциальных уравнений и дифференциальной геометрии. В 1894 заложил основы алгебраич. теории групп Ли, в 1913 построил теорию представлений полупростых групп Ли, в дальнейшем связал группы Ли с дифференциальной геометрией и топологией. В 1899—1902 создал т. н. метод внешних форм, к-рый позволил ему разрешить проблему совместности уравнений Пфаффа. В дифференциальной геометрии многомерных пространств им построены обобщённые пространства аффинной, проективной и конформной связности и, кроме того, дан общий метод подвижного репера, к-рый в соединении с методом внешних форм является эффективным средством решения геометрич. проблем. В 1937 К. присуждена Международная премия имени Н. И. Лобачевского.

■ Теория спиноров, М., 1947; Геометрия групп Ли и симметрические пространства, М., 1949; Риманова геометрия в ортогональном реперe, М., 1960; Пространства аффинной, проективной и конформной связности, Каз., 1962; Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения, М., 1962; Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера, М., 1963.
● «Bulletin of the American Mathematical Society», 1952, v. 58, № 2.

КАССИ́НИ Джованни Доменико (Жан Доминик) (Cassini Giovanni Domenico) (8.6.1625, Перинальдо,— 14.9.1712, Париж) — французский астроном, чл. Парижской АН (1669). Открыл вращение Юпитера (1665) и Марса (1666), деление кольца Сатурна на внутреннее и внешнее. Его именем названа плоская алгебраич. кривая 4-го порядка (о в а л К а с с и н и), к-рую К. рассматривал при попытках определить орбиту Земли.

КАТАЛА́Н Эжен Шарль (Catalan Eugène Charles) (30.5.1814, Брюгге,— 14.2.1894, Льеж) — бельгийский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1881), чл. Брюссельской академии наук и искусств (1865), с 1865 проф. Льежского ун-та. Основные труды по геометрии, теории чисел, алгебре.

КАТА́ЛЬДИ Пьетро Антонио (Cataldi Pietro Antonio) (15.4.1552, Болонья,— 11.2.1626, там же) — итальянский математик, проф. математики в ун-тах Флоренции и Болоньи. Автор первого сочинения (1603), полностью посвящённого вопросу о параллельных. Указал (1613) метод извлечения квадратных корней с помощью непрерывных дробей.

КА́УСЛЕР Кристоф Фридрих (Kaussler Christoph Friedrich) (8.5.1760, Тюбинген,— 12.2.1825, Штутгарт) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. (1797) и иностранный почётный чл. (1798) Петербургской АН. Основные труды по теории чисел.

КАЦ Марк (Kac Mark) (р. 3.8.1914, Кременец, ныне Львовской обл.) — американский математик, чл. Национальной АН США (1965), Американской академии искусств и наук в Бостоне (1959). Окончил Львовский ун-т (1930). В 1938 переехал в США. С 1939 проф. Корнеллского ун-та, с 1961 проф. и чл. Рокфеллеровского ин-та. Основные труды по теории вероятностей и её приложениям в физике.

■ Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, М., 1963; Вероятность и смежные вопросы в физике, М., 1965; Несколько вероятностных задач физики и математики, М., 1967; Математика и логика. Ретроспектива и перспектива, М., 1971 (соавтор С. Улам).

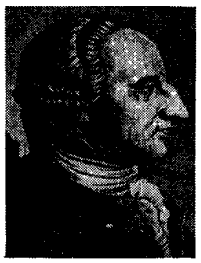
КАШИ́, а л ь-К а ш и, Д ж е м ш и д и б н М а с у д (г. рожд. неизв., Ка-

М. Кац.

Л. В. Келдыш.

М. В. Келдыш.

И. Кеплер.



А. Г. Кестнер.

шан,— ум. ок. 1436—37) — математик и астроном, работавший ок. 1420—30 в Самаркандской обсерватории Улугбека. В работе «Ключ арифметики» (1427) изложил приёмы извлечения корней, основанные на применении формулы бинома для натурального показателя; пропагандировал употребление десятичных дробей и описал правила действий над ними. Предложил способ приближённого решения уравнений 3-й степени. В «Трактате об окружности» (ок. 1427) вычислил значение числа π с 17 верными десятичными знаками.

■ Ключ арифметики. Трактат об окружности, М., 1956.

● Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А., Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды, кн. 2, М., 1983, с. 480—86.

КЕ́ЛДЫШ Людмила Всеволодовна [27.2(12.3). 1904, Оренбург, — 16.2. 1976, Москва] — советский математик, доктор физико-математических наук (1941), профессор (1964). Сестра М. В. Келдыша, мать С. П. Новикова. Окончила Московский ун-т (1925), в 1930—34 преподавала в Московском авиационном ин-те, с 1934 работала в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные работы по теории множеств и топологии. Премия Президиума АН СССР (1958). Награждена орденом Трудового Красного Знамени (1953) и «Медалью материнства» 2-й степени (1945). Являлась членом Комитета советских женщин (1958).

■ Структура *B*-множеств, «Труды Математич. ин-та АН СССР», 1945, т. 17; Топологические вложения в евклидово пространство, там же, 1966, т. 81; «Успехи матем. наук», 1974, т. 29, в. 5, с. 183—96.

КЕ́ЛДЫШ Мстислав Всеволодович [28.1(10.2).1911, Рига,— 24.6.1978, Москва] — советский математик и механик, акад. АН СССР (1946; чл.-корр. 1943), с 1953 чл. Президиума, в 1960—61 вице-президент и в 1961—75 президент АН СССР, трижды Герой Социалистич. Труда (1956, 1961, 1971). Чл. КПСС с 1949. Окончил Московский ун-т (1931). Работал в Центральном аэрогидродинамич. ин-те имени Н. Е. Жуковского, Московском ун-те (проф. с 1937), Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. С 1953 был директором Ин-та прикладной математики АН СССР (ныне носящего его имя).

К. принадлежит большое число фундаментальных исследований в области математики, вычислительной математики, аэрогидродинамики, теории колебаний. Им внесён выдающийся вклад в разработку ряда актуальных вопросов авиационной, атомной и космич. техники. Большой цикл работ К. посвящён колебаниям и автоколебаниям авиационных конструкций. В них была разработана теория флаттера самолёта, созданы методы численного расчёта этого явления и его моделирования в аэродинамич. трубах и предложены практич. меры борьбы с ним. К. было также изучено явление шимми — самовозбуждающихся колебаний носового колеса шасси самолёта и найдены простые конструктивные решения для его устранения. В области аэрогидродинамики К. впервые исследовал влияние сжимаемости среды на аэродинамич. характеристики обтекаемых тел и обобщил теорему Жуковского о подъёмной силе. К. принадлежат фундаментальные результаты по гидродинамике движения тела под поверхностью жидкости и волнового сопротивления, теории удара тела о жидкость, теории колеблющегося крыла и теории винта.

Основные математич. труды по теории функций действительного и комплексного переменного, уравнениям с частными производными, функциональному анализу. К. поставил и разрешил основные вопросы устойчивости решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Для эллиптич. уравнений, вырождающихся на границе области, им были впервые найдены корректные постановки краевых задач, в зависимости от характера вырождения. Важные результаты получены К. в области теории функций комплексного переменного и её приложений к гидродинамике. Им решена задача о равномерном приближении функций в замкнутой области многочленами и изучена задача об аппроксимации в среднем. К. впервые доказал полноту системы собственных и присоединённых функций для несамосопряжённых операторов с частными производными. К. внёс выдающийся вклад в развитие вычислительной и машинной математики в СССР, создание эффективных методов расчёта задач атомной и космич. техники, развёртывание и проведение космич. исследований.

К.— иностранный действительный чл. Монгольской АН (1961), иностранный чл. Польской АН (1962), Чехословацкой АН (1962), иностранный почётный чл. Румынской академии (1965), Американской академии искусств и наук в Бостоне (1966), иностранный чл.-корр. АН ГДР (1966), Саксонской АН в Лейпциге (1966), иностранный почётный чл. Королевского общества в Эдинбурге (1968), Венгерской АН (1970), а также др. научных учреждений и обществ. Делегат 22—24-го съездов партии, на к-рых избирался чл. ЦК КПСС. Депутат Верховного Совета СССР 6—8-го созывов. Ленинская премия (1957), Государственные премии СССР (1942, 1946), Золотая медаль имени М. В. Ломоносова АН СССР (1976). Награждён 7 орденами Ленина (1945, 1954, 1954, 1956, 1961, 1967, 1975), 3 орденами Трудового Красного Знамени (1943, 1945, 1953).

В 1978 в АН СССР учреждена Золотая медаль и премия имени М. В. Келдыша.

■ Математика. Избр. труды, М., 1985; Механика. Избр. труды, М., 1985; Ракетная техника и космонавтика. Избр. труды, М., 1987.

● «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 4; 1986, т. 41, в. 3; «Вестник АН СССР», 1978, № 8.

КЕ́ЛЬВИН — см. *Томсон* У.

КЕ́НДАЛЛ Дэвид Джордж (Kendall David George) (р. 15.1.1918, Рипон, Йоркшир)— английский математик и статистик, чл. Лондонского королевского общества (1964). Окончил Оксфордский ун-т, в 1962—85 проф. Кембриджского ун-та. Основные труды по теории вероятностей и математич. статистике.

■ Some recent work and further problems in the theory of quyeus, «Теория вероятн. и ее примен.», 1964, т. 9, с.3—15.

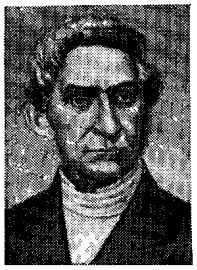
КЕ́ПЛЕР Иоганн (Kepler Johann) (27.12.1571, Вейль-дер-Штадт,— 15.11.1630, Регенсбург) — немецкий астроном и математик, открывший законы движения планет. Основные труды по астрономии. В математике К., используя метод неделимых, нашёл объёмы многих тел вращения (1615); дал подробную теорию использования логарифмов для вычислений и составил (1624) таблицы логарифмов.

■ Gesammelte Werke, Bd 1—18, Münch., 1937—69; Новая стереометрия винных бочек, М.—Л., 1935.

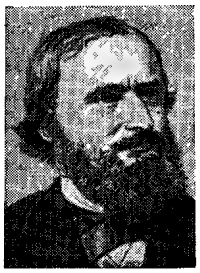
● Белый Ю. А., Иоганн Кеплер, М., 1971.

КЕ́СТНЕР Абрахам Готхельф (Kästner Abraham Gotthelf) (27.9.1719, Лейпциг,— 20.6.1800, Гёттинген) — немецкий математик и физик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1786), чл. Берлинской АН (1749). Учитель К. Гаусса. Основные труды по основаниям геометрии.

● История математики, т. 3, М., 1972.


Л. А. Ж. Кетле.

И. А. Кибель.


Г. Р. Кирхгоф.

А. П. Киселёв.

Ф. К. Клаузен.

К. Ф. Клейн.

КЕТЛЕ Ламбер Адольф Жак (Quételet Lambert Adolphe Jacques) (22.2.1796, Гент,— 17.2.1874, Брюссель) — бельгийский математик, астроном, метеоролог и статистик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1847), чл. Брюссельской академии наук и искусств (1820). Один из создателей научной статистики. Основные математич. труды по теории вероятностей и геометрии.

КИБЕЛЬ Илья Афанасьевич [6(19).10.1904, Саратов,— 5.9.1970, Москва] — советский математик, гидромеханик и метеоролог, чл.-корр. АН СССР (1943). Окончил Саратовский ун-т (1925). В 1925—43 сотрудник Главной геофизич. обсерватории. В 1943—58 работал в Центральном ин-те прогнозов (с 1949 проф.), в 1958—61 в Ин-те прикладной геофизики, с 1961 в Вычислительном метеорологич. центре СССР (с 1965 Гидрометеорологич. центр СССР). Основные труды в области гидродинамич. краткосрочных прогнозов погоды, газовой динамики и теоретич. мезометеорологии (локального прогноза погоды). В 1940 составил замкнутую упрощённую систему уравнений динамич. метеорологии и первым предложил практич. метод гидродинамич. прогноза полей давления и температуры на срок порядка суток. Предложил метод использования полных уравнений гидротермодинамики в прогнозе погоды (1955—58). Государственная премия СССР (1941). Награждён орденом Ленина.

■ Теоретическая гидромеханика, 6 изд., т. 1—2, М., 1963 (соавторы Н. Е. Кочин и Н. В. Розе); Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды, М., 1957.

● «Изв. АН СССР. Сер. физика атмосферы и океана», 1970, т. 6, № 11.

КИРИК НОВГОРОДЕЦ (1110 — г. смерти неизв.) — первый русский математик, известный нам по имени. Его соч. «Наставление, как человеку познать счисление лет» («Учение им же ведати человеку числа всех лет», 1136) посвящено арифметически-хронологич. расчётам.

● Симонов Р. А., Кирик Новгородец — ученый XII века, М., 1980.

КИРХГОФ Густав Роберт (Kirchhoff Gustav Robert) (12.3.1824, Кёнигсберг,— 17.10.1887, Берлин) — немецкий физик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1862), чл. Берлинской АН (1874). Окончил Кёнигсбергский ун-т (1846), с 1875 возглавлял кафедру математич. физики в Берлинском ун-те. Основные труды по оптике, электродинамике и механике. Математич. исследования К. относятся главным образом к математич. физике: метод приближённого решения задач теории дифракции коротких волн; формулы Кирхгофа в теории потенциала; представление электрич. схемы в виде графа.

■ Vorlesungen über mathematische Physik, Bd 1—4, Lpz., 1874—94.

КИС Иоганн (Kies Johannes) (14.9.1713, Тюбинген,— 29.7.1781, там же) — немецкий математик, физик и астроном, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1760). Основные труды по астрономии.

КИСЕЛЁВ Андрей Петрович [30.11(12.12).1852, Мценск, ныне Орловской обл.,— 8.11.1940, Ленинград] — русский педагог-математик. После окончания Петербургского ун-та (1875) работал преподавателем математики, механики и черчения в Воронежском реальном училище (до 1891), затем в Воронежском кадетском корпусе (до 1901), после чего вышел в отставку. К. издал «Систематический курс арифметики для средних учебных заведений» (1884), «Элементарную алгебру» (1888) и «Элементарную геометрию» (1892), эти книги отличались от существовавших в то время учебников более высоким теоретич. уровнем, последовательностью, ясностью и краткостью изложения. Они стали основными учебниками по математике в средних учебных заведениях.

После Великой Октябрьской революции К. вернулся к преподавательской деятельности, одновременно продолжал работать над совершенствованием своих учебников. Учебники арифметики, алгебры и геометрии К. неоднократно переиздавались и 20 лет были стабильными учебниками в средней школе («Арифметика», 17 изд., 1955; «Алгебра», ч. 1, 29 изд., 1955; ч. 2, 42 изд., 1965; «Геометрия», ч. 1, 21 изд., 1962; ч. 2, 35 изд., 1975). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1933).

■ Элементарная геометрия, М., 1980.

● «Математика в школе», 1941, № 2; 1948, № 4; Депман И. Я., История арифметики, М., 1959.

КЛАВИЙ, Клавиус (Шлюссель) Кристоф [Clavius (Schlüssel) Christoph] (1537, Бамберг,— 6.2.1612, Рим) — итальянский математик. Основные труды по арифметике, тригонометрии и геометрии. К. принимал деятельное участие в реформе календаря, комментировал и издавал Евклида (1574).

КЛАУЗЕН Фома (Томас) Клаусович (Clausen Thomas) [16.1.1801, Сночвак,— 11(23). 5.1885, Дерпт] — датский математик и астроном, чл.-корр. Петербургской АН (1856). В 1865—71 директор Дерптской обсерватории. Основные математич. труды по геометрии и алгебре. Вычислил π с точностью до 250 знаков. Занимался астрономией, механикой и оптикой.

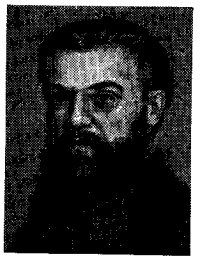
● История отечественной математики, т. 2, К., 1967.

КЛЕЙН Кристиан Феликс (Klein Christian Felix) (25.4.1849, Дюссельдорф,— 22.6.1925, Гёттинген) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1895), чл.-корр. Берлинской АН (1913). В 1865 поступил в Боннский ун-т, доктор философии там же (1868). С 1872 проф. математики в Эрлангене, с 1875 в Мюнхенской высшей технич. школе, а с 1880 в Лейпцигском ун-те. В 1886 К. переехал в Гёттинген, где оставался до конца жизни. Основные труды по неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп, теории алгебраич. уравнений, теории эллиптич. функций, теории автоморфных функций. Свои геометрич. идеи К. изложил в работе «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» (1872), известной под назв. эрлангенской программы. К. стремился раскрыть внутреннюю связь между отдельными ветвями математики и между математикой, с одной стороны, физикой и техникой — с другой. Большой труд был вложен К. в создание «Энциклопедии математических наук» («Enziklopädie der mathematischen Wissenschaften...», Bd 1—6, Lpz., 1898—1934). В течение почти 40 лет (с 1876) К. был главным редактором журнала «Mathematische Annalen». Много занимался вопросами математич. образования; перед 1-й мировой войной организовал международную комиссию по реорганизации преподавания математики.

■ Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd 1—3, B., 1921—23; Высшая геометрия, М.—Л., 1939; Элементарная математика с точки зрения высшей, 4 изд., т. 1, 2 изд., т. 2, М., 1987; Неевклидова геометрия, М.—Л., 1936; Лекции о развитии математики в 19 столетии, ч. 1, М.—Л., 1937.

А. К. Клеро.

С. К. Клини.



У. К. Клиффорд.

Г. С. Клюгель.

А. Кнезер.

С. В. Ковалевская.

КЛЕРО́ Алекси Клод (Clairaut Alexis Claude) (7.5.1713, Париж,— 17.5. 1765, там же) — французский математик и астроном, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1754), чл. Парижской АН (1731). В математич. анализе ввёл понятия криволинейного интеграла (1743), полного дифференциала функции нескольких независимых переменных (1741), а также общего и особого решения дифференциальных уравнений 1-го порядка (1736). К. разработал новую теорию движения Луны (1751), провёл исследования фигуры Земли, доказав ряд фундаментальных для высшей геодезии теорем. На основе изучения движения кометы Галлея в 1759 определил момент её предстоящего прохождения через перигелий (погрешность была только ок. 1 мес). В механике создал динамич. теорию относительного движения.

■ Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики, М.—Л., 1947.

● Brunet P., La vie et l'oeuvre de Clairaut, P., 1952.

КЛИ́НИ Стивен Коул (Kleene Stephen Cole) (р. 5.1.1909, Хартфорд, шт. Коннектикут) — американский логик и математик, чл. Национальной АН США (1969). Окончил Принстонский ун-т (1930), с 1935 работает в Висконсинском ун-те (с 1948 проф.). Основные труды по теории алгоритмов и рекурсивных функций, а также проблемам интуиционистской логики и математики. Ввёл понятие рекурсивной реализуемости формул. Известна классификация Клини — Мостовского для теоретико-числовых предикатов (1943).

■ Введение в метаматематику, М., 1957; Математическая логика, М., 1973; Основания интуиционистской математики, М., 1978 (соавтор Р. Весли).

КЛИ́ФФОРД Уильям Кингдом (Clifford William Kingdom) (4.5.1845, Эксетер,—3.3.1879, Мадейра) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1874), с 1871 проф. Лондонского университетского колледжа. Основные труды по алгебре и геометрии (алгебра Клиффорда, поверхность Клиффорда). К.— один из основоположников векторного исчисления. Ввёл (1878) термины «дивергенция» и «ротор». Известен также как популяризатор физико-математич. наук.

■ Здравый смысл точных наук, М., 1910.

КЛЮ́ГЕЛЬ Георг Симон (Kluegel Georg Simon) (19.8.1739, Гамбург,— 4.8.1812, Галле) — немецкий математик и физик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1794). Основные труды по геометрии и тригонометрии. Ввёл термины «средняя геометрическая» (1808) и «тригонометрические функции» (1770).

● История математики, т. 3, М., 1972.

КНЕ́ЗЕР Адольф (Knеser Adolf) [19.3.1862, Грюссов (Мекленбург),— 24.1.1930] — немецкий математик, иностранный чл.-корр. АН СССР (1924), чл.-корр. Берлинской АН. Основные труды по теории интегральных уравнений, вариационному исчислению и теории разложения произвольных функций в ортогональные ряды. Ввёл понятие слабой вариации и термин «экстремаль» (1900).

КОВАЛЁВСКАЯ Софья Васильевна [3(15).1.1850, Москва,— 29.1 (10.2). 1891, Стокгольм] — русский математик, а также писатель и публицист; первая в мире женщина—профессор математики и первая женщина, избранная в Петербургскую АН. Детство К. прошло в селе Палибино Витебской губ. в имении её отца, генерал-лейтенанта В. В. Корвин-Круковского. К. получила всестороннее образование и рано обнаружила незаурядные математич. способности. Общественные взгляды К. складывались под влиянием сестры Анны, впоследствии участницы Парижской коммуны.

С 1866 в Петербурге К. брала уроки высшей математики у известного педагога А. Н. Страннолюбского. Доступ женщинам в Петербургский ун-т в то время был закрыт. Осенью 1868 К. добилась разрешения слушать лекции И. М. Сеченова и заниматься анатомией у В. Л. Грубера в Военно-медицинской академии. В 1868 К., чтобы иметь возможность заняться наукой, вступила в фиктивный брак (ставший позднее фактическим) с В. О. Ковалевским и в 1869 уехала в Гейдельберг, где изучала математику и посещала также лекции Г. Кирхгофа, Э. Дюбуа-Реймона и Г. Гельмгольца. В 1870 К. переехала в Берлин, где 4 года занималась под руководством К. Вейерштрасса, согласившегося давать ей частные уроки (в Берлинский ун-т женщины тоже не допускались). В апреле 1871 К. с мужем приехала в осаждённый Париж, где ухаживала за ранеными коммунарами.

Основной математич. результат, полученный К.,— теорема о существовании решений нормальной системы уравнений с частными производными (теорема Коши — Ковалевской) — содержится в работе «К теории дифференциальных уравнений с частными производными» («Zur Theorie der partiellen Differenzial-Gleichungen», «Crelle's Journal», 1875, Bd 80). За эту и две другие работы, представленные в 1874 К. Вейерштрассом Гёттингенскому ун-ту, ей заочно присудили степень доктора философии с высшей похвалой.

В июле 1874 К. вернулась в Россию. Однако она не смогла получить места в Петербургском ун-те и даже не была привлечена к преподаванию на Высших женских курсах. Затем К. почти на 6 лет отошла от научной работы. Она занялась литературно-публицистич. деятельностью, сотрудничая в газетах, где писала научные очерки и театральные рецензии. В этот период К. встречалась с виднейшими русскими учёными и писателями: Д. И. Менделеевым, И. М. Сеченовым, С. П. Боткиным, А. М. Бутлеровым, П. Л. Чебышевым, А. Г. Столетовым, И. С. Тургеневым, Ф. М. Достоевским и др.

В 1879 по предложению П. Л. Чебышева на 6-м съезде русских естествоиспытателей и врачей К. прочитала доклад об абелевых интегралах. Весной 1880 К. переехала в Москву. Здесь ей не разрешили сдавать магистерские экзамены для работы в ун-те. Весной 1881 К. уехала в Берлин, а затем в Париж. Попытки К. получить место профессора на Высших женских курсах во Франции не имели успеха. В 1883 вернулась в Россию. На 7-м съезде русских естествоиспытателей и врачей в 1883 К. доложила работу «О преломлении света в кристаллах». В ноябре 1883 выехала в Швецию, получив приглашение Г. Миттаг-Леффлера занять должность приват-доцента в Стокгольмском ун-те. Летом 1884 она была назначена проф. Стокгольмского ун-та. В течение восьми лет К. прочла 12 курсов, в том числе курс механики. К. была членом редколлегии шведского журнала «Acta mathematica». В 1888 ею написана работа «Задача о

К. Кодаира.

Я. Кожешник.

В. Я. Козлов.

Э. Д. Коллинс.

А. Н. Колмогоров.

вращении твёрдого тела вокруг неподвижной точки» («Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe», «Acta math.», 1889, t. 12). После классич. работ Л. Эйлера и Ж. Лагранжа К. впервые продвинула вперёд решение этой задачи, найдя новый случай вращения не вполне симметричного гироскопа, когда решение задачи доводится до конца. В 1888 Парижская АН за эту работу присудила К. премию Бордена, удвоенную ввиду большой ценности этой работы. В следующем году за вторую работу о вращении твёрдого тела К. была присуждена премия Шведской королевской АН.

К. получила мировое признание как учёный. Однако она мечтала о научной работе в России; на просьбу генерала А. И. Косича, двоюродного брата К., разрешить К. вернуться в Россию последовал отказ. Во время пребывания К. в Швеции по представлению академиков П. Л. Чебышева, В. Г. Имшенецкого и В. Я. Буняковского в 1889 К. была избрана чл.-корр. Петербургской АН, после того как перед этим был решён принципиальный вопрос о допущении женщин к избранию в члены-корреспонденты.

К. выступала также как писательница. Её драма «Борьба за счастье» (1887, совместно со шведской писательницей А. Ш. Леффлер-Эдгрен) ставилась в России. Повесть «Нигилистка» (1884), «Воспоминания детства» (1890) и другие произведения К. свидетельствуют о глубоком уме, широте общественных интересов, сочувствии революционной борьбе и идеям утопич. социализма.

■ Научные работы, М.—Л., 1948; Воспоминания детства. Нигилистка, М., 1960; Воспоминания и письма, [М.], 1961.
● Кочина П. Я., Софья Васильевна Ковалевская. М., 1981; Памяти С. В. Ковалевской. Сб. статей, М., 1951.

КОВАЛЕ́ВСКИЙ Герман Вальдемар Герхард (Kowalewski Hermann Waldemar Gerhard) (27.3.1876—21.2.1950) — немецкий математик, с 1920 проф. Высшей технич. школы в Дрездене. Основные труды по теории групп и вопросам «естественной» геометрии; занимался также теорией функциональных пространств, теорией интегральных уравнений, теорией интерполяции и историей математики. Предложил (1909) обозначения (a, b) для интервала и $\langle a, b\rangle$ для сегмента.

■ Основы дифференциального и интегрального исчисления, Од., 1911.

КОДАЙРА Кунихико (Kodaira Kunihiko) (р. 16. 3. 1915, Токио) — японский математик, чл. Национальной АН США (1978). Окончил Токийский ун-т (1941), в 1943—49 и с 1967 работает там же. В 1949—61 работал в Ин-те перспективных исследований в Принстоне (США). Основные труды по алгебраической и дифференциальной геометрии и теории комплексных многообразий. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1954).

КО́ЖЕШНИК Ярослав (Kožešnik Jaroslav) (р. 8.6.1907, Кнежице, близ Карлови-Вари) — чешский математик и механик, иностранный чл. АН СССР (1971), чл. Чехословацкой АН (1960) и её президент (с 1970). Основные труды по технич. механике, динамике машин, теории информации. Золотая медаль имени М. В. Ломоносова АН СССР (1980).

КОЗЛО́В Владимир Яковлевич [р. 15(28).6.1914, Москва] — советский математик, чл.- корр. АН СССР (1966). Чл. КПСС с 1941. Окончил Московский ун-т (1937), с 1952 проф. там же. Основные труды по теории функций действительного переменного (в частности, по ортогональным системам функций) и функциональному анализу (базисы, операторы в гильбертовом пространстве). Награждён орденом Трудового Красного Знамени.

■ О базисах в пространстве L_2 [0,1], «Матем. сб.», 1950, т. 26, № 1; О полных системах ортогональных функций, там же, № 3.

КО́КСТЕР, Коксетер Харолд Скотт Макдоналд (Coxeter Harold Scott Macdonald) (р. 9.2.1907, Лондон) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1950). Работал в Великобритании, США, Нидерландах, был проф. ун-та в Торонто (Канада). Основные труды по проективной и неевклидовой геометрии, теории групп.

■ Введение в геометрию, М., 1966; Новые встречи с геометрией, М., 1978 (соавтор С. Л. Грейтцер); Действительная проективная плоскость, М., 1959; Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп, М., 1980 (соавтор У. Мозер).

КОЛЛЕ́КЦИ Оттавио (Collecchi Ottavio) (18.9.1773, Песконостанцо, — 25.8.1847, Неаполь) — итальянский математик и философ, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1818), проф. Политехнич. школы в Неаполе.

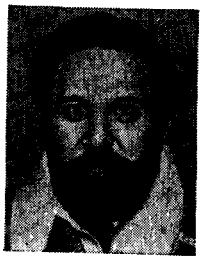
КО́ЛЛИНС Эдуард Давыдович (Collins Eduard Albert Christoph Ludwig) [3(14).7.1791, Петербург,—4(16).8.1840, там же] — русский математик, акад. Петербургской АН (1820; адъюнкт с 1814). Правнук Л. Эйлера. Пытался изучить свойства математич. операций и символов с весьма общей точки зрения, занимался теорией рядов и вопросами комбинаторики.

● Ожигова Е. П., Математика в Петербургской Академии наук в конце XVIII—первой половине XIX в., Л., 1980.

КОЛМОГО́РОВ Андрей Николаевич [12(25).4.1903, Тамбов,— 20.10.1987, Москва] — советский математик, акад. АН СССР (1939) и Академии педагогич. наук СССР (1966). Герой Социалистич. Труда (1963). Окончил Московский ун-т (1925), с 1931 проф. там же. Почётный чл. Московского математич. общества (1953), в 1964—66 и 1974—85 его президент, редактор журнала «Успехи математических наук» (1946—54 и с 1983), редактор математич. отдела 1-го издания Большой советской энциклопедии и чл. Главной редакции 2-го издания Большой советской энциклопедии и 3-го издания Малой советской энциклопедии. Научную деятельность начал в области теории функций действительного переменного, где ему принадлежат фундаментальные работы по тригонометрич. рядам, теории меры, теории множеств, теории интеграла, теории приближения функции. В дальнейшем К. внёс существенный вклад в разработку конструктивной логики, топологии (где им создана теория верхних гомологий), механики (теория турбулентности), теории дифференциальных уравнений, функционального анализа. Основополагающее значение имеют работы К. в области теории вероятностей, где он совместно с А. Я. Хинчиным начал применять методы теории функций действительного переменного (с 1925). Это позволило К. решить ряд трудных проблем и построить широко известную систему аксиоматич. обоснования теории вероятностей (1933), заложить основы теории марковских случайных процессов с непрерывным временем. Позднее К. развил (примыкая к исследованиям А. Я. Хинчина) теорию стационарных случайных процессов, процессов со стационарными приращениями, ветвящихся процессов. К. внёс важный вклад в теорию информации. Ему принадлежат исследования по теории стрельбы, статистич. методам контроля массовой продукции, применениям математич. методов в биологии, математич. лингвистике. Принимал деятельное участие в разработке вопросов математич. образования в средней школе и ун-тах.

Ш. М. Кондамин.

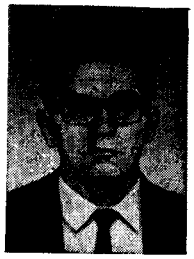
М.Ж.А.Н. Кондорсе.



А. Конн.

С. Э. Кон-Фоссен.

М. А. Корню.



Л. Н. Королёв.

К.— почётный доктор наук Парижского ун-та (1955), иностранный чл. Польской АН (1956), почётный член Королевского статистич. общества Великобритании (1956), чл. Международного статистич. ин-та (1957), почётный чл. Американской академии искусств и наук в Бостоне (1959), чл. Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина» (1959), почётный доктор наук Стокгольмского ун-та (1960), иностранный чл. Американского философского общества в Филадельфии (1961), почётный доктор наук Индийского статистич. ин-та в Калькутте (1962), почётный чл. Американского метеорологич. общества (1962), Индийского математич. общества (1962), Лондонского математич. общества (1962), иностранный чл. Нидерландской королевской АН (1963), Лондонского королевского общества (1964), почётный чл. Румынской академии (1965; чл.-корр. 1957), Венгерской АН (1965), иностранный чл. Национальной АН США (1967), Парижской АН (1968), АН ГДР (1977), почётный чл. Международной академии истории науки (1977). Ленинская премия (1965), Государственная премия СССР (1941), премия имени П. Л. Чебышева АН СССР (1951), Международная премия фонда Э. Бальзана (1963), Золотая медаль Американского метеорологич. общества, медаль имени Гельмгольца АН ГДР (1976), Международная премия Вольфа (1981), Международная премия имени Н. И. Лобачевского АН СССР (1986). Награждён 7 орденами Ленина (1944, 1945, 1953, 1961, 1963, 1973, 1975), орденом Октябрьской Революции (1983), орденом Трудового Красного Знамени (1940), а также венгерским орденом Знамени (1975).

■ Основные понятия теории вероятностей, 2 изд., М., 1974; Математика и механика, М., 1985; Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1986; Теория информации и теория алгоритмов, М., 1987; Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1940 (соавтор Б. В. Гнеденко); Введение в теорию функций действительного переменного, 3 изд., М.—Л., 1938 (соавтор П. С. Александров); Элементы теории функций и функционального анализа, 5 изд., М., 1981 (соавтор С. В. Фомин); О профессии математика, 3 изд., М., 1960; Введение в анализ, М., 1966; Введение в теорию вероятностей, М., 1982 (соавторы И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров); Введение в математическую логику, М., 1982 (соавтор А. Г. Драгалин); Математическая логика (дополнительные главы), М., 1984 (соавтор А. Г. Драгалин); Математика—наука и профессия, М., 1988.

● «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 4; «Вестник АН СССР», 1983, № 8.

КОНДАМИ́Н Шарль Мари де ла (La Condamine Charles Marie de) (28.1.1701, Париж,— 4.2.1774, там же) — французский математик, геодезист, естествоиспытатель и путешественник, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1754), чл. Парижской АН (1760). Основные труды по геодезии.

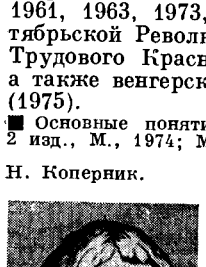
КОНДОРСЕ́ Мари Жан Антуан Никола де Карита (Condorcet Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat) (17.9.1743, Рибмон,— 29.3.1794, Бур-ла-Рен) — французский философ-просветитель, математик, политич. деятель, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1776—92, исключён по указу Екатерины II как чл. Конвента и участник суда над Людовиком XVI), чл. Парижской АН (1769). Основные математич. труды по интегральному исчислению, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей. Написал ряд статей для «Энциклопедии» Д. Дидро и Ж. Д'Аламбера.

● История математики, т. 3, М., 1972.

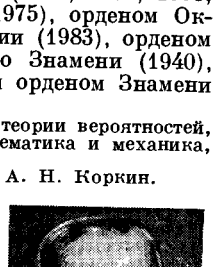
КОНН Ален (Connes Alain) (р. 1.4.1947, Даргиньян, Франция) — французский математик, чл. Парижской АН (1982). Основные труды по функциональному анализу. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1983).

КОН-ФО́ССЕН Стефан Эммануилович (Cohn-Vossen Stefan) (28.5.1902, Бреслау, ныне Вроцлав,— 25.6.1936, Москва) — немецкий математик, эмигрировавший в 1934 в СССР. Основные труды по дифференциальной геометрии, занимался вопросами изгибания поверхностей в целом и внутренней геометрией поверхностей.

■ Наглядная геометрия, 3 изд., М., 1981 (соавтор Д. Гильберт); Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, М., 1959.



Н. Коперник.



А. Н. Коркин.

КОПЕ́РНИК Николай (Kopernik Mikołaj; Copernicus Nicolaus) (19.2.1473, Торунь,— 24.5.1543, Фромборк) — польский астроном и математик, создатель гелиоцентрич. системы мира. В математике основные труды по плоской и сферич. тригонометрии, занимался составлением тригонометрич. таблиц.

● Николай Коперник. Сб. статей и материалов. К 410-летию со дня смерти (1543—1953), М., 1955.

КО́РКИН Александр Николаевич [19.2(3.3).1837, близ с. Шуйского, ныне Вологодской обл.,— 19.8(1.9).1908, Петербург] — русский математик. Окончил Петербургский ун-т (1858), с 1868 проф. там же. Основные труды по теории интегрирования уравнений с частными производными и теории чисел.

■ Сочинения, т. 1, СПБ, 1911; [Переписка с Е. И. Золотаревым], в кн.: Золотарев Е. И., Полн. собр. соч., в. 2, Л., 1932.

● Ожигова Е. П., Александр Николаевич Коркин, Л., 1968.

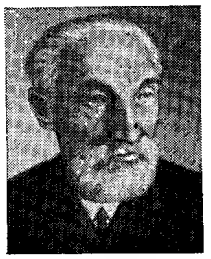
КОРНЮ́ Мари Альфред (Cornu Marie Alfred) (6.3.1841, Орлеан,—12.4.1902, Париж) — французский физик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1888), чл. Парижской АН (1878). Для решения нек-рых задач дифракции света К. использовал (1874) кривую, состоящую из двух ветвей, симметричных относительно осей координат (спираль Корню).

КОРОЛЁВ Лев Николаевич (р. 6.9.1926, Подольск Московской обл.) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1981). Чл. КПСС с 1968. Окончил Московский ун-т (1952), с 1971 проф. там же. Основные труды по математич. обеспечению ЭВМ, исследованию и разработке операционных систем, участвовал в разработке ЭВМ БЭСМ-6. Государственная премия СССР (1969), премия Совета Министров СССР (1981). Награждён орденом Ленина (1971), орденом Октябрьской Революции (1986), орденом Отечественной войны 2-й степени (1985), орденом «Знак Почёта» (1975).

■ Структуры ЭВМ и их математическое обеспечение, 2 изд., М., 1978; Микропроцессоры и персональные компьютеры, М., 1986.

КОСТРИ́КИН Алексей Иванович (р. 12.2.1929, с. Большой Морец Волгоградской обл.) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1976). Чл. КПСС с 1962. Окончил Московский ун-т (1952), с 1972 проф. там же.

А. И. Кострикин.



А. П. Котельников.

В. А. Котельников.

С. К. Котельников.

Р. Котес.

Н. Е. Кочин.

С 1956 работает в Математическом ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды по алгебрам Ли и их приложениям к конечным группам. Государственная премия СССР (1968).

■ О проблеме Бернсайда, «Изв. АН СССР. Сер. математическая», 1959, т. 23, № 1; Градуированные алгебры Ли конечной характеристики, там же, 1969, т. 33, № 2 (соавтор И. Р. Шафаревич); Введение в алгебру, М., 1977; Линейная алгебра и геометрия, М., 1980 (соавтор Ю. И. Манин); Инвариантные решетки, решетка Лича и ее четные унимодулярные аналоги в алгебрах Ли Ar_{-1}, «Матем. сб.», 1986, т. 130, № 4 (соавторы А. И. Бондал, Фам Хыу Тьеп); Вокруг Бернсайда, М., 1986.

КОТЕ́ЛЬНИКОВ Александр Петрович [8(20).10.1865, Казань,— 6.3.1944, Москва] — советский математик и механик, засл. деятель науки и техники РСФСР (1934). Окончил Казанский ун-т (1888), с 1904 проф. высших учебных заведений Казани, Киева, Москвы. Основные труды посвящены «Винтовому исчислению» (Казань, 1895) и его приложениям к геометрии и механике, установлению связи между теорией относительности и геометрией Лобачевского. Государственная премия СССР (1943). Награждён орденом Трудового Красного Знамени.

■ Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике, М.—Л., 1950 (соавтор В. А. Фок).
● Розенфельд Б. А., Александр Петрович Котельников, в кн.: Историко-математические исследования, в. 9, М., 1956, с. 317—400; Путята Т. В. [и др.], Александр Петрович Котельников, М., 1968.

КОТЕ́ЛЬНИКОВ Владимир Александрович [р. 24.8(6.9).1908, Казань] — советский учёный в области радиотехники, акад. (1953) и вице-президент (1970) АН СССР, дважды Герой Социалистич. Труда (1969, 1978). Чл. КПСС с 1948. Сын А. П. Котельникова. В 1931 окончил Московский энергетич. ин-т и начал преподавать в нём (с 1947 проф.). В 1954—87 директор Ин-та радиотехники и электроники АН СССР. Основные труды посвящены проблемам совершенствования методов радиоприёма, изучению помех радиоприёму и разработке методов борьбы с ними. Большое значение имеют труды по теории потенциальной помехоустойчивости. Под руководством К. в СССР проводятся работы по радиолокации Марса, Венеры, Меркурия.

К.— чл. Международного научного радиосоюза (1957), почётный чл. Ин-та инженеров в области электротехники и электроники (1964), иностранный чл. Чехословацкой АН (1965), почётный доктор наук Чешского высшего технич. училища (1967), иностранный чл. АН ГДР (1974), Польской АН (1974), действительный чл. (1982; чл.-корр. 1981) и вице-президент (1983) Международной академии астронавтики, иностранный чл. Монгольской АН (1983), Болгарской АН (1987). Депутат Верховного Совета СССР 9—11-го созывов. Ленинская премия (1964), Государственные премии СССР (1943, 1946), Золотая медаль имени М. В. Ломоносова АН СССР (1982), Золотая медаль и премия имени М. В. Келдыша АН СССР (1987). Награждён 6 орденами Ленина (1956, 1957, 1967, 1969, 1975, 1978), орденом Октябрьской Революции (1983), орденом Трудового Красного Знамени (1961), орденом «Знак Почёта» (1951).

■ Основы радиотехники, ч. 1—2, М., 1950—54 (соавтор А. М. Николаев): Теория потенциальной помехоустойчивости, М.—Л., 1956.

КОТЕ́ЛЬНИКОВ Семён (Симеон) Кириллович [1723, Петербург,— 1(13).4.1806, там же] — русский математик, акад. (1756, адъюнкт с 1751) и почётный чл. (1797) Петербургской АН. Преподавал математику в Морском шляхетском корпусе и в академич. гимназии в Петербурге. В 1785—1796 К. читал публичные лекции по высшей математике. Написал первый русский учебник по механике (1774), одно из первых русских руководств по геодезии (1766) и др. учебники.
● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

КОТЕС, Котс, Коутс Роджер (Cotes Roger) (10.7.1682, Бербидж,— 5.6.1716, Кембридж) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1711), с 1706 проф. Кембриджского ун-та. Получил различные формулы дифференциального и интегрального исчислений и дифференциальной геометрии; нашёл формулы для приближённого вычисления определённых интегралов (формулы Котеса, 1722). Занимался также теорией ошибок.
● История математики, т. 3, М., 1972.

КО́ЧИН Николай Евграфович [6(19).5.1901, Петербург,— 31.12.1944, Москва] — советский механик, математик и геофизик, один из создателей современной динамич. метеорологии, акад. АН СССР (1939). Окончил Петроградский ун-т (1923). Студентом был призван в Красную Армию, участвовал в операциях против Юденича и в ликвидации Кронштадтского мятежа. Преподавал в Ленинградском (1924—1934) и Московском (с 1938) ун-тах. Директор Ин-та теоретич. метеорологии (1933—34), с 1934 работал в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР и с 1939 — в Ин-те механики АН СССР. Основные труды по математике, теоретич. механике, динамич. метеорологии, гидро- и аэродинамике. Показал возможность движения сжимаемой жидкости под действием консервативных сил с образованием вихрей при отсутствии притока энергии извне (1923); дал решение уравнений для движения сжимаемой жидкости на вращающейся Земле (1924). Определил условия зональной циркуляции атмосферы. К. принадлежит разработка вопросов циклогенеза и общей циркуляции атмосферы, обоснование метода длинных волн в задачах динамич. метеорологии. Заложил основы метода определения полей скорости и давления в зависимости от поля температур. Исследования К. сильных разрывов (ударных волн) в сжимаемой жидкости (1924—25) имели большое значение для развития газовой динамики. В гидродинамике К. принадлежат исследования точного вида волн конечной амплитуды на поверхности раздела двух жидкостей конечной глубины (1928) и решение задач о свободных волнах малой амплитуды на поверхности несжимаемой жидкости (1935). Предложил (1937) метод решения плоской задачи о подводном крыле; формулы для сопротивления корабля, формы волновой поверхности и подъёмной силы; решил плоскую задачу о глиссировании слабоизогнутого контура на поверхности тяжёлой несжимаемой жидкости (1938). Заложил основы теории качки корабля с учётом взаимодействия корпуса и воды. В 1941—44 впервые дал строгое решение задачи о крыле конечного размаха. Автор учебников по гидромеханике, векторному исчислению, соавтор и редактор 2-томной монографии по динамич. метеорологии.

■ Собр. соч., т. 1—2, М.—Л., 1949; Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, 9 изд., М., 1965.
● Кочина П. Я., Николай Евграфо-

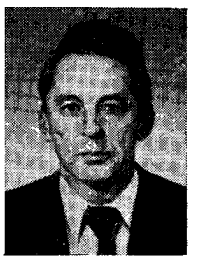
П. Я. Кочина.

О. Л. Коши.

Н. С. Кошляков.

П. Дж. Коэн.

К. Х. Крамер.



П. С. Краснощёков.

вич Кочин. 1901—1944, М., 1979; Н. Е. Кочин и развитие механики, М., 1984; Николай Евграфович Кочин, М.—Л., 1948 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР); «Успехи матем. наук», 1946, т. 1, в. 1.

КО́ЧИНА, Полубаринова-Кочина Пелагея Яковлевна [р. 1(13).5.1899, Астрахань] — советский учёный в области гидродинамики, акад. АН СССР (1958; чл.-корр. 1946), Герой Социалистич. Труда (1969). Окончила Петроградский ун-т (1921). С 1919 работала в Главной геофизич. обсерватории. В 1925—35 преподавала в Ленинградских вузах, с 1934 проф. Ленинградского ун-та. В 1935—39 работала в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР, в 1939—59 в Ин-те механики АН СССР, в 1959—70 в Ин-те гидродинамики Сибирского отделения АН СССР, с 1970 в Ин-те проблем механики АН СССР. Основные труды по теории фильтрации, динамич. метеорологии, теории приливов в бассейнах. Ею решены многие задачи, связанные с движением грунтовых вод и нефти в пористой среде, разработана аналитич. теория дифференциальных уравнений в задачах фильтрации. К.— редактор первого собрания сочинений С. В. Ковалевской. Государственная премия СССР (1946). Награждена 4 орденами Ленина (1953, 1960, 1967, 1969), орденом Октябрьской Революции (1975), орденом Трудового Красного Знамени (1945), орденом Дружбы народов (1979).

■ Теория движения грунтовых вод, 2 изд., М., 1977; Воспоминания, М., 1974; Николай Евграфович Кочин, 1901—1944, М., 1979; Софья Васильевна Ковалевская, М., 1981; Карл Вейерштрасс, М., 1985; Гёста Миттаг-Леффлер, 1846—1927, М., 1987.

● П. Я. Кочина, М., 1977 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР).

КОШИ́ Огюстен Луи (Cauchy Augustin Louis) (21.8.1789, Париж,—23.5.1857, Со) — французский математик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1831), чл. Парижской АН (1816). Окончил Политехнич. школу (1807) и Школу мостов и дорог (1810) в Париже. В 1810—13 работал инженером в Шербуре. В 1816—30 преподавал в Политехнич. школе и в Коллеж де Франс, с 1848 — в Парижском ун-те и в Коллеж де Франс. Труды К. относятся к различным областям математики (преимущественно к математич. анализу) и математич. физики. Его курсы анализа («Курс анализа», 1821, «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых», 1823, «Лекции по приложениям анализа к геометрии», т. 1—2, 1826—28), основанные на систематич. использовании понятия предела, послужили образцом для большинства курсов позднейшего времени. В них он дал определение понятия непрерывности функции, чёткое построение теории сходящихся рядов (признак Коши, критерий Коши), определение интеграла как предела сумм и др. К. систематически развивал основы теории аналитич. функций комплексного переменного (уравнения Коши — Римана); дал выражение аналитич. функции в виде т. н. интеграла Коши, разложение функции в степенной ряд; разработал теорию вычетов. В области теории дифференциальных уравнений К. принадлежат: постановка т. н. задачи Коши, основные теоремы существования решений и метод интегрирования уравнений с частными производными 1-го порядка. В работах по теории упругости он рассматривал тело как сплошную среду и оперировал напряжением и деформацией, относимой к каждой точке. В работах по оптике К. дал математич. разработку теории Френеля и теории дисперсии. К. принадлежат также исследования по теории чисел, алгебре, геометрии. По политич. убеждениям К.— ультрароялист, сторонник Бурбонов (после Революции 1830 был в эмиграции до 1838), клерикал.

■ Oeuvres complètes, sér. 1, t. 1—12, sér. 2, t. 1—13, P., 1882—1932; Алгебраический анализ, Лейпциг, 1864; Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, СПБ, 1831; Исследование о многогранниках, «Успехи матем. наук», 1944, в. 10.

● Бобынин В. В., Огюстен Луи Коши. (Очерк его жизни и деятельности), «Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем», 1887, т. 3, № 1—3; Маркушевич А. И., Очерки по истории теории аналитических функций, М.—Л., 1951.

КОШЛЯКО́В Николай Сергеевич [11(23).7.1891, Петербург,— 23.9.1958, Москва] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1933). В 1914 окончил Петербургский ун-т, в 1925—42 проф. там же. Основные труды по теории высших трансцендентных функций и дифференциальным уравнениям математич. физики. Иностранный чл. Лондонского математич. общества (1936).

■ Основные дифференциальные уравнения математической физики, 4 изд., Л.—М., 1936; Дифференциальные уравнения математической физики, М., 1962 (соавторы Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов).

● «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 3.

КО́ЭН, Коен Пол Джозеф (Cohen Paul Joseph) (р. 2.4.1934, Лонг-Бранч) — американский математик, чл. Национальной АН США (1964), с 1964 проф. Станфордского ун-та. Основные труды по основаниям математики, теории множеств, математич. логике. Установил (1963), что континуум-гипотезу, высказанную Г. Кантором (1878), невозможно доказать с помощью обычных методов теории множеств. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1966).

■ Теория множеств и континуум-гипотеза, М., 1969.

КРА́МЕР Габриель (Cramer Gabriel) (31.7.1704, Женева,— 4.1.1752, Баньоль, близ Нима, Франция) — швейцарский математик, с 1734 проф. Женевской кальвинистской академии. Установив и опубликовав в 1750 правило решения систем линейных уравнений с буквенными коэффициентами (правило Крамера), К. заложил основы теории определителей.

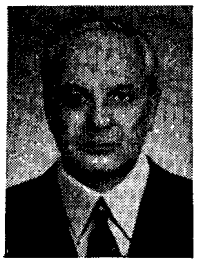
■ Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Gen., 1750.

КРАМЕ́Р Карл Харальд (Cramér Karl Harald) (р. 25.9. 1893, Стокгольм) — шведский математик. Проф. математики и математич. статистики (с 1929), ректор (1950—58) Стокгольмского ун-та, канцлер шведских унтов (1958—61). Основные труды по теории вероятностей, математической статистике, математич. теории страхования.

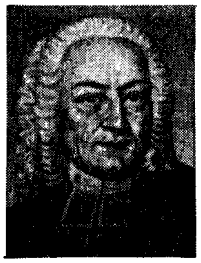
■ Случайные величины и распределения вероятностей, М., 1947; Математические методы статистики, 2 изд., М., 1975.

КРАМП Кристиан (Кретьен) (Kramp Christian) (10.7.1760, Страсбур,—13.5.1826, там же) — немецкий математик, чл.-корр. Берлинской АН (1812), с 1809 проф. Страсбурского ун-та. Основные труды по комбинаторике, геометрии, алгебре. Ввёл (1808) обозначение $n!$ для факториала.

КРАСНОЩЁКОВ Павел Сергеевич (р. 6.5.1935, Калач Воронежской обл.) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1984). Чл. КПСС с 1980. Окончил Московский ун-т (1958), с 1975 работает там же (с 1978 проф.). С 1965 в Вычислительном центре АН СССР (с 1973 зав. отделом). Основные труды по механике жидкости и газа (иссле-

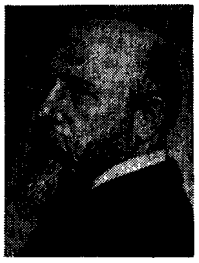


Н. Н. Красовский.

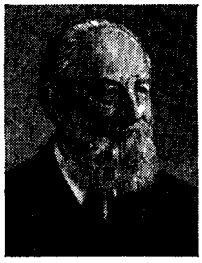


Г. В. Крафт.

А. Л. Крелль.



Л. Кремона.



А. Н. Крылов.

Н. М. Крылов.

дование движения тел с вязкой жидкостью), кибернетике и информатике. Премия Совета Министров СССР (1981). Награждён орденом Дружбы народов (1981).

■ Принципы построения моделей, М., 1983 (соавтор А. А. Петров); Математические модели в исследовании операций, М., 1984.

КРАСОВСКИЙ Николай Николаевич (р. 7.9.1924, Свердловск) — советский учёный в области механики и процессов управления, акад. АН СССР (1968; чл.-корр. 1964), Герой Социалистич. Труда (1974). Чл. КПСС с 1954. Окончил Уральский (Свердловск) политехнич. ин-т (1949), с 1957 проф. там же, с 1959 проф. Уральского (Свердловск) ун-та. С 1970 работает в Институте математики и механики Уральского отделения АН СССР (в 1970—77 директор). Основные труды по теории устойчивости движения и динамике управляемых систем. К. развил метод функций Ляпунова. Предложил новую функциональную трактовку систем с последействием. Разработал теорию стабилизации управляемых систем на основе синтеза методов теории устойчивости с новым аппаратом теории оптимальных процессов. Развил теорию управления в игровых задачах динамики. Ленинская премия (1976), Государственная премия СССР (1984). Награждён 2 орденами Ленина (1967, 1974), орденом Октябрьской Революции (1984), орденом Трудового Красного Знамени (1961).

■ Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959; Теория управления движением. Линейные системы, М., 1968; Игровые задачи о встрече движений, М., 1970; Управление динамической системой, М., 1985.

КРАФТ Георг Вольфганг (Krafft Georg Wolfgang) (16.7.1701, Титлинг,— 6.7.1754, Тюбинген) — математик и физик, акад. (1731—44; адъюнкт с 1727) и иностранный почётный чл. (1745) Петербургской АН. Преподавал в академич. учебных заведениях Петербурга и Тюбингена. Написал учебник «Краткое руководство к теоретической геометрии» (на немецком языке в 1740, на русском языке в 1748). Математич. работы по геометрии, интегральному исчислению. Создал физич. кабинет при АН.

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

КРЕЛЛЬ Август Леопольд (Crelle August Leopold) (11.3.1780, Айхвердер, близ г. Врицен,— 6.10.1855, Берлин) — немецкий математик и инженер, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1834), чл. Берлинской АН (1827). Основал в 1826 «Journal für die reine und angewandte Mathematik», т. н. «Журнал Крелля», сыгравший большую роль в развитии математики.

● Клейн Ф., Лекции о развитии математики в 19 столетии, ч. 1, М.—Л., 1937; «Wissenschaftliche Annalen», 1955, Bd 4, H. 10.

КРЕМО́НА Луиджи (Cremona Luigi) (7.12.1830, Павия,— 10.6.1903, Рим) — итальянский математик, с 1873 проф. и директор Инженерной школы в Риме. Основные труды по начертательной геометрии, графостатике и алгебраич. геометрии. Им открыт (1863) класс бирациональных преобразований — т. н. кремоновы преобразования.

■ Opere matematiche, t. 1—3, Mil., 1914—17; Взаимные фигуры в графической статике, Л.—М., 1936.

КРИСТО́ФФЕЛЬ Эльвин Бруно (Christoffel Elwin Bruno) (10.11.1829, Моншау,— 15.3.1900, Страсбур) — немецкий математик, с 1862 проф. Политехникума в Цюрихе, с 1872 проф. Страсбурского ун-та. Основные труды по теории функций, теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории инвариантов алгебраич. форм и теории дифференциальных квадратичных форм, где К. ввёл (1869) т. н. символ Кристоффеля.

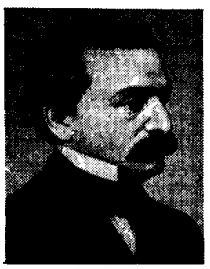
■ Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd 1—2, Lpz.— B., 1910.

● «Mathematische Annalen», 1901, Bd 54, S. 329—44.

КРО́НЕКЕР Леопольд (Kronecker Leopold) (7.12.1823, Лигниц, ныне Легница, Польша,— 29.12.1891, Берлин) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1872), чл. Берлинской АН (1861), с 1883 проф. Берлинского ун-та. Основные труды по алгебре и теории чисел, где он продолжил работы своего учителя Э. Куммера по теории квадратичных форм и теории групп. Большое значение имеют его исследования по арифметич. теории алгебраич. величин. К. был сторонником «арифметизации» математики, к-рая, по его мнению, должна быть сведена к арифметике целых чисел; только последняя, как он утверждал, обладает подлинной реальностью. Защищая эти односторонние взгляды, К. вёл упорную борьбу с принципами теоретико-функциональной школы К. Вейерштрасса и теоретико-множественной школы Г. Кантора.

Э. Б. Кристоффель

Л. Кронекер.



■ Werke, Bd 1—5, Lpz., 1895—1930; Vorlesungen über Mathematik, Tl 1—2, Lpz., 1894—1903.

● Frobenius G., Gedächtnissrede auf Leopold Kronecker, B., 1893.

КРЫЛО́В Алексей Николаевич [3(15). 8.1863, с. Висяга Симбирской губ.,— 26.10.1945, Ленинград] — советский кораблестроитель, механик и математик, акад. АН СССР (1916; чл.- корр. 1914), Герой Социалистич. Труда (1943). После окончания в 1884 Морского училища был зачислен в компасную часть Главного гидрографич. управления, где выполнил свои первые научные работы по девиации компасов. В 1890 окончил кораблестроительное отделение Морской академии и дальнейшую деятельность посвятил главным образом разработке вопросов теории корабля. С 1890, почти 50 лет, преподавал в Морской академии, а также в Петербургском (Ленинградском) политехнич. ин-те и др. вузах. Создал ряд учебных курсов, явившихся одновременно оригинальными научными трудами большого практич. значения. С 1900 руководил Опытовым бассейном для испытаний моделей судов, в 1908—10 был главным инспектором кораблестроения и председателем Морского технич. комитета. В 1910—17 консультировал по вопросам судостроения на Металлическом, Путиловском и др. заводах. Активно участвовал в проектировании и постройке первых русских линкоров типа «Севастополь», ввёл в конструкцию кораблей ряд технич. новшеств, нашедших затем применение в практике военного кораблестроения. С 1916 директор Главной физич. обсерватории и начальник Главного военно-метеоро-

логич. управления, с 1917 директор физич. лаборатории (позже ин-та) Академии наук. В 1919 назначен начальником Морской академии, участвовал в её преобразовании и выработке устава. В 1921—27 находился за границей в составе комиссии для возобновления научных контактов и для решения практич. народнохозяйственных задач, связанных с укреплением морского и железнодорожного транспорта. С 1927 продолжал преподавать в Морской академии и руководил Физико-математич. ин-том АН СССР. Активно участвовал в решении основных технич. вопросов военного и гражданского судостроения в СССР.

Труды К. посвящены теории корабля, теории магнитных и гироскопич. компасов, артиллерии, математике. Для вычисления основных характеристик корабля — остойчивости и плавучести — разработал рациональные приёмы и схемы, ставшие классическими. Создал теорию килевой качки, дал методы определения поведения судна в общем случае движения под углом к направлению бега волн. Важное практич. значение имели работы К. по непотопляемости судна, особенно составленные им таблицы непотопляемости. К. принадлежат выдающиеся работы по строительной механике корабля. Им начата разработка динамич. проблем в кораблестроении, создана теория вибрации судов, предложен оригинальный метод расчёта балок, лежащих на упругом основании, имеющий большое значение не только для расчёта судовых корпусов, но и для развития строительной механики в целом. В 1938—40 опубликовал комплекс работ, в к-рых дал полное изложение теории девиации магнитного компаса, исследовал вопросы теории гироскопич. компасов, разработал теорию влияния качки корабля на показания компаса.

Работы К. по теории кораблестроения принесли ему мировую известность. Большую ценность имеют также работы К. по математике и механике.

В 1906 К. впервые прочёл свой курс «О приближённых вычислениях», в к-ром развивал в единую глубоко продуманную систему вопросы наиболее рациональной организации численных расчётов, встречающихся в различных областях физики и техники, а в 1912— «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики». Последний курс содержит целый ряд важных научных результатов: исследование вопросов, касающихся вынужденных колебаний упругих систем, способ улучшения сходимости тригонометрич. рядов. В 1931 К. предложил метод решения т. н. векового уравнения. Им построена первая в России машина для интегрирования дифференциальных уравнений (1904), создан ряд важных корабельных и артиллерийских приборов. К. выполнены крупные исследования в области колебания артиллерийских стволов и

Л. Д. Кудрявцев.

Р. О. Кузьмин.

внешней баллистики. Непреходящую ценность имеют труды К., посвящённые разработке наследия классиков науки—И. Ньютона, Л. Эйлера, К. Гаусса и др. Им созданы яркие очерки о жизни и деятельности П. Л. Чебышева, Ж. Лагранжа, И. Ньютона и др.

К.— чл. Лондонского королевского астрономич. общества (1942), почётный чл. Общества инженеров-кораблестроителей Великобритании (1943). Государственная премия СССР (1941). Награждён 3 орденами Ленина (1939, 1943, 1945).

В 1969 в АН СССР учреждена премия имени А. Н. Крылова.

■ Лекции о приближенных вычислениях, 5 изд., М.—Л., 1950; О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах, 5 изд., М.—Л., 1950; Мои воспоминания, 8 изд., Л., 1984.

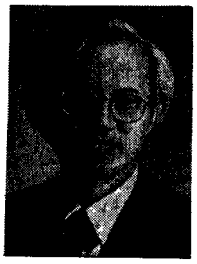
● Лучининов С. Т., А. Н. Крылов. Выдающийся кораблестроитель, математик и педагог, М., 1959; Труды Ин-та истории естествознания и техники АН СССР, т. 15, М., 1956 (том посвящен К.); Ханович И. Г., Академик Алексей Николаевич Крылов, Л., 1967; Штрайх С. Я., Алексей Николаевич Крылов. Очерк жизни и деятельности, М., 1956.

КРЫЛО́В Николай Митрофанович [17 (29).11.1879, Петербург,— 11.5.1955, Москва] — советский математик, акад. АН СССР (1929; чл.- корр. 1928) и АН УССР (1922), засл.деятель науки УССР (1939). В 1902 окончил Петербургский горный ин-т, с 1912 проф. там же. С 1922 руководитель кафедры математич. физики АН УССР. Основные труды относятся к интерполяции, приближённому интегрированию дифференциальных уравнений математич. физики, нелинейной механике. Разработал ряд новых методов решения задач математич. физики, приложимых как для доказательства существования решений, так и для фактического их построения. Цикл исследований К. совместно с Н. Н. Боголюбовым (с 1932) посвящён изучению актуальных проблем нелинейных колебательных процессов, где К. удалось заложить основы нелинейной механики. К.— чл.- корр. Коимбрасского ун-та (1924), чл. Американского математич. общества (1924), Французского физич. общества (1924), Итальянской математич. ассоциации (1924), Французского математич. общества (1924), Математич. общества в Палермо (1924). Награждён орденом Ленина (1949), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1944, 1945).

В 1964 в АН УССР учреждена премия имени Н. М. Крылова.

■ Введение в нелинейную механику, К., 1937; Основні проблеми математичної фізики й техніки, Харків — Київ, 1932; Збірник праць з нелінійної механіки, Київ, 1937 (соавтор Н. Н. Боголюбов).

● История отечественной математики, т. 4, кн. 1—2, К., 1970; «Успехи матем. наук», 1950, т. 5, в. 1; Николай Митрофанович Крылов, М., 1945 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР).



Д. Куиллен.

КУА́ЙН Уиллард ван Ормен (Quine Willard van Orman) (р. 28.4.1908, Акрон) — американский математик, чл. Американской академии искусств и наук в Бостоне, проф. Гарвардского ун-та. Основные труды по математич. логике и основаниям математики.

КУДРЯ́ВЦЕВ Лев Дмитриевич (р. 25.3.1923, Москва) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1984). Окончил Московский ун-т (1945), с 1948 работает в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР (в 1961—68 зам. директора), с 1958 проф. Московского физико-технич. ин-та. Чл. редколлегии «Математической энциклопедии». Основные труды по теории функций (доказан ряд свойств дифференцируемых отображений, построена теория вложения весовых функциональных пространств), уравнениям с частными производными (на основе теории вложения весовых функциональных пространств развит вариационный метод решения краевых задач) и топологии.

■ Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1959, т. 55; Теоремы вложения для классов функций, определенных на всем пространстве или полупространстве, «Матем. сб.», 1966, т. 69, в. 4, т. 70, в. 1; Решение первой краевой задачи для самосопряженных эллиптических уравнений в случае неограниченной области, «Изв. АН СССР. Сер. математическая», 1967, т. 31, с. 1179—99; Курс математического анализа, т. 1—2, М., 1981; Современная математика и ее преподавание, 2 изд., М., 1985.

● «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 3.

КУЗНЕЦО́В Н. В.— см. стр. 771.

КУЗЬМИ́Н Родион Осиевич [10(22).11.1891, дер. Рябые, ныне Витебской обл.,— 24.3.1949, Ленинград] — советский математик, чл.- корр. АН СССР (1946). Окончил Петроградский ун-т (1916). С 1922 проф. Ленинградского политехнич. ин-та. Основные труды по теории чисел и математич. анализу.

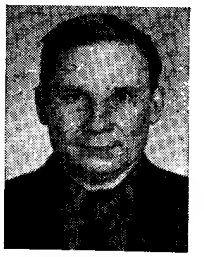
● «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 4.

КУИЛЛЕН Даниел (Quillen Daniel) (р. 27.6. 1940, Ориндж, шт. Нью-Джерси) — американский математик, чл. Национальной АН США (1978). Работал в Массачусетском технологич. ин-те. Основные труды по гомологич. алгебре. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1978).

Э. Э. Куммер.

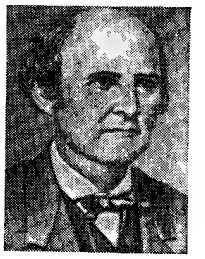
Р. Курант.

К. Куратовский.



С. П. Курдюмов.

А. Б. Куржанский.



А. Кэли.

КУ́ММЕР Эрнст Эдуард (Kummer Ernst Eduard) (29.1.1810, Зорау,— 14.5.1893, Берлин) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1862), чл. Берлинской АН (1855), проф. Берлинского ун-та (1856—84). Основные труды по математич. анализу, алгебре, теории чисел. Первые работы посвящены рядам (п р и з н а к К у м м е р а). Создал теорию алгебраич. чисел, методы к-рой оказали огромное влияние на последующее развитие теории чисел и алгебры. Изучение делимости алгебраич. чисел привело его к введению т. н. идеальных чисел.

■ De Numeris complexis, qui unitatis radicibus et numeris intergis realibus constant, Breslau, 1844; Collected papers, v. 1—2, B., 1975.

● M e h t B., Ernst Eduard Kummer als Lehrer, B., 1910.

КУН, К ю н Генрих (Kuhn Heinrich) (19.11.1690, Кёнигсберг,— 8.10.1769, Данциг) — немецкий математик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1735). Преподавал математику в гимназии в Данциге. Сделал попытку дать геометрич. интерпретацию мнимых величин (1750—51).

КУ́РАНТ Рихард (Courant Richard) (8.1.1888, Люблинец, Польша,— 27.1.1972, Нью-Йорк) — математик, иностранный чл. АН СССР (1966). Учился в ун-тах в Бреслау (Вроцлав) и Цюрихе. Проф. Гёттингенского (1920—33) и Нью-Йоркского (с 1934) ун-тов. Основные труды по теории конформных отображений, краевым задачам для уравнений математич. физики.

■ Курс дифференциального и интегрального исчисления, 4 изд., т. 1, М., 1967; 2 изд., т. 2, М., 1970; Что такое математика. 2 изд., М., 1967 (соавтор Г. Роббинс); Сверхзвуковое течение и ударные волны, М., 1950 (соавтор К. Фридрихс); Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М., 1953; Методы математической физики, 3 изд., т. 1, 2 изд., т. 2, М.— Л., 1951 (соавтор Д. Гильберт); Уравнения с частными производными, М., 1964 (Методы математической физики, т. 2); Теория функций, М., 1968 (соавтор А. Гурвиц).

● R e i d C., Courant in Göttingen and New York. The story of an improbable mathematician, N. Y., 1976; «Успехи матем. наук», 1975, т. 30, в. 4.

КУРАТО́ВСКИЙ Казимеж (Kuratowski Kazimierz) (2.2.1896, Варшава,— 18.6.1980, там же) — польский математик, иностранный чл. АН СССР (1966), чл. Польской АН (1952). С 1927 проф. Политехникума во Львове, с 1934 проф. ун-та в Варшаве, с 1948 директор Математич. института Польской АН. Основные труды по теории множеств, топологии, теории функций действительного переменного.

■ Топология, т. 1—2, М., 1966—69.

● «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 6.

КУРДЮ́МОВ Сергей Павлович (р. 18.11.1928, Москва) — советский учёный в области математич. физики, чл.-корр. АН СССР (1984). Чл. КПСС с 1963. Окончил Московский ун-т (1952). С 1953 работает в Ин-те прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР. Основные труды по теоретич. и математич. физике, прикладной математике. Награждён орденом «Знак Почёта» (1975).

■ Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации, в сб.: Современные проблемы математической физики и вычислительной математики, М., 1982, с. 217—43; Нелинейные явления и вычислительный эксперимент, «Вестник АН СССР», 1985, № 9, с. 64—77 (соавторы А. А. Самарский, Т. С. Ахромеева и Г. Г. Малинецкий); Теория режимов с обострением в сжимаемых средах, в сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, т. 28, М., 1986, с. 3—94 (соавторы Н. В. Змитренко, А. П. Михайлов); Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры, там же, с. 95—205 (соавторы В. А. Галактионов, В. А. Дородницын, Г. Г. Еленин, А. А. Самарский); О классификации решений системы нелинейных диффузионных уравнений в окрестности точки бифуркации, там же, с. 207—313 (соавторы Т. С. Ахромеева, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский); Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений, М., 1987 (соавторы А. А. Самарский, В. А. Галактионов, А. П. Михайлов).

КУРЖА́НСКИЙ Александр Борисович (р. 19.10.1939) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1981). Чл. КПСС с 1978. Окончил Уральский (Свердловск) политехнический институт (1962), с 1974 проф. Уральского (Свердловск) университета, в 1973—84 зав. отделом Ин-та математики и механики Уральского научного центра АН СССР (в 1977—83 директор), с 1984 работает в Международном ин-те прикладного системного анализа. Основные труды по дифференциальным уравнениям и теории оптимального управления. Ленинская премия (1976).

А. Г. Курош.

■ Управление и наблюдение в условиях неопределенности, М., 1977.

КУ́РОШ Александр Геннадиевич [6 (19).1.1908, Ярцево Смоленской обл.,— 18.5.1971, Москва] — советский математик. Окончил Смоленский ун-т (1928). С 1930 работал в Московском ун-те, с 1937 проф. там же. Почётный чл. Московского математич. общества (1963). Основные труды по общей алгебре (теория групп, колец, категорий и др.). Автор известного университетского курса высшей алгебры. Почётный доктор ун-тов в Лионе (1967) и Брно (1968), чл. Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина» (1970). Государственная премия СССР (1974), премия им. П. Л. Чебышева АН СССР (1945). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1951) и орденом «Знак Почёта» (1961).

■ Курс высшей алгебры, М.—Л., 1946 (11 изд., М., 1975); Теория групп, 3 изд., М., 1967; Лекции по общей алгебре, 2 изд., М., 1973; Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года, М., 1974.

● «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 1.

КУ́ТТА Мартин Вильгельм (Kutta Martin Wilhelm) (3.11.1867 — 25.12.1944) — немецкий физик и математик. Работал в Высшей технич. школе в Штутгарте. В математике развил (1901) метод К. Рунге (м е т о д Р у н г е — К у т т ы) численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

КЭ́ЛИ, К е й л и Артур (Cayley Arthur) (16.8.1821, Ричмонд,— 26.1.1895, Кембридж) — английский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1870), чл. Лондонского королевского общества (1852), с 1863 проф. Кембриджского ун-та. Основные труды по теории алгебраич. квадратичных форм. Установил связь между теорией инвариантов и проективной геометрией. Исследования К. в этой области легли в основу истолкования геометрии Лобачевского (и н т е р п р е т а ц и я К э л и — К л е й н а). Автор работ по теории определителей, где ввёл (1841) общепринятое ныне обозначение для определителя, дифференциальных уравнений, эллиптических функций. Занимался также сферической астрономией и астрофизикой.

■ The collected mathematical papers, v. 1—13, Camb., 1889—98; Шестой мемуар о формах, в сб.: Об основаниях геометрии, М., 1956, с. 222—52.

● «Mathematische Annalen», 1895, Bd 46, S. 462—80.

Л

ЛА ВАЛЛЕ ПУССЕН Шарль Жан де (La Vallée Poussin Charles Jean de) [14.8.1866, Лувен (Лёвен),— 2.3.1962, Брюссель] — бельгийский математик, чл. Бельгийской и Парижской АН (1945), с 1897 проф. Лувенского ун-та. Основные труды по теории чисел и теории функций. В теории чисел уточнил (независимо от Ж. Адамара) результаты, полученные П. Л. Чебышевым, об асимптотич. поведении функции $\pi(n)$ — числа простых чисел, меньших или равных n. Ему принадлежат важные результаты по теории тригонометрич. рядов, теории приближения функций, а также по математич. физике.

■ Курс анализа бесконечно малых, т. 1—2, М.—Л., 1933; Лекции по теоретической механике, т. 1—2, М., 1948—49.

● «Comptes rendus de l'Académie des sciences», 1962, t. 254, p. 2472—76.

ЛАВРЕНТЬЕВ Михаил Алексеевич [6(19).11.1900, Казань,— 15.10.1980, Москва] — советский математик и механик, акад. АН СССР (1946) и АН УССР (1939), вице-президент АН СССР и председатель Сибирского отделения АН СССР (1957—75), Герой Социалистич. Труда (1967). Чл. КПСС с 1952. Окончил Московский ун-т (1922), с 1921 преподаватель (с 1929 проф.) в вузах, в т. ч. в 1931—41 и 1951—53 в Московском, в 1939—41 в Киевском и в 1960—75 в Новосибирском ун-тах. С 1935 работал в АН СССР: в 1935—60 в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова, в 1949—52 директор Ин-та точной механики и вычислительной техники, в 1957—75 — Ин-та гидродинамики Сибирского отделения, в 1950—53 и 1955—57 академик-секретарь Отделения физико-математич. наук. В 1939—48 работал в АН УССР (в 1946—48 вице-президент): в 1939—41 директор Ин-та математики. Л. был инициатором создания в Сибири нового крупного научного объединения — Сибирского отделения АН СССР и возглавил его. Главный редактор журнала «Физика горения и взрыва» (с 1964).

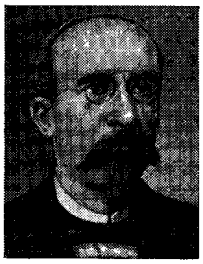
В математике Л. принадлежат фундаментальные результаты по теории множеств и общей теории функций, теории приближения функций комплексного переменного, теории конформных и квазиконформных отображений, теории дифференциальных уравнений; им создан ряд новых направлений в этих областях. Л. положил начало теории нелинейных классов квазиконформных отображений, поставил ряд новых проблем теории пространственных квазиконформных отображений; результаты Л. в этой области — основа геометрич. метода решения широкого круга задач математики и математич. физики.

М. А. Лаврентьев.

М. М. Лаврентьев.

В механике сплошной среды и прикладной физике Л. также создал ряд новых направлений; им получены крупные результаты в теории крыла, теории длинных волн, теории струй. Л. дал (одновременно с зарубежными учёными) гидродинамич. трактовку явления кумуляции. Основная её идея состоит в том, что при столь высоких давлениях, к-рые возникают при взрывах, можно с достаточной достоверностью рассматривать металл как несжимаемую жидкость, а образование кумулятивной струи — как задачу о взаимодействии струй жидкости. Эта идея, подтверждённая экспериментально, стала основой для дальнейшего развития работ в области кумуляции и оказала влияние на исследование физики взрыва и импульсных процессов вообще. Из работ Л. по исследованию процессов кумуляции выросли такие прикладные направления, как теория направленного взрыва, сварка взрывом, высокоскоростной удар, создан новый тип взрывного заряда — шнуровой заряд, что привело к созданию советской школы по народнохозяйств. использованию взрыва. Для работ Л. характерна органич. связь математич. теорий с нуждами практики, умение сочетать теоретич. и прикладные исследования.

Л.— действительный чл. Чехословацкой АН (1957), чл. Американского математич. общества (1964), иностранный почётный чл. Болгарской АН (1966), иностранный чл. АН ГДР (1969), действительный чл. Международной академии астронавтики (1970), иностранный чл. Польской АН (1971), Парижской АН (1971), Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина» (1971), Академии Финляндии (1975), а также научных учреждений и обществ (в 1966—70 вице-президент Международного математич. союза). На 22—24-м съездах КПСС избирался кандидатом в чл. ЦК КПСС. Депутат Верховного Совета СССР 5—8-го созывов. Ленинская премия (1958), Государственные премии СССР (1946, 1949), Золотая медаль имени М. В. Ломоносова АН СССР (1978). Награждён 5 орденами Ленина (1953, 1956, 1960, 1967, 1975), орденом Октябрьской Революции (1970), 4 орденами Трудового Красного Знамени (1945, 1948, 1954, 1956), орденом Отечественной войны 2-й степени (1944), а также болгарским орденом Кирилла и Мефодия I степени (1969), французским орденом Почётного легиона степени «Командор» (1971).



Э. Н. Лагерр.

Ж. Л. Лагранж.

В 1980 в АН СССР учреждена Золотая медаль и премия имени М. А. Лаврентьева.

■ Методы теории функций комплексного переменного, 4 изд., М., 1973 (соавтор Б. В. Шабат); Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, М., 1962; Проблемы гидродинамики и их математические модели, М., 1973 (соавтор Б. В. Шабат); Опыты жизни. 50 лет в науке, в кн. «Советские ученые. Очерки и воспоминания», М., 1983, с. 232—76.

● Некоторые проблемы математики и механики [К 70-летию акад. М. А. Лаврентьева], Л., 1970; Михаил Алексеевич Лаврентьев, М., 1971 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР); «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 2.

ЛАВРЕНТЬЕВ Михаил Михайлович (р. 21.7.1932, Москва) — советский математик, акад. (1981; чл.-корр. 1968) АН СССР. Чл. КПСС с 1963. Сын М. А. Лаврентьева. Окончил Московский ун-т (1954). С 1957 работает в Сибирском отделении АН СССР (с 1986 директор Ин-та математики). Один из создателей теории т. н. некорректных (точнее, условно-корректных) задач математич. физики. Л. принадлежит также ряд крупных результатов по многомерным обратным задачам для дифференциальных уравнений, возникающих при изучении строения Земли по наблюдаемым геофизич. полям. Ленинская премия (1962), Государственная премия СССР (1987). Награждён орденом Октябрьской Революции (1975), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1967, 1982).

■ О задаче Коши для уравнения Лапласа, «Изв. АН СССР. Сер. математическая», 1956, т. 20, с. 819—42; О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосиб., 1962; Некорректные задачи математической физики и анализа, М., 1980 (соавторы В. Г. Романов, С. П. Шишатский).

● «Вестник АН СССР», 1983, № 1.

ЛАГЕРР Эдмон Никола (Laguerre Edmond Nicolas) (9.4.1834, Бар-ле-Дюк,— 13.8.1886, там же) — французский математик, чл. Парижской АН (1885). Окончил Политехнич. школу в Париже (1854). Основные труды по геометрии, теории функций комплексного переменного; изучал ортогональные многочлены (многочлены Лагерра).

ЛАГИР Ф. — см. *Лаир* Ф. де.

ЛАГРАНЖ Жозеф Луи (Lagrange Joseph Louis) (25.1.1736, Турин,— 10.4.1813, Париж) — французский математик и механик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1776),

О. А. Ладыженская.

Ф. Лаир.

И. Г. Ламберт.

Г. Ламе.

чл. Парижской АН (1772). Родился в семье обедневшего чиновника. Самостоятельно изучал математику. В 19 лет стал проф. в артиллерийской школе Турина. В 1759 избран чл. Берлинской АН, а в 1766—87 — директором её Математич. класса. В 1787 переехал в Париж; с 1795 проф. Нормальной школы, с 1797 — Политехнич. школы.

Наиболее важные труды Л. относятся к вариационному исчислению и механике. Обобщая в аналитич. форме результаты, полученные Л. Эйлером (1744), он в сер. 50-х гг. разработал удобный алгоритм вариационного исчисления, позволивший ему решить более широкий класс вариационных задач (задача Лагранжа); существенную роль при этом сыграло введение Л. понятия и знака вариации δ. Его исследования, изложенные сначала в письмах к Л. Эйлеру, были развиты далее последним. В классич. трактате «Аналитическая механика» (1788; рус. пер., т. 1—2, 2 изд., 1950) Л. в основу всей статики положил «общую формулу», являющуюся принципом возможных перемещений, а в основу всей динамики — «общую формулу», являющуюся сочетанием принципа возможных перемещений с принципом Д'Аламбера. Из «общей формулы» динамики может быть получена, как частный случай, «общая формула» статики. Л. ввёл обобщённые координаты и придал уравнениям движения форму, называемую его именем. Л. стремился установить «простые» и «всеобщие» принципы механики. При этом исходил из характерных для прогрессивных учёных 18 в. представлений, что только такие принципы могут быть истинными, соответствующими объективной реальности.

Л. принадлежат выдающиеся исследования по различным вопросам математич. анализа (построение анализа на базе представления функций в степенные ряды, формула остаточного члена ряда Тейлора, формула конечных приращений — формула Лагранжа, теория условных экстремумов — метод множителей Лагранжа), теории чисел (теорема Лагранжа), алгебре (метод Лагранжа приведения квадратичной формы, симметрич. функции корней уравнения, теория и приложения непрерывных дробей), дифференциальным уравнениям (теория особых решений, метод вариации постоянных), интерполированию (интерполяционная формула Лагранжа), математич. картографии, астрономии и пр.

■ Oeuvres, t. 1—14, P., 1867—92.

● Жозеф Луи Лагранж. 1736—1936. Сборник статей к 200-летию со дня рождения, М.—Л., 1937; Тюлина И. А., Жозеф Луи Лагранж, М., 1977.

ЛАДЫЖЕНСКАЯ Ольга Александровна (р. 7.3.1922, Кологрив Костромской обл.) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1981). Окончила Московский ун-т (1947). С 1949 работает в Ленинградском ун-те (с 1955 проф.) и с 1954 — в Ленинградском отделении Математич. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР (с 1961 зав. лабораторией). Основные труды по дифференциальным уравнениям с частными производными, функциональному анализу и их приложениям к задачам математич. физики. Иностранный чл. Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина» (1985). Государственная премия СССР (1969), премия имени П. Л. Чебышева АН СССР (1966).

■ Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953; Краевые задачи математической физики, М., 1973; Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2 изд., М., 1970; Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М., 1967 (соавторы В. А. Солонников и Н. Н. Уральцева); Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, 2 изд., М., 1973 (соавтор Н. Н. Уральцева).

● «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 5.

ЛАЙР, Лагир, Ла Гир Филипп де (La Hire Philippe de) (18.3.1640, Париж,— 21.4.1718, там же) — французский математик и механик, чл. Парижской АН (1678), проф. Коллеж де Франс. Основные математич. труды по проективной и аналитич. геометрии. Л. систематически пользовался методом координат, впервые ввёл (1679) термин «начало координат» и обозначил его буквой O; обобщил метод координат на пространство; исследовал (1666, 1694) свойства гипо- и эпициклоид.

ЛАКРУА Сильвестр Франсуа (Lacroix Sylvestre François) (28.4.1765, Париж,— 25.5.1843, там же) — французский математик, чл. Парижской АН (1799), с 1815 проф. Парижского ун-та. Основные труды по математич. анализу, теории вероятностей. Автор многих учебников.

■ Курс математики, ч.1—7, СПБ, 1822—26.

ЛАКС Петер (Lax Peter) (р. 1.5.1926, Будапешт) — американский математик, чл. Национальной АН США (1978). Окончил Нью-Йоркский ун-т. С 1958 проф. Ин-та математич. наук им. Р. Куранта. Основные труды по дифференциальным уравнениям с частными производными и прикладной математике, а также по теории рассеяния.

■ Теория рассеяния, М., 1971 (соавтор Р. Филлипс); Теория рассеяния для автоморфных функций, М., 1979 (соавтор Р. Филлипс).

ЛАМБЕРТ Иоганн Генрих (Lambert Johann Heinrich) (26.8.1728, Мюльхаузен,— 25.9.1777, Берлин) — немецкий математик, астроном, физик и философ, чл. Берлинской АН (1765). Основные математич. труды по геометрии (вопросы теории параллельных прямых, конич. сечений, перспективы), сферич. тригонометрии и алгебре. Первым доказал (1766) иррациональность числа π. Впервые применил (1768) аппарат гиперболич. функций и дал им названия. Разрабатывая логич. исчисление, предвосхитил многие идеи алгебры логики Дж. Буля.

■ Opera mathematica, v. 1—2, Z., 1946—48.

● Историко-математические исследования, в. 25, М., 1980.

ЛАМЕ Габриель (Lamé Gabriel) (22.7.1795, Тур,— 1.5.1870, Париж) — французский математик и инженер, чл.-корр. Петербургской АН (1829), чл. Парижской АН (1843), проф. Политехнич. школы (1832—63) и Парижского ун-та (1848—63). В 1820—32 работал в России (в Ин-те корпуса инженеров путей сообщения в Петербурге). Основные труды по математич. физике и теории упругости. Л. разработал (1833) общую теорию криволинейных координат, ввёл (1859) т. н. коэффициенты Ламе и специальный класс функций (1839, функции Ламе).

■ Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs divers applications, P., 1859; Leçons sur la théorie analitique de la chaleur, P., 1861.

● Воронина М. М., Габриэль Ламе. 1795—1870, Л., 1987.

ЛАНДАУ Эдмунд Георг Герман (Landau Edmund Georg Hermann) (14.2.1877, Берлин,— 19.2.1938, там же) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. (1924) и иностранный почётный чл. (1932) АН СССР, проф. ун-та в Гёттингене (1909—34). Основные труды по аналитич. теории чисел и теории функций комплексного переменного. Отправляясь от свойств натурального числового ряда, написал курс анализа, построенный с безупречной логич. строгостью.

■ Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd 1—3, Lpz., 1927; Основы анализа, М., 1947; Введение в дифференциальное и интегральное исчисление, М., 1948.

● «The Journal of the London Mathematical Society», 1938, v. 13, № 4, p. 302—10.

ЛАПЛАС Пьер Симон (Laplace Pierre Simon) (23.3.1749, Бомон-ан-Ож, Нормандия,— 5.3.1827, Париж) — французский астроном, математик и физик,

Э. Г. Г. Ландау.

П. С. Лаплас.

иностранный почётный чл. Петербургской АН (1802), чл. Парижской АН (1785; адъюнкт с 1773), чл. Французской академии (1816). Учился в школе бенедиктинцев, из к-рой вышел, однако, убеждённым атеистом. В 1766 Л. приехал в Париж, где Ж. Д'Аламбер через пять лет помог ему получить место проф. Военной школы. Деятельно участвовал в реорганизации системы высшего образования во Франции, в создании Нормальной и Политехнич. школ. В 1790 Л. был назначен председателем Палаты мер и весов, руководил введением в жизнь новой метрич. системы мер. С 1795 в составе руководства Бюро долгот.

Научное наследие Л. относится к области небесной механики, математики и математич. физики. Фундаментальными являются работы Л. по дифференциальным уравнениям, в частности по исследованию т. н. уравнения Лапласа, интегрированию методом «каскадов» уравнений с частными производными. Введённые Л. сферич. функции имеют разнообразные применения. В алгебре Л. принадлежит важная теорема о представлении определителей суммой произведений дополнительных миноров (теорема Лапласа). Для разработки созданной им математич. теории вероятностей Л. ввёл т. н. производящие функции и широко применял преобразование, носящее его имя (преобразование Лапласа). Теория вероятностей явилась основой для изучения всевозможных статистич. закономерностей, в особенности в области естествознания. До него первые шаги в этой области были сделаны Б. Паскалем, П. Ферма, Я. Бернулли и другими. Л. привёл их выводы в систему, усовершенствовал методы доказательств, сделав их менее громоздкими; доказал (1812) теорему, носящую его имя (теорема Лапласа), развил теорию ошибок и способ наименьших квадратов, позволяющие находить наивероятнейшие значения измеренных величин и степень достоверности этих подсчётов. Классич. труд Л. «Аналитическая теория вероятностей» («Théorie analytique des probabilités») издавался трижды при его жизни — в 1812, 1814 и 1820; в качестве введения к последним изданиям была помещена работа «Опыт философии теории вероятностей» (1814), в к-рой в популярной форме разъясняются основные положения и значение теории вероятностей.

Вместе с А. Лавуазье в 1779—84 Л. занимался физикой, в частности вопросом о скрытой теплоте плавления тел и работами с созданным ими ледяным калориметром. Для измерения линейного расширения тел они впервые применили зрительную трубу; изучали горение водорода в кислороде. Л. активно выступал против ошибочной гипотезы о флогистоне. Позднее снова вернулся к физике и математике. Он опубликовал ряд работ по теории капиллярности и установил закон, носящий его имя. В 1809 Л. занялся вопросами акустики; вывел формулу для скорости распространения звука в воздухе. Л. принадлежит барометрич. формула для вычисления изменения плотности воздуха с высотой над поверхностью Земли, учитывающая влияние влажности воздуха и изменение ускорения свободного падения. Занимался также геодезией.

Л. развил методы небесной механики и завершил почти всё то, что не удалось его предшественникам в объяснении движения тел Солнечной системы на основе закона всемирного тяготения Ньютона; ему удалось доказать, что закон всемирного тяготения полностью объясняет движение планет, если представить их взаимные возмущения в виде рядов. Он установил также, что эти возмущения носят периодич. характер. В 1780 Л. предложил новый способ вычисления орбит небесных тел. Исследования Л. доказали устойчивость Солнечной системы в течение очень длительного времени. Далее Л. пришёл к заключению, что кольцо Сатурна не может быть сплошным, т. к. в этом случае оно было бы неустойчиво, и предсказал открытие сильного сжатия Сатурна у полюсов. В 1789 Л. рассмотрел теорию движения спутников Юпитера под действием взаимных возмущений и притяжения к Солнцу. Он получил полное согласие теории с наблюдениями и установил ряд законов этих движений. Одной из главных заслуг Л. было открытие причины ускорения в движении Луны. В 1787 он показал, что средняя скорость движения Луны зависит от эксцентриситета земной орбиты, а последний меняется под действием притяжения планет. Л. доказал, что это возмущение не вековое, а долгопериодическое и что впоследствии Луна станет двигаться замедленно. По неравенствам в движении Луны Л. определил величину сжатия Земли у полюсов. Ему принадлежит также разработка динамич. теории приливов. Небесная механика во многом обязана трудам Л., к-рые подытожены им в классич. соч. «Трактат о небесной механике» (т. 1—5, 1798—1825).

Космогоническая гипотеза Л. имела огромное философское значение. Она изложена им в приложении к его книге «Изложение системы мира» (т. 1—2, 1796).

И. А. Лаппо-Данилевский.

А. Л. Лебег.

По философским взглядам Л. примыкал к французским материалистам; известен ответ Л. Наполеону I, что в своей теории о происхождении Солнечной системы он не нуждался в гипотезе о существовании бога. Ограниченность механистич. материализма Л. проявилась в попытке объяснить весь мир, в том числе физиологические, психические и социальные явления, с точки зрения механистич. детерминизма. Своё понимание детерминизма Л. рассматривал как методологич. принцип построения всякой науки. Образец окончательной формы научного познания Л. видел в небесной механике. Лапласовский детерминизм стал нарицательным обозначением механистич. методологии классич. физики. Материалистич. мировоззрение Л., ярко сказавшееся в научных трудах, контрастирует с его политич. неустойчивостью. При всяком политич. перевороте Л. переходил на сторону победивших; сначала был республиканцем, после прихода к власти Наполеона — министром внутренних дел; затем был назначен членом и вице-председателем сената, при Наполеоне получил титул графа империи, а в 1814 подал свой голос за низложение Наполеона; после реставрации Бурбонов получил пэрство и титул маркиза.

■ Oeuvres..., t. 1—14, P., 1878—1912; Изложение системы мира, т. 1—2, СПБ, 1861; Опыт философии теории вероятностей, М., 1908.

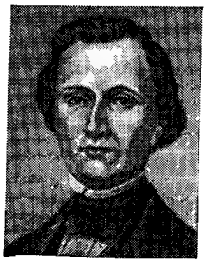
● Воронцов-Вельяминов Б. А., Лаплас, 2 изд., М., 1985.

ЛАППО-ДАНИЛЕВСКИЙ Иван Александрович [16(28).10.1896, Петербург,— 15.3.1931, Гисен, Германия] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1931). В 1925 окончил Ленинградский ун-т, работал в ряде ленинградских высших учебных заведений. Л.-Д. построил теорию функций от матриц и применил её к решению основных проблем теории линейных дифференциальных уравнений, что позволило ему получить ряд фундаментальных результатов.

■ Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1957.

● «Изв. АН СССР. Отделение математических и естественных наук», 1931, т. 6, с. 729—32.

ЛЕБЕ́Г Анри Леон (Lebesgue Henri Léon) (28.6.1875, Бове, деп. Уаза,—



У. Ж. Ж. Леверье.

Б. Леви.

П. П. Леви.

Т. Леви-Чивита.

А. М. Лежандр.

Г. В. Лейбниц.

26.7.1941, Париж) — французский математик, иностранный чл.- корр. АН СССР (1929), чл. Парижской АН (1922), с 1910 проф. Парижского ун-та. Один из основателей современной теории функций действительного переменного. Главная заслуга Л.— создание теории меры (мера Лебега), понятия измеримой функции и обобщение понятия интеграла (интеграла Лебега), основанное на теории меры и позволяющее интегрировать чрезвычайно широкий класс функций. Применил своё определение интеграла к рядам Фурье. Его исследования о возможности аналитич. изображения функций способствовали созданию дескриптивной теории функций. Л. получил также важные результаты геометрич. и топологич. характера.

■ Leçons sur les séries trigonométriques, P., 1906; Интегрирование и отыскание примитивных функций, М.—Л., 1934; Об измерении величин, 2 изд., М., 1960.

● Тумаков И. М., Анри Леон Лебег, М., 1975.

ЛЕВЕРЬЕ́ Урбен Жан Жозеф (Le Verrier Urbain Jean Joseph) (11.3.1811, Сен-Ло,— 23.9.1877, Париж) — французский астроном, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1848), чл. Парижской АН (1846). Одновременно с Дж. Адамсом установил (1846) положение планеты, названной позднее Нептуном.

ЛЕ́ВИ Беппо (Levi Beppo) (14.5.1875, Турин,— 28.8.1961, Розарио) — итальянский математик, чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме. Окончил Туринский ун-т (1896), работал там же и в других ун-тах Италии. С 1939 проф. и директор Ин-та математики Национального ун-та в Росарио (Аргентина). Основные труды по теории функций, высшей геометрии, квантовой механике.

ЛЕВИ́ Поль Пьер (Lévy Paul Pierre) (15.9.1886, Париж,— 15.12.1971, там же) — французский математик, чл. Парижской АН (1964), с 1920 проф. Политехнич. школы в Париже. Основные труды по теории вероятностей, где он был одним из основоположников (1934) общих предельных теорем (каноническое представление Леви — Хинчина), и теории случайных процессов, функциональному анализу, теории функций, механике.

■ Théorie de l'addition des variables aléatoires, 2 éd., P., 1954; Конкретные проблемы функционального анализа, М., 1968; Стохастические процессы и броуновское движение, М., 1972.

ЛЕ́ВИ-ЧИВИ́ТА Туллио (Levi-Civita Tullio) (29.3.1873, Падуя,— 29.12.1941, Рим) — итальянский математик и механик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1904) и иностранный почётный чл. АН СССР (1934), проф. ун-тов в Падуе (1898—1918) и Риме (1918—38). Привёл в систему тензорный анализ (1901; вместе с Г. Риччи-Курбастро). Впервые поставил и решил вопрос о «регуляризации» ограниченной проблемы трёх тел. Автор ряда работ по небесной механике, гидродинамике, теории дифференциальных уравнений. Математически обосновал теорию адиабатич. инвариантов, введённых А. Эйнштейном.

■ Opere matematiche. Memorie e note, v. 1—4, Bologna, 1954—60.

● «The Journal of the London Mathematical Society», 1943, v. 18, № 70, p. 107.

ЛЕЖА́НДР Адриен Мари (Legendre Adrien Marie) (18.9.1752, Париж,— 10.1.1833, там же) — французский математик, чл. Парижской АН (1783). Л. обосновал и развил теорию геодезич. измерений и первым открыл (1805—06) и применил в вычислениях метод наименьших квадратов. В области математич. анализа им введены т. н. многочлены Лежандра, преобразование Лежандра и исследованы эйлеровы интегралы. Л. доказал приводимость эллиптич. интегралов к канонич. формам (нормальная форма Лежандра), нашёл их разложения в ряды, составил таблицы их значений. Дал первое последовательное и полное изложение современной ему теории чисел (ввёл т. н. символ Лежандра). В вариационном исчислении установил признак существования экстремума (условие Лежандра). Написал известный учебник геометрии («Eléments de géométrie», P., 1794), где в нек-рых изданиях он безуспешно пытался доказать постулат о параллельных.

■ Traité des fonctions elliptiques et des intégrales culériennes, t. 1—3, P., 1825—28; Théorie des nombres, 4 éd., t. 1—2, P., 1855; Основания геометрии и тригонометрии, СПБ, 1837.

● Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины 19 столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966.

ЛЕ́ЙБНИЦ Готфрид Вильгельм (Leibniz Gottfried Wilhelm) (1.7.1646, Лейпциг,— 14.11.1716, Ганновер) — немецкий философ-идеалист, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед, чл. Лондонского королевского общества (1673), чл. Парижской АН (1700). Изучал юриспруденцию и философию в Лейпцигском и Йенском ун-тах. В 1668 поступил на службу к курфюрсту Майнца. В 1672 отправился с дипломатич. миссией в Париж, где пробыл до 1676, изучая математику и естествознание. В декабре 1676 возвратился в Германию и последующие 40 лет состоял на службе у ганноверских герцогов, сначала в качестве придворного библиотекаря, затем — герцогского историографа и тайного советника юстиции. В 1687—90 совершил поездку по Юж. Германии, Австрии и Италии с целью сбора материала для «Истории Брауншвейга». В 1700 стал первым президентом созданного по его инициативе Бранденбургского научного общества (позднее — Берлинская АН). В 1711, 1712 и 1716 встречался с Петром I, разработал по его просьбе ряд проектов по развитию образования и государственного управления в России. В 1712—14 жил в Вене. Вёл обширную переписку почти со всеми крупнейшими учёными, а также политич. деятелями.

В философии Л. явился завершителем философии 17 в., предшественником немецкой классич. философии. Реальный мир, по Л., состоит из бесчисленных психич. деятельных субстанций — монад, находящихся между собой в отношении предустановленной гармонии; существующий мир создан богом как «наилучший из всех возможных миров». В духе рационализма развил учение о прирождённой способности ума к познанию высшей категории бытия и всеобщих и необходимых истин логики и математики. Учение Л. содержит элементы диалектики.

В физике Л. развивал учение об относительности пространства, времени и движения. Л. установил в качестве количества меры движения «живую силу» (кинетич. энергию) — произведение массы тела на квадрат скорости, в противоположность Р. Декарту, к-рый считал мерой движения произведение массы на скорость — «мёртвую силу», как назвал её Л. Использовав отчасти результаты Х. Гюйгенса, Л. открыл закон сохранения «жи-

вых сил», явившийся первой формулировкой закона сохранения энергии, а также высказал идею о превращении одних видов энергии в другие. Исходя из философского принципа оптимальности всех действий природы, Л. сформулировал один из важнейших вариационных принципов физики — «принцип наименьшего действия» (впоследствии получивший назв. принципа Мопертюи). Л. принадлежит также ряд открытий в специальных разделах физики: в теории упругости, теории колебаний, в частности открытие формулы для расчёта прочности балок, и т. д.

В логике Л. развил учение об анализе и синтезе, впервые сформулировал закон достаточного основания, ему принадлежит также принятая в современной логике формулировка закона тождества. Л. создал наиболее полную для того времени классификацию определений, разработал теорию генетич. определений и др. В работе Л. «Рассуждение о комбинаторном искусстве» («Dissertatio de arte combinatoria», Lipsiae, 1666) предвосхищены нек-рые моменты современной математич. логики; Л. выдвинул идею применения в логике математич. символики и построений логич. исчислений, поставил задачу логич. обоснования математики, предложил использовать двоичную систему счисления для целей вычислительной математики. Л. впервые высказал мысль о возможности машинного моделирования человеческих функций, ввёл термин «модель».

В математике важнейшей заслугой Л. является разработка (наряду с И. Ньютоном) дифференциального и интегрального исчисления, имевшая огромное значение для дальнейшего развития математики и естествознания. С основными достижениями современной ему математики Л. познакомился под влиянием бесед с Х. Гюйгенсом в 1672—73. Изучив «Геометрию» Р. Декарта и труды Б. Кавальери, Дж. Валлиса, Б. Паскаля, Н. Меркатора и самого Х. Гюйгенса, Л. занялся исчислением бесконечно малых, в к-ром он правильно увидел важнейший инструмент для разработки проблем физики.

Ещё до Л. был создан ряд приёмов решения задач на проведение касательных, отыскание экстремумов, вычисление квадратур и т. п. Однако в работах предшественников Л. отсутствовал общий метод, позволяющий распространить исследования, ограниченные преимущественно целыми алгебраическими функциями, на любые дробные и иррациональные и особенно на трансцендентные функции; в этих работах не были сколько-нибудь отчётливо выделены основные понятия анализа и не были установлены их взаимосвязи, не имелось развитой и единой символики. Л. свёл частные и разрозненные приёмы в единую систему взаимно связанных понятий анализа, выраженных в обозначениях, позволяющих производить действия с бесконечно малыми по правилам определённого алгоритма. Уже в своих парижских рукописных заметках, относящихся к октябрю и ноябрю 1675, Л. подвёл первые итоги работы; он сформулировал понятия дифференциала как бесконечно малой разности двух бесконечно близких значений переменной величины, и интеграла как суммы бесконечного числа дифференциалов и дал простейшие правила дифференцирования и интегрирования; здесь же впервые встречаются у Л. современные знаки дифференциала d и интеграла $\int$. К периоду жизни в Париже относятся открытие им (1673—74) известного знакопеременного ряда (ряда Лейбница) и создание конструкции счётной машины (1673—74). В опубликованном в 1684 первом мемуаре по дифференциальному исчислению «Новый метод максимумов и минимумов...» Л. были даны определение и знак дифференциала и приведены без доказательства правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного, любой постоянной степени, функции от функции (инвариантность первого дифференциала), а также правила отыскания и различения (с помощью второго дифференциала) максимумов и минимумов и отыскание точек перегиба. Дифференциал функции был определён как отношение ординаты к подкасательной, умноженное на дифференциал аргумента, величина к-рого может быть взята произвольно; вместе с тем Л. указал, что дифференциалы пропорциональны бесконечно малым приращениям величин и что на основании этого легко получить доказательства его правил. За мемуаром 1684 последовал ряд других, в своей совокупности охватывающих все начальные отделы дифференциального и интегрального исчисления. В этих работах Л. дал определение и знак интеграла (1686), подчёркивая взаимно обратный характер обеих главных операций анализа, указал правила дифференцирования общей показательной функции и многократного дифференцирования произведения (формула Лейбница, 1695), положил начало интегрированию рациональных дробей (1702—03). Особо следует отметить применение (к изучению функций и решению дифференциальных уравнений) бесконечных степенных рядов (1693), которому Л. справедливо придавал принципиально важное значение, и описание механизма для приближённого графич. интегрирования (1693). Последняя работа Л., наряду с изобретением им счётной машины, даёт право считать его одним из первых провозвестников современной «машинной математики». Силу своих общих методов Л. показал, решив с их помощью ряд трудных задач; например, он установил (1691), что подвешенная за два конца тяжёлая гибкая однородная нить имеет форму цепной линии, и, наряду с И. Ньютоном, Я. и И. Бернулли и Г. Лопиталем, решил задачу о брахистохроне (1696). Большую роль в распространении идей Л. сыграла его обширная переписка; нек-рые открытия были им изложены лишь в письмах: начала теории определителей (1693), обобщение понятия дифференциала на отрицательные и дробные показатели (1695), признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница, 1682), приёмы решения в квадратурах ряда типов обыкновенных дифференциальных уравнений и др. Л. принадлежат термины «дифференциал», «дифференциальное исчисление», «дифференциальное уравнение», «алгоритм» (в близком к современному смысле), «функция», «координаты», «алгебраические и трансцендентные кривые». Работы Л. заложили прочные основы дальнейшего развития анализа, в разработке к-рого с ним сотрудничали его ученики Я. и И. Бернулли, Г. Лопиталь и др.

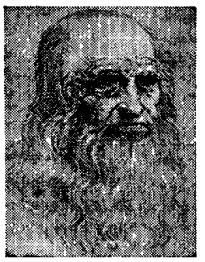
Вокруг вопроса о приоритете создания дифференциального и интегрального исчисления между Л. и И. Ньютоном возник длительный, бесплодный спор, тенденциозно раздувавшийся их сторонниками. Первые результаты в этой области И. Ньютон получил ранее Л. (в 1665 и позже), но Л. пришёл к тем же результатам самостоятельно и опубликовал их значительно раньше. Алгоритм и символика Л., к-рой он придавал особое значение, имели решающие преимущества перед ньютоновыми.

Попытки Л. дать строгое обоснование анализа не увенчались успехом; он колебался между различными трактовками бесконечно малых, пытался иногда прибегнуть к неуточнённым идеям предела и непрерывности. Взгляды Л. на природу бесконечно малых и на обоснование операций над ними вызвали критику ещё при его жизни, а удовлетворяющее современным научным требованиям обоснование анализа могло быть дано только в 19 в.

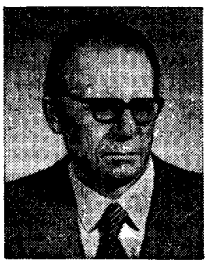
Кроме анализа Л. сделал ряд важных открытий в др. областях математики: в комбинаторике, алгебре (начала теории определителей), геометрии, где он заложил основы теории соприкосновения кривых (1686), разрабатывал одновременно с Х. Гюйгенсом теорию огибающих семейства кривых (1692—94), выдвинул идею геометрич. исчислений.

В работе «Протогея» (1693) Л. высказал мысль об эволюции земли и обобщил собранный им материал в области палеонтологии. В биологию Л. ввёл идею целостности органич. систем, принцип несводимости органического к механическому; эволюцию

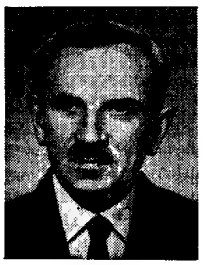
А. И. Лексель.



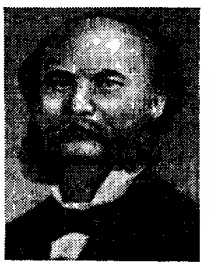
Леонардо да Винчи.



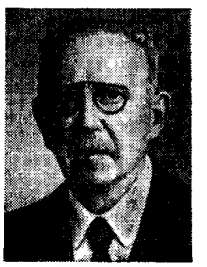
А. Ф. Леонтьев.



Ж. Лере.



А. В. Летников.



С. Лефшец.

он понимал как непрерывное развёртывание преформированных зародышей. В психологии Л. выдвинул понятие бессознательных «малых перцепций» и развил учение о бессознательной психич. жизни.

В языкознании Л. создал теорию историч. происхождения языков, дал их генеалогич. классификацию, развил учение о происхождении названий. Л. явился одним из создателей научного лексикона.

В области политики и права Л. защищал концепцию естественного права и учение об общественном договоре, был автором ряда унионистских церковных проектов (объединение католич. и протестантской церкви, объединение лютеран и реформаторов), пропагандировал союз князей всей Германии и мирное сотрудничество в Европе.

Л. был талантливым изобретателем: он проектировал оптич. приборы и гидравлич. машины, работал над созданием «пневматич. двигателя», изобрёл первый интегрирующий механизм и уникальную для того времени счётную машину.

Л. оказал значительное влияние на последующее развитие философии и науки. Распространению идей Л. в Германии способствовали ученик Л. и систематизатор его философии Х. Вольф и его школа. Л. ещё при жизни стал создателем математич. школы (братья Я. и И. Бернулли, Г. Лопиталь и др.), из к-рой в 18 в. вышел Л. Эйлер.

■ Opera omnia, t. 1—6, Genevae, 1768; Избранные философские сочинения, М., 1908; Избранные отрывки из математических сочинений, «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 1.

● История математики, т. 2, М., 1970; Погребысский И. Б., Готфрид Вильгельм Лейбниц. 1646—1716, М., 1971; Майоров Г. Г., Теоретическая философия Г. В. Лейбница, М., 1973.

ЛЕ́КСЕЛЬ Андрей Иванович (Lexell Andreas Johann) [24.12.1740, Або, ныне Турку,— 30.11.1784, Петербург] — русский математик и астроном, акад. Петербургской АН (1771; адъюнкт с 1769). По национальности швед. Многие работы Л. связаны с тематикой Л. Эйлера. Основные труды по астрономии. Математич. труды по сферич. геометрии и тригонометрии, интегрированию и дифференциальным уравнениям.

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

ЛЕНГ, Лэнг Сёрдж (Lang Serge) (р. 19.5.1927, Париж) — американский математик, проф. Колумбийского ун-та. Основные труды по многим разделам алгебры и теории чисел.

■ Алгебраические числа, М., 1966; Введение в теорию дифференцируемых многообразий, М., 1967; Алгебра, М., 1968; Введение в теорию диофантовых приближений, М., 1970; Введение в алгебраические и абелевы функции, М., 1976; $SL_\alpha(R)$, М., 1977; Введение в теорию модулярных форм, М., 1979; Эллиптические функции, М., 1984; Основы диофантовой геометрии, М., 1986.

ЛЕОНА́РДО Пизанский (Leonardo Pisano), Фибоначчи (Fibonacci) (1180—1240) — итальянский математик. Путешествуя по Востоку, познакомился с достижениями арабской математики; способствовал передаче их на Запад. Основные труды Л.: «Книга абака» («Liber Abaci», 1202)— трактат об арифметике (индийские цифры, числа Фибоначчи) и алгебре (до квадратных уравнений включительно), «Практика геометрии» («Practica Geometriae», 1220); они являются первыми произведениями, содержащими задачи на приложение алгебры к геометрии.

● История математики, т. 1, М., 1970.

ЛЕОНА́РДО ДА ВИ́НЧИ (Leonardo da Vinci) (15.4.1452, Винчи, близ Флоренции,— 2.5.1519, замок Клу, Турень, Франция) — итальянский живописец, скульптор, архитектор, учёный и инженер, один из величайших деятелей культуры эпохи Возрождения. Ранние годы провёл во Флоренции, где сложился как художник и приобщился к науке, затем жил и работал в разных городах Италии и в последние годы во Франции. Искусство и наука были неотделимы для Л. да В., видевшего в них средство объективного познания реального мира. Около 7 тыс. страниц сохранившихся рукописей Л. да В. содержат его мысли по различным вопросам искусства, науки и техники. Из этих записей был составлен позже «Трактат о живописи», где изложено учение о перспективе не только линейной, но и (разработанной Л. да В.) воздушной, приводятся сведения о пропорциях (в частности, Л. да В. принадлежит термин «золотое сечение»), способах изображения предметов. Среди сравнительно немногочисленных математич. записей наиболее значительное место занимают вопросы преобразования равновеликих фигур и тел, а также исследование т. н. луночек.

■ Книга о живописи, М., 1934; Избранные естественно-научные произведения, М., 1955.

ЛЕОНЕ́ЛЛИ Джузеппе Зеккини (Leonelli Giuseppe Zecchini) (1776, Кремона,— 12.10.1847)— итальянский математик. Опубликовал (1802) таблицы т. н. гауссовых логарифмов (логарифмов сумм и разностей).

ЛЕО́НТЬЕВ Алексей Фёдорович [14(27).3.1917, с. Яковцево, ныне Вачского р-на Горьковской обл.,— 14.4.1987, Уфа] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1970). Окончил Горьковский ун-т (1939). С 1971 работал в Башкирском филиале АН СССР. Основные труды по аппроксимации и интерполяции функций в комплексной области, теории рядов Дирихле и их обобщений, дифференциальным уравнениям бесконечного порядка. Награждён орденом Октябрьской Революции (1987), орденом Трудового Красного Знамени (1975).

■ Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, М., 1951; Ряды экспонент, М., 1976; Последовательности полиномов из экспонент, М., 1980; Обобщения рядов экспонент, М., 1981.

● «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 3; 1987, т. 42, в. 5.

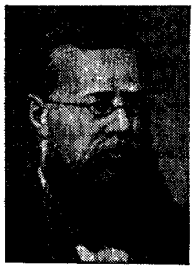
ЛЕРЕ́ Жан (Leray Jean) (р. 7.11.1906, Шантене) — французский математик, иностранный чл. АН СССР (1966), чл. Парижской АН (1953). Учился в Высшей нормальной школе, с 1947 проф. в Коллеж де Франс. Основные труды по функциональному анализу (метод неподвижной точки Лере — Шаудера), алгебраич. топологии и дифференциальным уравнениям с частными производными гиперболич. типа.

■ Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии, М., 1961; Лагранжев анализ и квантовая механика, М., 1981; Задача Коши, М., 1967 (соавторы Л. Гординг и Т. Котаке); Обобщенное преобразование Лапласа, М., 1969; Гиперболические дифференциальные уравнения, М., 1984.

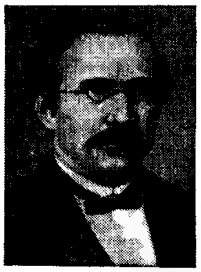
ЛЕ́ТНИКОВ Алексей Васильевич [1(13).1.1837, Москва,— 27.2(10.3).1888, там же] — русский математик, чл.-корр. Петербургской АН (1884), с 1868 проф. Московского технич. училища. Основные труды по математич. анализу, разрабатывал теорию дифференцирования с произвольным (дробным и отрицательным) указателем порядка дифференцирования.

● Историко-математические исследования, в. 5, М., 1952, с. 167—238.

ЛЕ́ФШЕЦ Соломон (Lefschetz Solomon) (3.9. 1884, Москва,— 6.10.1972, Прин-



М. С. Ли.



Л. Л. Линделёф.

стон) — американский математик, чл. Национальной АН США (1925), чл. Парижской АН (1963), проф. Принстонского ун-та (1924—53). Основные труды по алгебраич. геометрии (теория многомерных алгебраич. многообразий с существенным приложением топологич. методов) и топологии (общая теория пересечения циклов в многообразиях, алгебраич. теория непрерывных отображений).

■ Алгебраическая топология, М., 1949; Геометрическая теория дифференциальных уравнений, М., 1961; Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, М., 1964 (соавтор М. Ла-Салль).

ЛИ Мариус Софус (Lie Marius Sophus) [17.12.1842, Норфьордейд,— 18.2.1899, Кристиания (Осло)] —норвежский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1896), проф. ун-тов в Кристиании (с 1872) и Лейпциге (1886—98). Создатель классич. теории непрерывных групп (называемой теорией групп Ли), развитой впоследствии в общую теорию непрерывных групп. Первые работы Л. (1871—72) относились к чисто геометрич. вопросам. Однако уже в 1872 Л. обратился к теории дифференциальных уравнений, ввёл в неё понятия и методы n-мерной геометрии. Теория групп Ли, возникшая из стремления внести объединяющее начало и установить общие точки зрения в самых разнообразных отделах математики, оказала глубокое влияние на дальнейшее развитие теории дифференциальных уравнений, алгебры, оснований геометрии, топологии и теоретич. физики. В результате работ Л. (и Ф. Клейна) геометрия была перестроена на основе теоретико-групповых преобразований. В 1897 Л. присуждена Международная премия имени Н. И. Лобачевского.

■ Gesammelte Abhandlungen, Bd 1—7, Lpz.— Oslo, 1922—60.

● Памяти Софуса Ли, Казань, 1899; Полищук Е. М., Софус Ли, Л., 1983; Яглом И. М., Феликс Клейн и Софус Ли, М., 1977; «Mathematischen Annallen», 1900, Bd 53, S. 1—41.

ЛИ Е (1178—1265) — китайский математик. В своих работах рассматривал сведение геометрических и других задач к алгебраич. уравнениям.

ЛИНДЕЛЁФ Лоренц Леонард (Lindelöf Lorentz Leonard) (13.11.1827, Гельсингфорс, — не позднее 18.3.1908, там же) — финский математик, астроном, чл.-корр. Петербургской АН (1868), с 1857 проф. Гельсингфорсского ун-та. Основные труды по вариационному исчислению, дифференциальной геометрии.

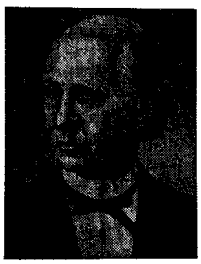
ЛИНДЕМАН Карл Луис Фердинанд (Lindemann Carl Louis Ferdinand) (12.4.1852, Ганновер,— 1.5.1939, Мюнхен) — немецкий математик, проф. Кёнигсбергского (с 1883) и Мюнхенского (с 1893) ун-тов. Основные труды по теории чисел, алгебраической геометрии, теории абелевых функций. Доказал (1882) трансцендентность числа π (теорема Линдемана) и тем самым неразрешимость задачи квадратуры круга.

ЛИННИК Юрий Владимирович [26.12.1914 (8.1.1915), Белая Церковь, ныне Киевской обл.,— 30.6.1972, Ленинград] — советский математик, акад. АН СССР (1964; чл.-корр. 1953), Герой Социалистич. Труда (1969). Окончил Ленинградский ун-т (1938), с 1944 проф. там же. В 1941—42 — в Советской Армии. В 1940—41 и с 1942 работал в Ленинградском отделении Математич. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды по теории чисел, теории вероятностей и математич. статистике. В области теории чисел Л. дал элементарное решение проблемы Варинга, доказал, что каждое большое натуральное число есть сумма семи кубов натуральных чисел, установил, что почти для всех модулей верна гипотеза И. М. Виноградова о наименьшем квадратичном невычете; созданный при этом метод большого решета нашёл важные применения в аддитивной теории чисел. Л. доказал также, что наименьшее простое число в арифметич. прогрессии, разность и первый член к-рой взаимно просты, не превосходит нек-рой постоянной степени разности прогрессии. С помощью созданного им дисперсионного метода в аддитивной теории чисел Л. решил проблему Харди — Литлвуда о представимости натуральных чисел суммой простого числа и двух квадратов, аддитивную проблему делителей, проблему делителей Титчмарша и др. В теорию вероятностей и математич. статистику Л. ввёл новые аналитич. методы, что позволило ему решить ряд трудных проблем. Основные направления исследований: предельные теоремы для независимых случайных величин и неоднородных цепей Маркова, глубокое изучение безгранично делимых законов, характеризация распределений свойствами статистик, теория проверки сложных гипотез и теория оценивания. Л.— чл. Международного статистич. ин-та (1961), почётный чл. Лондонского математич. общества (1967), иностранный чл. Шведской королевской АН (1971). Ленинская премия (1970), Государственная премия СССР (1947). Награждён орденом Ленина (1969), орденом Трудового Красного Знамени (1954), орденом «Знак Почёта» (1945).

■ Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Л., 1961; Метод наименьших квадратов..., 2 изд., М., 1962; Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962 (соавтор А. О. Гельфонд); Независимые и стационарно связанные величины, М., 1965 (соавтор И. А. Ибрагимов); Статистические задачи с мешающими параметрами, М., 1966; Избранные труды, т. 1—2, Л., 1979—81.

● «Успехи матем. наук», 1965, т. 20, в. 2; 1973, т. 28, в. 2; «Вестник АН СССР», 1972, № 9; Академик Ю. В. Линник. Биобиблиографический указатель, Л., 1975.

Ю. В. Линник.



И. Б. Листинг.

ЛИОНС Жак Луи (Lions Jacques Louis) (р. 2.5.1928, Грас) — французский математик, иностранный чл. АН СССР (1982). Окончил Высшую нормальную школу в Париже (1947). Проф. ун-тов в Нанси (1957—62) и Париже. Основные труды по уравнениям с частными производными, интегральным уравнениям, оптимальным и граничным задачам, вариационному исчислению.

■ Неоднородные граничные задачи и их приложения, М., 1971 (соавтор Э. Мадженес); Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, М., 1972; Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., 1972; Неравенства в механике и физике, М., 1980 (соавтор Г. Дюво).

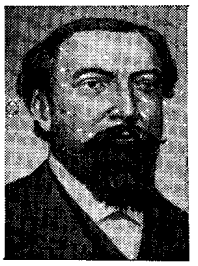
ЛИПШИЦ Рудольф Отто Сигизмунд (Lipschitz Rudolf Otto Sigismund) (14.5.1832, близ Кёнигсберга,— 7.10.1903, Бонн) — немецкий математик, чл.-корр. Парижской АН (1900), с 1864 проф. Боннского ун-та. Основные труды по теории чисел, дифференциальным уравнениям и многомерной геометрии. В теории функций известно (1864) условие Липшица (ограничение на поведение приращения функции).

ЛИСТИНГ Иоганн Бенедикт (Listing Johann Benedikt) (25.7.1808, Франкфурт-на-Майне,—24.12.1882, Гёттинген) — немецкий математик и физик, с 1847 проф. Гёттингенского ун-та. Основные труды по топологии, ввёл (1847) термин «топология». Одновременно с А. Мёбиусом и независимо от него открыл одностороннюю поверхность, названную листом Мёбиуса.

■ Предварительные исследования по топологии, М., 1932.

ЛИТЛВУД Джон Идензор (Littlewood John Edensor) (9.6.1885, Рочестер,— 24.12.1977, Кембридж) — английский математик, чл. Лондонского королевского об-ва (1916), проф. Кембриджского ун-та (1928—50). Основные труды Л., большинство к-рых выполнено совместно с Г. Харди, по теории чисел (оценка остаточного члена в

Дж. И. Литлвуд.



Ж. Лиувилль.

Н. И. Лобачевский.

асимптотич. выражении числа простых чисел, меньших данного числа, определение числа представлений натурального числа в виде суммы натуральных чисел и др.), тригонометрич. рядам, суммированию рядов и тауберовым теоремам, теории функций комплексного переменного (в частности, однолистным функциям) и неравенствам.

■ Lectures on the theory of functions, L., 1944; Неравенства, М., 1948 (соавторы Г. Г. Харди, Г. Полиа).

ЛИУВИЛЛЬ Жозеф (Liouville Joseph) (24.3.1809, Сент-Омер,— 8.9.1882, Париж) — французский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1840), чл. Парижской АН (1839), проф. Политехнич. школы (1833) и Коллеж де Франс (1839) в Париже. Основные труды по математич. анализу. Построил теорию эллиптич. функций, рассматриваемых им как двоякопериодич. функции комплексного переменного; исследовал (1837—41) краевую задачу для линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка (т. н. задачу Штурма — Лиувилля), дал (1844) доказательство существования и фактич. построение трансцендентных чисел. Установил фундаментальную теорему в механике (об интегрировании канонич. уравнений динамики).

■ Leçons sur les fonctions doublement périodiques, «J. reine und angew. Math.», 1880, Bd 88, S. 277—310.
● «Scripta math.», 1936, v. 4, p. 147—54, 257—62, 301—06.

ЛОБА́ТТО Рехюэл (Lobatto Rehuel) (6.6.1797, Амстердам,— 9.2.1866, Делфт) — нидерландский математик, чл. Нидерландской королевской АН. Основные труды по математич. анализу, дифференциальным уравнениям, алгебре; известна (1851) квадратурная формула Лобатто.

ЛОБАЧЁВСКИЙ Николай Иванович [20.11(1.12). 1792, Нижний Новгород, ныне г. Горький,— 12 (24). 2.1856, Казань] — русский математик, создатель неевклидовой геометрии, мыслитель-материалист. Родился в семье бедного чиновника. Почти всю свою жизнь Л. провёл в Казани. Там он учился в гимназии (1802—07), затем в Казанском ун-те (1807—11). По окончании ун-та был оставлен при нём; в 1811 утверждён магистром, в 1814 адъюнктом, в 1816 экстраординарным и в 1822 ординарным проф., был также деканом физико-математич. ф-та (1820—22, 1823—25) и ректором ун-та (1827—46). В последний период своей жизни (1846—56) Л.— помощник попечителя Казанского учебного округа.

Деятельность Л. положила начало процветанию и славе Казанского ун-та. После мрачного периода семилетнего (1819—26) попечительства в Казанском учебном округе М. Л. Магницкого, периода разгула реакции и религиозного фанатизма, Л. сумел превратить ун-т в первоклассное учебное заведение того времени. Л. вёл напряжённую научную и педагогич. работу, нёс большие административные обязанности. Он был единственным из профессоров, с к-рым считался М. Л. Магницкий. Л. выдвигали всюду, где возникала серьёзная, ответственная работа. Так, когда необходимо было привести в порядок университетскую библиотеку, руководство этим делом было поручено Л. (1819); в 1825 Л. избрали библиотекарем, и он выполнял эту обязанность до 1835, совмещая её даже с обязанностями ректора. Когда в ун-те развернулось значительное строительство, Л. был введён (1822) в строительный комитет, избран его председателем (1825). В этом комитете он работал с небольшим перерывом (1827—33) до 1848.

Л.— инициатор издания (1834) и редактор «Учёных записок Казанского университета»; при нём в ун-те были организованы большой физич. кабинет, астрономич. обсерватория. Л. состоял членом особого комитета для наблюдения за деятельностью училищ округа. В период, когда Л. был ректором Казанского ун-та, оживилась деятельность его совета, были частью вновь построены, частью перестроены многие университетские здания (библиотека, кабинеты, клиники, обсерватория и др.). К преподаванию привлекались квалифицированные специалисты. Благодаря неутомимой энергии Л. в период его управления ун-т, прежде придаток гимназии, превратился в самостоятельное учебное заведение.

В 1846 исполнилось 30 лет службы Л., и по уставу занимаемая им кафедра должна была с этого времени считаться свободной. Однако совет ун-та единогласно ходатайствовал о сохранении за Л., как и за астрономом И. М. Симоновым, занимаемых ими должностей. Ходатайство совета ун-та было препровождено Л., временно исполнявшему тогда обязанности попечителя округа. Л., направляя его министру, высказался за то, чтобы ходатайство было удовлетворено относительно И. М. Симонова; занимаемую им самим кафедру Л. рекомендовал передать своему ученику А. Ф. Попову. Министерство воспользовалось этим, чтобы отказать в ходатайстве совета ун-та не только в оставлении Л. на кафедре, но и на посту ректора. Он был назначен помощником попечителя Казанского учебного округа. И. М. Симонов же был оставлен на кафедре. Л. тяжело переживал своё отстранение от активной университетской деятельности. Сказалась и неудачно сложившаяся личная жизнь. Он чувствовал себя почти всеми оставленным, никому не нужным. К тому же он стал терять зрение. Последняя работа Л. «Пангеометрия» была написана Л. под диктовку за год до его смерти.

Бессмертную славу Л. приобрёл созданием новой геометрич. системы, т. н. неевклидовой геометрии, известной под назв. геометрии Лобачевского, явившейся поворотным пунктом в развитии математич. мышления 19 в. Ещё в 1823 Л. подготовил к печати составленный им курс геометрии. М. Л. Магницкий направил рукопись на заключение Н. И. Фуссу, который дал о ней резко отрицательный отзыв, и Л. было предложено исправить работу. Н. И. Фусса, между прочим, возмутило, что Л. вводит в своём учебнике метр в качестве единицы меры длины; в этом Н. И. Фусс усматривал влияние французских революционных идей. Л. не пожелал исправлять рукопись, даже не взял своего труда обратно. Подлинная рукопись его «Геометрии» считалась утерянной; лишь в 1898 удалось найти её среди архива канцелярии попечителя Казанского учебного округа; в настоящее время она напечатана во 2-м томе полного собрания сочинений Л. Уже в этой работе обнаружилось новаторство Л. в изложении начал геометрии.

Учебным руководством по геометрии до Л. служили главным образом «Начала» Евклида. Общая тенденция, отчётливо проходящая через всё первое сочинение Л., указывает на стремление автора порвать со старыми классич. традициями и найти новые пути для построения основ геометрии. В «Геометрических исследованиях по теории параллельных линий» (1840) Л. указывал на важный пробел в теории параллельных линий, к-рый состоял в том, что основное положение теории параллельных принималось без анализа его необходимости. Сущность дела здесь в следующем. При пересечении двух прямых, лежащих на одной плоскости, третьей прямой образуется восемь углов. Если при этом сумма внутренних односторонних углов равна двум прямым, то линии параллельны. Справедливо ли обратное утверждение? Можно ли утверждать, что всякий раз, когда две прямые параллельны, то при их пересечении третьей сумма внутренних односторонних углов равна двум пря-

мым? Геометрия Евклида утверждает, что это имеет место. Это утверждение Евклид ввёл в свои «Начала» в качестве V постулата (в других изданиях в качестве 11-й аксиомы). V постулат по своему содержанию сложнее других, а главное — очень большое число предложений доказывается без его помощи. Необходимость принять без доказательства столь сложное утверждение рассматривалась как дефект теории параллельных. Вследствие этого ещё в древности возникло стремление доказать постулат о параллельных линиях, т. е. логически вывести содержащееся в нём утверждение из введённых до него постулатов. Многие крупные математики уделяли большое внимание этой проблеме, стараясь пролить свет на это «тёмное пятно» в теории параллельных линий. Не избежал этого и Л. Он встал на путь создания новой геометрии лишь после ряда неудачных попыток доказать V постулат. В сохранившихся записях лекций Л. от 1816/17 учебного года приведена одна такая попытка. К моменту написания «Геометрии» Л. уже осознал ошибочность доказательства и не включил его в свою рукопись. Совокупность предложений, к-рые доказываются без помощи постулата о параллельных линиях, в настоящее время принято называть «абсолютной геометрией». В первых пяти главах своей «Геометрии» Л. изложил предложения абсолютной геометрии, а затем перешёл к теоремам, к-рые не удаётся доказать без помощи V постулата. Это принципиальное разделение показывает, какое внимание Л. уделял делению геометрии на две части в связи с тем, зависят ли её предложения от V постулата или не зависят от него; оно составляло исходное начало дальнейших исследований Л. Этого важнейшего момента Н. И. Фусс не заметил. Взгляды, изложенные Л. в «Геометрии», нашли своё отражение и в ранее составленном им обозрении преподавания на 1822/23 учебный год, отклонённом М. Л. Магницким. По-видимому, лишь из-за давления, оказанного М. Л. Магницким, Л. в обозрении преподавания на 1824/25 указал лишь на трудность вопроса о параллельных, вернувшись к тексту 1822/23 в обозрении на 1825/26.

11(23) февраля 1826 в Казанском ун-те произошло событие величайшей важности, дающее основание считать эту дату днём рождения неевклидовой геометрии. В этот день на заседании Отделения физико-математич. наук Л. сообщил о своём соч. «Сжатое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных». Сведения об этом сохранились в протокольной записи заседания: «Слушано было представление Г. Орд. Профессора Лобачевского от 6 февраля сего года, с приложением своего сочинения на французском языке: «Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles», о котором желает он знать мнение членов Отделения, и ежели оно будет выгодно, то просит сочинение принять в составление учёных записок Физико-математического факультета». В 1835 Л. сам охарактеризовал выводы этого своего сочинения в следующих словах: «Напрасное старание со времен Евклида, в продолжении двух тысяч лет, заставило меня подозревать, что в самых понятиях еще не заключается тоїї истины, которую хотели доказать и которую поверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, Астрономические наблюдения. В справедливости моей догадки будучи наконец убежден, и почитая затруднительный вопрос решенным вполне, писал об этом я рассуждение в 1826 году» (Полн. собр. соч., т. 2, 1949, с. 147).

В сочинении 1826, как и в других своих работах по неевклидовой геометрии, Л. исходил из допущения (сделанного в результате выяснения всех возможных случаев), что через точку C, лежащую вне прямой AB, плоскости ABC проходит несколько прямых, не встречающих AB. Так как это допущение противоречит V постулату, то оно должно было бы привести к противоречию с теоремами абсолютной геометрии, и это было бы равносильно доказательству постулата. Между тем, развивая выводы из сделанного им допущения и предложений абсолютной геометрии, Л. ни к какому противоречию не пришёл; напротив, тонкие рассуждения привели его к стройной и последовательной системе предложений. На первый взгляд они представлялись даже абсурдными, расходящимися с обычными наглядными представлениями, но логически составляли непротиворечивую геометрич. систему, отличную от евклидовой. Л. пришёл, таким образом, к выводу, что возможна геометрия, отличная от евклидовой и теоретически вполне допустимая; он назвал эту геометрич. систему «воображаемой геометрией». Профессорам И. М. Симонову, А. Я. Купферу и адъюнкту Н. Д. Брашману было поручено рассмотреть сочинение Л. и сообщить своё мнение. Сохранились указания, что Н. Д. Брашман, напр., выразился о сочинении очень пренебрежительно; так же, по-видимому, отнеслись к нему и другие члены комиссии. Никакого, однако, решения не последовало, и дело о представлении сочинения Л. для печати было сдано в архив «за недоставлением от гг. Симонова, Купфера и Брашмана мнения о сочинении», самого же сочинения Л. обнаружить до сих пор (1987) нигде не удалось. Можно предположить, что оно было возвращено Л., личный архив к-рого до сих пор ещё не собран, или просто утеряно. Хотя сочинение и не дошло до нас, имеется возможность довольно точно воспроизвести его содержание. В 1829—30 Л. всё же опубликовал в журнале «Казанский вестник», к-рый рассматривался как орган ун-та, мемуар, носивший назв. «О началах геометрии». Примерно первая треть этой работы, как указывает сам Л., извлечена им из сочинения 1826. Мемуар содержит изложение начал созданной Л. неевклидовой геометрии и даёт уравнения, к-рые в этой геометрии связывают стороны и углы прямоугольного треугольника. Из этих уравнений, как Л. показал в последующих сочинениях, систематически развёртывается как аналитическая, так и дифференциальная геометрия созданной им системы. В настоящее время установлены глубокие связи неевклидовой геометрии Л. со многими разделами математики, а также с теоретич. физикой.

Ни мемуар «О началах геометрии», ни последовавшие за ним другие сочинения Л. почти никем в то время поняты не были и подверглись резкой критике. При жизни Л. публично оценил его бессмертное открытие только казанский проф. П. И. Котельников (1842). Полное признание и широкое распространение геометрия Л. получила через 12 лет после его смерти. В 1868 Э. Бельтрами в своём мемуаре «Опыт толкования неевклидовой геометрии» показал, что в евклидовом пространстве на псевдосферич. поверхностях имеет место геометрия куска плоскости Л., если на них за прямые принять геодезич. линии. Истолкование геометрии Л. на поверхностях евклидова пространства решающим образом способствовало общему признанию идей Л. Вместе с тем весь математич. мир понял, что вопрос о доказательстве V постулата был решён Л. полностью, т. е. было, наконец, понято, что V постулат нельзя вывести из предложений абсолютной геометрии. Большую работу по выявлению значения идей Л. и изданию его сочинений провели Казанский ун-т и Казанское физико-математич. общество. Широкое признание геометрии Л. пришло к его 100-летнему юбилею — была учреждена (1895) международная премия (с 1947 присуждается АН СССР), в Казани установлен (1896) памятник.

К неевклидовой геометрии, хотя и в менее развитой форме, независимо от Л. пришёл также Я. Больяй, опубликовавший свою работу «Appendix...» на три года позже Л. (1832). В архиве К. Гаусса после его смерти были найдены отдельные наброски начальных положений неевклидовой геометрии. Но К. Гаусс не только не опубликовал своих взглядов и не высказал открыто своего мнения о работах Л. и Я. Больяй, с к-рыми был знаком, но и запрещал другим что-

либо публиковать по этим вопросам. «Возможно даже,— писал он,— что я не решусь на это во всю свою жизнь, потому что я боюсь крика беотийцев, который поднимется, когда я выскажу свои воззрения целиком». Однако, не высказываясь в печати, К. Гаусс высоко оценил труды Л. и по его представлению Л. был избран в 1842 чл.-корр. Гёттингенского учёного общества. Запрет К. Гаусса удручающе действовал на всех, кто искал его поддержки. Л. не боялся новизны и необычности открытия, ломающего многовековые научные традиции, и опубликовал свои воззрения в России в 1829—30 («О началах геометрии»), в 1835 («Воображаемая геометрия»), в 1836 («Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам»), в 1835—38 («Новые начала геометрии с полной теорией параллельных»), в 1855 («Пангеометрия») и за границей в 1837 («Воображаемая геометрия») и в 1840 («Геометрические исследования по теории параллельных линий»). От этих своих воззрений он не отступал до конца своей жизни. Из всех математиков, в той или иной мере стоявших на пути открытия неевклидовой геометрии, только один Л. последовательно боролся за новые идеи.

Л. был не только геометром исключительной творческой силы, но и математиком с широким диапазоном научной работы. Ему принадлежит ряд фундаментальных работ в области алгебры («Алгебра или вычисление конечных», 1834, и др.) и математич. анализа («Об исчезновении тригонометрических строк», 1834, «О сходимости бесконечных рядов», 1841, «О значении некоторых определённых интегралов», 1852, и др.). В области анализа Л. получил новые результаты в теории тригонометрич. рядов. Им же установлен один из наиболее удобных методов приближённого решения уравнений (метод Лобачевского).

По своему мировоззрению Л. был материалистом. Он рассматривал исходные математич. абстракции, в том числе и основные понятия геометрии, как отражения самых общих и простых реальных отношений и свойств материального мира. «В природе,— говорил он,— мы познаем собственно только движение, без которого чувственные впечатления невозможны. Итак, все прочие понятия, например, Геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения» (Полн. собр. соч., т. 2, 1949, с. 158—59). Л. последовательно проводил мысль, что «первыми данными без сомнения будут всегда те понятия, которые мы приобретаем в природе посредством наших чувств» (там же, с. 164), что «первые понятия, с которых начинается какая-нибудь наука, ... приобретаются чувствами; врожденным — не должно верить» (там же, т. 1, 1946, с. 186). Л. постоянно подчёркивал, что математич. абстракции рождаются в нас не по произволу человеческой мысли, а в результате нашего взаимоотношения с материальным миром: «Поверхности и линии не существуют в природе, а только в воображении: они предполагают, следовательно, свойство тел, познание которых должно родить в нас понятие о поверхностях и линиях» (Материалы для биографии Н. И. Лобачевского, 1948, с. 177). Л. был убеждённым противником кантианства. В основаниях математич. наук должны лежать «приобретаемые из природы», а не произвольные понятия. «Те,— говорил он,— которые хотели ввести подобные понятия в математику, не нашли себе последователей. Такую участь имели основания форономии Канта...» (там же, с. 204). Борьба против кантовского априоризма была одной из важнейших предпосылок создания неевклидовой геометрии. Пошатнув незыблемость евклидовой геометрии, Л. нанёс тяжёлый удар философии Канта, к-рая в этой незыблемости и пыталась найти свою опору, рассматривая исходные истины геометрии не как результат опыта человечества, а как врождённые формы человеческого сознания. Л. постоянно подчёркивал никчёмность попыток вывести математику из одних лишь построений разума; «все математические начала,— утверждал Л.,— которые думают произвести из самого разума, независимо от вещей мира, останутся бесполезными для математики» (там же). Всю жизнь Л. руководствовался этим убеждением и внушал свои мысли другим. В «Речи о важнейших предметах воспитания», произнесённой 5 июля 1828 на торжественном собрании ун-та, он говорил: «Здесь, в это заведение вступивши, юношество не услышит пустых слов без всякой мысли, одних звуков без всякого значения. Здесь учат тому, что на самом деле существует; а не тому что изобретено одним праздным умом» (там же, с. 323). Л. выступал против формализма, выхолащивающего реальное содержание понятий математики и видящего в математич. знаках и операциях над ними лишь простую игру символов. Ярко выраженную материалистич. направленность имеют взгляды Л. на соотношение теории и практики. Критерием истины для Л. служит опыт, практика. Самую возможность соответствия построенной им геометрии отношениям, существующим в реальном мире, Л. стремился подтвердить опытной проверкой. Для Л. цель научного знания состояла не в развитии оторванных от жизни понятий, а в изучении реального мира. Признавая огромную роль гипотез для развития науки, Л. требовал при выборе гипотез руководствоваться практикой, позволяющей останавливаться на тех из них, к-рые вернее отражают соотношения, наблюдаемые в действительности, и, следовательно, находятся в тесной связи с практич. приложениями. Мысль, что опыт, практика дают уверенность в правильности теоретич. выводов, служила Л. руководящим принципом во всей его педагогич. деятельности. Л. требовал такого начального обучения детей математике, к-рое приучало бы учеников за математич. действиями видеть реальное явление жизни. Л. был страстным борцом за возвышенные идеалы человечества. Он постоянно боролся за правильную организацию народного образования, призывал к тому, чтобы каждый пришедший в ун-т стал гражданином, к-рый «высокими познаниями своими составляет честь и славу своего отечества» (там же, с. 322).

Г. Ф. А. Лопиталь.

■ Полное собрание сочинений, т. 1—5, М.—Л., 1946—51; Избранные труды по геометрии, М.—Л., 1956; Научно-педагогическое наследие. Руководство Казанским университетом. Фрагменты. Письма, М., 1976.

● Васильев А. В., Лобачевский, СПБ, 1914; Каган В. Ф., Лобачевский, 2 изд., М.—Л., 1948; Историко-математические исследования, в. 3, 4, 6, 11, М.—Л., 1950—58 (ряд статей); Модзалевский Л. Б., Материалы для биографии Н. И. Лобачевского, М.—Л., 1948.

ЛОМ Иоганн Генрих ван (Lom Johann Heinrich van) (20.12.1704, Неймеген,— апрель 1763, Хардервейк) — нидерландский математик и философ, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1760). Комментировал «Начала» Евклида.

ЛОПИТА́ЛЬ Гийом Франсуа Антуан де (Lhopital, L'Hôpital, L'Hospital Guillaume François Antoine de) (1661, Париж,— 1704, там же) — французский математик. Автор первого печатного учебника по дифференциальному исчислению (1696), в основу к-рого были положены лекции И. Бернулли. Л. исследовал ряд трудных задач математич. анализа, в частности дал одно из решений знаменитой задачи о брахистохроне.

■ Анализ бесконечно малых, М.—Л., 1935.

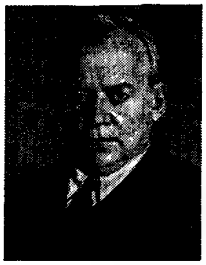
ЛОРА́Н Пьер Альфонс (Laurent Pierre Alfonse) (1813—1854, Париж) — французский математик. По профессии военный инженер. Ему принадлежит (1843) теорема о разложении функции комплексного переменного, аналитической в круговом кольце, в ряд (т. н. ряд Лорана).

● «Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris», 1855, t. 40, p. 632—34.

ЛОРЕНЦ, Лорентц Хендрик Антон (Lorentz Hendrik Anton) (18.7.1853, Арнем,— 4.2.1928, Харлем) — нидерландский физик и математик, создатель электронной теории, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1910), иностранный почётный чл. АН СССР (1925). Основные труды по фи-

Х. А. Лоренц.

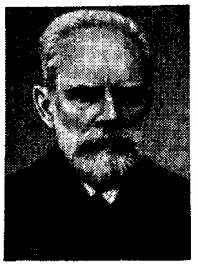
А. М. Лорнья.



Н. Н. Лузин.

Я. Лукасевич.

Л. А. Люстерник.



А. М. Ляпунов.

зике. Нашёл (1904) наиболее общие преобразования пространственных координат и времени к.-л. события при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой (преобразования Лоренца).

■ Элементы высшей математики, 3 изд., т. 1, М., 1908; 2 изд., т. 2, М., 1910.

ЛО́РНЬЯ Антонио Мария (Lorgna Antonio Maria) (18.10.1735, Верона,— 28.6.1796, там же) — итальянский математик и физик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1776). Организатор и первый президент Итальянского общества наук (1782). Основные математич. труды по дифференциальным уравнениям и исчислению конечных разностей. Решил ряд задач внешней баллистики.

ЛУ́ДОЛЬФ ван Цейлен (Ludolph van Ceulen) (28.1.1540, Хильдсхайм,— 31.12.1610, Лейден) — нидерландский математик, проф. Лейденского ун-та. Вычислил (опубл. 1615) значение числа π с 32 десятичными знаками (л у д о л ь ф о в о ч и с л о).

ЛУ́ЗИН Николай Николаевич [27.11 (9.12). 1883, Томск,—28.2. 1950, Москва] — советский математик, акад. АН СССР (1929; чл.-корр. 1927). Окончил Московский ун-т (1908), с 1917 проф. там же. В 1929—36 и 1941—50 — работал в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР и в 1936—50 — в Ин-те автоматики и телемеханики АН СССР. Основные труды Л. относятся к теории функций действительного переменного. Диссертация «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915) содержит фундаментальные результаты, оказавшие определяющее влияние на дальнейшее развитие метрич. теории функций. Л.— один из создателей дескриптивной теории функций, где особенно важно открытие проективных множеств, относительно к-рых Л. высказал мнение, что для них не может быть решён (в классич. смысле) ряд задач, в частности вопрос об их измеримости. В 70-е гг. 20 в. доказано методами математич. логики, что предвидения Л. в этом направлении подтверждаются. Л. получил важные результаты о граничных свойствах аналитич. функций и единственности их определения по краевым значениям. Ряд работ Л. посвящён вопросам математич. анализа, дифференциальным уравнениям и дифференциальной геометрии; изучая изгибания поверхностей на главном основании, он получил в нек-ром смысле окончательный результат. Работы Л. и его учеников внесли фундаментальный вклад в развитие теории функции действительного переменного. Л.— иностранный чл. Польской АН(1928), почётный чл. математич. обществ в Польше, Индии, Бельгии, Франции, Италии. Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1945).

■ Собрание сочинений, т. 1—3, М., 1953—59; Интеграл и тригонометрический ряд, М.—Л., 1951.

● Николай Николаевич Лузин, М.—Л., 1948 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР).

ЛУКАСЕ́ВИЧ Ян (Łukasiewicz Jan) (21.12.1878, Львов,—13.11.1956, Дублин) — польский математик и логик, чл. Польской АН (1937), Ирландской королевской АН (1945). Основные труды по математич. логике. Построил первую систему многозначной логики (т р ё х з н а ч н а я л о г и к а Л у к а с е́ в и ч а), а с её помощью — систему модальной логики.

■ Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики, М., 1959.

ЛУПА́НОВ Олег Борисович (р. 2.6. 1932, Ленинград) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1972). Окончил Московский ун-т (1955), с 1964 проф. там же. Специалист в области математич. вопросов кибернетики и математич. логики. Основные труды по исследованиям асимптотич. закономерностей сложности управляющих систем. Ленинская премия (1966). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1982), орденом «Знак Почёта» (1975).

■ О синтезе некоторых классов управляющих систем, «Проблемы кибернетики», 1963, в. 10; Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования, там же, 1965, в. 14.

● «Вестник АН СССР», 1983, № 1.

ЛЮИЛЬЕ́ Симон Антуан Жан (L'Huiller Simon Antoine Jean) (24.4.1750, Женева,— 28.3.1840, там же) — швейцарский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1782), чл. Лондонского королевского общества (1791). Основные труды по геометрии, изложил начала анализа на основе понятия предела. Ввёл (1786) символ lim для обозначения предела, термин «ряд Тейлора».

О. Б. Лупанов.

С. А. Ж. Люилье.

● История математики, т. 3, М., 1972.

ЛЮСТЕ́РНИК Лазарь Аронович [19 (31).12.1899, Здуньска-Воля, ныне в Польше,— 23.7.1981, Москва] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1946). Окончил Московский ун-т (1922), с 1931 проф. там же. Л. впервые применил метод конечных разностей к решению задачи Дирихле. Совместно с Л. Г. Шнирельманом начал применять топологич. методы в анализе, доказал теорему о трёх геодезических; работал также в области функционального анализа и вычислительной математики. Государственная премия СССР (1946). Награждён орденом Ленина (1953), орденом Трудового Красного Знамени (1975), орденом «Знак Почёта» (1945).

■ Геодезические линии, 2 изд., М.—Л., 1940; Выпуклые фигуры и многогранники, М., 1956; Тригонометрия, 4 изд., М., 1967 (соавтор А. Ф. Бермант); Курс вариационного исчисления, 2 изд., М.—Л., 1950 (соавтор М. А. Лаврентьев); Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965 (соавтор В. И. Соболев).

● «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 2; 1970, т. 25, в. 4; 1982, т. 37, в. 1.

ЛЯПУНО́В Александр Михайлович [25.5(6.6).1857, Ярославль,— 3.11. 1918, Одесса] — русский математик и механик, акад. Петербургской АН (1901; чл.-корр. 1900). Ученик П. Л. Чебышева. Окончил Петербургский ун-т (1880), с 1885 доцент и с 1892 проф. Харьковского ун-та. С 1902 работал в Петербурге.

Л. создал современную строгую теорию устойчивости равновесия и движения механич. систем, определяемых конечным числом параметров. С математич. стороны этот вопрос сводится к исследованию предельного поведения решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений при стремлении независимого переменного к бесконечности. Устойчивость определялась Л. по отношению к возмущениям начальных данных движения. До работ Л. вопросы об устойчивости обычно решались по первому

приближению, т. е. путём отбрасывания всех нелинейных членов уравнений, причём не выяснялась законность такой линеаризации уравнений движения. Выдающейся заслугой Л. является построение общего метода для решения задач об устойчивости. Основным трудом в этой области до сих пор является докторская диссертация Л. «Общая задача об устойчивости движения» (1892). В этой работе определяются основные понятия теории устойчивости, указываются случаи, когда рассмотрение линейных уравнений первого приближения даёт решение вопроса об устойчивости, и проводится подробное исследование нек-рых важных случаев, когда первое приближение не даёт решения вопроса об устойчивости. Диссертация и последующие работы Л. в рассматриваемой области содержат целый ряд фундаментальных результатов в теории обыкновенных дифференциальных уравнений как линейных, так и нелинейных. Все работы по теории устойчивости движения отечественных и зарубежных учёных, выполненные после Л., основаны на его идеях и методах.

Большой цикл исследований Л. посвящён теории фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости, частицы к-рой взаимно притягиваются по закону всемирного тяготения. До Л. были установлены для однородной жидкости эллипсоидальные фигуры равновесия. Л. впервые доказал существование фигур равновесия однородной и слабо неоднородной жидкости, близких к эллипсоидальным. Он установил, что от нек-рых эллипсоидальных фигур равновесия ответвляются близкие к ним неэллипсоидальные фигуры равновесия однородной жидкости, а от других эллипсоидальных фигур равновесия ответвляются фигуры равновесия слабо неоднородной жидкости. Л. разрешил также задачу, предложенную ему ещё в начале его научной деятельности П. Л. Чебышевым, о возможности ответвления от эллипсоидальной фигуры равновесия с наибольшей (возможной для эллипсоидов) угловой скоростью неэллипсоидальных фигур равновесия. Ответ получился отрицательным. Л. впервые строго доказал существование близких к сфере фигур равновесия медленно вращающейся неоднородной жидкости при весьма общих предположениях об изменении плотности с глубиной. Л. занимался также исследованием устойчивости как эллипсоидальных фигур, так и открытых им новых фигур для случая однородной жидкости. Сама постановка вопроса об устойчивости для сплошной среды (жидкость) до работ Л. была неясной. Он впервые строго поставил вопрос и с помощью тонкого математич. анализа провёл исследование устойчивости фигур равновесия. В частности, он доказал неустойчивость т. н. грушевидных фигур равновесия. Цикл работ Л. по фигурам равновесия вращающейся жидкости и устойчивости этих фигур занимает центральное место во всей теории фигур равновесия.

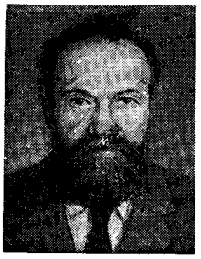
Небольшим по объёму, но весьма важным для дальнейшего развития науки был цикл работ Л. по нек-рым вопросам математич. физики. Среди работ этого цикла основное значение имеет его труд «О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле» (1898). Эта работа основана на исследовании свойств потенциала от зарядов и диполей, непрерывно распределённых по нек-рой поверхности. Наиболее существенным является исследование т. н. потенциала двойного слоя (случай диполей). Далее Л. получил важные результаты, касающиеся поведения производных решения задачи Дирихле при приближении к поверхности, на к-рой задано граничное условие. На этой основе им впервые были доказаны симметрия функции Грина для задачи Дирихле и формула, дающая решение этой задачи в виде интеграла по поверхности от произведения функции, входящей в граничное условие, на нормальную производную функции Грина. При всех этих условиях Л. налагает на граничную поверхность нек-рые ограничения; поверхности, удовлетворяющие им, наз. теперь поверхностями Л.

В теории вероятностей Л. предложил новый метод исследования (метод «характеристических функций»), замечательный по своей общности и плодотворности; обобщая исследования П. Л. Чебышева и А. А. Маркова, Л. доказал т. н. центральную предельную теорему (т е о р е м у Л я п у н о в а) теории вероятностей при значительно более общих условиях, чем его предшественники. В целом ряде работ Л. содержится большое число принципиально новых понятий математич. анализа. Язык и рассуждения Л. отличаются большой точностью, и высказываемое мнение о трудности чтения его работ очень часто объясняется только особой сложностью рассматриваемых проблем. Все исследования Л. являются источником новых работ во многих направлениях математики. Л.— иностранный чл.-корр. Парижской АН (1916).

В 1969 в АН СССР учреждена Золотая медаль имени А. М. Ляпунова.

■ Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., 1950; Избранные труды, Л., 1948; Собрание сочинений, т. 1—5, М., 1954—65.
● Л я п у н о в Б. М., Краткий очерк жизни и деятельности А. М. Ляпунова, Л., 1930; С т е к л о в В. А., Александр Михайлович Ляпунов, в кн.: Л я п у н о в А. М., Работы по теории потенциала, М.— Л., 1949; Ш и б а н о в А., Александр Михайлович Ляпунов, М., 1985.

ЛЯПУНОВ Алексей Андреевич [25.9 (8.10).1911, Москва,— 23.6.1973, там же] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1964). Чл. КПСС с 1944.



А. А. Ляпунов.

С. Мазур.

В 1952—62 проф. Московского ун-та, с 1962 работал в Сибирском отделении АН СССР. Основные труды по теории множеств, теоретич. вопросам программирования, математич. лингвистике, математич. биологии. Л. одним из первых советских учёных оценил значение кибернетики и внёс большой вклад в организацию работ по кибернетике в СССР. Награждён орденом Ленина (1971), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1955, 1967), орденом Красной Звезды (1944), орденом «Знак Почёта» (1953).

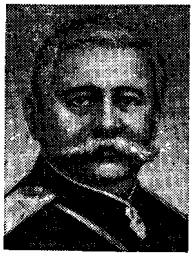
■ *R*-множества, М., 1953; Теоретические проблемы кибернетики, в сб.: Проблемы кибернетики, в. 9, М., 1963 (соавтор С. В. Яблонский); Вопросы теории множеств и теории функций, М., 1979.
● «Проблемы кибернетики», 1977, в. 32; «Природа», 1987, № 5.

М

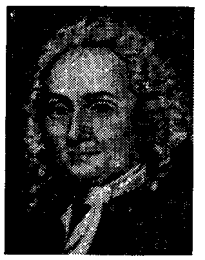
МАГНИЦКИЙ Леонтий Филиппович [9(19).6.1669, Осташковская слобода, ныне Осташков Калининской обл.,— 19(30).10.1739] — русский математик, педагог. По нек-рым сведениям, учился в Славяно-греко-латинской академии в Москве. С 1701 до конца жизни преподавал математику в Школе математических и навигацких наук. В 1703 напечатал свою «Арифметику», к-рая до сер. 18 в. была основным учебником математики в России. Благодаря научно-методич. и литературным достоинствам «Арифметика» М. использовалась и после появления других книг по математике, более соответствовавших новому уровню науки. Книга М. являлась скорее энциклопедией математич. знаний, чем учебником арифметики, многие помещённые в ней сведения сообщались впервые в русской литературе. «Арифметика» сыграла большую роль в распространении математич. знаний в России; по ней учился М. В. Ломоносов, называвший этот учебник «вратами учёности». В «Арифметике» М. ввёл термины «множитель», «произведение», «делитель», «делимое», «частное».

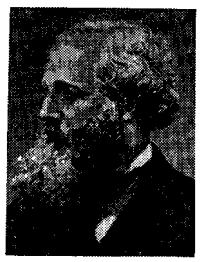
■ Арифметика Магницкого, М., 1914.
● Д е н и с о в А. П., Л. Ф. Магницкий, М., 1967.

МАЗУР Станислав (Mazur Stanisław) (р. 1.1.1905, Львов) — польский математик, чл. Польской АН. Работал в Львовском (с 1939 проф.), Лодзинском,

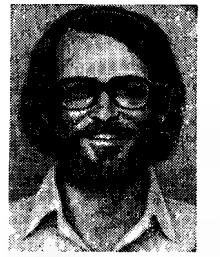

Н. В. Маиевский.

И. М. Макаров.


К. Маклорен.


Дж. К. Максвелл.

А. И. Мальцев.


Д. Б. Мамфорд.

Варшавском ун-тах. Основные труды по функциональному анализу.

МАЙЕ́ВСКИЙ Николай Владимирович [29.4(11.5).1823, с. Первино, ныне Калининской обл.,— 11(23).2.1892, Петербург] — русский учёный в области механики, математики, астрономии, чл.-корр. Петербургской АН (1878), генерал от артиллерии. Основные труды по баллистике. Применял теорию вероятностей к задачам попадания снаряда в цель.

● История отечественной математики, т. 2, К., 1967.

МА́ЙЕР, Мейер Фридрих Христофор (Mayer Friedrich Christoph) [9.10.1697, Кирххайм, — 24.11(5.12).1729, Петербург] — немецкий математик и философ, акад. Петербургской АН (1726; адъюнкт с 1725). Занимался математикой и астрономией. Основные труды по тригонометрии.

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

МАКА́РОВ Игорь Михайлович (р. 22.10.1927, Саратов) — советский учёный в области автоматич. управления, акад. АН СССР (1987; чл.-корр. 1974). Чл. КПСС с 1953. Окончил Московский авиационный ин-т (1950). С 1975 проф. Московского ин-та радиотехники, электроники и автоматики. Основные труды по теории систем автоматич. управления, принципам расчёта и построения технич. средств автоматизации. Государственная премия СССР (1984). Награждён орденом Октябрьской Революции (1987), орденом Трудового Красного Знамени (1971), орденом «Знак Почёта» (1967).

■ Линейные автоматические системы, 2 изд., М., 1982; Теория автоматического управления..., М., 1983; Теория выбора и принятия решений, М., 1982 (соавторы Т. М. Виноградская, А. А. Рубчинский, В. Б. Соколов); Системные принципы создания гибких автоматизированных производств, М., 1986.

МАКДО́НАЛЬД Хектор Манро (Macdonald Hector Munro) (19.1.1865, близ Эдинбурга,—16.5.1935, Абердин) — английский физик и математик, с 1905 проф. ун-та в Абердине. Математич. труды по специальным функциям, где известны (1899) функции Макдональда.

МАКЛЕ́ЙН, Мак-Лейн Сондерс (Mac Lane Saunders) (р. 4.8.1909, Норуич) — американский математик, чл. Национальной АН США (1949). Окончил Йельский ун-т (1930), с 1947 работает в Чикагском ун-те. Основные труды по алгебре и топологии.

■ Гомология, М., 1966.

МАКЛО́РЕН Колин (Maclaurin Colin) (1698, Килмодан, Аргайл,—14.6.1746, Эдинбург) — шотландский математик, чл. Лондонского королевского общества (1719). Основные труды по теории рядов, где известен ряд Маклорена (1742), исчислению конечных разностей (формула Эйлера — Маклорена) и теории плоских кривых высших порядков; ряд работ по механике (равновесие тяжёлой вращающейся жидкости, притяжение однородным эллипсоидом вращения тяжёлой точки).

■ A treatise of fluxions, v. 1—2, Edinburgh, 1742.

● История математики, т. 3, М., 1972.

МАКСВЕЛЛ Джеймс Клерк (Maxwell James Clerk) (13.6.1831, Эдинбург,—5.11.1879, Кембридж) — английский физик, создатель классич. электродинамики, один из основателей статистич. физики, чл. Лондонского королевского общества (1860). Основные труды в области математики относятся к математич. физике. М. выразил законы электромагнитного поля в виде системы четырёх дифференциальных уравнений с частными производными (уравнения Максвелла); впервые решил статистич. задачу о распределении молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла). М. также способствовал формированию векторного исчисления в виде отдельной математич. дисциплины; в частности, он ввёл (1873) термин «градиент» и обозначение grad.

■ Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, М., 1954; Статьи и речи, М., 1968.

МАКСИ́М ПЛАНУ́Д (Μάξιμος ὁ Πλανούδης) (ок. 1260— ок. 1310) — греческий монах из Никомедии, единственный учёный-математик византийского периода греческой истории. Написал комментарии к двум первым книгам «Арифметики» Диофанта.

● Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961.

МА́ЛЬЦЕВ Анатолий Иванович [14(27).11.1909, ныне пос. Мишеронский Шатурского района Московской обл.,— 7.7.1967, Новосибирск] — советский математик, акад. АН СССР (1958; чл.-корр. 1953). Окончил Московский ун-т (1931). В 1932—60 работал в Ивановском педагогич. ин-те (с 1943 проф.) и в 1942—60 в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР, с 1960 в Сибирском отделении АН СССР и Новосибирском ун-те. Главный редактор «Сибирского математического журнала» (с 1960). Основные труды по алгебре и математич. логике. М. принадлежат фундаментальные результаты в теории групп, теории колец и линейных алгебр, топологич. алгебре, теории групп и алгебр Ли, теории алгоритмов. М.— один из создателей общей теории моделей, его т. н. локальные теоремы положили начало систематич. применению методов математич. логики в алгебре. Депутат Верховного Совета СССР 4—5-го созывов. Ленинская премия (1964), Государственная премия СССР (1946). Награждён орденом Ленина (1967), 2 орденами «Знак Почёта» (1945, 1953).

■ Основы линейной алгебры, 4 изд., М., 1975; Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965; Алгебраические системы, М., 1970; Избранные труды, т. 1—2, М., 1976.

● Избранные вопросы алгебры и логики, Новосиб., 1973; «Вестник АН СССР», 1967, № 9; «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 3.

МА́МФОРД Дейвид Брайант (Mumford David Bryant) (р. 11.6.1937, Сассекс, Великобритания) — американский математик, чл. Национальной АН США (1978), проф. Гарвардского ун-та. Основные труды по алгебраич. геометрии. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1974).

■ Лекции о кривых на алгебраической поверхности, М., 1968; Абелевы многообразия, М., 1971; Алгебраическая геометрия, 1. Комплексные проективные многообразия, М., 1979.

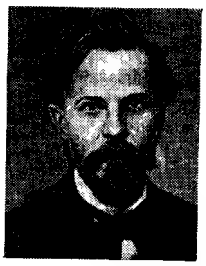
МАНДЕЛЬБРО́ЙТ Солем (Шолем) (Mandelbrojt Szolem) (р. 20.1.1899, Варшава,— 1983, Париж) — французский математик, чл. Парижской АН (1972). Окончил Парижский ун-т (1923), с 1938 проф. в Коллеж де Франс. Директор серии «Международные математические монографии». Основные труды по теории функций действительного и комплексного переменного, теории чисел, функциональному анализу.

■ Примыкающие ряды. Регулярпзация последовательностей. Применения, М., 1955; Теоремы замкнутости и теоремы композиции, М., 1962; Ряды Дирихле. Принципы и методы, М., 1973.

МАРГУ́ЛИС Григорий Александрович (р. 24.2.1946, Москва) — советский математик. Окончил Московский ун-т (1967). С 1969 работает в Ин-те проблем передачи информации АН СССР. Основные труды по теории групп Ли.

Г. А. Маргулис.

К.К.Марджанишвили.



А. А. Марков.

В. А. Марков.

А. А. Марков.

Г. И. Марчук.

Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1978).

■ Арифметичность неприводимых решёток в полупростых группах ранга больше 1, Дополнение к кн.: Рагунатан М., Дискретные подгруппы групп Ли, пер. с англ., М., 1977, с. 277—313; Конечность факторгрупп дискретных подгрупп, «Функциональный анализ и его приложения», 1979, т. 14, № 3, с. 28—39.

МАРДЖАНИШВИЛИ Константин Константинович [13(26).8.1903, Москва,—13.2.1981, там же] — советский математик, акад. АН СССР (1974; чл.-корр. 1964), Герой Социалистич. Труда (1973). Чл. КПСС с 1939. Сын актёра и режиссёра К. А. Марджанишвили. Окончил Ленинградский ун-т (1924). В 1934—49 и с 1951 работал в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР, чл. редколлегии «Математической энциклопедии». Основные труды по аддитивной теории чисел (представление чисел суммами степеней, системы диофантовых уравнений и уравнений в простых числах) и прикладной математике. Награждён 2 орденами Ленина (1973, 1975), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1951, 1963).

■ Об одной задаче аддитивной теории чисел, «Изв. АН СССР. Сер. математическая», 1940, т. 4, № 2; О некоторых нелинейных системах уравнений в целых числах, «Матем. сб.», 1953, т. 33, в. 3.

● «Вестник АН СССР», 1981, № 5; «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 5.

МАРКОВ Андрей Андреевич [2(14).6.1856, Рязань,—20.7.1922, Петроград] — русский математик, акад. Петербургской АН (1890; адъюнкт с 1886). Родился в семье мелкого чиновника. В 1878 окончил Петербургский ун-т со степенью кандидата и в том же году получил золотую медаль за работу «Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей». С 1880 приват-доцент, с 1886 проф., а с 1905 заслуженный проф. Петербургского ун-та. Научные исследования М. тесно примыкают по своей тематике к работам старших представителей Петербургской математич. школы П. Л. Чебышева, Е. И. Золотарёва и А. Н. Коркина. Блестящих результатов в области теории чисел М. достиг в магистерской диссертации «О бинарных квадратичных формах положительного определителя» (1880). Результаты, полученные им в этой работе, послужили основой дальнейших исследований в этой области. Работы М. по математич. анализу относятся к теории непрерывных дробей, к изучению предельных значений интегралов при нек-рых условиях, наложенных на подинтегральную функцию, к вопросам улучшения сходимости рядов и к теории наилучших приближений. М. дал чрезвычайно простое решение вопроса об определении верхней границы производной от многочлена по данной верхней границе самого многочлена (т. н. неравенство Маркова). В теории вероятностей М. восполнил (1898) пробел, остававшийся в доказательстве основной предельной теоремы, и тем самым впервые дал полное и строгое доказательство этой теоремы в достаточно общих условиях. Дальнейшие работы М. по распространению основной предельной теоремы на последовательности зависимых величин привели (1907) к замечательной общей схеме «испытаний, связанных в цепь» (цепи Маркова). На этой элементарной схеме М. установил ряд закономерностей, положивших начало всей современной теории марковских процессов. М. много занимался различными приложениями теории вероятностей и дал, в частности, общепринятое в настоящее время вероятностное обоснование метода наименьших квадратов. Учебник М. «Исчисление вероятностей» (СПБ, 1900) оказал большое влияние на развитие этой науки, а по точности получаемых простыми средствами результатов представляет интерес до сих пор. Широкое распространение получил также его учебник «Исчисление конечных разностей» (1886, литогр. изд.). М. был прогрессивным учёным; неоднократно выступал с разоблачением реакционных направлений в науке, горячо протестовал против действий царского правительства, отказавшегося утвердить избрание М. Горького в почётные члены Академии наук.

В 1969 в АН СССР учреждена премия имени А. А. Маркова.

■ Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей, [М.], 1951; Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, М.—Л., 1948; Исчисление вероятностей, 4 изд., М., 1924.

● Гродзенский С. Я., Андрей Андреевич Марков, 1856—1922, М., 1987.

МАРКОВ Андрей Андреевич [9(22).9.1903, Петербург,— 11.10.1979, Москва] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1953). Чл. КПСС с 1953. Сын А. А. Маркова. Окончил Ленинградский ун-т (1924), в 1933—55 работал там же (с 1936 проф.), с 1959 проф. Московского ун-та. С 1939 работал в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР и затем в Вычислительном центре АН СССР. Основные труды по топологии, топологич. алгебре, теории динамич. систем, теории алгоритмов и конструктивной математике. Доказал неразрешимость проблемы гомеоморфизма в топологии, создал школу конструктивной математики и логики в СССР, автор понятия нормального алгорифма. Премия имени П. Л. Чебышева АН СССР (1969). Награждён орденом Ленина (1954), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1963, 1975), орденом «Знак Почёта» (1945).

■ Теория алгорифмов, М.—Л., 1954; Введение в теорию кодирования, М., 1982; Теория алгорифмов, М., 1984 (соавтор Н. М. Нагорный); Элементы математической логики, М., 1984.

● «Успехи матем. наук», 1964, т. 19, в. 3; 1974, т. 29, в. 6.

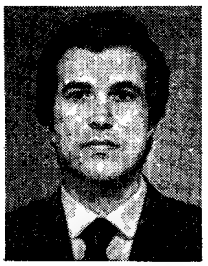
МАРКОВ Владимир Андреевич [7(19).5.1871—18(30).1.1897] — русский математик. Брат А. А. Маркова (старшего). Окончил Петербургский ун-т (1892). Проработав год в Петербургском ин-те путей сообщения, вынужден был по состоянию здоровья оставить преподавательскую работу. Студенческая работа М. «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке» (СПБ, 1892) была отмечена премией. В теории чисел изучал вопрос о числе классов положительных целочисленных тройничных квадратичных форм (1897).

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

МАРЧЕНКО В. А.— см. стр. 771.

МАРЧУК Гурий Иванович (р. 8.6.1925, с. Петро-Херсонец, ныне Грачёвского р-на Оренбургской обл.) — советский математик и физик, акад. (1968; чл.-корр. 1962) и президент (с 1986) АН СССР, Герой Социалистич. Труда (1975). Чл. КПСС с 1947. Окончил Ленинградский ун-т (1949). В 1953—62 работал в Физико-энергетич. ин-те (Обнинск), в 1962—80 проф. Новосибирского ун-та, в 1962—64 в Ин-те математики Сибирского отделения АН СССР, в 1964—79 директор Вычислительного центра Сибирского отделения АН СССР. В 1975—80 вице-президент АН СССР и председатель Сибирского отделения АН СССР. В 1980—86 зам. председа-

В. П. Маслов.



Ю. В. Матиясевич.

П. Ч. Махаланобис.

А. Ф. Мёбиус.

В. А. Мельников.

теля Совета Министров СССР и председатель Государственного комитета Совета Министров СССР по науке и технике. С 1980 зав. Отделом вычислительной математики АН СССР. Главный редактор журнала «Исследование Земли из космоса» (с 1983). Основные труды по вычислительной и прикладной математике, в частности по методам расчёта ядерных реакторов, математич. моделированию в задачах физики атмосферы и океана, окружающей среды, в иммунологии и медицине. Предложил методы построения эффективных разностных схем, схем расщепления. Внёс существенный вклад в теорию алгоритмов возмущений и сопряжённых уравнений, на основе к-рых решён ряд важных прикладных задач, предложил многие математич. модели физич. процессов в атмосфере и океане, разработал численные алгоритмы решения задач прогноза погоды. М. является одним из авторов нового научного направления — математич. моделирования в иммунологии и медицине.

М.— почётный доктор Тулузского ун-та (1973), иностранный чл. Болгарской АН (1977), АН ГДР (1977), Чехословацкой АН (1977), почётный доктор Карлова ун-та (Прага, 1978), Дрезденского технич. ун-та (1978), Будапештского политехнич. ун-та (1978). На 25—27-м съездах КПСС избирался кандидатом и членом ЦК КПСС. Депутат Верховного Совета СССР 10—11-го созывов. Ленинская премия (1961), Государственная премия СССР (1979), премия имени А. А. Фридмана АН СССР (1975), Золотая медаль и премия имени М. В. Келдыша АН СССР (1981), Золотая медаль Чехословацкой АН (1982). Награждён 4 орденами Ленина (1967, 1971, 1975, 1985).

■ Методы расчета ядерных реакторов, М., 1961; Численные методы в прогнозе погоды, Л., 1967; Численное решение задач динамики атмосферы и океана, Л., 1974; Методы вычислительной математики, 2 изд., М., 1980; Математические модели в иммунологии, М., 1980.

● Гурий Иванович Марчук, М., 1985 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР).

МАСКЕРО́НИ Лоренцо (Mascheroni Lorenzo) (14.5.1750, Кастаньета,— 30.7.1800, Париж) — итальянский математик. В «Геометрии циркуля» («Le geometria del compasso», Pavia, 1797) доказал, что всякая задача на построение, разрешаемая с помощью циркуля и линейки, разрешима и с помощью только циркуля. Ввёл (1790) в математич. анализ две специальные функции: интегральный синус и интегральный косинус.

МА́СЛОВ Виктор Павлович (р. 15.6.1930, Москва) — советский математик, акад. АН СССР (1984). Окончил Московский ун-т (1953). С 1968 проф. Московского ин-та электронного машиностроения. Главный редактор журнала «Математические заметки» (с 1988). Основные труды по дифференциальным уравнениям и математической физике. Разработал методы приближённого решения уравнений математической физики, метод т. н. канонического оператора Маслова, комплексный метод ВКБ в линейных и нелинейных уравнениях, дал обобщение операционного исчисления на некоммутативный случай. Ленинская премия (1986), Государственная премия СССР (1978), Золотая медаль имени А. М. Ляпунова АН СССР (1983).

■ Теория возмущений и асимптотические методы, М., 1965; Операторные методы, М., 1973; Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана для нелинейных уравнений, М., 1976; Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, М., 1976 (соавтор М. В. Федорюк); Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях, М., 1977; Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений, М., 1987; Математическое моделирование процессов тепломассопереноса, М., 1987 (соавторы В. Г. Данилов и К. А. Волосов); Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АС, М., 1987 (соавторы В. П. Мясников и В. Г. Данилов).

МАТИЯСЕ́ВИЧ Юрий Владимирович (р. 2.3.1947, Ленинград) — советский математик. Чл. КПСС с 1976. Окончил Ленинградский ун-т (1969), с 1969 работает в Ленинградском отделении Математич. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР (зав. лабораторией с 1980). Основные труды по математич. логике, установил (1970) алгоритмич. неразрешимость 10-й проблемы Гильберта. Чл. Международной ассоциации по символич. логике (1974). Премия им. А. А. Маркова АН СССР (1980).

■ Диофантовость перечислимых множеств, «Докл. АН СССР», 1970, т. 191, № 2, с. 279—82; Диофантовы множества, «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 5, с. 185—222.

МАХАЛАНО́БИС Прасанта Чандра (Mahalanobis Prasanta Chandra) (29.6.1893, Калькутта,—27.6.1972, там же) — индийский математик, статистик и экономист, иностранный чл. АН СССР (1958), чл. Лондонского королевского общества (1945). Основные исследования в математич. статистике; ввёл (1930) понятие, названное расстоянием Махаланобиса.

■ Выборочные обследования в Индии. (Новый опыт Индийского статистического института), М., 1958.

● «Вестник АН СССР», 1972, № 10.

МАЮ́РОВ, Маиров Алексей Иванович [1780—16(28).10.1848, Одесса) — русский математик, инженер, чл.-корр. Петербургской АН (1815). Занимался приложениями алгебры и анализа к геометрии.

● История отечественной математики, т. 2, М., 1967.

МЁБИУС Август Фердинанд (Möbius August Ferdinand) (17.11.1790, Шульпфорта,—26.9.1868, Лейпциг) — немецкий математик, с 1816 проф. Лейпцигского ун-та. Основные труды по геометрии. Впервые ввёл в проективную геометрию систему координат и аналитич. методы исследования, получил новую классификацию кривых и поверхностей, установил общее понятие проективного преобразования, исследовал коррелятивные преобразования. Установил (1858) существование односторонних поверхностей (т. н. лист Мёбиуса).

■ Gesammelte Werke, Bd 1—4, Lpz., 1885—87.

● Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций, М., 1981.

МЕ́ЛЕР Фердинанд Густав (Mehler Ferdinand Gustav) (13.12.1835, Шёнланке,—13.7.1895, Берлин) — немецкий математик. Основные труды по математич. физике, квадратурным формулам (формула Мелера, 1864).

МЕ́ЛЬНИКОВ Владимир Андреевич (р. 18.8.1928, дер. Венюково Московской обл.) — советский учёный в области конструирования ЭВМ, акад. АН СССР (1981; чл.-корр. 1976). Чл. КПСС с 1954. Окончил Московский энергетич. ин-т (1951). С 1971 проф. Московского физико-технич. ин-та, с 1983 директор Ин-та проблем кибернетики АН СССР. Главный редактор журнала «Информатика и образование» (с 1985). Основные труды в области структур, архитектур, элементной базы ЭВМ и их математич. обеспечения. Участвовал в разработках ЭВМ: БЭСМ-1, БЭСМ-2, М-20, БЭСМ-3, БЭСМ-4, БЭСМ-6 и системы АС-6. Государственные премии СССР (1969, 1980), премия им. С. А. Лебедева АН УССР (1978). Награждён орденом Ленина (1956), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1971, 1976).

■ Общее описание БЭСМ-2 и методика выполнения операций, М., 1959 (соавтор

Д. Е. Меньшов.

С. Н. Мергелян.

Н. Меркатор.

Р. Мизес.

Дж. У. Милнор.

Ф. Г. Миндинг.

С. А. Лебедев); Супер-ЭВМ: проблемы создания, использования и развития, «Вестник АН СССР», 1985, № 11.

МЕ́НГЕР Карл (Menger Karl) (р. 13.1.1902, Вена) — австрийский математик, с 1946 проф. Иллинойского технологич. ин-та (США). Основные труды по геометрии и топологии, в частности по теории размерности.

МЕНГО́ЛИ Пьетро (Mengoli Pietro) (1625, Болонья,—7.6.1686, там же) — итальянский математик. Основные труды по теории рядов. Доказал (1650) расходимость гармонич. ряда. Ввёл (1659) термин «натуральный логарифм».

МЕНЕЛА́Й Александрийский (Μενέλαος) (1 в.) — древнегреческий математик и астроном. Автор работ по сферич. тригонометрии: 6 книг о вычислении хорд и 3 книги «Сферики» (сохранились в арабском переводе). Для получения формул сферич. тригонометрии использовал теорему о прямой, пересекающей стороны треугольника (теорема Менелая).

● История математики, т. 1, М., 1970.

МЕ́НЕХМ (Μέναιχμος) (4 в. до н. э.) — древнегреческий математик. Изучил основные свойства конич. сечений, к-рые использовал для решения задачи об удвоении куба.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука. пер. с голл., М., 1959.

МЕ́НЬЕ Жан Батист Мари Шарль (Meusnier Jean Baptiste Marie Charles) (19.6.1754, Тур,—17.6.1793, Майнц) — французский математик, чл. Парижской АН (1784), генерал. Основные труды по дифференциальной геометрии. Изучал свойства кривизн плоских сечений поверхности (формула Мёнье).

● Darboux G., Notice historique sur le général Meusnier, в его кн.: Éloges académiques et discours, P., 1912.

МЕНЬШО́В Дмитрий Евгеньевич [р. 6(18).4.1892, Москва] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1953). Окончил Московский ун-т (1916), с 1922 проф. там же. Получил фундаментальные результаты по проблемам единственности представления функций тригонометрич. рядами, теории сходимости и суммируемости общих ортогональных рядов. М. принадлежат также исследования по теории конформных отображений. М.— чл. Польского математич. общества, Американского математич. общества (1975). Государственная премия СССР (1951), премия имени П. Л. Чебышева АН СССР (1975). Награждён орденом Ленина (1951), орденом Октябрьской Революции (1975), орденом Трудового Красного Знамени (1972), орденом «Знак Почёта» (1961), орденом Дружбы народов (1982).

■ Воспоминания о молодых годах и о возникновении Московской школы теории функций, «Историко-математические исследования», т. 27, М., 1983, с. 312—33.

● «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 5; 1972, т. 27, в. 2; 1982, т. 37, в. 5.

МЕРГЕЛЯ́Н Сергей Никитович (р. 19.5.1928, Симферополь) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1953), акад. АН Армянской ССР (1956). Чл. КПСС с 1955. Окончил Ереванский ун-т (1947), в 1945—57 работал там же. В 1954—58 и 1964—68 работал в Московском ун-те, в 1956—60 директор Научно-исследовательского ин-та математич. машин и Вычислительного центра АН Армянской ССР. В 1961—71 и с 1986 в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды по теории функций комплексного переменного, теории аппроксимации, теории потенциала и гармонич. функций. Депутат Верховного Совета Армянской ССР 5-го и 8-го созывов. Государственная премия СССР (1952). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1975).

■ Некоторые вопросы конструктивной теории функций, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1951, т. 37; Равномерные приближения функций комплексного переменного, «Успехи матем. наук», 1952, т. 7, в. 2; О полноте систем аналитических функций, там же, 1953, т. 8, в. 4; Весовые приближения многочленами, там же, 1956, т. 11, в. 5.

МЕРКА́ТОР, Кауфман Николаус [Mercator (Kaufmann) Nicolaus] (ок. 1620, Ойтин,—1687, Париж) — немецкий математик, астроном и инженер. Учился и работал в Копенгагене. Ок. 1660 переехал в Лондон, где был избран чл. Лондонского королевского общества. Позднее М. работал в Париже. Основное математич. сочинение М. «Логарифмотехник» («Logarithmotechnia», Londini, 1668) содержит разложение $\ln(1+x)$ в ряд, что является первым (после геометрич. прогрессии) примером степенного разложения.

● Hofmann J. E., Nicolaus Mercator (Kauffman), sein Leben und Wirken vorzugsweise als Mathematiker, Mainz, 1950.

МЕРКУ́РЬЕВ С. П.— см. стр. 771.

МЁРФИ Роберт (Murphy Robert) (г. рожд. неизв.— ум. 12.3.1843) — английский физик и математик. Основные труды по математич. анализу; ввёл (1833) обозначение Δ для оператора Лапласа.

МИ́ЗЕС Рихард (Mises Richard) (19.4.1883, Львов,—14.7.1953, Бостон) — немецкий математик и механик. Окончил Венский ун-т (1905), проф. Страсбургского (1909—18) и Берлинского (1920—33) ун-тов; был основателем и руководителем Ин-та прикладной математики Берлинского ун-та. В 1933 эмигрировал из Германии; в 1933—39 проф. Стамбульского ун-та (Турция), с 1939 — Гарвардского ун-та (США). Основные труды по теории вероятностей, аэромеханике и прикладной механике. В теории вероятностей М. ввёл в общее употребление интегралы Стилтьеса и первым подробно разъяснил значение теории цепей Маркова для физики.

■ Selected papers, v. 1—2, Providence, 1963—64; Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik, Lpz.— W., 1931; Вероятность и статистика, М.—Л., 1930; Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, Л.—М., 1937 (соавтор Ф. Франк); Теория полета, М., 1949; Математическая теория течений сжимаемой жидкости, М., 1961.

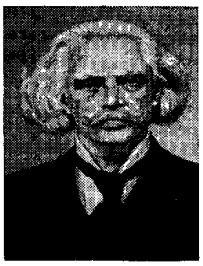
МИ́ЛНОР Джон Уиллард (Milnor John Willard) (р. 20.2.1931, Оринджс, Нью-Джерси) — американский математик, чл. Национальной АН США (1978), Американской академии искусств и наук в Бостоне, проф. Принстонского ун-та. Основные труды по алгебраической и дифференциальной топологии. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1962).

■ Теория Морса, М., 1965; Теорема об h-кобордизме, М., 1969; Особые точки комплексных гиперповерхностей, М., 1971; Дифференциальная топология, М., 1972 (соавтор А. Уоллес); Введение в алгебраическую K-теорию, М., 1974; Характеристические классы, М., 1979 (соавтор Дж. Сташеф); Симметрические билинейные формы, М., 1986 (соавтор Д. Хьюзмоллер).

МИ́НДИНГ Фердинанд Готлибович (Эрнст Фердинанд Адольф) (Minding Ernst Ferdinand Adolf) [11(23).1.1806, Калиш,— 1(13).5.1885, Дерпт] — русский математик, чл.-корр. (1864) и почётный чл. (1879) Петербургской АН. Окончил Берлинский университет (1827). С 1843 проф. Дерпт-

Г. Минковский.

Ю. А. Митропольский.



М. Г. Миттаг-Лёффлер.

Г. А. Михайлов.

В. С. Михалевич.

Е. Ф. Мищенко.

ского ун-та. Основные труды по интегрированию дифференциальных уравнений 1-го порядка, теории поверхностей постоянной кривизны. Автор работ по теории непрерывных дробей, высшей алгебре, теории алгебраич. функций и вариационному исчислению.

● Фердинанд Миндинг. 1806—1885, Л., 1970.

МИНКО́ВСКИЙ Герман (Minkowski Hermann) (22.6.1864, Алексоты Минской губ., — 12.1.1909, Гёттинген) — немецкий математик и физик, проф. ун-тов в Бонне (с 1893), Кёнигсберге (с 1894), Цюрихе (с 1896), Гёттингене (с 1902). Разработал т. н. геометрию чисел, в к-рой употребляются геометрич. методы решения вопросов теории чисел. От геометрии чисел М. перешёл к работам по теории многогранников и геометрии выпуклых тел (теоремы Минковского, 1896), где им были получены важные общие результаты (напр., неравенство Минковского, 1896). М.— автор работ по математич. физике, гидродинамике и теории капиллярности, в 1907—08 дал геометрич. интерпретацию кинематики специальной теории относительности, введя т. н. пространство Минковского.

■ Geometrie der Zahlen, Lfg 1—2, Lpz.—B.,1896—1910; N. Y., 1953; Gesammelte Abhandlungen, hrsg. von D. Hilbert, Bd 1—2, Lpz.—B., 1911.

● «Успехи матем. наук», 1936, в. 2.

МИТРОПО́ЛЬСКИЙ Юрий Алексеевич (р. 3.1.1917, с. Шишаки, ныне Полтавской обл.) — советский математик и механик, акад. АН СССР (1984) и акад. АН УССР (1961). Герой Социалистич. Труда (1986). Засл. деятель науки УССР (1967). Чл. КПСС с 1945. Окончил Казахский ун-т (1942). В 1946—50 работал в Ин-те строительной механики (ныне Ин-те механики) АН УССР, с 1950 в Ин-те математики АН УССР (с 1958 директор). Ответственный редактор «Украинского математического журнала» (с 1967). Основные труды по теории нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейной механике. Разработанные М. методы позволили, напр., исследовать явление прохождения через резонанс, нестационарные процессы в гироскопич. системах. Иностранный чл. Болонской АН (1971). Ленинская премия (1965), Государственная премия УССР (1980), премия имени Н. М. Крылова АН УССР (1969), Золотая медаль имени А. М. Ляпунова АН СССР (1986), Серебряная медаль «За заслуги перед наукой и человечеством» Чехословацкой АН (1977). Награждён орденом Ленина (1986), орденом Октябрьской Революции (1971), орденом Трудового Красного Знамени (1977), 2 орденами Красной Звезды (1944, 1945), орденом Отечественной войны 2-й степени (1985).

■ Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, 3 изд., М., 1963 (соавтор Н. Н. Боголюбов); Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, М., 1964; Метод усреднения в нелинейной механике, К., 1971.

● «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 1, с. 217—28.

МИ́ТТАГ-ЛЁФФЛЕР Магнус Гёста (Густав) [Mittag-Leffler Magnus Göst a (Gustav)] (16.3.1846, Стокгольм,— 7.7.1927, Юрсхольм, близ Стокгольма) — шведский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1896) и иностранный почётный чл. АН СССР (1926). В 1872 окончил Упсальский ун-т, проф. ун-тов в Гельсингфорсе (с 1877) и Стокгольме (с 1881). В 1882 основал журнал «Acta mathematica». По инициативе М.-Л. к чтению лекций в Стокгольмском ун-те в 1883 была привлечена С. В. Ковалевская. Основные труды по теории аналитич. функций, где он занимался вопросами представления аналитич. функций.

● «Acta mathematica», 1927, Bd 50, H. 3—4; Кочина П. Я., Гёста Миттаг-Леффлер. 1846—1927, М., 1987.

МИХА́ЙЛОВ Геннадий Алексеевич (р. 6.3.1934, дер. Литвиново Калининской обл.) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1984). Чл. КПСС с 1965. Окончил Ленинградский ун-т (1956). С 1974 проф. Новосибирского ун-та. Основные труды по вычислительной и прикладной математике, теории и приложениям методов Монте-Карло, общим принципам оптимизации весовых алгоритмов статистич. моделирования для решения интегральных уравнений и задач математич. физики. Ленинская премия (1962), Государственная премия СССР (1979). Награждён 2 орденами «Знак Почёта» (1975, 1986).

■ Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло, Новосиб., 1974; Методы Монте-Карло в атмосферной оптике, Новосиб., 1976 (соавторы Г. И. Марчук и др.); Решение краевых задач методом Монте-Карло, Новосиб., 1980 (соавторы Б. С. Елепов и др.); Статистическое моделирование, 2 изд., М., 1982 (соавтор С. М. Ермаков); Оптимизация весовых методов Монте-Карло, М., 1987.

МИХАЛЁВИЧ Владимир Сергеевич (р. 10.3.1930, Чернигов) — советский математик и кибернетик, акад. АН СССР (1984) и АН УССР (1973). Чл. КПСС с 1963. Окончил Киевский ун-т (1952). С 1958 работает в Ин-те кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР (с 1982 директор). Главный редактор журнала «Кибернетика» (с 1982). Основные труды по теории оптимальных решений, разработке математич. аппарата экономич. кибернетики. М. создал и развил методы последовательного анализа вариантов для численного решения оптимизационных задач. Принимал участие в создании высокопроизводительных ЭВМ, пакетов программ, формировании направления информатики. Государственная премия СССР (1981), премия Совета Министров СССР (1983), Государственная премия УССР (1973), премия имени Н. М. Крылова АН УССР (1971), премия имени В. М. Глушкова АН УССР (1984). Депутат Верховного Совета СССР 10—11-го созывов. Награждён орденом Октябрьской Революции (1980), орденом Трудового Красного Знамени (1976).

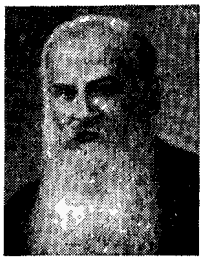
■ Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение, в сб.: Кибернетика, К., 1965, № 1—2; Методы последовательной оптимизации, М., 1983; Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем, М., 1982 (соавтор В. Л. Волкович).

МИЩЕ́НКО Евгений Фролович (р. 9.3.1922, пос. Ново-Вязники Владимирской обл.) — советский математик, акад. АН СССР (1985; чл.-корр. 1974). Чл. КПСС с 1942. Окончил Московский ун-т (1951). С 1951 работает в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР (с 1959 зам. директора), чл. редколлегии «Математической энциклопедии». Основные труды по топологии, обыкновенным дифференциальным уравнениям, оптимальным процессам, нелинейным релаксационным колебаниям и дифференциальным играм. Ленинская премия (1962), премия имени Н. М. Крылова АН УССР (1980). Награждён орденом Октябрьской Революции (1982), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1971, 1975), орденом Отечественной войны 1-й степени (1985), орденом Красной Звезды (1944).

■ Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных

Б. К. Млодзеевский.

Н. Н. Моисеев.



Ф. Э. Молин.

Г Монж.

А. С. Монин.

П. А. А. Монтель.

уравнений, содержащих малые параметры при производных, «Изв. АН СССР. Сер. математическая», 1957, т. 21, № 5; Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, М., 1975 (соавтор Н. Х. Розов); Математическая теория оптимальных процессов, 4 изд., М., 1983 (соавторы Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе); Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр, «Изв. АН СССР. Техническая кибернетика», 1971, № 5; Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений с малым параметром (соавтор Л. С. Понтрягин), «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1985, т. 169, с. 99—118.

МЛОДЗЕЕ́ВСКИЙ Болеслав Корнелиевич [28.6(10.7).1858, Москва,— 18.1.1923, там же (?)] — русский математик. Окончил Московский ун-т (1880), с 1892 проф. там же. С 1921 президент Московского математич. общества. Основные труды по дифференциальной геометрии, математич. анализу и механике.

● Россинский С. Д., Болеслав Корнелиевич Млодзеевский, М., 1950.

МОИСЕ́ЕВ Никита Николаевич [р. 10(23).8.1917, Москва] — советский учёный в области механики, прикладной математики и информатики, акад. АН СССР (1984; чл.-корр. 1966), действительный чл. Всесоюзной академии сельскохозяйственных наук имени В. И. Ленина (1985). Чл. КПСС с 1944. Окончил Московский ун-т (1941). В 1948—50 преподавал в Московском высшем технич. училище им. Н. Э. Баумана, в 1950—55 работал в Ростовском ун-те, с 1956 проф. Московского физико-технич. ин-та, в 1961—87 зам. директора Вычислительного центра АН СССР. Основные труды по динамике твёрдого тела с жидкостью, асимптотич. и численным методам математич. физики, теории линейных и квазилинейных движений, теории оптимального управления и др. Действительный чл. Международной академии астронавтики (1970). Государственная премия СССР (1980), премия Совета Министров СССР (1982). Награждён орденом Ленина (1987), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1971, 1975), 2 орденами Отечественной войны 2-й степени (1945, 1985), орденом Красной Звезды (1944).

■ Динамика тела с полостями, содержащими жидкость, М., 1965 (соавтор В. В. Румянцев); Асимптотические методы нелинейной механики, 2 изд., М., 1981; Численные методы в теории оптимальных систем, М., 1971; Математические задачи системного анализа, М., 1981; Человек. Среда. Общество, М., 1982; Человек и биосфера, М., 1985 (соавторы В. В. Александров и А. М. Тарко); Алгоритмы развития, М., 1987.

● «Вестник АН СССР», 1987, № 12.

МО́ЛИН Фёдор Эдуардович [30.8(11.9).1861—25.12.1941, Томск] — советский математик. Окончил Дерптский ун-т (1883), работал там же, затем с 1900 в Томске, с 1917 проф. Томского ун-та. Основные труды по гиперкомплексным системам, теории групп, эллиптич. функциям.

■ Числовые системы, Новосиб., 1985.

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968; Канунов Н. Ф., Федор Эдуардович Молин, М., 1983.

МО́ЛЬВЕЙДЕ Карл Брандау (Mollweide Karl Brandau) (3.2.1774, Вольфенбюттель,—10.3.1825, Лейпциг) — немецкий математик и астроном. Известны (1808) формулы Мольвейде для решения косоугольных треугольников.

МОНЖ Гаспар (Monge Gaspard) (10.5.1746, Бон, Кот-д'Ор, —28.7.1818, Париж) — французский математик и общественный деятель, чл. Парижской АН (1780). Проф. Мезьерской военно-инженерной школы (с 1768), один из основателей и проф. Политехнич. школы в Париже (с 1794). Основные труды по геометрии. Исходя из идеи проектирования предметов на две взаимно перпендикулярные плоскости, М. создал общий метод изображения пространственных фигур на плоскости. Работы в этой области были выполнены М. в первые годы его деятельности в Мезьерской школе (до сер. 70-х гг.), однако написанный им труд «Начертательная геометрия» был издан только в 1799. М. дал обстоятельное изложение дифференциальной геометрии пространственных кривых и поверхностей: изучил эволюты пространственных кривых, кривизны поверхностей, исследовал огибающие, развёртывающиеся поверхности, рассмотрел общие свойства нормальных конгруэнций и ввёл линии кривизны поверхностей. В труде М. «Приложение анализа к геометрии» (1795), помимо важных открытий по дифференциальной геометрии, дано геометрич. истолкование уравнений с частными производными и, с другой стороны, изложение геометрич. фактов на языке уравнений с частными производными. М. принадлежат также работы по математич. анализу, химии, оптике, метеорологии и практич. механике.

В период Великой французской революции М. состоял в комиссии по установлению системы мер и весов, в 1792—93 был морским министром. В 1793 заведовал пороховыми и пушечными заводами республики. Активно участвовал в создании Высшей нормальной школы (1794), Политехнич. школы (1794) в Париже. В период Директории М. сблизился с генералом Бонапартом, участвовал в его египетской экспедиции 1798—1801. Вернулся во Францию вместе с Бонапартом; возобновил преподавание в Политехнич. школе. Во времена Первой империи М. стал сенатором, получил титул графа. В период Реставрации М. лишён (1816) всех прав и изгнан из Политехнич. школы и Академии наук.

■ Приложение анализа к геометрии, М.—Л., 1936; Начертательная геометрия, М., 1947.

● Гаспар Монж. Сборник статей к 200-летию со дня рождения, М., 1947; Боголюбов А. Н., Гаспар Монж, М., 1978; Демьянов В. П., Геометрия и Марсельеза, 2 изд., М., 1986.

МО́НИН Андрей Сергеевич (р. 2.7.1921, Москва) — советский математик, метеоролог и океанолог, чл.-корр. АН СССР (1972). Чл. КПСС с 1945. Окончил Московский ун-т (1942), с 1963 проф. там же. С 1965 работает в Ин-те океанологии им. П. П. Ширшова АН СССР (в 1965—87 директор). Основные труды по геофизич. гидродинамике, физич. основам долгосрочного прогноза погоды, теории геофизич. турбулентности, теории эволюции недр Земли. М.— иностранный почётный чл. Американской академии искусств и наук в Бостоне (1973), иностранный чл. Национальной АН США (1976), почётный доктор Гётеборгского ун-та (1986). Государственная премия СССР (1980). Награждён орденом Октябрьской Революции (1971), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1975, 1981), орденом Отечественной войны 2-й степени (1985).

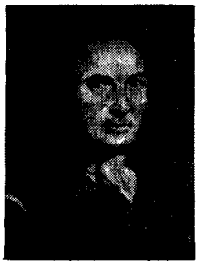
■ Статистическая гидромеханика, ч. 1—2, М., 1965—67 (соавтор А. М. Яглом); Прогноз погоды как задача физики, М., 1969; Вращение Земли и климат, Л., 1972; История Земли, Л., 1977; История климата, Л., 1979 (соавтор Ю. А. Шишков); Введение в теорию климата, Л., 1982.

● «Океанология», 1981, т. 21, № 3, с. 572—74.

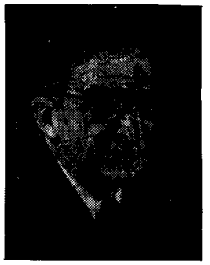
МОНТЕ́ЛЬ Поль Антуан Аристид (Montel Paul Antoine Aristide) (29.4.1876, Ницца,—22.1.1975, Париж) — французский математик, чл. Парижской АН (1937), проф. Парижского ун-та (1911—46). Основные труды по теории аналитич. функций, в част-

О. Морган.

О. Моргенштерн.



А. Муавр.



Н.И.Мусхелишвили.

ности по применению принципа компактности.

■ Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, P., 1910; Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes, P., 1932; Нормальные семейства аналитических функций, М.—Л., 1936.

МОР Георг (Mohr Georg) (1.4.1640, Копенгаген,—26.1.1697, Кислингвальде) — датский математик. Показал (1672), что все задачи, к-рые сводятся к квадратным уравнениям, можно решить геометрически с помощью одного циркуля. Этот результат (теорема Мора — Маскерони) был повторён через 100 лет Л. Маскерони.

МОРГАН Огастес (Августус) де (De Morgan Augustus) (27.6.1806, Мадура, Индия,— 8.3.1871, Лондон) — шотландский математик и логик, проф. математики Университетского колледжа в Лондоне (1828—31; 1836—66); первый президент (1866) Лондонского математич. общества. Основные труды по теории рядов и математич. логике. К своим алгебрологич. идеям М. пришёл независимо от Дж. Буля. Изложил (1847) элементы логики высказываний и логики классов, дал первую развитую систему алгебры отношений.

■ First notions of logic, preparatory to study of geometry, L., 1839; A budget of paradoxes, L., 1872; [L.], 1954; Syllabus of a proposed system of logic, L., 1860.

МОРГЕНШТЕРН Оскар (Morgenstern Oscar) (р. 24.1.1902, Гёрлиц, Германия) — американский математик и экономист. С 1970 работает в Нью-Йоркском ун-те. Основные труды по применению математики к экономич. проблемам. Совместно с Дж. Нейманом в 1944 систематически изложил теорию игр.

■ Теория игр и экономическое поведение, М., 1970 (соавтор Дж. Нейман).

МОРДЕЛЛ Луис Джоэл (Mordell Louis Joel) (28.1.1888, Филадельфия,— 12.3.1972) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1924). Окончил Кембриджский ун-т, работал там же и в Лондонском ун-те. Основные труды по алгебре, теории диофантовых уравнений (проблема Морделла), тригонометрич. рядам и другим вопросам анализа.

МОРЕРА Джачинто (Morera Giacinto) (18.7.1856, Новара,—8.2.1909, Турин) — итальянский математик, чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме, Туринской АН (1902). Основные труды по математич. физике и теории функций. Известна (1886) теорема Мореры, дающая интегральный признак аналитич. функции.

МОРЛЕЙ, Морли Фрэнк (Morley Frank) (9.9.1860, Вудбридж, Великобритания,—17.10.1937) — американский математик, проф. математики ун-та Джонса Хопкинса в Балтиморе. Основные труды по геометрии (теорема Морлея о трисектрисах треугольника).

МОРС Харолд Калвин Марстон (Morse Harold Calvin Marston) (р. 24.3.1892, Уотервилл,— 1977) — американский математик, чл. Национальной АН США (1932). Окончил колледж Колби (1944). Проф. Ин-та перспективных исследований в Принстоне. Основные труды по топологич. методам в математич. анализе и вариационном исчислении (теория Морса), механике и приложениям к географии, биологии, экономике и квантовой механике.

■ Топологические методы теории функций комплексного переменного, М., 1951.

МУАВР Абрахам де (Moivre Abraham de) (26.5.1667, Витри-ле-Франсуа,— 27.11.1754, Лондон) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1697), чл. Парижской и Берлинской АН. М. нашёл (1707) правила (т. н. формулу Муавра) возведения в n-ю степень и извлечения корня n-й степени для комплексных чисел. Исследовал степенные ряды, названные им возвратными; первый пользовался возведением в степень бесконечных рядов. М. и Дж. Стирлингу принадлежит асимптотич. представление $n!$, носящее назв. формулы Стирлинга. В теории вероятностей М. доказал частный случай теоремы Лапласа.

■ The doctrine of chances; or, a method of calculating the probability of events in play, L., 1718, 1738, 1756; L., 1967 (репродуцир. изд.); Miscellanea analytica de scriebus et quadraturis, L., 1730.

● «Archive for history of exact sciences», 1968, v. 5, № 3/4, p. 177—317.

МУЛА́ Фредерик (Фридрих) (Moulac Frédéric) (не позднее 25.2.1703— 26.12.1782) — математик, адъюнкт Петербургской АН (1736—44).

МУР Элиаким Гастингс (Moore Eliakim Hastings) (26.1.1862, Мариетта,— 30.12.1932, Чикаго) — американский математик,чл. Национальной АН США, Американской академии искусств и наук в Бостоне. Окончил Йельский ун-т (1885), учился в Гёттингенском и Берлинском ун-тах (1885—86). С 1892 проф. Чикагского ун-та. Основные труды по геометрии, теории групп, математич. и функциональному анализу (абстрактные пространства и операторы, сходимость по Муру—Смиту). Один из основателей (1894) и президент (1900—02) Американского математич. общества.

МУСХЕЛИШВИЛИ Николай Иванович [4(16).2.1891, Тбилиси,— 5.7. 1976, там же] — советский математик и механик, акад. АН СССР (1939; чл.-корр. 1933), акад. (1941), президент (1941—72) и почётный президент (с 1972) АН Грузинской ССР, почётный чл. АН Армянской ССР (1961), Герой Социалистич. Труда (1945). Чл. КПСС с 1940. Окончил Петербургский ун-т (1914). С 1922 проф. ун-та и Политехнич. ин-та в Тбилиси, с 1941 директор Тбилисского математич. ин-та им. А. М. Размадзе АН Грузинской ССР. Основные труды М. относятся к теории упругости, интегральным уравнениям, граничным задачам теории функций. М. одним из первых начал применять теорию функций комплексного переменного к задачам теории упругости, предложив ряд методов, к-рыми успешно пользуются также в др. разделах математики, в теоретич. физике и механике. В работах М. решены основные проблемы плоской теории упругости в статич. случае. Он открыл широкий класс областей, для к-рых плоская задача редуцируется к конечной линейной системе алгебраич. уравнений. Фундаментальный вклад внёс М. в теорию линейных граничных задач теории аналитич. функций и одномерных интегральных уравнений с особыми ядрами. Ему принадлежит важная формула индекса для системы сингулярных интегральных уравнений. Иностранный чл. Болгарской АН (1952), Польской АН (1960), почётный доктор права ун-та в Глазго (1960), иностранный чл. АН ГДР (1967), почётный чл. Польского общества теоретич. и прикладной механики (1969). Депутат Верховного Совета СССР 1—9-го созывов. Государственные премии СССР (1941, 1947), Золотая медаль имени М. В. Ломоносова АН СССР (1972), Золотая медаль «За заслуги перед наукой и человечеством» Словацкой АН (1970). Награждён 6 орденами Ленина (1941, 1945, 1953, 1961, 1966, 1975), орденом Октябрьской Революции (1971), орденом Трудового Красного Знамени (1944), а также болгарским орденом Кирилла и Мефодия I степени (1969), орденом Народной Республики Болгарии I степени (1972).

В 1977 в АН Грузинской ССР учреждена премия имени Н. И. Мусхелишвили.

■ Курс аналитической геометрии, 4 изд., М., 1967; Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966; Сингулярные интегральные уравнения, 3 изд., М., 1968.

● Николай Иванович Мусхелишвили, М., 1967 (АН СССР, Материалы к биобиблиографии ученых СССР); Проблемы механики

П. ван Мушенбрук.

Р. Г. Неванлинна.

Дж. Нейман.

Е. Нейман.

сплошной среды. К семидесятилетию академика Н. И. Мусхелишвили, М., 1961; «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 4; Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. К восьмидесятилетию академика Н. И. Мусхелишвили, М., 1972; «Вестник АН СССР», 1976, № 10.

МУ́ШЕНБРУК, Мюсхенбрук Питер ван (Musschenbroek Pieter van) (14.3.1692, Лейден,—19.9.1761, там же) — нидерландский физик и математик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1754). Основные труды по физике.

МЮЛЛЕР И. — см. *Регномонтан.*

Н

НАВРО́ЦКИЙ Николай Никанорович [1803 — не позднее 14(26).2.1859] — русский математик, чл.-корр. Петербургской АН (1827). Изучал историю математики, составил «Хронологическую и синхроническую таблицу известнейших и примечательнейших математиков во всех веках по 1800 год» (1846).

● История отечественной математики, т. 2, К., 1967.

НА́ГЕЛЬ Христиан Август (Nagel Christian August) (17.5.1821, Грюнберг,—23.10.1903, Дрезден) — немецкий геодезист и математик, проф. геодезии в Политехнич. школе в Дрездене. Математич. труды по геометрии, где известна точка Нагеля.

НАСИРЭ́ДДИН ТУСИ́, Насир ад-Дин, Абу Джафар Мухаммед ибн Мухаммед ибн Хасан Абу Бакр (18.2.1201, Тус,—25.6.1274, Багдад) — учёный-энциклопедист. В сер. 13 в. Н. Т. основал в г. Марага (Юж. Азербайджан) астрономич. обсерваторию, к-рая стала крупным научным центром того времени. Под руководством Н. Т. в Марагинской обсерватории было создано большое количество трудов по различным отраслям знаний, оказавших значительное влияние на дальнейшее развитие науки. В результате многолетних работ, приведённых учёными Марагинской обсерватории под руководством Н. Т., был составлен астрономич. каталог «Эльханские таблицы» (Зидж Эльхани), содержащий также таблицы для предвычислений положений Солнца, Луны и планет. В этом каталоге Н. Т. даёт для годовой прецессии величину 51″,4, исключительно точно определённую им на основании собственных наблюдений. Большое значение в развитии геометрич. мысли имело произведение Н. Т. «Изложение Евклида»; в 1594 оно было издано в Риме на арабском языке и в 17 в.— дважды на латинском языке. В этом труде Н. Т., вслед за Омаром Хайямом, показывает, что постулат Евклида о параллельных является следствием предположения о существовании четырёхугольника с четырьмя прямыми углами (или, что то же самое, предположения о равенстве суммы внутренних углов плоского треугольника двум прямым). Эта работа Н. Т. оказала плодотворное влияние на труды Дж. Валлиса, Дж. Саккери, А. Лежандра и др. и сыграла важную роль в развитии геометрии. Благодаря работе Н. Т. «Трактат о полном четырёхстороннике» плоская и сферич. тригонометрия стала самостоятельной математич. дисциплиной; в этом произведении Н. Т. впервые дал понятие сферич. полярного треугольника. Н. Т. было написано много других трудов по математике, астрономии, а также по минералогии, медицине, логике, теории поэзии, этике и другим областям знания.

■ Трактат о полном четырехстороннике, Баку, 1952; Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий, в кн.: Историко-математические исследования, в. 13, М., 1960, с. 483—532; Сборник по арифметике с помощью доски и пыли, там же, в. 15, М., 1963, с. 431—44.

● Розенфельд Б. А., О математических работах Насирэддина Туси, в кн.: Историко-математические исследования, в. 4, М., 1951, с. 489—512; Мамедбейли Г. Д., Мухаммед Насирэддин Туси о теории параллельных линий и теории отношений, Баку, 1959; его же, Основатель Марагинской обсерватории Мухаммед Насирэддин Туси, Баку, 1961; Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А., Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды, кн. 2, М., 1983, с. 392—409.

НЕВАНЛИ́ННА Ролф Герман (Nevanlinna Rolf Hermann) (22.10.1895, Йоэнсу,— 28.5.1980, Хельсинки) — финский математик, чл. Финской академии (1948). Образование получил в ун-те в Хельсинки, проф. там же (с 1926) и Цюрихского ун-та (с 1946). Основные труды по теории аналитич. функций, в частности по теории римановых поверхностей. Важнейшая заслуга Н.— создание общей теории мероморфных функций.

■ La théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, P., 1929; Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941; Униформизация, М., 1955; Пространство, время и относительность, М., 1966,

● «Elementary Mathematic», 1955, v. 10, № 5.

НЕЙЛЬ, Нейл Уильям (Neil William) (7.12.1637—24.8.1670, Уайт-Уолтен, Беркшир) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества. Основные труды по геометрии. Частично решил вопрос об определении длины отрезка дуги кривой линии; выполнил (1657) спрямление полукубич. параболы (параболы Нейля).

НЕ́ЙМАН Джон (Янош) фон [Neumann John (Janos) von] (28.12.1903, Будапешт,—8.2.1957, Вашингтон) — американский математик, чл. Национальной АН США (1937). В 1926 окончил Будапештский ун-т. В 1927—29 преподавал в Берлинском ун-те, в 1930—33 в Принстонском ун-те (США), с 1933 проф. Принстонского ин-та перспективных исследований. С 1940 консультант различных армейских и морских учреждений (Н. принимал, в частности, участие в работах по созданию первой атомной бомбы). С 1954 чл. комиссии по атомной энергии. Основные труды по функциональному анализу и его приложениям к вопросам классич. и квантовой механики. Н. принадлежат также исследования по математич. логике и по теории топологич. групп. В последние годы жизни занимался гл. обр. разработкой вопросов, связанных с теорией игр, теорией автоматов; внёс большой вклад в создание первых ЭВМ и разработку методов их применения.

■ Collected works, v. 1—6, Oxf., 1961—64; Математические основы квантовой механики, М., 1964; Теория игр и экономическое поведение, М., 1970 (соавтор О. Моргенштерн); Теория самовоспроизводящихся автоматов, М., 1971; Избранные труды по функциональному анализу, т. 1—2, М., 1987.

● «Bulletin of the American Mathematical Society», 1958, v. 64, № 3, pt 2 (номер посвящен памяти Н.).

НЕ́ЙМАН Ежи (Юрий) (Neyman Jerzy) (16.4.1894, Бендеры, — 5.8.1981, Беркли) — американский математик и статистик, чл. Национальной АН США (1963), с 1938 проф. Калифорнийского ун-та в Беркли. Основные труды по математич. статистике (в частности, по теории статистич. выводов) и теории вероятностей.

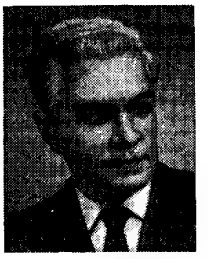
■ Вводный курс теории вероятностей и математической статистики, М., 1968.

● Reid C., Neyman — from life, N. Y.— Hdlb.—B., 1982.

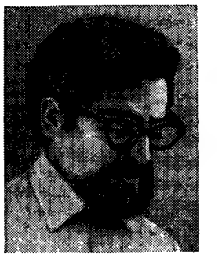
НЕ́ЙМАН Карл Готфрид (Neumann Karl Gottfried) (7.5.1832, Кёнигсберг,— 27.3.1925, Лейпциг) — немецкий математик, проф. ун-тов в Галле (с 1863), Тюбингене (с 1865) и Лейпциге (с 1868). Основные труды по дифференциальным уравнениям и алгебраич. функциям. В теории дифференциальных уравнений с частными производными Н. принадлежат работы, относящиеся к теории потенциала (в частности, к теории логарифмич. потенциала), где им дан метод (метод Неймана) решения задачи Дирихле для случая выпуклых контуров (на плоскости) и выпуклых по-

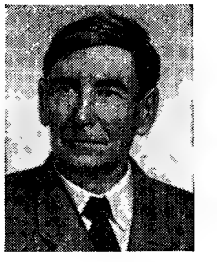
Дж. Непер.

А. Э. Нётер.


М. Николеску.

С. М. Никольский.


Л. Ниренберг.


П. С. Новиков.

верхностей (в пространстве). Исследовал вторую краевую задачу (т. н. задачу Неймана). Занимался также проблемами физики. Совместно с А. Клебшем основал журнал «Mathematische Annalen» (1868).

■ Untersuchungen über das logarithmische und Newtonische Potential, Lpz., 1877; Vorlesungen über Rieman's Theorie der Abelschen Integrale, 2 Aufl., Lpz., 1884; Beiträge zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik..., Lpz., 1893.

● «Mathematische Annalen», 1925, Bd 94; 1926, Bd 96, H. 1.

НЕ́ПЕР, Нейпир Джон (Napier John) (1550, Мерчистон-Касл, близ Эдинбурга,—4.4.1617, там же) — шотландский математик, изобретатель логарифмов. Учился в Эдинбургском ун-те. Основными идеями учения о логарифмах Н. овладел не позднее 1594, однако его «Описание удивительной таблицы логарифмов», в к-ром изложено это учение, было издано в 1614. В этом труде содержались определение логарифмов, объяснение их свойств, таблицы логарифмов синусов, косинусов, тангенсов и приложения логарифмов в сферич. тригонометрии. В «Построении удивительной таблицы логарифмов» (опубл. в 1619) Н. изложил принципы вычисления таблиц. Кинематич. определение логарифма, данное Н., по существу равносильно определению логарифмич. функции через дифференциальное уравнение. Н. принадлежит также ряд удобных для логарифмирования формул решения сферич. треугольников.

■ Werken, Amst., 1899.

● Гутер Р. С., Полунов Ю. Л., Джон Непер, М., 1976.

НЁТЕР Амали Эмми (Noether Amalie Emmy) (23.3.1882, Эрланген,— 14.4.1935, Брин-Мор, США) — немецкий математик. В 1922—33 работала сверхштатным проф. Гёттингенского ун-та. Основные труды по алгебре; они способствовали созданию нового направления, известного под названием общей или абстрактной алгебры (общая теория колец, полей, идеалов). Именем Н. наз. фундаментальная теорема теоретич. физики, связывающая симметрии системы с законами сохранения. В 1928—29 читала лекции по алгебре в Московском ун-те.

● «Успехи матем. наук», 1936, в. 2; «Mathematische Annalen», 1935, Bd 111; «Scripta mathematica», 1935, v. 3, p. 201—20.

НИКОЛЕ́СКУ Мирон (Nicolescu Miron) (27.8.1903, Джурджу,—30.6. 1975) — румынский математик, иностранный чл. АН СССР (1971), акад. (1955) и президент (с 1966) Румынской академии. С 1948 директор Ин-та математики академии. Автор 3-томного труда «Математический анализ» (1957—60), соч. «Функции действительного переменного и элементы функционального анализа» (1962) и учебника по математич. анализу (1962—64).

НИКО́ЛЬСКИЙ Сергей Михайлович [р. 17(30).4.1905, з-д Талица Пермской губ., ныне г. Талица Свердловской обл.] — советский математик, акад. АН СССР (1972; чл.-корр. 1968). Чл. КПСС с 1952. В 1929 окончил Екатеринославский ин-т народного образования (ныне Днепропетровский ун-т), в 1930—40 работал там же. С 1940 работает в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР (в 1953—61 зам. директора, с 1961 зав. отделом), с 1947 проф. Московского физико-технич ин-та. Почётный чл. Московского математич. общества (1987). Главный редактор реферативного журнала «Математика» (1953—60), главный редактор советской секции редколлегии советско-венгерского журнала «Analysis mathematica» (с 1975). Основные труды по функциональному анализу, теории приближений функций, теории вложений классов дифференцируемых функций многих переменных, обоснованию прямых методов вариационного исчисления, теории краевых задач для уравнений с частными производными. Большое значение имеют исследования Н. по теории приближений. Он нашёл асимптотически точные оценки приближений функций тригонометрич. полиномами и алгебраич. многочленами. Создал теорию наилучших квадратурных формул. Развитые Н. методы приближений целыми функциями экспоненциального типа позволили ему получить прямые и обратные теоремы вложения для обобщённо-гёльдеровых классов функций многих переменных. Н. нашёл (и исследовал вариационным методом) новые постановки краевых задач для эллиптич. уравнений высшего порядка с сильным вырождением на границе. Н.— чл. Американского математич. общества (1964), почётный чл. Венгерской АН (1976), иностранный чл. Польской АН (1980). Государственные премии СССР (1952, 1977, 1987), премия имени П. Л. Чебышева АН СССР (1972), Золотая медаль имени Б. Больцано Чехословацкой АН (1978). Награждён орденом Ленина (1975), орденом Октябрьской Революции (1985), орденом Трудового Красного Знамени (1953).

■ Интегральные представления функций и теоремы вложения, М., 1975 (соавторы О. В. Бесов, В. П. Ильин); Квадратурные формулы, 3 изд., М., 1979; Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, 2 изд., М., 1977; Курс математического анализа, 3 изд., т. 1—2, М., 1983; Высшая математика: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, 2 изд., М., 1984 (соавтор Я. С. Бугров); Высшая математика: Дифференциальное и интегральное исчисление, 2 изд., М., 1984 (соавтор Я. С. Бугров); Высшая математика: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного, 2 изд., М., 1985 (соавтор Я. С. Бугров); Алгебра. [Учебное пособие для 6—8 классов ср. школы], М.,1984 (соавторы М. К. Потапов и Н. Н. Решетников); Элементы математического анализа. [Пособие для учителей], М., 1981.

● «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 2; 1965, т. 20, в. 5; 1975, т. 30, в. 4; 1985, т. 40, в. 5.

НИКОМА́Х из Герасы (Νικόμαχος) (1—2 вв.) — древнегреческий математик и философ. Автор труда «Введение в арифметику», пользовавшегося широкой известностью в Др. Греции. Этот труд содержит обзор начал теории чисел (учение о простых, составных, взаимно простых и др. числах, о пропорциях). Сохранились также нек-рые труды Н. по музыке.

■ Introduction to arithmetic, Ann Arbor, 1938.

НИКОМЕ́Д (Νικομήδης) (3—2 вв. до н. э.) — древнегреческий математик. Впервые рассмотрел конхоиду (т. н. конхоиду Никомеда), построил прибор для её вычерчивания и применил её для нахождения двух средних пропорциональных между заданными величинами, а также для решения задач о трисекции угла и удвоении куба.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

НИРЕНБЕРГ Луис (Nirenberg Louis) (р. 28.11.1925, Гамильтон, Канада) — американский математик, чл. Национальной АН США (1970). Окончил ун-т в Монреале (1945). С 1947 работает в Ин-те математич. наук имени Р. Куранта в Нью-Йорке (в 1970—72 директор). Основные труды по теории дифференциальных уравнений с частными производными и их обобщениям, математич. физике, дифференциальной геометрии.

■ Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях, М., 1962 (соавторы С. Агмон и А. Дуглис); Лекции

С. П. Новиков.

И. Ньютон.

по нелинейному функциональному анализу, М., 1977.

НОВИКОВ Пётр Сергеевич [15(28).8. 1901, Москва,— 9.1.1975, там же] — советский математик, акад. АН СССР (1960; чл.-корр. 1953). Окончил Московский ун-т (1925). В 1929—34 работал в Московском химико-технологич. ин-те, с 1934 — в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР (с 1957 зав. отделом), с 1945 проф. Московского гос. педагогич. ин-та им. В. И. Ленина. Основные труды по теории множеств, математич. логике, теории алгоритмов и теории групп. Создал сильный метод исследования проблем дескриптивной теории множеств, получивший назв. «принцип сравнения индексов». Доказал, что во втором классе проективных множеств имеют место законы отделимости, обратные по отношению к законам отделимости в первом проективном классе. Создал метод доказательства непротиворечивости формальных систем, основанный на понятии регулярной формулы. Доказал неразрешимость проблемы тождества, сопряжённости и изоморфизма в теории групп. Получил (вместе с С. И. Адяном) решение известной проблемы Бёрнсайда о периодич. группах. Создал школу математич. логики в СССР. Ленинская премия (1957). Награждён 2 орденами Ленина (1961, 1971), орденом Трудового Красного Знамени (1953).

■ Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп, М., 1955; Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973; Конструктивная математическая логика с точки зрения классической, М., 1977; Избр. труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра, М., 1979.

● «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 5.

НОВИКОВ Сергей Петрович (р. 20. 3. 1938, г. Горький) — советский математик, акад. АН СССР (1981; чл.-корр. 1966). Сын П. С. Новикова и Л. В. Келдыш. Окончил Московский ун-т (1960), с 1966 проф. там же. С 1963 работает в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР (с 1983 зав. отделом), с 1971 — в Ин-те теоретич. физики имени Л. Д. Ландау АН СССР. Президент Московского математич. общества (с 1985), чл. редколлегии «Математической энциклопедии», редактор журнала «Успехи математических наук» (с 1988). Основные труды по геометрии и топологии, теории солитонов и общей теории относительности. Доказал топологич. инвариантность характеристич. классов Понтрягина, создал качественную теорию слоений и многозначных функций, качественную теорию космологич. моделей, теорию конечнозонных решений нелинейных систем. Ленинская премия (1967), Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1970), Международная премия имени Н. И. Лобачевского АН СССР (1981).

■ Теория солитонов, М., 1980 (соавторы В. Е. Захаров, С. В. Манаков, Л. П. Питаевский); Современная геометрия. Методы и приложения, 2 изд., М., 1986 (соавторы Б. А. Дубровин, А. Т. Фоменко); Современная геометрия. Методы теории гомологий, М., 1984 (соавторы Б. А. Дубровин, А. Т. Фоменко); Топология, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 12, М., 1986, с. 5—252; Элементы дифференциальной геометрии и топологии, М., 1987 (соавтор А. Т. Фоменко).

НЬЮТОН Исаак (Newton Isaac) (4.1.1643, Вулсторп, ок. Грантема,— 31.3.1727, Кенсингтон) — английский физик и математик, создавший теоретич. основы механики и астрономии, открывший закон всемирного тяготения, разработавший (наряду с Г. Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисление, изобретатель зеркального телескопа и автор важнейших экспериментальных работ по оптике.

Н. родился в семье фермера; отец Н. умер незадолго до рождения сына. В 12 лет Н. начал учиться в Грантемской школе, в 1661 поступил в Тринити-колледж Кембриджского ун-та в качестве субсайзера (так назывались бедные студенты, выполнявшие для заработка обязанности слуг в колледже), где лекции по математике с весны 1664 читал И. Барроу. С весны 1665 по весну 1667, во время эпидемии чумы, находился в своей родной деревне Вулсторп, лишь ненадолго приезжая в Кембридж; эти годы были наиболее продуктивными в научном творчестве Н. Здесь у Н. сложились в основном те идеи, к-рые привели его к созданию варианта анализа бесконечно малых, к изобретению зеркального телескопа (собственноручно изготовленного им в 1668), открытию закона всемирного тяготения, здесь он провёл опыты над разложением света. В 1668 Н. была присвоена степень магистра, а в 1669 И. Барроу передал ему почётную люкасовскую физико-математич. кафедру, к-рую Н. занимал до 1701. В 1671 Н. построил второй зеркальный телескоп — бо́льших размеров и лучшего качества. Демонстрация телескопа произвела сильное впечатление на современников, и вскоре после этого Н. был избран (в январе 1672) чл. Лондонского королевского общества (в 1703 стал его президентом). В 1687 он опубликовал свой грандиозный труд «Математические начала натуральной философии» (кратко — «Начала»). В 1695 получил должность смотрителя Монетного двора (этому, очевидно, способствовало то, что Н. изучал свойства металлов). Н. было поручено руководство перечеканкой всей английской монеты. Ему удалось привести в порядок расстроенное монетное дело Англии, за что он получил в 1699 пожизненное высокооплачиваемое звание директора Монетного двора. В том же году Н. избран иностранным чл. Парижской АН. В 1705 за научные труды он возведён в дворянское достоинство. Похоронен Н. в английском национальном пантеоне — Вестминстерском аббатстве.

Основные вопросы механики, физики и математики, разрабатывавшиеся Н., были тесно связаны с научной проблематикой его времени. Оптикой Н. начал интересоваться ещё в студенческие годы, его исследования в этой области были связаны со стремлением устранить недостатки оптич. приборов. В первой оптич. работе «Новая теория света и цветов», доложенной им в Лондонском королевском обществе в 1672, Н. высказал свои взгляды о «телесности света» (корпускулярную гипотезу света). Эта работа вызвала бурную полемику, в к-рой противником корпускулярных взглядов Н. на природу света выступил Р. Гук (в то время господствовали волновые представления). Отвечая Р. Гуку, Н. высказал гипотезу, сочетавшую корпускулярные и волновые представления о свете. Эту гипотезу Н. развил затем в соч. «Теория света и цветов», в к-ром он описал также опыт с т. н. кольцами Ньютона и установил периодичность света. При чтении этого сочинения на заседании Лондонского королевского общества Р. Гук выступил с притязанием на приоритет, и раздражённый Н. принял решение не публиковать оптич. работ. Многолетние оптич. исследования Н. были опубликованы им лишь в 1704 (через год после смерти Р. Гука) в фундаментальном труде «Оптика». Принципиальный противник необоснованных и произвольных гипотез, Н. начинает «Оптику» словами: «Мое намерение в этой книге — не объяснять свойства света гипотезами, но изложить и доказать их рассуждениями и опытами» (М., 1954, с. 9). В «Оптике» Н. описал проведённые им чрезвычайно тщательно эксперименты по обнаружению дисперсии света — разложения с помощью призмы белого света на отдельные компоненты различной цветности и преломляемости и показал, что дисперсия вызывает искажение в линзовых оптич. системах — хроматич. аберрацию. Ошибочно считая, что устранить искажение, вызываемое ею, невозможно, Н. сконструировал зеркальный телескоп. Наряду с опытами по дисперсии света Н. описал интерференцию света в тонких пластинках и изменение интерференционных цветов в зависимости от толщины пластинки в кольцах Ньютона. По существу Н. первым измерил длину световой волны. Кро-

ме того, он описал здесь свои опыты по дифракции света.

«Оптика» завершается специальным приложением — «Вопросами», где Н. высказывает свои физич. взгляды. В частности, здесь он излагает воззрения на строение вещества, в к-рых присутствует в неявном виде понятие не только атома, но и молекулы. Кроме того, Н. приходит к идее иерархич. строения вещества: он допускает, что «частички тел» (атомы) разделены промежутками — пустым пространством, а сами состоят из более мелких частичек, также разделённых пустым пространством и состоящих из ещё более мелких частичек, и т. д. до твёрдых неделимых частичек. Н. вновь рассматривает здесь гипотезу о том, что свет может представлять собой сочетание движения материальных частиц с распространением волн эфира.

Вершиной научного творчества Н. являются «Начала», в к-рых Н. обобщил результаты, полученные его предшественниками (Г. Галилей, И. Кеплер, Р. Декарт, Х. Гюйгенс, Дж. Борелли, Р. Гук, Э. Галлей и др.), и свои собственные исследования и впервые создал единую стройную систему земной и небесной механики, к-рая легла в основу всей классич. физики. Здесь Н. дал определения исходных понятий — количества материи, эквивалентного массе, плотности; количества движения, эквивалентного импульсу, и различных видов силы. Формулируя понятие количества материи, Н. исходил из представления о том, что атомы состоят из некой единой первичной материи; плотность Н. понимал как степень заполнения единицы объёма тела первичной материей. Н. впервые рассмотрел основной метод феноменологич. описания любого физич. воздействия через посредство силы. Определяя понятия пространства и времени, он отделял «абсолютное неподвижное пространство» от ограниченного подвижного пространства, наз. «относительным», а равномерно текущее, абсолютное, истинное время, наз. «длительностью»,— от относительного, кажущегося времени, служащего в качестве меры «продолжительности». Эти понятия времени и пространства легли в основу классич. механики. Затем Н. сформулировал свои три знаменитые «аксиомы, или законы движения»: закон инерции (открытый Г. Галилеем, первый закон Н.), закон пропорциональности количества движения силе (второй закон Н.) и закон равенства действия и противодействия (третий закон Н.) — т. н. законы механики Ньютона. Из 2-го и 3-го законов он выводит закон сохранения количества движения для замкнутой системы.

Н. рассмотрел движение тел под действием центральных сил и доказал, что траекториями таких движений являются конич. сечения (эллипс, гипербола, парабола). Он изложил своё учение о всемирном тяготении, сделал заключение, что все планеты и кометы притягиваются к Солнцу, а спутники — к планетам с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, и разработал теорию движения небесных тел. Н. показал, что из закона всемирного тяготения вытекают законы Кеплера и важнейшие отступления от них. Так, он объяснил особенности движения Луны (вариацию, попятное движение узлов и т. д.), явление прецессии и сжатие Юпитера, рассмотрел задачи притяжения сплошных масс, теории приливов и отливов, предложил теорию фигуры Земли.

В «Началах» Н. исследовал движение тел в сплошной среде (газе, жидкости) в зависимости от скорости их перемещения и привёл результаты своих экспериментов по изучению качания маятников в воздухе и жидкостях. Здесь же он рассмотрел скорость распространения звука в упругих средах. Н. доказал посредством математич. расчёта полную несостоятельность гипотезы Р. Декарта, объяснявшего движение небесных тел с помощью представления о разнообразных вихрях в эфире, заполняющем Вселенную. Н. нашёл закон охлаждения нагретого тела. В этом же сочинении Н. уделил значительное внимание закону механич. подобия, на основе к-рого развилась теория подобия. Таким образом, в «Началах» впервые дана общая схема строгого математич. подхода к решению любой конкретной задачи земной или небесной механики. Дальнейшее применение этих методов потребовало, однако, детальной разработки аналитич. механики (Л. Эйлер, Ж. Д'Аламбер, Ж. Лагранж, У. Гамильтон) и гидромеханики (Л. Эйлер и Д. Бернулли). Последующее развитие физики выявило пределы применимости механики Н.

Задачи естествознания, поставленные Н., потребовали разработки принципиально новых математич. методов. Математика для Н. была главным орудием в физич. изысканиях; он считал, что понятия математики заимствуются извне и возникают как абстракция явлений и процессов физич. мира, что, по существу, математика является частью естествознания.

Разработка дифференциального и интегрального исчисления явилась важной вехой в развитии математики. Большое значение имели также работы Н. по алгебре, интерполированию и геометрии. Основные идеи метода флюксий сложились у Н. под влиянием трудов его предшественников и современников в 1665—66. К этому времени относятся открытие Н. взаимно обратного характера операций дифференцирования и интегрирования и фундаментальные открытия в области бесконечных рядов, в частности индуктивное обобщение т. н. теоремы о биноме Ньютона на случай любого действительного показателя. Вскоре были написаны и основные сочинения Н. по анализу, изданные, однако, значительно позднее. Нек-рые математич. открытия Н. получили известность уже в 70-е гг. благодаря его рукописям и переписке.

В исходных понятиях и терминологии метода флюксий отразилось влияние кинематико-математич. идей, восходящих к натурфилософским школам 14 в. и по-новому развитых целым рядом учёных 17 в.— Дж. Непером, Г. Галилеем, Б. Кавальери, Э. Торричелли, И. Барроу и др. Понятие непрерывной математич. величины Н. вводит как абстракцию от различных видов непрерывного механич. движения. Линии производятся движением точек, поверхности — движением линий, тела — движением поверхностей, углы — вращением сторон и т. д. Непрерывные переменные величины Н. назвал флюентами (текущими величинами, от лат. fluo — теку). Общим аргументом различных текущих величин — флюент — является у Н. «время», понимаемое формально, как некая отвлечённая равномерно текущая величина, к к-рому отнесены прочие, зависимые переменные. Скорости изменения флюент Н. назвал флюксиями, а необходимые для вычисления флюксий бесконечно малые изменения флюксий — «моментами» (у Г. Лейбница они назывались дифференциалами). Таким образом, Н. положил в основу понятия флюксии (производной) и флюенты (интеграла).

В соч. «Анализ при помощи уравнений с бесконечным числом членов» (1669, опубл. 1711) Н. вычислил производную и интеграл любой степенной функции. Различные рациональные, дробно-рациональные, иррациональные и нек-рые трансцендентные функции (логарифмическую, показательную, синус, косинус, арксинус) Н. выражал с помощью бесконечных степенных рядов. В этом же труде Н. изложил метод численного решения алгебраич. уравнений (метод Ньютона), а также метод для нахождения разложения неявных функций в ряд по дробным степеням аргумента. Метод вычисления и изучения функций их приближением бесконечными рядами приобрёл огромное значение для всего математич. анализа и его приложений.

Наиболее полное изложение дифференциального и интегрального исчисления содержится в так наз. «Методе флюксий и бесконечных рядов» (1670—71, под таким названием это сочинение впервые было издано в английском переводе 1736; в сохранившейся латинской рукописи самого И. Ньютона сочинение это не имеет заглавия). Здесь Н. формулирует две основные взаимно обратные задачи анализа: 1) определение скорости движения в данный момент времени по известному

пути, или определение соотношения между флюксиями по данному соотношению между флюентами (задача дифференцирования), и 2) определение пройденного за данное время пути по известной скорости движения, или определение соотношения между флюентами по данному соотношению между флюксиями (задача интегрирования дифференциального уравнения и, в частности, отыскания первообразных). Метод флюксий применяется здесь к большому числу геометрич. вопросов (задачи на касательные, кривизну, экстремумы, квадратуры, спрямления и др.); здесь же выражается в элементарных функциях ряд интегралов от функций, содержащих квадратный корень из квадратного трёхчлена. Большое внимание уделено в «Методе флюксий» интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, причём основную роль играет представление решения в виде бесконечного степенного ряда. Н. принадлежит также решение нек-рых задач вариационного исчисления.

Во введении к «Рассуждению о квадратуре кривых» (написанном в начале 1670-х гг., опубл. 1704) и в «Началах» он намечает программу построения метода флюксий на основе учения о пределе, о «последних отношениях исчезающих величин» или «первых отношениях зарождающихся величин», не давая, впрочем, формального определения этих понятий и рассматривая их как интуитивно очевидные, пробные понятия (мгновенной) скорости. Учение Н. о пределе через ряд посредствующих звеньев (Ж. Д'Аламбер, Л. Эйлер) получило глубокое развитие в математике 19 в. (О. Коши и др.).

В «Методе разностей» (опубл. 1711) Н. дал решение задачи о проведении через $n+1$ данные точки с равностоящими или неравностоящими абсциссами параболич. кривой n-го порядка и предложил т. н. интерполяционную формулу Ньютона, а в «Началах» дал теорию конич. сечений. В «Перечислении кривых третьего порядка» (опубл. 1704) Н. приводится классификация этих кривых, обобщаются понятия диаметра и центра, указываются способы построения кривых 2-го и 3-го порядков по различным условиям (классификация Ньютона). Этот труд сыграл большую роль в развитии аналитической и отчасти проективной геометрии. Во «Всеобщей арифметике» (опубл. в 1707 по лекциям, читанным в 70-е гг. 17 в.) содержатся важные теоремы о симметрич. функциях корней алгебраич. уравнений, об отделении корней, о приводимости уравнений и др. Алгебра окончательно освобождается у Н. от геометрич. формы, и его определение числа не как собрания единиц, а как отношения длины любого отрезка к отрезку, принятому за единицу, явилось важным этапом в развитии учения о действительном числе.

В недавно опубликованных рукописях И. Ньютона содержится ряд неизвестных ранее его открытий, как, напр., разложения в степенные ряды Тейлора и Маклорена; метод позволяет преобразовывать знакопеременные расходящиеся ряды в сходящиеся и ускорять сходимость рядов сходящихся (этот метод много позже был вновь предложен Л. Эйлером, а известен под его именем) и др.

Созданная Н. теория движения небесных тел, основанная на законе всемирного тяготения, была признана крупнейшими английскими учёными того времени, но резко отрицательно встречена на европейском континенте. Противниками взглядов Н. (в частности, в вопросе о тяготении) были картезианцы, воззрения к-рых господствовали в Европе (в особенности во Франции) в 1-й пол. 18 в. Убедительным доводом в пользу теории Н. явилось обнаружение рассчитанной им приплюснутости земного шара у полюсов вместо выпуклостей, ожидавшихся по учению Р. Декарта. Исключительную роль в укреплении авторитета теории Н. сыграла работа А. Клеро по учёту возмущающего действия Юпитера и Сатурна на движение кометы Галлея. Успехи теории Н. в решении задач небесной механики увенчались открытием планеты Нептун (1846), основанным на расчётах возмущений орбиты Юпитера (У. Леверье и Дж. Адамс).

Вопрос о природе тяготения во времена Н. сводился, в сущности, к проблеме взаимодействия, т. е. наличия или отсутствия материального посредника в явлении взаимного притяжения масс. Не признавая картезианских воззрений на природу тяготения, Н., однако, уклонился от к.-л. объяснений, считая, что для них нет достаточных научно-теоретич. и опытных оснований. После смерти Н. возникло научно-философское направление, получившее название ньютонианства, наиболее характерной чертой к-рого были абсолютизация и развитие высказывания Н.: «гипотез не измышляю» («hypotheses non fingo») и призыв к феноменологич. изучению явлений при игнорировании фундаментальных научных гипотез.

Могучий аппарат ньютоновской механики, его универсальность и способность объяснить и описать широчайший круг явлений природы, особенно астрономических, оказали огромное влияние на многие области физики и химии. Н. писал, что было бы желательно вывести из начал механики и остальные явления природы, и при объяснении нек-рых оптич. и химич. явлений сам использовал механич. модели. Влияние взглядов Н. на дальнейшее развитие физики огромно. «Ньютон заставил физику мыслить по-своему, „классически", как мы выражаемся теперь... Можно утверждать, что на всей физике лежал индивидуальный отпечаток его мысли: без Ньютона наука развивалась бы иначе» (Вавилов С. И., Исаак Ньютон, 1961, с. 194, 196).

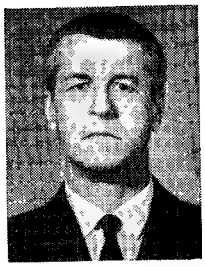
Материалистические естественнонаучные воззрения совмещались у Н. с религиозностью. К концу жизни он написал сочинение о пророке Данииле и толкование Апокалипсиса. Однако Н. чётко отделял науку от религии. «Ньютон оставил ему (богу) ещё „первый толчок", но запретил всякое дальнейшее вмешательство в свою солнечную систему» (Энгельс Ф., Диалектика природы, 1969, с. 171).

На русский язык переведены все основные работы Н.

■ Opera quae extant omnia. Commentariis illustravit S. Horsley, v. 1—5, L., 1779—85; Математические начала натуральной философии, с примечаниями и пояснениями А. Н. Крылова, в кн.: Крылов А. Н., Собр. трудов, т. 7, М.—Л., 1936; Лекции по оптике, пер. С. И. Вавилова, [М.], 1946; Оптика, или Трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света, пер. и примечания С. И. Вавилова, 2 изд., М., 1954; Математические работы, пер. с лат. Д. Д. Мордухая-Болтовского, М.—Л., 1937; Всеобщая арифметика, или Книга об арифметических синтезе и анализе, пер. А. П. Юшкевича, М.—Л., 1948.
● Вавилов С. И., Исаак Ньютон, М., 1961; Исаак Ньютон. 1643—1727. Сб. статей к трехсотлетию со дня рождения, под ред. С. И. Вавилова, М.—Л., 1943.

ОБУХОВ Александр Михайлович (р. 5.5.1918, Саратов) — советский геофизик, акад. АН СССР (1970; чл.-корр. 1953). После окончания Московского ун-та (1940) работал в Геофизич. ин-те АН СССР, с 1956 директор Института физики атмосферы АН СССР, с 1949 проф. Московского ун-та. Основные труды по физике атмосферы, турбулентности и математич. статистике. Открыл закон пространственных пульсаций температуры в турбулентном потоке атмосферы — т. н. закон Обухова для поля температур, совместно с А. Н. Колмогоровым создал теорию локально однородной и локально изотропной турбулентности. Автор работ по теории стратифицированного турбулентного пограничного слоя, основам теории распространения волн в турбулентных средах, теории крупномасштабных движений атмосферы. Предложил метод статистически-ортогональных разложений метеорологич. полей. О.— иностранный чл. Королевского метеорологич. общества Великобритании (1967), чл. Американского геофизич. союза (1968). Премия имени А. А. Фридмана АН СССР (1984). Награждён орденом Октябрьской Революции (1975), орденом Трудового Красного Знамени (1981), орденом «Знак Почёта» (1954).

А. М. Обухов.



Л. В. Овсянников.

М. Окань.

Ю. С. Осипов.

■ Теория корреляции векторов, «Уч. зап. МГУ. Сер. Математика», 1940, в. 45, с. 73—92; О распределении энергии в спектре турбулентного потока, «Изв. АН СССР. Сер. географическая и геофизическая», 1941, т. 5, № 4—5, с. 453—66; Турбулентность в температурно неоднородной атмосфере, «Тр. Ин-та теоретич. геофизики», 1946, т. 1, с. 95—115; Структура температурного поля в турбулентном потоке, «Изв. АН СССР. Сер. географическая и геофизическая», 1949, т. 13, № 1, с. 58—69; К вопросу о геострофическом ветре, там же, 1949, т. 13, № 4, с. 281—306; О влиянии слабых неоднородностей атмосферы на распространение звука и света, «Изв. АН СССР. Сер. геофизическая», 1953, № 2, с. 155—65; Статистическое описание непрерывных полей, «Тр. Геофиз. ин-та АН СССР», 1954, № 24, с. 3—42; О статистически ортогональных разложениях эмпирических функций, «Изв. АН СССР. Сер. геофизическая», 1960, № 3, с. 432—39; Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа, «Докл. АН СССР», 1969, т. 184, № 2, с. 309—12; Системы гидродинамического типа и их применение, М., 1981 (соавторы Е. Б. Гледзер, Ф. В. Должанский); Течение Колмогорова и его лабораторное моделирование, «Успехи матем. наук», 1983, т. 38, в. 4, с. 101—11; О возможной причине разрыва хвоста кометы Галлея, «Письма в Астрономический журнал», 1986, т. 12, № 12, с. 942—45 (соавторы А. В. Данилов, М. В. Курганский).
● «Вестник АН СССР», 1978, № 8.

ОВСЯННИКОВ Лев Васильевич (р. 22.4.1919, Васильсурск Горьковской обл.) — советский математик и механик, акад. (1987; чл.-корр. 1964) АН СССР. Окончил Московский ун-т (1941) и Ленинградскую военно-воздушную инженерную академию (1945). С 1959 работает в Сибирском отделении АН СССР, с 1970 зам. директора Ин-та гидродинамики, с 1963 проф. Новосибирского ун-та. Основные труды по теории групповых свойств дифференциальных уравнений, где им создано новое направление, околозвуковой газовой динамике, гидродинамике течений со свободными поверхностями. Ленинская премия (1958), Государственная премия СССР (1987). Награждён орденом Октябрьской Революции, 2 орденами Трудового Красного Знамени.

■ Групповые свойства дифференциальных уравнений, Новосиб., 1962; Аналитические группы, Новосиб., 1972; Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., 1978; Лекции по основам газовой динамики, М., 1981.

ОКАНЬ Морис (Ocagne Maurice) (25.3.1862, Париж,— 23.10.1938, Гавр) — французский математик, чл. Парижской АН (1922). Основные труды по номографии; в 1884—90 открыл общий метод построения номограмм из выравненных точек, положил начало общей теории номографич. построений. Автор работ по начертательной, дифференциальной и проективной геометрии, графостатике, графич. и графомеханич. методам вычисления.

■ Traité de nomographie, théorie des abaques, applications pratiques, 2 éd., P., 1921; Calcul graphique et nomographie, 3 éd., P., 1924.
● «Успехи матем. наук», 1940, в. 7.

ОМ Мартин (Ohm Martin) (6.5.1792, Эрланген,— 1.4.1872, Берлин) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1826), с 1824 проф. Берлинского ун-та. Основные труды по теории чисел, геометрии и математич. анализу.

ОМАР ХАЙЯМ, Абу-ль-Фатх Омар ибн Ибрахим аль-Хайям (ок. 1048, Нишапур, Хорасан,— 1131, там же) — персидский и таджикский поэт, математик и философ. Родился в семье ремесленника (имя Хайям по-персидски буквально — делающий палатки). Детство провёл в Балхе. Потеряв отца в 18 лет, О. Х. вынужден был прервать учение и зарабатывать на жизнь. Выдающиеся способности О. Х. были замечены, он был приближен правителем Бухары Шамс аль-Мульком. Впоследствии О. Х. получил доступ ко двору сельджукского султана Мелик-шаха. В 1076 в распоряжение О. Х. была предоставлена обсерватория в Исфахане. Он руководил реформой старого персидского календаря. После смерти Мелик-шаха и его всесильного визиря Низам аль-Мулька в 1092 О. Х., видимо, лишился поддержки двора. В преклонном возрасте он, чтобы отвести обвинение в безбожии, совершил паломничество в Мекку, откуда вернулся в 1103. Первая половина жизни О. Х. протекала в сравнительно спокойной обстановке сильной сельджукской державы. Последние годы его жизни совпали с временем междоусобиц, начавшихся после смерти Мелик-шаха и Низам аль-Мулька, и представляют цепь невзгод.

О. Х.— непревзойдённый мастер рубаи (четверостиший). В Европе его лирика получила распространение благодаря вольному, сильно модернизированному переводу английского поэта Э. Фицджеральда в сер. 19 в. Его переводы до конца века выдержали 25 изданий.

Математич. сочинения О. Х., дошедшие до наших дней, характеризуют его как выдающегося учёного своего времени. В математич. трактате «О доказательствах задач алгебры и алмукабулы» О. Х. дал систематич. изложение решения уравнений до 3-й степени включительно. Решение в общем виде находится геометрически, с помощью пересечения двух конич. сечений. При этом учитываются только действительные положительные корни. Второй трактат «Комментарии к трудным постулатам книги Евклида» состоит из трёх книг. Первая — «Об истинном смысле параллельных и об известных сомнениях» содержит оригинальную теорию параллельных, опирающуюся на рассуждения, эквивалентные допущению V постулата Евклида. Во второй книге «Об отношении, пропорции и их истинном смысле» О. Х. стремился усовершенствовать теорию отношений, изложенную в V книге «Начал» Евклида, и установить единую теорию для чисел и величин. В третьей книге «О составлении отношений и его исследовании» каждому отношению положительных действительных чисел или величин ставится в соответствие действительное число, вследствие чего становится возможным применять отношения наряду с числами для измерения любых величин. В трактате «Об искусстве определения количества золота и серебра в состоящем из них теле» О. Х. рассматривает известную классич. задачу, решённую Архимедом.

■ Трактаты, М., 1961; Первый алгебраический трактат, в кн.: Историко-математические исследования, в. 15, М., 1963, с. 445—72.
● Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П., Омар Хайям, М., 1965; Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А., Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды, кн. 2, М., 1983, с. 314—19.

ОРЕМ, Оресм Никола (Oresme Nicola) (ок. 1323, Орем, Нормандия,— 1382, Лизьё) — французский математик, физик и экономист. В одно время с Р. Суайнсхедом разработал «Учение о долготах и широтах форм», своеобразную теорию текущих (переменных) величин и их графич. изображения, оперировал понятиями мгновенной скорости и ускорения и ввёл закон равномерно ускоренного прямолинейного движения, однако вне связи с проблемой падения тяжёлых тел. Доказал (ок. 1350) расходимость гармонич. ряда. В 1368 изложил учение о степени с дробными показателями. Написанный им на французском языке «Трактат о сфере» сыграл значительную роль в разработке французской научной (астрономич. и географич.) терминологии.

■ Algorismus proportionum, hrsg. von E. L. W. Curtz, B., 1868; Quaestiones super geometriam Euclidis, Leiden, 1961; «De proportionibus proportionum» and «Ad pauca respicientes», Madison(Milwaukee), 1966; Трактат о конфигурации качеств, в кн.: Историко-математические исследования, в. 11, М., 1958, с. 601—731.
● История математики, т. 1, М., 1970.

ОСИПОВ Юрий Сергеевич (р. 7.7.1936, Тобольск) — советский математик,

Т. Ф. Осиповский.

М. В. Остроградский.

акад. (1987; чл.-корр. 1984) АН СССР. Окончил Уральский (Свердловск) ун-т (1959), с 1973 проф. там же. С 1970 работает в Ин-те математики и механики Уральского отделения АН СССР (с 1972 зав. отделом, с 1986 директор). Основные труды по теории управления, теории дифференциальных уравнений, математич. моделированию. Ленинская премия (1976). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1986), орденом «Знак Почёта» (1976).

■ Позиционное управление в параболических системах, «Прикладная математика и механика», 1977, т. 41, № 2; О динамическом решении операторных уравнений, «Докл. АН СССР», 1983, т. 269, № 3 (соавтор А. В. Кряжимский); Об одной задаче Ж.-Л. Лионса, «Докл. АН СССР», 1984, т. 276, № 2 (соавтор А. П. Суетов); Задачи динамического восстановления, в сб.: Число и мысль, в. 10, М., 1987.

ОСИПОВСКИЙ Тимофей Фёдорович [22.1(2.2). 1765, с. Осипово, ныне Владимирской обл.,— 12(24).6. 1832, Москва] — русский математик, проф. (1805) и ректор (1813—20) Харьковского ун-та. Автор «Курса математики» (3 тт., СПБ, 1801—23) — одного из лучших для того времени руководств по элементарной математике, дифференциальному и интегральному исчислению. Занимался также вопросами физики и астрономии.

● Историко-математические исследования, в. 5, М., 1952.

ОСТРОГРАДСКИЙ Михаил Васильевич [12(24).9.1801, дер. Пашенная, ныне Полтавской обл.,—20.12.1861 (1.1.1862), Полтава] — русский математик, акад. Петербургской АН (1830; адъюнкт с 1828). Один из основателей Петербургской математич. школы. Учился в Харьковском ун-те (1816—1820), а затем слушал лекции в Париже (1822—28) О. Коши, П. Лапласа, Ж. Фурье. Был проф. офицерских классов Морского кадетского корпуса (с 1828), Ин-та корпуса инженеров путей сообщения (с 1830), Главного педагогич. ин-та (с 1832), Главного инженерного училища (с 1840), Главного артиллерийского училища (с 1841) в Петербурге.

Основные труды относятся к математич. анализу, теоретич. механике, математич. физике; известен также работами по теории чисел, алгебре, теории вероятностей. Научную деятельность О. начал в Париже, представив Парижской АН несколько мемуаров, в к-рых, среди прочего, развил (1824) теорию вычетов Коши, обобщил (1826) метод разделения переменных, применённый в 1821 Ж. Фурье для решения уравнения теплопроводности в твёрдом теле, попутно выведя формулу преобразования тройного интеграла по объёму в двойной интеграл по поверхности (формулу Остроградского), и доказал ортогональность собственных функций данного оператора и сопряжённого, а затем подробно решил задачу о распространении тепла в прямой призме с основанием в виде прямоугольного треугольника (1827). В 1826 О. успешно продолжил исследования О. Коши и С. Пуассона о распределении волн в цилиндрич. бассейне; этот мемуар был опубликован в Париже в 1832. Основоположный мемуар (1826) по теории теплоты О. опубликовал в переработанном виде под названием «Заметки по теории теплоты» в записках Петербургской АН (1831), а содержание работы о распространении тепла в призме стало известно по сообщению о нём Г. Ламе (сама же работа, как и парижский мемуар по теории теплоты, была напечатана в русском переводе только в 1965). В «Заметках» 1836 О. поставил общую проблему доказательства сходимости решения, представляемого бесконечным рядом по собственным функциям соответствующей краевой задачи. Эту задачу он решил только в частном, хотя и важном случае; впоследствии она стала предметом изысканий многих других математиков. Теория распространения тепла в жидкости фактически впервые была построена О. (1836—1838), так как предыдущие исследования Ж. Фурье и С. Пуассона были основаны на ошибочных предпосылках. О. занимался также вопросами теории упругости, небесной механики, теории магнетизма и др.

Установленная О. (1828) формула преобразования интеграла по объёму в интеграл по поверхности была обобщена им (1834) на случай n-кратного интеграла. При помощи этой формулы О. нашёл вариацию кратного интеграла. В работе «О преобразовании переменных в кратных интегралах» (1836, опубл. 1838) О. дал вывод (излагаемый теперь во всех учебниках математич. анализа) правила преобразования переменных интегрирования в двойных и тройных интегралах. Один из частных результатов, полученных О. (1844) в теории интегрирования рациональных функций,— выделение рациональной части интеграла (т. н. метод Остроградского) — также излагается в учебниках. Важные результаты были получены О. в теории дифференциальных уравнений, приближённом анализе. Вслед за Н. Абелем и одновременно с Ж. Лиувиллем О. занимался также теорией интегрирования иррациональных алгебраич. функций (1833—43), в чём за ним последовал П. Л. Чебышев.

В теоретич. механике О. принадлежат фундаментальные результаты, связанные с развитием принципа возможных перемещений, вариационных принципов механики, а также с решением ряда частных задач; О. построена (1854) общая теория удара. В 40-х гг. 19 в. общий вариационный принцип почти одновременно был высказан У. Гамильтоном для консервативных систем и О. для неконсервативных систем. В «Мемуаре о дифференциальных уравнениях, относящихся к проблеме изопериметров» (1850) О. обобщил эти результаты на общую изопериметрич. задачу вариационного исчисления. Большой интерес для своего времени имели работы О. по теории движения сферич. снарядов в воздухе и по выяснению влияния выстрела на лафет орудия.

О. был передовым учёным своего времени. Он стоял на позициях естественнонаучного материализма. Критерием ценности математич. исследований для О. служила практика, возможность использовать полученные результаты в практич. деятельности. Характерны в этом отношении его исследования по теории вероятностей. Одно из них, являющееся началом статистич. методов браковки, возникло с целью облегчения работы по проверке товаров, поставляемых армии. О. принадлежит также ряд популярных статей, педагогич. исследований, а также превосходных для своего времени учебников. О.— иностранный чл. Национальной АН США (1834), Туринской АН (1841), Национальной академии деи Линчеи в Риме (1853), иностранный чл.-корр. Парижской АН (1856).

■ Полн. собр. трудов, т. 1—3, К., 1959—61.

● Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б., Михаил Васильевич Остроградский, М., 1963; Михаил Васильевич Остроградский. Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности, М., 1961; Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

ОУТРЕД Уильям (Oughtred William) (5.3.1574, Итон,— 30.6.1660, Олдбери) — английский математик. В соч. «Ключ математики» («Clavis mathematicae», Londini, 1631) развил алгебраич. и тригонометрич. символику, там же ввёл знак × умножения.

ОХОЦИМСКИЙ Дмитрий Евгеньевич (р. 26.2.1921, Москва) — советский учёный в области механики, чл.-корр. АН СССР (1960), Герой Социалистич. Труда (1961). Чл. КПСС с 1951. Окончил Московский ун-т (1946), с 1961 проф. там же. В 1945—66 работал в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР, с 1966— в Ин-те прикладной математики им. М. В. Келдыша АН

Д. Е. Охоцимский.

СССР. Основные труды по динамике полёта и управлению полётом летательных аппаратов, а также по разработке алгоритмов поведения сложных, адаптирующихся к неизвестной обстановке, кибернетич. локомоционных и манипуляционных систем с элементами искусственного интеллекта. Ленинская премия (1957), Государственная премия СССР (1970), премия имени С. А. Чаплыгина АН СССР (1950). Награждён 2 орденами Ленина (1956, 1961), орденом Октябрьской Революции (1975), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1970, 1981).

■ Механика космического полета, в кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 1, М., 1968 (соавторы Г. Л. Гродзовский, В. В. Белецкий и др.); Механика и управление движением автоматического шагающего аппарата, М., 1984 (соавтор Ю. Ф. Голубев); Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу, М., 1975 (соавторы Ю. Ф. Голубев, Ю. Г. Сихарулидзе).
● «Вестник АН СССР», 1981, № 7.

ПАПП Александрийский (Παππος) (2-я пол. 3 в.) — древнегреческий математик. Автор труда «Математическое собрание» в 8 книгах, из к-рых дошли до нас последние 6. Первые 2 книги были посвящены арифметике, 3—5-я — в основном геометрии, 6-я — астрономии, 7-я содержит комментарии к сочинениям Аполлония Пергского, в т. ч. к «Коническим сечениям» и др. произведениям, 8-я посвящена механике. В сочинениях П. имеется много извлечений из не дошедших до нас произведений греческих авторов; они являются ценным источником по истории греческой математики эллинистич. эпохи.

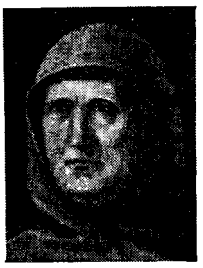
■ Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt..., ed. F. Hultsch, v. 1—3, Berolini, 1876—78.
● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

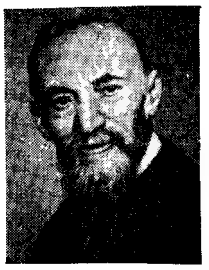
ПАРСЕВА́ЛЬ Марк Антуан (Parseval Marc Antoin) (27.4.1755, Розьер-о-Салин,—16.8.1836, Париж) — французский математик. Основные труды по дифференциальным уравнениям, теории функций действительного переменного, где известно равенство Парсеваля.

ПАСКА́ЛЬ Блез (Pascal Blaise) (19.6.1623, Клермон-Ферран,— 19.8.1662, Париж) — французский философ, писатель, математик и физик. Родился в семье высокообразованного юриста, занимавшегося математикой. Рано проявил выдающиеся математич. способности, войдя в историю науки как классич. пример отроческой гениальности.

Первый математич. трактат П. «Опыт о конических сечениях» («Essay pour les coniques», P., 1640) являлся развитием трудов Ж. Дезарга, содержал одну из основных теорем проективной геометрии — теорему Паскаля. В 1641 (по др. сведениям, в 1642) П. сконструировал суммирующую машину. К 1654 закончил ряд работ по арифметике, теории чисел, алгебре и теории вероятностей (опубл. 1665). Круг математич. интересов П. был весьма разнообразен. П. нашёл общий алгоритм для нахождения признаков делимости любого целого числа на любое другое целое число [трактат «О характере делимости чисел» («Caractères de divisibilité des nombres,...»)], способ вычисления биномиальных коэффициентов (треугольник Паскаля), сформулировал ряд основных положений элементарной теории вероятностей [«Трактат об арифметическом треугольнике» («Traité du triangle arithmétique», P., 1665) и переписка с П. Ферма]. В этих работах П. впервые точно определил и применил для доказательства метод математич. индукции. Труды П., содержащие изложенный в геометрич. форме интегральный метод решения ряда задач на вычисление площадей фигур, объёмов и площадей поверхностей тел, а также других задач, связанных с циклоидой, явились существенным шагом в развитии анализа бесконечно малых.

Б. Паскаль.


Л. Пачоли.


Дж. Пеано.

Вместе с Г. Галилеем и С. Стевином П. является основоположником классич. гидростатики: он установил её основной закон — т. н. закон Паскаля, принцип действия гидравлич. пресса, указал на общность основных законов равновесия жидкостей и газов. Опыт, проведённый под руководством П. (1648), подтвердил предположение Э. Торричелли о существовании атмосферного давления.

Работа П. над проблематикой точных наук в основном относится к 1640—50. Разочаровавшись в «отвлечённости» этих наук, П. обращается к религиозным вопросам и философской антропологии. Сблизившись с представителями янсенизма, он с 1655 ведёт полумонашеский образ жизни в янсенистской обители Пор-Руайяль-де-Шан, вступив в энергичную полемику по вопросам религиозной этики с иезуитами; плодом этой полемики стали «Письма к провинциалу» (1657) — шедевр французской сатирич. прозы.

Место П. в истории философии определяется тем, что это первый мыслитель, к-рый прошёл через опыт механистич. рационализма 17 в. и со всей остротой поставил вопрос о границах «научности», указывая при этом на «доводы сердца», отличные от «доводов разума», и тем предвосхищая последующую иррационалистич. тенденцию в философии.

П. сыграл значительную роль в формировании французской классич. прозы.

■ Œuvres, v. 1—14, P., 1904—14; Pensées, v. 1—3, P., 1951; Œuvres complètes, P., 1976; Письма к провинциалу, СПБ, 1898; Мысли, М., 1905; Начала гидростатики: Архимед, Стэвин, Галилей, Паскаль, М.—Л., 1933; в кн.: Ф. де Ларошфуко, Максимы.— Б. Паскаль, Мысли.— Ж. де Лабрюйер. Характеры, М., 1974.
● Кляус Е. М., Погребысский И. Б., Франкфурт У. И., Паскаль, М., 1971; Montel P., Pascal mathématicien, P., 1950.

ПАУКЕР, Пауккер Магнус Георг фон (Paucker Magnus Georg von) [15 (26).11.1787, быв. Эстляндская губ.,— 19(31).8.1855, Митава] — математик, физик, астроном, чл.-корр. Петербургской АН (1822). Автор учебников и научных трудов по геометрии, теории упругости, небесной механике.

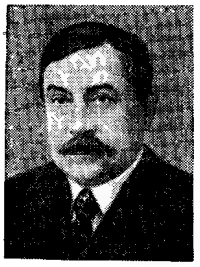
● Ожигова Е. П., Математика в Петербургской Академии наук в конце XVIII—первой половине XIX в., Л., 1980.

ПАЧО́ЛИ Лука (Pacioli Luca) (ок. 1445 — ок. 1514) — итальянский математик. Преподавал математику. В 1494 издал труд «Сумма [знаний] по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности» («Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita»), посвящённый арифметич. действиям, алгебраич. уравнениям и их применению к геометрии. В 1496—99 под влиянием взглядов своего друга Леонардо да Винчи написал трактат «О божественной пропорции» («De divina proportione», Veneziae, 1509), содержащий теорию геометрических пропорций, в частности правила золотого сечения.

● История математики, т. 1, М., 1970.

ПАШ Мориц (Pasch Moritz) (8.11.1843, Бреслау,— 20.9.1930, Бад-Хамбург)— немецкий математик, с 1873 проф. ун-та в Гиссене. Основные труды по геометрии, где исследовал аксиоматич. основы, сформулировал (1882) одну из аксиом евклидовой геометрии (аксиому Паша).

ПЕА́НО Джузеппе (Peano Giuseppe) (27.8.1858, Кунео,— 20.4.1932, Турин) — итальянский математик, с 1890 проф. Туринского ун-та. Занимался изучением основных понятий и методов анализа (вопрос о возможно более широких условиях существования решения дифференциальных уравнений, определение и объём понятия кривой и т. п.) и формально-логич. обоснованием математики. Во всеобщее употребление вошла его аксиоматика натурального ряда чисел (аксио-



П. Пенлеве.

Д. М. Перевощиков.

К. М. Петерсон.

И. Г. Петровский.

Ш. Э. Пикар.

мы Пеано). Известен его пример непрерывной (жордановой) кривой, целиком заполняющей нек-рый квадрат (кривая Пеано).

■ Opere scelte, v. 1—3, Roma, 1957—59.

ПЕЛЛЬ, Пелл Джон (Pell John) (1.3.1620, Сассекс,— 12.12.1685, Лондон) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1663). С именем П. ошибочно связывают решение нек-рого диофантова уравнения (уравнения Пелля).

ПЕНЛЕВЕ Поль (Painlevé Paul) (5.12.1863, Париж,— 29.10.1933, там же) — французский математик, иностранный чл.-корр. АН СССР (1924), чл. Парижской АН (1900). Основные труды по дифференциальным уравнениям и теории функций комплексного переменного.

ПЕРЕВОЩИКОВ Дмитрий Матвеевич [17(28).4.1788, по одним источникам Саранск, по другим — Шишквич, ныне Пензенской обл.,— 3(15).9.1880, Петербург] — русский астроном и математик, акад. Петербургской АН (1855; чл.-корр. 1832, адъюнкт с 1852). Основные труды по астрономии. Его учебники и научно-популярные статьи сыграли большую роль в распространении знаний в России. Выпустил «Ручную математическую энциклопедию» (кн. 1—13, М., 1826—37), первые семь томов к-рой посвящены математике.

● «Астрономический журнал», 1953, т. 30, в. 2.

ПЕРРО Клод (Perrault Claude) (ок. 1613, Париж,— 8.10.1688, там же) — французский врач и архитектор. Поставил задачу (1675) об определении кривой, к-рую впоследствии назвали трактрисой.

ПЕРРОН Оскар (Perron Oskar) (7.5.1880, Франкенталь,— 1975?) — немецкий математик, проф. ун-тов в Мюнхене, Тюбингене, Гейдельберге. Основные труды по математич. физике и теории интегрирования.

ПЕТЕРСОН Карл Михайлович [13(25).5.1828, Рига,— 19.4(1.5).1881, Москва] — русский математик. По национальности латыш. Окончил Дерптский ун-т (1852), где учился у Ф. Г. Миндинга. С 1865 был преподавателем математики в Петропавловском училище в Москве. Основные труды по геометрии. В работе «Об изгибании поверхностей» (1853) П. дал основные уравнения теории поверхностей. В 1868 П. нашёл изгибания минимальных поверхностей и поверхностей переноса, ввёл понятие изгибания на главном основании и др. П. известен также работами по уравнениям с частными производными.

■ Об изгибании поверхностей (Рассуждение К. Петерсона на соискание степени кандидата...), в кн.: Историко-математические исследования, в. 5, М., 1952, с. 85—112.

● Историко-математические исследования, в. 5 .М., 1952, с. 134—64.

ПЕТРОВСКИЙ Иван Георгиевич [5(18).1.1901, Севск, ныне Брянской обл.,—15.1.1973, Москва] — советский математик, акад. АН СССР (1946; чл.-корр. 1943), Герой Социалистич. Труда (1969). По окончании в 1927 Московского ун-та работал там же (с 1933 проф., с 1951 ректор). Главный редактор журнала «Математический сборник» (с 1950).

Основные труды по теории дифференциальных уравнений с частными производными, алгебраич. геометрии, теории вероятностей, качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, математич. физике и др. областям математики. П. заложил основы общей теории систем дифференциальных уравнений с частными производными; выделил и изучил классы эллиптич., гиперболич. и параболич. систем; установил аналитичность решений эллиптич. систем (1937); изучал задачу Коши для гиперболич. и параболич. систем (1936), исследовал зависимость решения задачи Коши от начальных данных, установив условия существования лакун и диффузии волн (1944). Работы по теории вероятностей (1934) оказали большое влияние на развитие теории случайных процессов. П. изучал вопрос (1933) о расположении овалов алгебраич. кривой на проективной плоскости. Созданный им метод позволил получить глубокие результаты по топологии алгебраич. многообразий любой размерности (1949).

П.— почётный доктор наук Карлова ун-та (Прага, 1960), Бухарестского (1962), Лундского (1968) и Софийского (1972) ун-тов, иностранный почётный чл. Румынской академии (1965). Чл. Советского комитета защиты мира (с 1955). Депутат Верховного Совета СССР 6—8-го созывов, чл. Президиума Верховного Совета СССР (с 1966). Государственные премии СССР (1946, 1952). Награждён 5 орденами Ленина (1953, 1961, 1967, 1969, 1971), 3 орденами Трудового Красного Знамени (1944, 1945, 1949), а также венгерским орденом Труда I степени (1964), орденом ГДР «За заслуги» I степени (1965), болгарским орденом Кирилла и Мефодия I степени (1968), французским орденом Почётного легиона (1971).

■ Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.—Л., 1939 (7 изд., М., 1984); Лекции по теории интегральных уравнений, М.—Л., 1948 (4 изд., М., 1984); Лекции об уравнениях с частными производными, М.—Л., 1950 (3 изд., М., 1961); Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия (Избр. труды), М., 1986; Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей (Избр. труды), М., 1987.

● Иван Георгиевич Петровский, М., 1957 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР); «Успехи матем. наук», 1971, т. 26, в. 2; 1974, т. 29, в. 2 (посвящен памяти И. Г. Петровского); «Вестник АН СССР», 1973, № 5.

ПИКАР Шарль Эмиль (Picard Charles Émile) (24.7.1856, Париж,— 11.12.1941, там же) — французский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1895) и иностранный почётный чл. АН СССР (1925), чл. Парижской АН (1889), Французской академии (1924). Окончил Высшую нормальную школу в Париже (1877), с 1881 проф. этой школы и с 1886—Парижского ун-та. Основные труды по теории дифференциальных уравнений (исследование особых точек, асимптотич. решения); им развит метод последовательных приближений. В теории функций комплексного переменного известна теорема Пикара. П. также автор трудов по алгебраич. функциям и их приложениям к общей теории алгебраич. кривых и поверхностей.

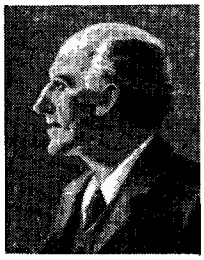
■ Traité d'analyse, 3 éd., v. 1—3, P., 1925—28; Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendants, v. 1—2, P., 1897—1906 (соавтор G. Simart).

● Lebon E., Émile Picard, P., 1910.

ПИРС Бенджамин (Peirce Benjamin) (4.4.1809, Сейлем, шт. Массачусетс,— 6.10.1880, Кембридж, шт. Массачусетс) — американский математик и астроном, основатель и чл. Национальной АН США (1863). Основные математич. труды относятся к алгебре; сформулировал (1872) общее понятие ассоциативной алгебры, ввёл понятия нильпотентного и идемпотентного элементов.

■ Mathematical and physical papers, 1903—1913, Camb., 1926.

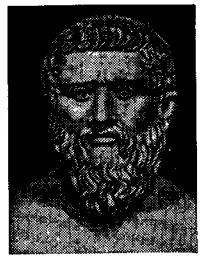
ПИРС Чарлз (Сантьяго) Сандерс [Peirce Charles (Santiago) Sanders] (10.9.1839, Кембридж, шт. Массачусетс,—19.4.1914, Милфорд, шт. Пенсильвания) — американский математик, философ и логик, чл. Американской академии искусств и наук в Бостоне (1877), Национальной АН США (1879), проф. Гарвардского ун-та (1884—1911). Сын Б. Пирса. Основные труды по мате-



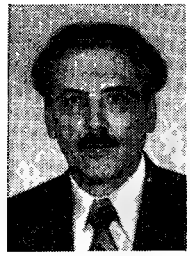
К. Пирсон.

Э. Ш. Пирсон.

Пифагор.



Платон.



А. В. Погорелов.

матич. логике (стрелка Пирса), теории вероятностей, алгебре. Обосновал логику отношений. Ввёл (независимо от Г. Фреге) понятие квантора.

■ Collected papers, v. 1—8, Camb., 1931—58; [2d print], v. 1—6, Camb., 1960; v. 1—2, Camb., 1965.

ПИ́РСОН Карл (Чарлз) [Pearson Karl (Charles)] (27.3.1857, Лондон,— 27.4.1936, там же) — английский математик, биолог, философ, чл. Лондонского королевского общества (1896), с 1884 проф. Лондонского ун-та. Основные труды по математич. статистике (кривые Пирсона, распределение Пирсона). Разработал теорию корреляции, тесты математич. статистики и критерии согласия.

ПИ́РСОН Эгон Шарп (Pearson Egon Sharpe) (11.8.1895, Лондон,— 1980) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1966). Окончил Кембриджский ун-т, в 1933—60 проф. Лондонского ун-та. Основные труды по математич. статистике. Один из основателей (совместно с Е. Нейманом) общей теории проверки статистич. гипотез, занимался вопросами статистич. контроля качества массовой продукции, большое внимание уделял составлению статистич. таблиц.

ПИТИ́СК Бартоломео (Pitiscus Bartholomäus) (24.8.1561, Грюнберг,— 2.7.1613) — немецкий математик, богослов. В заглавии его книги (1595) впервые встречается слово «тригонометрия» (trigonometria). В 1613 издал исправленные и расширенные таблицы тригонометрич. функций Ретика.

ПИФАГО́Р Самосский (Πυθαγόρας) (ок. 570 — ок. 500 до н. э.) — древнегреческий мыслитель, основатель пифагореизма. Скудные сведения о жизни и учении П. трудно отделить от легенд, представляющих П. как полубога, совершенного мудреца, наследника всей античной и ближневосточной науки, чудотворца и мага. П. покинул родной остров Самос в знак протеста против тирании Поликрата; возможно, что он действительно посетил в своих путешествиях Египет и Вавилон (позднейшие авторы предполагали, что П. был посвящён в различные тайные доктрины восточных жрецов). В зрелом возрасте (по преданию, на 40-м году жизни) он поселился в южноиталийском г. Кротон, где основал строго закрытое сообщество своих последователей, уже при жизни почитавших его как высшее существо. Доктрины и открытия П., сохранившиеся в устной традиции сообщества, невозможно отделить от идей его последователей, любивших приписывать П. собственную умственную инициативу.

В области математики П. приписываются систематич. введение доказательств в геометрию, построение планиметрии прямолинейных фигур, создание учения о подобии, доказательство теоремы о сторонах прямоугольного треугольника, носящей его имя (теорема Пифагора), построение нек-рых правильных многогранников и многоугольников. С именем П. связывают также учение о чётных и нечётных, простых и составных, о фигурных и совершенных числах, об арифметич., геометрич. и гармонич. пропорциях и средних.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

ПЛАНУ́Д М.— см. *Максим Плануд*.

ПЛАНШЕРЕ́ЛЬ Мишель (Plancherel Michel) (16.1.1885, Бюси,— 1967) — швейцарский математик, чл. Туринской АН, с 1911 проф. Фрайбургского ун-та, а позднее Высшей технич. школы в Цюрихе. Основные труды по теории функций (теорема Планшереля о квадратично суммируемой функции).

ПЛАТО́ Жозеф Антуан Фердинан (Plateau Joseph Antoine Ferdinand) (14.10.1801, Брюссель,— 15.9.1883, Гент) — бельгийский математик и физик, чл. Бельгийской АН (1836). Основные математич. труды по вариационному исчислению и дифференциальной геометрии (задача Плато о нахождении минимальной поверхности).

ПЛАТО́Н (Πλάτων) (428 или 427 до н. э., Афины,— 348 или 347, там же) — древнегреческий философ. В Афинах основал собственную школу — академию. Считая, что знание математики необходимо каждому образованному человеку, ввёл математику в число предметов преподавания; обращал особое внимание на определения математич. объектов. П.— один из основателей логич. метода рассуждения от противного (обосновал метод доказательства приведения к абсурду). Ввёл термины «анализ» и «синтез». Большое внимание в школе П. уделялось геометрич. задачам на построение с помощью циркуля и линейки.

● Ван дер Варден Б. Л., Пробуждающаяся наука, пер. с голл., М., 1959.

ПЛАТО́НОВ В. П.— см. стр. 771.

ПЛА́ЦМАН, Платцман Мартин Мартинович (Platzmann Martin) (22.8.1760—26.12.1786, Петербург) — математик, адъюнкт Петербургской АН (с 1784). Работы по геометрии и математич. анализу.

● Ожигова Е. П., Математика в Петербургской Академии наук в конце XVIII— первой половине XIX века, Л., 1980.

ПЛУТА́РХ (Πλούταρχος) (ок. 46, Херонея, Беотия,— ок. 127) — древнегреч. писатель, историк. Главное сочинение — «Сравнительные жизнеописания» выдающихся греков и римлян (50 биографий), в 1-м томе к-рого имеются интересные сведения об Архимеде.

■ Сравнительные жизнеописания, т. 1—3, М., 1961—64.

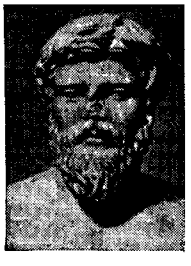
ПЛЮККЕР Юлиус (Plücker Julius) (16.7.1801, Эльберфельд,— 22.5.1868, Бонн) — немецкий математик и физик, проф. Боннского ун-та (1828—34 и с 1836). Основные труды по геометрии: обобщил понятие координат, ввёл однородные и тангенциальные координаты. Им получены важные результаты в теории алгебраич. кривых. Более поздние работы П. относятся к исследованию электрич. разрядов в газах и спектроскопии.

■ Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen, Bd 1—2, Lpz., 1895—96.

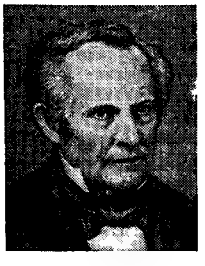
● Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.—Л., 1937; Ernst W., Julius Plücker, Bonn, 1933.

ПОГОРЕ́ЛОВ Алексей Васильевич (р. 3.3.1919, Короча, ныне Белгородской обл.) — советский математик, акад. АН СССР (1976; чл.-корр. 1960) и АН УССР (1961; чл.-корр. 1951). Окончил Харьковский ун-т (1941), Военно-воздушную инженерную академию им. Н. Е. Жуковского (1945). В 1947—60 работал в Харьковском ун-те, в 1959—60 зав. отделом Ин-та математики АН УССР, с 1960 зав. отделом Физико-технич. ин-та низких температур АН УССР (Харьков). Председатель Харьковского (ныне Северо-восточного) научного центра АН УССР (1978—81). Основные направления научных исследований: геомет-

Плутарх.



Ю. Плюккер.



Д. Пойа.

Ж. В. Понселе.

Л. С. Понтрягин.

А. Ф. Попов.

рия «в целом», основания геометрии, теория дифференциальных уравнений, теория упругих оболочек. П. дал полное решение проблемы однозначной определённости общих выпуклых поверхностей их внутренней метрикой, а также регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой; решил проблему погружения двумерного риманова многообразия в трёхмерное риманово пространство; изучал бесконечно малые изгибания; разработал нелинейную теорию упругих оболочек; решил проблему существования замкнутой регулярной выпуклой гиперповерхности, полная кривизна к-рой является заданной функцией внешней нормали; полностью решил четвёртую проблему Гильберта. Депутат Верховного Совета УССР 8—10-го созывов. Ленинская премия (1962), Государственная премия СССР (1950), Государственная премия УССР (1973), Международная премия им. Н. И. Лобачевского АН СССР (1959). Награждён 2 орденами Ленина (1967, 1971) и орденом Трудового Красного Знамени (1975).

■ Изгибание выпуклых поверхностей, М.—Л., 1951; Многомерная проблема Минковского, М., 1975; Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек, М., 1967; Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, М., 1969; Четвертая проблема Гильберта, М., 1974; Многомерное уравнение Монжа-Ампера, М., 1988; Элементарная геометрия, 3 изд., М., 1977; Геометрия. [Учебное пособие для вузов], 2 изд., М., 1984; Геометрия. [Учебное пособие для 6—10 классов ср. школы], 6 изд., М., 1987.

● «Успехи матем. наук», 1979, т. 34, в. 4.

ПО́ЙА, Полиа Дьёрдь (Polya György) (13.12.1887, Будапешт,— 7.9.1985, Пало-Алто, шт. Калифорния) — американский математик. Окончил Будапештский ун-т (1912), в 1914—40 работал в Высшей технич. школе в Цюрихе (с 1928 проф.). В 1940 переехал в США. Основные труды по теории чисел, функциональному анализу, математич. статистике (распределение Пойа) и комбинаторике (теорема Пойа).

■ Неравенства, М., 1948 (соавторы Г. Харди и Дж. Литтльвуд); Изопериметрические неравенства в математической физике, М., 1962 (соавтор Г. Сеге); Задачи и теоремы из анализа, 3 изд., ч. 1—2, М., 1978 (соавтор Г. Сеге); Как решить задачу, М., 1959; Математика и правдоподобные рассуждения, 2 изд., М., 1975; Математическое открытие, 2 изд., М., 1976.

ПО́ЛЬКЕ Карл Вильгельм (Pohlke Karl Wilhelm) (28.1.1810, Берлин,— 27.11.1876, там же) — немецкий математик и инженер. Основные труды по геометрии. Первым сформулировал (1853) основную теорему аксонометрии (теорему Польке).

ПОНСЕЛЕ́ Жан Виктор (Poncelet Jean Victor) (1.7.1788, Мец,— 22.12.1867, Париж) — французский математик и инженер, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1857), чл. Парижской АН (1834). В 1807 окончил Политехнич. школу в Париже, проф. Парижского ун-та (1838—48), директор Политехнич. школы (1848—50). В 1812 участвовал в походе Наполеона в Россию, был взят в плен; в 1814 вернулся во Францию. Основной труд по геометрии — «Трактат о проективных свойствах фигур» («Traité des propriétés projectives des figures», P., 1822; 2 éd., t. 1—2, P., 1865—66) написан П. в плену (в Саратове). В этом труде впервые были выделены в особую группу проективные свойства фигур и созданы новые геометрич. методы их исследования, дальнейшее развитие к-рых привело к разработке проективной геометрии. Кроме того, ему принадлежат работы по технич. механике и гидравлике; он усовершенствовал водяное колесо (колесо Понселе), ввёл в употребление килограммометр в качестве единицы механич. работы и др.

● Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.—Л., 1937; Tribout de Morembert H., Un grand savant le général Jean Victor Poncelet. 1788—1867, P., 1936.

ПОНТРЯ́ГИН Лев Семёнович [р. 21.8(3.9).1908, Москва,— 3.5.1988, там же] — советский математик, акад. АН СССР (1958; чл.-корр. 1939), Герой Социалистич. Труда (1969). В 13 лет потерял зрение от несчастного случая. Окончил Московский ун-т (1929). С 1934 старший научный сотрудник и с 1939 зав. отделом Математич. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, одновременно с 1935 проф. Московского ун-та. Главный редактор журнала «Applied mathematics and optimization» (с 1974), главный редактор журнала «Математический сборник» (с 1975).

Основные труды по топологии и математич. теории оптимальных процессов. В топологии открыл общий закон двойственности и в связи с этим построил теорию характеров непрерывных коммутативных групп; получил ряд результатов в теории гомотопий (классы Понтрягина). В теории колебаний главные результаты относятся к асимптотике релаксационных колебаний. В теории управления П. — создатель математич. теории оптимальных процессов, в основе к-рой лежит т. н. принцип максимума Понтрягина; имеет фундаментальные результаты по дифференциальным играм. Работы школы П. оказали большое влияние на развитие теории управления и вариационного исчисления во всём мире.

П.— иностранный почётный чл. Лондонского математич. общества (1953), почётный чл. Международной академии астронавтики (1966), вице-президент Международного математического союза (1970—74), иностранный почётный чл. Венгерской АН (1973), почётный доктор Солфордского ун-та (1976). Ленинская премия (1962), Государственные премии СССР (1941, 1975), Международная премия имени Н. И. Лобачевского АН СССР (1966). Награждён 4 орденами Ленина (1953, 1967, 1969, 1978), орденом Октябрьской Революции (1975), орденом Трудового Красного Знамени (1945), орденом «Знак Почёта» (1940).

■ Непрерывные группы, 4 изд., М., 1984; Основы комбинаторной топологии, 3 изд., М., 1986; Обыкновенные дифференциальные уравнения, 5 изд., М., 1982; Математическая теория оптимальных процессов, 4 изд., М., 1983 (соавторы В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко); Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий, 3 изд., М., 1985; Линейные дифференциальные игры преследования, «Матем. сб.», 1980, т. 112, № 3, с. 307—30; Линейная дифференциальная игра преследования (аналитическая теория), «Матем. сб.», 1986, т. 131, № 2, с. 131—58 (соавтор А. С. Мищенко); Знакомство с высшей математикой: Метод координат, М., 1977; Знакомство с высшей математикой: Анализ бесконечно малых, М., 1980; Математический анализ для школьников, 2 изд., М., 1983; Обобщения чисел, М., 1986; Краткое жизнеописание Л. С. Понтрягина, составленное им самим, «Успехи матем. наук», 1978, т. 33, в. 6, с.7—21.

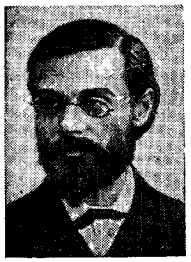
● Лев Семенович Понтрягин, М., 1983 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР).

ПОПО́В Александр Фёдорович [17(29).11.1815, Вятка,— 31.12.1878 (12.1.1879), Казань] — русский математик, чл.-корр. Петербургской АН (1866), проф. Казанского ун-та. Ученик Н. И. Лобачевского. Основные труды по математич. физике и математич. анализу.

● История отечественной математики, т. 2, К., 1967.

ПОРЕ́ЦКИЙ Платон Сергеевич [3(15).10.1846, Елизаветград,— 9(22).8.1907, с. Жоведь, ныне Черниговской обл.] — русский математик, астроном и логик. Окончил Харьковский ун-т (1870). В 1876—89 работал в Казанском ун-те. Основные труды по алгебре логики, к-рые были первыми в России работами в этой области. Первый русский учёный, читавший

П. С. Порецкий.



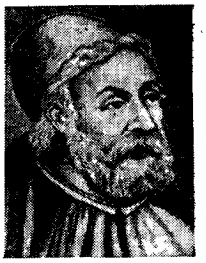
К. А. Поссе.

Э. Л. Пост.

С. И. Похожаев.

И. И. Привалов.

Ю. В. Прохоров.



Птолемей.

лекции по математич. логике и её приложениям.

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

ПО́ССЕ Константин Александрович [16(28).10.1847, с. Петровское, ныне Новгородской обл.,—24.8.1928, Ленинград] — русский математик, почётный чл. Петербургской АН (1916). В 1868 окончил Петербургский ун-т, с 1883 проф. там же. Преподавал также во многих учебных заведениях Петербурга. Основные труды по математич. анализу (ортогональные функции, приближённое вычисление определённых интегралов и др.). Его «Курс дифференциального и интегрального исчисления» (СПБ, 1903, 2 изд., М.— Л., 1929) в течение четверти века был широко распространён в России.

■ Sur les quadratures, «Nouvelles annales de mathématiques», 1875, v. 14, p. 49—62; Sur quelques applications des fractions continues algébriques, St.-Petersbourg, 1886; К вопросу о предельных значениях интегралов или сумм, Харьков, 1885.

● История отечественной математики, т. 2, К., 1967.

ПОСТ Эмиль Леон (Post Emil Leon) (11.2.1897, Августов, ныне ПНР,— 21.4.1954, Нью-Йорк) — американский математик и логик. Основные труды по математич. логике: алгебра Поста, классы Поста функций алгебры логики.

ПОХОЖА́ЕВ Станислав Иванович (р. 24.8.1935, с. Усть-Кяхта Башкирской АССР) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1984). Окончил Московский физико-технич. ин-т (1958). С 1963 работает в Московском энергетич. ин-те (с 1971 проф.), с 1987 — в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды по функциональному анализу и нелинейным уравнениям с частными производными: нормальная разрешимость, метод сферич. расслоений для нелинейных уравнений.

■ Нормальная разрешимость нелинейных уравнений в равномерно выпуклых банаховых пространствах, «Функциональный анализ и его приложения», 1969, т. 3, в. 2; О собственных функциях квазилинейных эллиптических задач, «Матем. сб.», 1970, т. 82, № 2; Об одном подходе к нелинейным уравнениям, «Докл. АН СССР», 1979, т. 247, № 6.

ПРА́ССЕ Мориц (Prasse Moritz) (1769, Дрезден,—21.1.1814, Лейпциг) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1796), с 1798 проф. Лейпцигского ун-та. Основные труды по теории чисел и математич. анализу.

ПРИВА́ЛОВ Иван Иванович [30.1(11.2).1891, Нижний Ломов, ныне Пензенской обл.,—13.7.1941, Москва] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1939). Окончил Московский ун-т (1913), проф. Саратовского (с 1918) и Московского (с 1922) ун-тов. Основные труды по теории функций комплексного переменного. В своих исследованиях П. систематически применял методы метрич. теории функций действительного переменного. П.— автор работ по теории тригонометрич. рядов, теории субгармонич. функций. Чл. математич. общества в Палермо, Французского математич. общества. Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1940).

■ Аналитическая геометрия, М., 1927 (30 изд., М., 1966); Основы анализа бесконечно малых, М., 1935 (4 изд., М., 1966; соавтор С. А. Гальперн); Введение в теорию функций комплексного переменного, М., 1927 (13 изд., М., 1984); Интегральные уравнения, 2 изд., М.—Л., 1937; Субгармонические функции, М.—Л., 1937; Граничные свойства аналитических функций, 2 изд., М.—Л., 1950.

● «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 4.

ПРИНГСХЕЙМ, Прингсхайм Альфред (Pringsheim Alfred) (2.9.1850, Олау, ныне Олава,—25.6.1941, Цюрих) — немецкий математик, чл. Баварской АН. Основные труды по математич. анализу, ввёл (1893) обозначение ln для натурального логарифма.

ПРОКЛ Диадох (Πρόκλος ὁ Διάδοχος) (ок. 410, Константинополь,— 485, Афины) — византийский математик и философ. Автор сочинений по философии и математике, в частности комментариев к 1-й книге «Начал» Евклида, в к-рых дал обзор истории геометрии от Фалеса до Евклида. Сформулировал и пытался доказать V постулат Евклида.

● История математики, т. 1, М., 1970.

ПРО́ХОРОВ Юрий Васильевич (р. 15.12.1929, Москва) — советский математик, акад. АН СССР (1972; чл.-корр. 1966). Окончил Московский ун-т (1949), с 1957 проф. там же. С 1949 работает в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР (с 1958 зав. отделом, в 1969—86 зам. директора). Чл. Главной редакции 3-го издания Большой советской энциклопедии, зам. главного редактора «Математической энциклопедии», главный редактор журнала «Теория вероятностей и её применения» (1967—87).

Основные труды по теории вероятностей, особенно по асимптотич. методам этой теории. В области классич. предельных теорем им изучены условия применимости усиленного закона больших чисел и локальных предельных теорем к суммам независимых случайных величин. В работах по предельным теоремам для случайных процессов предложил новые методы, основанные на изучении сходимости мер в функциональных пространствах. Эти методы были применены им к обоснованию предельного перехода от дискретных процессов к непрерывным, в частности в задачах теории массового обслуживания и теории управления. В области математич. статистики П. доказал устойчивость в т. н. характеризационных теоремах. П.—вице-президент Международного математич. союза (1978—83), чл. Международного статистич. ин-та (1965), чл. общества Бернулли (1965). Ленинская премия (1970). Награждён 2 орденами Трудового Красного Знамени (1975, 1979).

■ Об усиленном законе больших чисел, «Изв. АН СССР. Сер. математическая», 1950, т. 14, № 6; О локальной предельной теореме для решетчатых распределений, «Докл. АН СССР», 1954, т. 98, № 4; Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, «Теория вероятностей и ее применения», 1956, т. 1, в. 2; Многомерные распределения: неравенства и предельные теоремы, в кн.: Итоги науки и техники, т. 10, М., 1972; Теория вероятностей, 2 изд., М., 1973 (соавтор Ю. А. Розанов).

● «Вестник АН СССР», 1980, № 3.

ПТОЛЕМЕ́Й Клавдий (Πτολεμαῖος Κλαύδιος) (ок. 100— ок. 178) — древнегреческий астроном, математик, географ. Автор «Великого математического построения астрономии в 13 книгах» («Альмагест»). В этом сочинении, в частности, изложены сведения по прямолинейной и сферич. тригонометрии, дана теорема о вписанном в круг выпуклом четырёхугольнике (теорема Птолемея), дана таблица длин хорд (игравших роль синусов), вычисленная через 30′.

● История математики, т. 1, М., 1970.

ПУАНКАРЕ́ Жюль Анри (Poincaré Jules Henri) (29.4.1854, Нанси,— 17.7.1912, Париж) — французский математик и астроном, создатель геоцентрич. системы мира, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1895), чл. Парижской АН (1887). Учился в Политехнической (1873—75), затем в

Ж. А. Пуанкаре.

Горной (1875—79) школах в Париже. С 1886 проф. Парижского ун-та. Был чл. Бюро долгот (с 1893). Труды П. в области математики, с одной стороны, завершают классич. направление, а с другой — открывают пути к развитию новой математики, где наряду с количественными соотношениями устанавливаются факты, имеющие качественный характер.

Большой цикл работ П. относится к теории дифференциальных уравнений. Он исследовал разложения решений дифференциальных уравнений по начальным условиям и малым параметрам, доказал асимптотичность нек-рых рядов, выражающих решения уравнений с частными производными. После докторской диссертации, посвящённой изучению особых точек системы дифференциальных уравнений, написал ряд мемуаров под общим назв. «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» (1880). В этих работах он построил качественную теорию дифференциальных уравнений, исследовал характер интегральных кривых на плоскости, дал классификацию особых точек, изучил предельные циклы, расположение интегральных кривых на поверхности тора, нек-рые свойства их в n-мерном пространстве и т. д. П. дал приложения своих исследований к задаче о движении трёх тел, изучил периодич. решения этой задачи, асимптотич. поведение решений и т. д. Им введены методы малого параметра, неподвижной точки, уравнений в вариациях, разработана теория интегральных инвариантов.

П. принадлежат также важные для небесной механики труды об устойчивости движения и о фигурах равновесия гравитирующей вращающейся жидкости. В работах по небесной механике П. часто пользовался нестрогими рассуждениями, рассуждениями по аналогии и т. д. Строгое исследование указанных вопросов принадлежит А. М. Ляпунову.

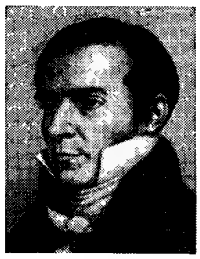
Рассмотрение обыкновенных дифференциальных уравнений с алгебраич. коэффициентами привело П. к изучению новых классов трансцендентных функций — автоморфных функций. Он доказал существование автоморфных функций с заданной фундаментальной областью, построил для них ряды, доказал теорему сложения, показал возможность униформизации алгебраич. кривых. При разработке теории автоморфных функций П. применил геометрию Лобачевского. Для функций нескольких комплексных переменных он построил теорию интегралов, аналогичных интегралу Коши, показал, что всюду мероморфная функция двух комплексных переменных является отношением двух целых функций, и т. д. Эти исследования, так же как и работы по качественной теории дифференциальных уравнений, привлекли внимание П. к топологии. Он ввёл основные понятия комбинаторной топологии, доказал формулу, связывающую число граней (любого числа измерений) n-мерного полиэдра (формулу Эйлера — Пуанкаре), дал первую интуитивную формулировку общего понятия размерности.

В области математич. физики П. исследовал колебания трёхмерных континуумов, изучил ряд задач теплопроводности, а также различные задачи в области теории потенциала, электромагнитных колебаний и т. д. Ему принадлежат также труды по обоснованию принципа Дирихле, для чего он разработал т. н. метод выметания. П. дал глубокий сравнительный анализ современных ему теорий оптических и электромагнитных явлений. В 1905 написал соч. «О динамике электрона» (опубл. 1906), в к-ром независимо от А. Эйнштейна развил математич. следствия «постулата относительности».

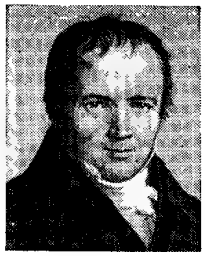
Научное творчество П. в последние десять лет его жизни протекало в атмосфере начавшейся революции в естествознании, что несомненно определило его интерес в эти годы к философским проблемам науки, к методологии научного познания. Краткое резюме его собственных философских взглядов сводится к следующему: основные положения (принципы, законы) любой научной теории не являются ни синтетич. истинами a priori (как, напр., для И. Канта), ни моделями (отражением) объективной реальности (как, напр., для материалистов 18 в.). Они суть соглашения, единственным абсолютным условием к-рых является непротиворечивость. Выбор тех или иных положений из множества возможных, вообще говоря, произволен, если отвлечься от практики их применения. Но поскольку мы руководствуемся последней, произвольность выбора основных принципов (законов) ограничена, с одной стороны, потребностью нашей мысли в максимальной простоте теорий, с другой — необходимостью успешного их использования. В границах этих требований заключена известная свобода выбора, обусловленная относительным характером самих этих требований. Эта философская доктрина П. получила впоследствии назв. конвенционализма. Критика философских взглядов П. дана В. И. Лениным в работе «Материализм и эмпириокритицизм».

■ Oeuvres, t. 1—11, P., 1916—56; Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 1—3, P., 1892—97; Leçons de mécanique céleste, t. 1—3, P., 1905—10; Ценность науки, М., 1906; Наука и гипотеза, СПБ, 1906; Наука и метод, СПБ, 1910; Последние мысли, П., 1923; О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.—Л., 1947; Избр. труды, т. 1—3, М., 1971—74; О науке, М., 1983.

● «Acta mathematica», 1921—23, t. 38—39 (посвящены жизни и деятельности П.); Lebon E., Henri Poincaré, 2 éd., P., 1912; Appell P., Henri Poincaré, P., 1925; Тяпкин А., Шибанов А., Пуанкаре, 2 изд., М., 1982; Логунов А. А., К работам А. Пуанкаре «О динамике электрона», М., 1984.



Л. Пуансо.



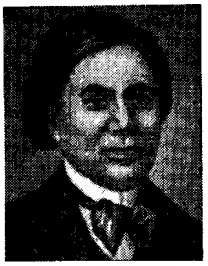
С. Д. Пуассон.

ПУАНСО́ Луи (Poinsot Louis) (3.1.1777, Париж,— 5.12.1859, там же) — французский математик и механик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1826), чл. Парижской АН (1813). Основные труды по геометрии. Занимался правильными звёздчатыми многогранниками. Четыре правильных невыпуклых многогранника, описанные П. в 1809, названы телами Пуансо. Ввёл понятие эллипсоида вращения. Широко применял геометрич. методы в исследовании механич. проблем.

ПУАССО́Н Симеон Дени (Poisson Siméon Denis) (21.6.1781, Питивье, деп. Луара,— 25.4.1840, Париж) — французский механик, физик, математик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1826), чл. Парижской АН (1812). По окончании в 1800 Политехнич. школы в Париже работал там же (с 1806 проф.), с 1809 проф. Парижского ун-та. Основные труды по теоретической и небесной механике, математике и математич. физике. П. впервые записал уравнения аналитич. механики в составляющих импульса. В гидромеханике П. обобщил уравнение Навье — Стокса на случай движения сжимаемой вязкой жидкости с учётом теплопередачи. Решил ряд задач теории упругости и обобщил уравнения теории упругости на анизотропные тела. В области небесной механики исследовал устойчивость движения планет Солнечной системы, занимался решением задач о возмущениях планетных орбит и о движении Земли вокруг её центра тяжести. В теории потенциала ввёл т. н. уравнение Пуассона и применил его к решению задач по гравитации и электростатике. П. принадлежат работы по интегральному исчислению (интеграл Пуассона), исчислению конечных разностей (формула суммирования Пуассона), теории дифференциальных уравнений с частными производными, теории вероятностей, где

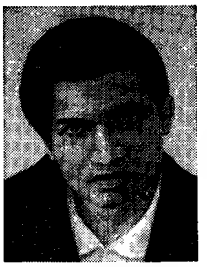
В. С. Пугачёв.

И. Ф. Пфафф.

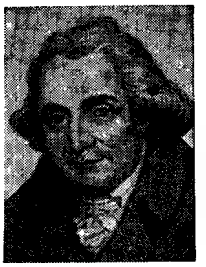


В. А. Пюизё.

А. М. Размадзе.



С. Рамануджан.



Дж. Рамсден.

он доказал частный случай закона больших чисел и одну из предельных теорем (теорема Пуассона, распределение Пуассона). Исследовал вопросы теплопроводности, магнетизма, капиллярности, распространения звуковых волн и баллистики.

■ Traité de mécanique, 2 éd., t. 1—2, P., 1833; Théorie nouvelle de l'action capillaire, P., 1831; Théorie mathématique de la chaleur..., P., 1835; Recherches sur la probabilité..., P., 1837.

● Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.—Л., 1937; Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978.

ПУГАЧЁВ Владимир Семёнович [р. 12(25).3.1911, Рязань] — советский учёный в области механики, проблем управления и математики, акад. АН СССР (1981; чл.-корр. 1966), засл. деятель науки и техники РСФСР (1958). Чл. КПСС с 1943. После окончания Военно-воздушной академии им. Н. Е. Жуковского (1931) в 1932—72 там же вёл научную и педагогич. работу (с 1939 проф.), с 1972 преподаёт в Московском авиационном ин-те. С 1956 зав. лабораторией Ин-та проблем управления АН СССР, с 1984 зав. отделом Ин-та проблем информатики АН СССР. Основные труды по статистич. теории процессов управления, информатике, авиационной баллистике, динамике полёта, теории канонич. разложений случайных функций, статистической теории систем, описываемых стохастическими дифференциальными и разностными уравнениями, асимптотической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории условно оптимального оценивания случайных процессов. Государственные премии СССР (1948, 1976). Награждён орденом Ленина (1955), орденом Красного Знамени (1949), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1968, 1975), орденом Отечественной войны 2-й степени (1944), 2 орденами Красной Звезды (1942, 1944), орденом Дружбы народов (1981), орденом «Знак Почёта» (1961).

■ Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, 3 изд., М., 1962; Теория вероятностей и математическая статистика, М., 1979; Основы автоматического управления, 3 изд., М., 1974 (соавторы И. Е. Казаков, Д. И. Гладков и др.); Стохастические дифференциальные системы, М., 1985 (соавтор И. Н. Синицын).

● Владимир Семенович Пугачев, М., 1986 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР).

ПФАФФ Иоганн Вильгельм Андреас (Pfaff Johann Wilhelm Andreas) [5(8?).12.1774, Штутгарт,— 26.6.1835, Эрланген] — немецкий математик и астроном, чл.-корр. Петербургской АН (1807), в 1804—09 проф. Дерптского ун-та. Основные труды по небесной механике.

ПФАФФ Иоганн Фридрих (Pfaff Johann Friedrich) (22.12.1765, Штутгарт,—21.4.1825, Галле) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. (1793) и иностранный почётный чл. (1798) Петербургской АН, чл. Берлинской АН (1817), проф. ун-тов в Хельмштедте (1788—1810) и Галле (с 1810). Основные труды по уравнениям в дифференциалах (т. н. уравнения Пфаффа).

■ Allgemeine Methode partielle Differentialgleichungen zu integrieren (1815), Lpz., 1902.

ПЮИЗЁ Виктор Александр (Puisuex Victor Alexandre) (16.4.1820, Аржантёй,—9.9.1883, Фронтене) — французский математик, астроном, чл. Парижской АН (1871). Учился в Нормальной школе в Париже. Проф. Парижского ун-та. Основные труды по теории алгебраич. и аналитич. функций (разложения в ряды Пюизё по дробным степеням).

Р

РААБЕ Йозеф Людвиг (Raabe Joseph Ludwig) (15.5.1801, Броды, — 12.1.1859, Цюрих) — швейцарский математик, с 1843 проф. ун-та в Цюрихе. Основные труды по математич. анализу, теории функций, теории рядов (признак Раабе сходимости для числовых рядов), алгебре, геометрии.

● Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966.

РАДО́ Жан Шарль Родольф (Radau Jean Charles Rodolphe) (22.1.1835, Ангербург,— 11.12.1911, Париж) — французский астроном и математик, чл. Парижской АН (1897). Нашёл (1880) квадратурную формулу (формулу Радо).

РАДО́Н Иоганн (Radon Johann) (16.12.1887, Дечин,— 25.5.1956, Вена) — австрийский математик, чл. Австрийской АН, проф. Венского и др. унтов. Основные труды по вариационному исчислению, теории функций (преобразование Радона, интеграл Радона), функциональному анализу и геометрии.

РАЗМА́ДЗЕ Андрей Михайлович [30.7(11.8).1889, с. Чхениши, Грузия,— 2.10.1929, Тбилиси] — советский математик. Окончил Московский ун-т (1910). Принимал участие в организации Тбилисского ун-та (с 1918 проф.). Опубликовал (1914) работу, содержащую решение задачи вариационного исчисления для кривых, один конец к-рых фиксирован, другой — свободен. В докторской диссертации «О разрывных решениях в вариационном исчислении» (1925) исследовал задачи вариационного исчисления в случае разрывных функций. Р. принадлежат первые учебники по математич. анализу на грузинском языке («Введение в анализ», 1920; «Теория неопределённых интегралов», 1922). Именем А. М. Размадзе назван Тбилисский математич. ин-т АН Грузинской ССР.

■ Избр. труды, Тб., 1952 (на груз. яз.).

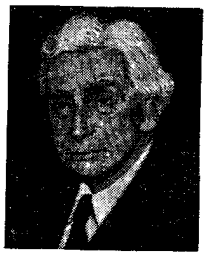
РАМА́НУДЖАН Срениваса (Ramanujan Srinivasa) (22.12.1887, Ироду, на юге Индии,—26.4.1920, близ Мадраса) — индийский математик, чл. Лондонского королевского общества (1918). Не имея специального математич. образования, получил замечательные результаты в области теории чисел. Наиболее значительна его работа (совместно с Г. Харди) по асимптотике функции $p(n)$ — числа представлений числа n суммой положительных слагаемых.

■ Collected papers, Camb., 1927; N. Y., 1962.

● Левин В. И., Рамануджан — математический гений Индии, М., 1968; Ranganathan Sh. R., Ramanujan. The man and the mathematician, L., 1967.

РА́МСДЕН Джессе (Ramsden Jesse) (6.10.1735, Галифакс,— 5.11.1800, Брайтхелмстон) — английский математик, механик и оптик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1793). Основные труды по физике.

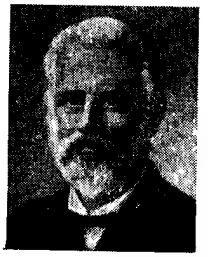
РА́ССЕЛ Бертран Артур Уильям (Russell Bertrand Arthur William) (18.5.1872, Треллек, Уэльс,—2.2.1970, Пенриндайдрайт, Уэльс)— английский математик, логик, философ, чл. Лондонского королевского общества (1908). В математике основные труды по математич. логике и основаниям математики. Сформулировал (1902)



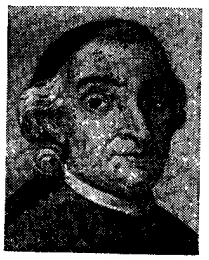
Б. А. У. Рассел.

Б. В. Раушенбах.

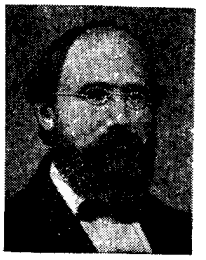
Регномонтан.



И. А. Х. Репсольд.



Я. Ф. Риккати.



Г. Ф. Б. Риман.

один из парадоксов теории множеств (парадокс Рассела). Пытался свести математику к логике.

РА́УС Эдуард Джон (Routh Edward John) (20.1.1831, Квебек,—7.6.1907, Кембридж) — английский физик и математик. Занимался проблемами устойчивости равновесия и движения (критерий Рауса — Гурвица). Установил (1877) специальный алгоритм для определения числа корней алгебраич. уравнения, имеющих положительные действительные части (теорема Рауса).

РАУШЕНБА́Х Борис Викторович [р. 5(18).1.1915, Петроград] — советский учёный в области механики и процессов управления, акад. АН СССР (1984; чл.-корр. 1966). Чл. КПСС с 1959. После окончания в 1938 Ленинградского ин-та инженеров гражданского воздушного флота начал работать в Реактивном научно-исследовательском ин-те. С 1947 преподаёт в Московском физико-технич. ин-те (с 1959 проф.). Основные труды по теории горения, управлению ориентацией космич. аппаратов, в математике по теории перспективы. Действительный чл. Международной академии астронавтики (1974; чл.-корр. 1969). Ленинская премия (1960). Награждён орденом Ленина (1961), орденом «Знак Почёта» (1975).

■ Вибрационное горение, М., 1961; Управление ориентацией космических аппаратов, М., 1974 (соавтор Е. Н. Токарь); Пространственные построения в живописи, М., 1980; Системы перспективы в изобразительном искусстве. Общая теория перспективы, М., 1986.

● «Вестник АН СССР», 1985, № 5.

РЕГИОМОНТА́Н (Regiomontanus) [псевдоним Иоганна Мюллера (Johann Müller)] (6.6.1436, Кёнигсберг,—6.7.1476, Рим) — немецкий астроном и математик. Участвовал в работах по усовершенствованию календаря. Занимался систематизацией тригонометрич. материалов. Составил таблицу синусов с 7 знаками и с шагом в 1′.

● Белый Ю. А., Иоганн Мюллер (Регномонтан), М., 1985.

РЕ́КОРД Роберт (Recorde Robert) (1510, Тенби,—1558, Лондон) — английский врач и математик. Учился в Оксфордском ун-те, с 1531 преподавал там же, затем в Кембриджском ун-те. Автор первых учебников по арифметике и алгебре на английском языке, где он систематически применял знаки плюс (+) и минус (—), ввёл (1557) современный знак равенства (=).

РЕ́ПСОЛЬД Иоганн Адольф Ханс (Repsold Johann Adolf Hans) (3.2.1838, Гамбург,—24.11.1894, там же) — немецкий математик и астроном, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1885). Основные труды по астрономии.

РЕ́ТИК (Rhäticus, Rheticus) (наст. имя Георг Иоахим фон Лаухен, Lauchen) [16.2.1514, Фельдкирх, Австрия,— 4.12.1576, Кашау (Кошице)] — немецкий астроном, математик. Ученик и последователь Н. Коперника. В 1537—42 проф. Виттенбергского ун-та. В 1539—41 жил во Фромборке, где изучал рукопись трактата Коперника «Об обращении небесных сфер»; дал краткое изложение его учения («О книгах... Николая Торуньского...», 1541). Коперник по настоянию Р. согласился на печатание своего трактата (математич. раздел был опубликован Р. в 1542). Р. работал также над вычислением таблиц тригонометрич. функций («Таблицы науки о треугольнике», 1551); десятизначные таблицы, не законченные им, были изданы посмертно (1596) с предисловием, в к-ром рассматриваются случаи решения сферич. треугольников.

РЕШЕТНЯ́К Юрий Григорьевич (р. 26.9.1929, Ленинград) — советский математик, акад. (1987; чл.-корр. 1981) АН СССР, заслуженный деятель науки РСФСР (1980). Окончил Ленинградский ун-т (1951). С 1957 работает в Ин-те математики Сибирского отделения АН СССР (с 1960 зав. отделом), с 1959 — в Новосибирском ун-те (с 1962 проф.). Основные труды по дифференциальной геометрии, теории пространственных квазиконформных отображений и теории функций с обобщёнными производными. Награждён орденом «Знак Почёта» (1967).

■ Пространственные отображения с ограниченным искажением, Новосиб., 1982; Теоремы устойчивости в геометрии и анализе, Новосиб., 1982; Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения, М., 1983 (соавтор В. М. Гольдштейн).

Ю. Г. Решетняк.

В. Риккати.

РИККА́ТИ Винченцо де (Riccati Vincenzo de) (11.1.1707, Кастельфранко-Венето,—17.1.1775, Тревизо) — итальянский математик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1760). Сын Я. Риккати. Окончил ун-т в Болонье, преподавал (с 1739) там же математику. Основные труды по математич. анализу. Применял теорию рядов к задачам интегрального исчисления. Ввёл (1757) соотношения, определяющие гиперболич. синус и косинус, обозначения sh и ch для них и установил тождество $ch^2x - sh^2x = 1$.

● История математики, т. 3, М., 1972.

РИККА́ТИ Якопо Франческо (Riccati Jacopo Francesco) (28.5.1676, Венеция,—15.4.1754, Тревизо) — итальянский математик. Учился в Падуе, с 1747 жил в Венеции. Основные труды по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям. Автор исследований об интегрируемости в квадратурах одного типа дифференциального уравнения 1-го порядка — т. н. специального уравнения Риккати. Известен также инженерной деятельностью; руководил постройкой речных плотин.

■ Opere..., v. 1—4, Lucca, 1761—65.

● История математики, т. 3, М., 1972.

РИ́МАН Георг Фридрих Бернхард (Riemann Georg Friedrich Bernhard) (17.9.1826, Брезеленц, Нижняя Саксония,—20.7.1866, Селаска, близ Интры, Италия) — немецкий математик. В 1846 поступил в Гёттингенский ун-т, слушал лекции К. Гаусса, многие идеи к-рого были им развиты позже. В 1847—49 слушал лекции К. Якоби по механике и П. Дирихле по теории чисел в Берлинском ун-те; в 1849 вернулся в Гёттинген, где сблизился с сотрудником К. Гаусса физиком В. Вебером, к-рый пробудил в нём глубокий интерес к вопросам математич. естествознания. В 1851 защитил докторскую диссертацию «Основы общей теории функций одной комплексной переменной». С 1857 проф. Гёттингенского ун-та. Лекции Р. легли в основу ряда курсов (математич. физики, теории тяготения, электричества и магнетизма, эллиптич. функ-

ций), изданных после смерти Р. его учениками. Умер от туберкулёза.

Труды Р. оказали большое влияние на развитие математики 2-й пол. 19 в. и в 20 в. В докторской диссертации Р. положил начало геометрич. направлению теории аналитич. функций; им введены т. н. римановы поверхности, важные при исследовании многозначных функций, разработана теория конформных отображений и даны в связи с этим основные идеи топологии, изучены условия существования аналитич. функций внутри областей различного вида и т. д. Разработанные Р. методы получили широкое применение в его дальнейших трудах по теории алгебраич. функций и интегралов, по аналитич. теории дифференциальных уравнений (в частности, уравнений, определяющих гипергеометрич. функции), по аналитич. теории чисел (напр., Р. указана связь распределения простых чисел со свойствами дзета-функции, в частности с распределением её нулей в комплексной области — т. н. гипотеза Римана, справедливость к-рой ещё не доказана) и т. д.

В ряде работ Р. исследовал разложимость функций в тригонометрич. ряды и в связи с этим определил необходимые и достаточные условия интегрируемости в смысле Р. (интеграл Римана), что имело значение для теории множеств и теории функций действительного переменного. Р. также предложил методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными (напр., с помощью т. н. инвариантов Римана и функции Римана).

В знаменитой лекции 1854 «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (1868) Р. дал общую идею математич. пространства (по его словам, «многообразия»), включая функциональные и топологич. пространства. Он рассматривал здесь геометрию в широком смысле как учение о непрерывных n-мерных многообразиях, т. е. совокупностях любых однородных объектов, и, обобщая результаты К. Гаусса по внутренней геометрии поверхностей, дал понятие линейного элемента (дифференциала расстояния между точками многообразия), определив тем самым то, что называют теперь финслеровыми пространствами. Более подробно Р. рассмотрел т. н. римановы пространства, обобщающие пространства геометрии Евклида, гиперболич. геометрии Лобачевского и эллиптич. геометрии Римана, характеризующиеся специальным видом линейного элемента, и развил учение об их кривизне. Обсуждая применение своих идей к физич. пространству, Р. поставил вопрос о «причинах метрич. свойств» его, как бы предваряя то, что было сделано в общей теории относительности.

М. Рисс.

Ф. Рисс.

В. Ритц.

Дж. Робисон.

Предложенные Р. идеи и методы раскрыли новые пути в развитии математики и нашли применение в механике и физике.

■ Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, 2 Aufl., N. Y., 1953; Сочинения, М.—Л., 1948.

● Монастырский М. И., Бернхард Риман, М., 1979; Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций, М., 1981.

РИСС, Рис Марсель (Riesz Marcel) (16.11.1886, Дьёр,—4.9.1969) — шведский математик. По национальности венгр. Брат Ф. Рисса. Учился в Будапеште, Гёттингене и Париже (1904—10). В 1911—27 доцент Стокгольмского ун-та, с 1927 проф. Лундского ун-та. Основные труды по рядам Фурье, рядам Дирихле, расходящимся рядам, неравенствам, математич. физике.

■ The general theory of Dirichlet's series, Camb., 1915 (соавтор G. H. Hardy); О некоторых основных понятиях релятивистской квантовой механики, «Успехи матем. наук», 1950, т. 5, в. 5.

РИСС, Рис Фридьеш (Riesz Frigyes) (22.1.1880, Дьёр,—28.2.1956, Будапешт) — венгерский математик, чл. Венгерской АН (1916). Брат М. Рисса. Учился в Цюрихе (1897—99), Будапеште (1899—1901), Гёттингене и Париже (1903—04). Проф. ун-тов в Клуже (1912—19), Сегеде (1920—45), Будапеште (с 1946). Основные труды по функциональному анализу. Изучил векторные пространства (интегрируемых функций), исследовал системы линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных, построил теорию функций от операторов и др. Является одним из основателей теории топологич. пространств. Основал журнал «Acta scientiarum mathematicarum» (1922).

■ Лекции по функциональному анализу, 2 изд., М., 1979 (соавтор Б. Секельфальви-Надь); О линейных функциональных уравнениях, «Успехи матем. наук», 1936, в. 1; Линейные операторы в комплексном гильбертовом пространстве, там же, 1941, в. 9; О функциях от эрмитовых операторов в гильбертовом пространстве, там же, с. 182—90.

● «Journal of London Mathematical Society», 1956, v. 31, p. 508—12; «Успехи матем. наук», 1957, т. 12, в. 4.

РИТЦ Вальтер (Ritz Walter) (22.2.1878, Сьон,—7.7.1909, Гёттинген) — немецкий физик и математик. Учился в Цюрихском (1899—1900) и Гёттингенском (1900—02) ун-тах. Работал в Лейдене, а также в Тюбингене и Гёттингене (с 1908). Предложил (1908) метод приближённого решения вариационных и нек-рых краевых задач математич. физики (метод Ритца).

РИЧАРДСОН Льюис Фрай (Richardson Lewis Fry) (11.10.1881, Ньюкасл,—30.9.1953) — английский геофизик. В математике основные труды по математич. физике, где известна (1910) экстраполяция Ричардсона.

РИЧЧИ-КУРБАСТРО Грегорио (Ricci-Curbastro Gregorio) (12.1.1853, Лугo,— 6.8.1925, Болонья) — итальянский математик, чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме (1916), Туринской АН (1918), Болонской АН (1925). Окончил Пизанский ун-т (1875). С 1880 проф. Падуанского ун-та. Р.-К. принадлежит заслуга создания «абсолютного дифференциального исчисления» (тензорного исчисления), используемого в дифференциальной геометрии, механике, общей теории относительности и т. д.

■ Opere, v. 1—2, Roma, 1956—57.

РОБЕРВАЛЬ Жиль (Roberval Gilles) [наст. фам.— Персонье (Personier)] (8.8.1602, Роберваль, близ Бове,— 27.10.1675, Париж) — французский математик, чл. Парижской АН (1666). Наряду с Б. Кавальери разработал метод неделимых, близкий по идеям к анализу бесконечно малых. Этот метод Р. применил для определения длин дуг многих кривых линий, площадей фигур с криволинейными границами, а также объёмов нек-рых тел. Р. дал кинематич. метод для проведения касательной к кривой.

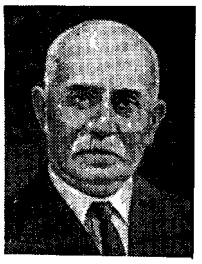
■ Ouvrages de mathématiques, La Haye, 1731.

● Auger L., Un savant méconnu: Gilles Personne de Roberval (1602—1675), P., 1962.

РОБИНСОН Абрахам (Robinson Abraham) (6.10.1918, Вальденбург, Германия,— 11.4.1974) — американский математик, чл. Национальной АН США (1974), Американской академии искусств и наук в Бостоне (1962). Окончил Иерусалимский ун-т (1940), с 1967 проф. Йельского ун-та. Основные труды по математич. логике и гидроаэродинамике. В логике был одним из создателей теории моделей.

■ Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры, М., 1967; Non-standard analysis, Amst., 1966.

РОБИСОН Джон (Robison John) (1739—30.1.1805) — шотландский химик, математик, философ и естествоиспытатель, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1800).



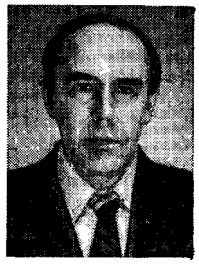
В. И. Романовский.

К. Ф. Рот.

С. Я. Румовский.

В. В. Румянцев.

К. Д. Т. Рунге.



В. В. Русанов.

РОДРИ́Г, Родригес Бенжамен Оленд (Rodrigues Benjamin Olinde) (16.10.1794, Бордо,— 26.12.1851, Париж) — французский математик и экономист. Окончил Высшую нормальную школу в Париже. Основные труды по геометрии (формулы Родрига в теории поверхностей) и математич. анализу (формулы Родрига для ортогональных многочленов).

РОЛЛЬ Мишель (Rolle Michel) (21.4.1652, Амбер,—8.11.1719, Париж) — французский математик, чл. Парижской АН (1685). В «Трактате по алгебре» («Traité d'algèbre», P., 1690) развил метод отделения действительных корней алгебраич. уравнений, основанный на частном случае т. н. теоремы Ролля. Автор исследований, относящихся к решению в целых числах неопределённых линейных уравнений с двумя неизвестными. В нач. 18 в. выступил с критикой исчисления бесконечно малых Г. Лейбница, вызвавшей оживлённую дискуссию.

● Яновская С. А., Мишель Ролль как критик анализа бесконечно малых, в кн.: Тр. Ин-та истории естествознания, т. 1, М.—Л., 1947; История математики, т. 2, М., 1970.

РОМА́НОВ В. Г.— см. стр. 771.

РОМАНО́ВСКИЙ Всеволод Иванович [22.11(4.12).1879, Алма-Ата,— 6.10.1954, Ташкент] — советский математик, акад. АН Узбекской ССР (1943). Окончил Петербургский ун-т (1906). В 1911—15 доцент, затем проф. Варшавского ун-та, в 1915—18 проф. Донского (Ростов-на-Дону), с 1918 Среднеазиатского (Ташкент) ун-тов. Основные труды по математич. статистике и теории вероятностей. Автор работ в области математич. анализа, в частности по интегрированию дифференциальных уравнений с частными производными. Р. имеет большие заслуги в воспитании национальных научных кадров в Узбекской ССР. Именем В. И. Романовского назван Ин-т математики АН Узбекской ССР.

■ Избр. труды, т. 1—2, Таш., 1959—64; Математическая статистика, кн. 1—2, Таш., 1961—63.

● «Успехи матем. наук», 1955, т. 10, в. 1.

РОТ Клаус Фридрих (Roth Klaus Friedrich) (р. 29.10.1925, Бреслау) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1960), иностранный чл. Американской академии искусств и наук в Бостоне (1966). Учился в Лондоне и Кембридже. Проф. Лондонского ун-та. Основные труды по теории чисел (проблема Туэ — Зигеля — Рота). Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1955).

РО́ТЕ Петер (Rothe Peter) (1580, Нюрнберг,— 1617, там же) — немецкий математик. Р. впервые (1608) утверждал, что алгебраич. уравнение n-й степени может иметь самое большое n решений.

РУ́ДОЛЬФ Криштян (Кристоф) [Rudolf Krišťan (Christoff)] (ок. 1500, Явор,— ок. 1545, Вена) — чешский математик. Работал в Вене учителем математики. Автор учебника алгебры (1525), первая часть к-рого посвящена арифметике, основным алгебраич. операциям и иррациональным величинам, вторая часть — уравнениям 1-й и 2-й степеней. Символика, использовавшаяся Р., послужила основой для создания современных знаков квадратного и кубического корней.

● История математики, т. 1, М., 1970.

РУМО́ВСКИЙ Степан Яковлевич [29.10(9.11).1734, Старый Погост Владимирской губ., ныне Калининской обл.,—6(18).7.1812, Петербург] — русский астроном и математик, акад. (1763—1803; адъюнкт с 1753), почётный чл. (не ранее 1767) и вице-президент (1800—03) Петербургской АН, чл. Российской академии (1783). Ученик Л. Эйлера. Основные труды по астрономии и географии, математике и физике. Р.— один из составителей первого этимологич. словаря Российской академии (ч. 1—6, 1789—94).

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968; Павлова Г. Е., Степан Яковлевич Румовский, М., 1979.

РУМЯ́НЦЕВ Валентин Витальевич (р. 19.7.1921, с. Новая Скатовка Саратовской обл.) — советский математик и механик, чл.-корр. АН СССР (1970). Чл. КПСС с 1948. Окончил Саратовский ун-т (1945). В 1948—64 работал в Ин-те механики АН СССР, с 1965 — в Вычислительном центре АН СССР. Одновременно (с 1953) работает в Московском ун-те (с 1956 проф.). Главный редактор журнала «Прикладная математика и механика». Основные труды по устойчивости, управлению и стабилизации движения механич. систем и аналитич. механике. Предложил метод решения задачи устойчивости движения твёрдых и упругих тел с жидким наполнением. Разработал основы теории устойчивости и оптимальной стабилизации движения систем по части переменных. Установил аналоги принципа Гаусса для систем с неидеальными связями и сплошных сред. Исследовал вопрос о стационарности интегральных принципов и применимости метода интегрирования Якоби — Суслова для неголономных систем. Государственная премия СССР (1980), премия Президиума АН СССР (1950), премия имени С. А. Чаплыгина АН СССР (1958). Награждён орденом Октябрьской Революции (1981), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1971, 1975).

■ Динамика тела с полостями, содержащими жидкость, М., 1965 (соавтор Н. Н. Моисеев); Об устойчивости стационарных движений спутников, М., 1967; Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных, М., 1987 (соавтор А.С. Озиранер); Dynamics and stability of rigid bodies, Roma, 1972.

● «Прикладная математика и механика», 1981, т. 45, в. 3.

РУ́НГЕ Карл Давид Тольме (Runge Karl David Tolme) (30.8.1856, Бремен,—3.1.1927, Гёттинген)—немецкий физик и математик. Учился в Мюнхенском (1876—77) и Берлинском (1878—80) ун-тах. Работал в Берлине, Ганновере, Гёттингене. Основные математич. труды относятся к численным методам решения дифференциальных уравнений (метод Рунге — Кутты).

РУСА́НОВ Виктор Владимирович (р. 2.11.1919, Киров) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1976). Чл. КПСС с 1953. Окончил Ленинградскую военно-воздушную академию им. А. Ф. Можайского (1943). С 1953 работает в Ин-те прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР (в 1964—86 зам. директора). Основные труды в области вычислительной и прикладной математики, аэрогидромеханики. Государственная премия СССР (1967). Награждён орденом Октябрьской Революции (1979), орденом Красной Звезды (1945), орденом «Знак Почёта» (1956).

■ Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом, М., 1964 (соавторы К. И. Бабенко, Г. П. Воскресенский, А. Н. Любимов); Течения газа около тупых тел, ч. 1—2, М., 1970 (соавтор А. Н. Любимов); Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений, «Докл. АН СССР», 1968, т. 180, № 6; О смешанных течениях газа, в кн.: Проблемы математической физики и вычислительной математики, М. 1977; Асимптотика

решения типа ударной волны для конечно-разностного уравнения, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1981, т. 157 (соавтор И. В. Безменов); Структурная модель одного класса численных алгоритмов, в кн.: Кибернетика и вычислительная техника, в. 1, М., 1985 (соавтор Б. Н. Четверушкин).
● «Вестник АН СССР», 1980, № 3.

РУФФИ́НИ Паоло (Ruffini Paolo) (23.9.1765, Валентано, близ Витербо,— 10.5.1822, Модена) — итальянский математик. Основные труды по алгебре. В 1804 опубликовал метод приближённого вычисления действительных корней алгебраич. уравнений, вновь найденный У. Горнером в 1819. В 1799 дал первое (содержащее пробелы) доказательство неразрешимости в радикалах общего алгебраич. уравнения 5-й степени. Разработал ряд идей теории групп конечных подстановок.

■ Opera matematiche, t. 1—2, Palermo, 1915—43.
● Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины XIX столетия, пер. с нем., 2 изд., М., 1966.

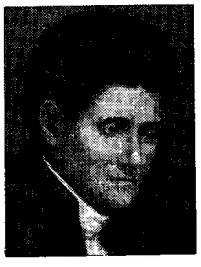
РЭЛЕ́Й, Рейли (до получения титула лорда — Стретт Джон Уильям) [Rayleigh (Strutt) John William] (12.11.1842, Лэнгфорд-Гров, графство Эссекс,—30.6.1919, Тирлинг-Плейс, близ г. Уитем) — английский физик, один из основоположников теории колебаний, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1896), чл. Лондонского королевского общества (1873). Основные труды по теории линейных и нелинейных колебаний; в связи с задачей сложения многих колебаний со случайными фазами получил (1880) распределение вероятностей, названное позднее распределением Рэлея.

■ Волновая теория света, М.—Л., 1940; Теория звука, 2 изд., т. 1—2, М., 1955.

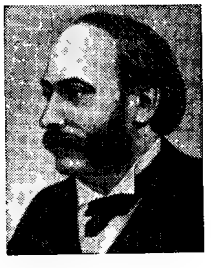
РЯБУ́ШКИН Тимон Васильевич [30.12.1914 (12.1.1915), Воронеж,—22.12.1986, Москва] — советский статистик и экономист, чл.-корр. АН СССР (1966). Чл. КПСС с 1942. Окончил Ин-т народнохозяйственного учёта в Воронеже (1936), в 1970—76 и с 1983 зав. лабораторией статистич. и демографич. исследований Центрального экономико-статистич. ин-та АН СССР. Основные труды по политич. экономии и статистике. Чл. Международного статистич. ин-та (1958). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1975), орденом Отечественной войны 2-й степени (1985).

■ Международная статистика, М., 1965; Экономическая статистика, М., 1966.
● «Вестник АН СССР», 1975, № 4.

П. Руффини.



Рэлей.



С

САБИ́Т ибн Курра — см. *Ибн Курра*.

САККЕ́РИ Джованни Джироламо (Saccheri Giovanni Girolamo) (5.9.1667, Сан-Ремо,—25.10.1733, Милан) — итальянский учёный, иезуит. Преподавал теологию и математику в иезуитских колледжах Турина, Павии и Милана. Сделал (1733) попытку доказать V постулат Евклида о параллельных от противного. Получил нек-рые теоремы, вновь найденные А. Лежандром, и фактически открыл несколько первых предложений неевклидовой геометрии.

■ Euclides ab omni naevo vindicatus; sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia, Mediolani, 1733.
● «Revue des questions scientifiques», 1925, v. 87, p. 401—30.

САМА́РСКИЙ Александр Андреевич (р. 19.2.1919, Амвросиевка, ныне Донецкой обл.) — советский математик, акад. АН СССР (1976; чл.-корр. 1966), Герой Социалистич. Труда (1979). Чл. КПСС с 1946. Окончил Московский ун-т (1945), с 1959 проф. там же. С 1953 зав. отделом в Ин-те прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР. Основные труды по теории нелинейных дифференциальных уравнений, математич. физике, вычислительной математике. С.— один из основоположников современной методологии математич. моделирования и вычислительного эксперимента. Им построены общая теория разностных схем, общая теория устойчивости операторно-разностных уравнений, а также теория итерационных методов решения операторных уравнений. Разработаны и широко используются на практике методы численного решения задач механики, ядерной физики, физики плазмы. С.— соавтор открытия «Эффект *Т*-слоя», один из создателей теории режимов с обострением в нелинейных сплошных средах. Под руководством С. методом вычислительного эксперимента выполнены фундаментальные исследования, имеющие большое теоретич. и прикладное значение для многих областей науки и техники. Почётный доктор Технич. ун-та в Карл-Маркс-Штадте (1984). Ленинская премия (1962), Государственная премия СССР (1954). Награждён 3 орденами Ленина (1954, 1956, 1979), орденом Октябрьской Революции (1975), орденом Трудового Красного Знамени (1969), орденом Отечественной войны 1-й степени (1985), орденом Славы 3-й степени (1980).

■ Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977 (соавтор А. Н. Тихонов); Введение в теорию разностных схем, М., 1971; Устойчивость разностных схем, М., 1973 (соавтор А. В. Гулин); Разностные методы для эллиптических уравнений, М., 1976 (соавтор В. Б. Андреев); Теория разностных схем, 2 изд., М., 1983; Методы решения сеточных уравнений, т. 1, М., 1982 (соавтор Е. С. Николаев); Разностные методы решения задач газовой динамики, 2 изд., М., 1980 (соавтор Ю. П. Попов); Введение в численные методы, М., 1982; Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений, М., 1987 (соавторы В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов); Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями, М., 1987 (соавторы Р. Д. Лазарев, В.Л.Макаров).
● «Успехи матем. наук», 1980, т. 35, в. 1.

САНСО́НЕ Джованни (Sansone Giovanni) (24.5.1888, Порто-Эмпедокле, Сицилия,—13.10.1979) — итальянский математик, чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме (1947). Окончил (1910) Пизанский ун-т, с 1910 работал там же, в 1913—26 — в Технологич. ин-те Флоренции. С 1927 проф. Флорентийского ун-та (с 1963 заслуженный проф.). Основные труды по дифференциальным уравнениям, теории функций комплексного переменного, дифференциальной геометрии.

■ Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1—2, М., 1953—54; Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений, М., 1974 (соавторы Р. Рейсиг и Р. Конти).

СЕВАСТЬЯ́НОВ Борис Александрович (р. 29.9.1923, Москва) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1984). Окончил Московский ун-т (1948), с 1969 проф. там же. С 1948 работает в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды по теории вероятностей и математич. статистике (ветвящиеся процессы, комбинаторные задачи и др.), теории массового обслуживания. Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1982), орденом «Знак Почёта» (1976).

■ Ветвящиеся процессы, М., 1971; Случайные размещения, М., 1976 (соавторы В. Ф. Колчин, В. П. Чистяков); Курс теории вероятностей и математической статистики, М., 1982.

СЕВЕ́РИ Франческо (Severi Francesco) (13.4.1879, Ареццо,— 8.12.1961, Рим) — итальянский математик, иностранный

Т. В. Рябушкин.

А. А. Самарский.

Б. А. Севастьянов.

Ф. Севери.

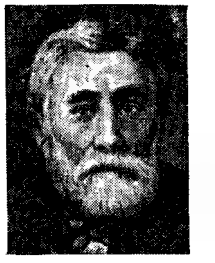
Л. И. Седов.

Б. Сёкефальви-Надь.

А. Секки.

К. Селла.

А. Сельберг.



А.Ж. К. Сен-Венан.

чл.-корр. АН СССР (1924), чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме, с 1922 проф. Римского ун-та. Основные труды по проективной и алгебраич. геометрии, топологии, теории аналитич. функций, математич. анализу.

■ Memorie scelte, Bologna, 1950.

● Segre B., L'opera scientifica di Francesco Severi (1879—1961), Roma, 1962.

СЕ́ГНЕР Я. А.— см. *Зегнер* И. А.

СЕДО́В Леонид Иванович [р. 1(14). 11.1907, Ростов-на-Дону] — советский учёный в области механики и прикладной математики, акад. АН СССР (1953; чл.-корр. 1946), Герой Социалистич. Труда (1967). Окончил Московский ун-т (1930), с 1937 проф. там же. В 1930—47 работал в Центральном аэрогидродинамич. ин-те им. Н. Е. Жуковского, с 1945 в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР (зав. отделом), с 1965 председатель Научного совета АН СССР по механике жидкости и газа. Основные труды по гидро- и аэромеханике и механике сплошной среды. Дал решение задач об ударе тел о воду и глиссировании. Вывел формулы для колебаний в полётах деформируемых крыльев. Решил ряд задач о неустановившемся движении крыла при обтекании с непрерывным и разрывным полем скоростей газа, исследовал потенциальное обтекание газом профилей и решёток. Развил методы теории подобия и применил их к изучению затухания изотропных турбулентных движений. Развил теорию автомодельных движений жидкостей, дал решение в конечной форме задачи о сильном точечном взрыве и ряда других задач газовой динамики. Предложил новые модели сплошной среды с учётом термодинамич. и электродинамич. явлений и метод нахождения уравнений движения и граничных условий на основании сформулированного им вариационного базового уравнения.

С.— президент Международной астронавтич. федерации (1961—62), действительный чл. Международной академии астронавтики (1960). Иностранный почётный чл. Американской академии искусств и наук в Бостоне (1960), Сербской академии наук и искусств (1965), Финской академии технич. наук (1966), Ин-та астронавтики и аэронавтики США (1966), чл. Национального географич. общества США (1967), Общества ракетной техники и космич. полётов им. Г. Оберта (1967), иностранный чл. Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина» (1969), почётный чл. Общества теоретич. и прикладной механики ПНР (1969), иностранный чл. Парижской АН (1978), а также почётный доктор многих ун-тов и ин-тов. Государственная премия СССР (1952), премия имени С. А. Чаплыгина АН СССР (1947), премия имени М. В. Ломоносова АН СССР (1954), Золотая медаль имени А. М. Ляпунова АН СССР (1974). Награждён 6 орденами Ленина (1954, 1963, 1967, 1975, 1980, 1987), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1945, 1961), орденом «Знак Почёта» (1943), а также французским орденом Почётного легиона степени «Командор» (1971).

■ Введение в механику сплошной среды, М., 1962; Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, 3 изд., М., 1980; Методы подобия и размерностей в механике, 10 изд., М., 1987; Механика сплошной среды, 4 изд., т. 1—2, М., 1983—84.

● Лаврентьев М. А., Леонид Иванович Седов, в кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды, М., 1969; Леонид Иванович Седов, М., 1959 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР): «Прикладная математика и механика», 1987, в. 6.

СЕ́КЕФАЛЬВИ-НАДЬ Бела (Szökefalvi-Nagy Béla) [р. 29.7.1913, Коложвар (Клуж-Напока)] — венгерский математик, иностранный чл. АН СССР (1971), чл. Венгерской АН (1956). В 1936 окончил ун-т в Сегеде, с 1948 проф. там же. С 1953 президент Математич. комитета, с 1970 президент Сегедского комитета Венгерской АН, главный редактор венгерской секции редколлегии советско-венгерского журнала «Analysis mathematica» (с 1975). Основные труды по теории приближения функций и функциональному анализу, в частности по теории расширения операторов в гильбертовом пространстве. Золотая медаль имени М. В. Ломоносова АН СССР (1980).

■ Лекции по функциональному анализу, 2 изд., М., 1979 (соавтор Ф. Рисс); Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, М., 1970 (соавтор Ч. Фояш).

● «Matematikai Lapok», 1964, t. 15, № 1—3, p. 1—22.

СЕ́ККИ Анджело (Secchi Angelo) (29.6.1818, Реджо-нель-Эмилия,— 26.2.1878, Рим) — итальянский астроном, математик и физик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1877). С 1849 директор Римской обсерватории. Основные труды по астрономии.

СЕ́ЛЛА Квинтино (Sella Quintino) (7.7.1827, Моссо, под Биеллой, Сардиния,—14.3.1884, Биелла) — итальянский математик и горный инженер, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1881). Основные труды по горному делу.

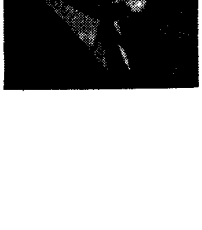
СЕ́ЛЬБЕРГ Атле (Selberg Atle) (р. 14.6.1917, Лангесунн) — норвежский математик, чл. Норвежской АН, Американской академии искусств и наук в Бостоне. Окончил ун-т в Осло, был проф. там же. Работает в Ин-те перспективных исследований в Принстоне (США). Основные труды по теории чисел и математич. анализу. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1950).

СЕН-ВЕНА́Н, Барре де Сен-Венан Адемар Жан Клод (Barré de Saint-Venant Adhémar Jean Claude) (23.8.1797, Вилье-ан-Бри,— 6.1.1886, Сен-Уан) — французский математик и механик, чл. Парижской АН (1868). Окончил Политехнич. школу (1816), с 1837 проф. Школы мостов и дорог (Париж). Основные математич. труды по векторному исчислению и дифференциальной геометрии, где ввёл (1846) понятие бинормали.

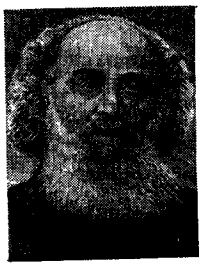
СЕРВУА́ Франсуа Жозеф (Servois François Joseph) (19.7.1767, Мон-де-Лаваль,—17.5.1847, там же)—французский математик и инженер. Основные труды по алгебре, геометрии, сферич. тригонометрии. Ввёл (1815) термины «коммутативный» и «дистрибутивный».

СЕРПИ́НЬСКИЙ Вацлав (Sierpiński Wacław) (14.3.1882, Варшава,—21.10.1969, там же) — польский математик, чл. Академии знаний в Кракове (1917—51), чл. (1952) и вице-президент (1952—57) Польской АН, иностранный чл. Парижской АН (1960). Окончил Варшавский ун-т (1904), в 1918—60 проф. там же. Основные труды по теории множеств и её приложениям к топологии, теории функций действительного переменного. Вместе с З. Янишевским и С. Мазуркевичем в 1920 основал журнал «Fundamenta mathematicae», посвящённый вопросам теории множеств и её приложениям.

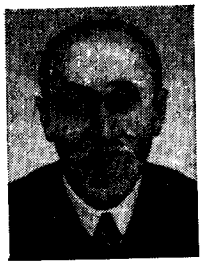
В. Серпиньский.



Ж. П. Серр.

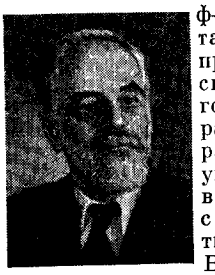


Дж. Дж. Сильвестр.



Д. М. Синцов.

Т. А. Сколем.



В. И. Смирнов.

■ Oeuvres choisies, v. 1—3, Warsz., 1974—76; Teoria liczb..., 3 wyd., Warsz., 1950; Leçons sur les nombres transfinis. Nouveau tirage, P., 1950; Hypothèse du continu, Warsz., 1934; General topology, Toronto, 1952; О решении уравнений в целых числах, М., 1961; Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики, М., 1961; Что мы знаем и чего не знаем о простых числах, М.—Л., 1963; О теории множеств, М., 1966; 250 задач по элементарной теории чисел, М., 1968.

● Jubileusz 40-lecia działalności na katedrze universyteckiej profesora Wacława Sierpińskiego, Warszawa, 23/9. 1948, Warsz., 1949; Историко-математические исследования, в. 24, М., 1979.

СЕРР Жан Пьер (Serre Jean Pierre) (р. 15.9.1926, Баж, Франция) — французский математик, чл. Парижской АН (1976), Американской академии искусств и наук в Бостоне (1960). Окончил Высшую нормальную школу в Париже. С 1956 проф. в Коллеж де Франс, Парижского ун-та. Основные труды по алгебре, алгебраич. геометрии и топологии многообразий. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1954).

■ Алгебраические группы и поля классов, М., 1968; Когомологии Галуа, М., 1968; Алгебры Ли и группы Ли, М., 1969; Линейные представления конечных групп, М., 1970; Курс арифметики, М., 1972; Абелевы p-адические представления и эллиптические кривые, М., 1973.

СЕРРЕ Жозеф Альфред (Serret Joseph Alfred) (30.8.1819, Париж,—2.3.1885, Версаль) — французский математик, чл. Парижской АН (1860). Окончил Политехнич. школу в Париже (1840), с 1863 проф. Парижского ун-та. Основные труды по алгебре и геометрии. Установил (1851) основные формулы (формулы Серре — Френе) теории пространственных кривых. Автор учебников по арифметике, алгебре и тригонометрии.

СИЛЬВЕ́СТР Джеймс Джозеф (Sylvester James Joseph) (3.9.1814, Лондон,—15.3.1897, там же) — английский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1872). В 1837 окончил Кембриджский ун-т, проф. Королевской академии в Вулидже (1855—70), в 1876—83 ун-та Джонса Хопкинса в Балтиморе (США), Оксфордского ун-та (с 1883). Основные труды по алгебре (в частности, по теории инвариантов), теории чисел, теории вероятностей, механике и математич. физике. Основал (1878) первый американский математич. журнал «The American Journal of Mathematics».

■ The collected mathematica papers, v. 1—4, Camb., 1904—12.

СИ́МПСОН Томас (Simpson Thomas) (20.8.1710, Маркет-Босуэрт,— 14.5. 1761, там же) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1746), проф. Вулиджской военной академии (с 1743). Был ткачом шёлковых тканей, математику изучил самостоятельно. Основные труды по геометрии, тригонометрии и математич. анализу. Вывел (1743) формулу приближённого интегрирования (формулу Симпсона). Один из основоположников теории ошибок.

● История математики, т. 3, М., 1972.

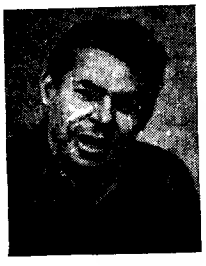
СИНЦО́В Дмитрий Матвеевич [16(28). 11.1867, Вятка, ныне Киров,—28.1. 1946, Харьков] — советский математик, акад. АН УССР (1939), засл. деятель науки УССР (1935). Окончил Казанский ун-т (1890), в 1894—99 работал там же, с 1903 проф. Харьковского ун-та, председатель Харьковского математич. общества (с 1906). Основные труды по геометрии неголономных систем и геометрич. теории дифференциальных уравнений. Награждён орденом Трудового Красного Знамени.

● Наумов И. А., Дмитрий Матвеевич Синцов, Хар., 1955.

СКО́ЛЕМ, Скулем Туральф Альберт (Skolem Thoralf Albert) (23.5.1887, Сансвер,—23.3.1963, Осло) — норвежский математик, чл. Норвежской АН (1938). Учился в Кристиании (1913) и Гёттингене (1915—16). С 1918 работал в ун-те в Осло (с 1938 проф.). Основные труды по математич. логике, теории чисел (диофантовы уравнения) и философии математики.

СЛУ́ЦКИЙ Евгений Евгеньевич [7(19). 4.1880, с. Новое, ныне Ярославской обл.,—10.3.1948, Москва] — советский математик, статистик и экономист. В 1901—02 учился в Киевском ун-те, в 1902—05 в Мюнхенском политехникуме, в 1905 поступил на юридич. ф-т Киевского ун-та. В 1913—26 преподаватель Киевского коммерческого ин-та. С 1926 работал в Центральном статистич. управлении. С 1934 в Московском ун-те, с 1938 в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. С.— один из создателей теории случайных функций (распределений в функциональных пространствах). Часть работ посвящена оценке параметров (коэффициентов корреляции и т. п.) по рядам связанных наблюдений. Результаты, полученные в этой области, С. применил к теории гидрологич. процессов. Последние годы жизни работал над составлением таблиц функций от нескольких переменных.

Е. Е. Слуцкий.



С. Смейл.

■ Таблицы для вычисления неполной Г-функции и функции вероятности χ^2, М.—Л., 1950; Избр. труды, Теория вероятностей. Математическая статистика, М., 1960.

● «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, в. 4.

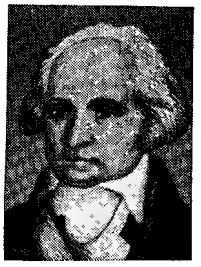
СЛЮЗ Рене Франсуа де (Sluse René François de) (7.7.1622, Висе,— 29.3. 1685, Льеж)— бельгийский математик-любитель, чл. Лондонского королевского общества (1674). Окончил Лувенский ун-т. Основные труды по геометрии. Дал метод вычисления подкасательной к алгебраич. кривым, изучал циклоиду.

● История математики, т. 2, М., 1970.

СМЕЙЛ Стивен (Smale Stephen) (р. 15. 7.1930, Флинт, шт. Мичиган) — американский математик, чл. Национальной АН США. Окончил Мичиганский ун-т (1952). Работал во многих ун-тах США, в 1958—60 в Ин-те перспективных исследований в Принстоне. Основные труды по топологии и дифференц. уравнениям. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1966).

СМИРНО́В Владимир Иванович [29.5 (10.6).1887, Петербург,— 11.2.1974, Ленинград] — советский математик, акад. АН СССР (1943; чл.-корр. 1932), Герой Социалистич. Труда (1967). Окончил Петербургский ун-т (1910), с 1915 проф. там же. В 1912—30 проф. Петербургского (Ленинградского) ин-та инженеров путей сообщения, в 1929—35 работал в Сейсмологич. ин-те и Математич. ин-те АН СССР. Основные труды по теории функций комплексного переменного: униформизация многозначных аналитич. функций; исследование фуксовых групп и фуксовых функций; исследование полноты системы многочленов, ортогональных на спрямляемом замкнутом контуре; вопросы, связанные с предельными значениями аналитич. функций. В ряде исследований (совместно с С. Л. Соболевым) С. разработал новый метод решения нек-рых задач

Н. В. Смирнов.



И. А. Снядецкий.

С. Л. Соболев.

О. И. Сомов.

теории распространения волн в упругих средах с плоскими границами. Изучил функционально-инвариантные решения линейных уравнений эллиптич. типа с любым числом переменных. Автор «Курса высшей математики» (т. 1—5, 1924—47), за к-рый удостоен Государственной премии СССР (1948). Награждён 4 орденами Ленина (1947, 1953, 1961, 1967), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1944, 1945).

■ Курс высшей математики, т. 1, 23 изд., М., 1974; т. 2, 21 ивд., М., 1974; т. 3, ч. 1, 10 ивд., М., 1974; т. 3, ч. 2, 9 изд., М., 1974; т. 4, ч. 1, 6 изд., М., 1974; т. 4, ч. 2, 6 изд., М., 1981; т. 5, М.—Л., 1947; Конструктивная теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1964 (соавтор Н. А. Лебедев).

● Владимир Иванович Смирнов, М.—Л., 1949 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР); «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 4; 1987, т. 42, в. 6.

СМИРНО́В Николай Васильевич [4(17). 10.1900, Москва,—2.6.1966, там же] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1960). Окончил Московский ун-т (1926). С 1938 работал в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР (зав. отделом). Основные труды по математич. статистике и теории вероятностей посвящены изучению предельных распределений с помощью асимптотич. поведения кратных интегралов при неограниченном увеличении кратности. Один из создателей непараметрич. методов математич. статистики и теории предельных распределений порядковых статистик. Государственная премия СССР (1951). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1953).

■ Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений, 3 изд., М., 1969 (соавтор И. В. Дунин-Барковский); Теория вероятностей и математическая статистика в технике. (Общая часть), М., 1955 (соавтор И. В. Дунин-Барковский); Теория вероятностей и математическая статистика. Избр. труды, М., 1970; Таблицы математической статистики, 3 изд., М., 1983 (соавтор Л. Н. Большев).

СНЯДЕ́ЦКИЙ Иван Андреевич (Ян Баптист Владислав) (Sniadecki Jan Baptist Władisław) (29.8.1756, Жнин, —9.11.1830, близ Вильно) — польский астроном и математик, чл.-корр. Петербургской АН (1811). Основные труды по астрономии. Написал ряд учебников по математике, много сделал для создания польской математич. терминологии.

● История отечественной математики, т. 2, К., 1967.

СО́БОЛЕВ Сергей Львович [р. 23. 9(6.10).1908, Петербург] — советский математик, акад. АН СССР (1939; чл.-корр. 1933), Герой Социалистич. Труда (1951). Чл. КПСС с 1940. По окончании Ленинградского ун-та (1929) работал в Сейсмологич. ин-те АН СССР, в 1932—43 (в 1941—43 директор) и с 1984 в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. В 1935—57 проф. Московского ун-та, в 1943—57 в Ин-те атомной энергии, в 1957—84 директор Ин-та математики Сибирского отделения АН СССР и проф. Новосибирского ун-та. Почётный чл. Московского математич. общества (1987). Председатель Национального комитета советских математиков (с 1984). Главный редактор «Сибирского математического журнала» (с 1968). Основные труды по теории уравнений с частными производными, математич. физике, функциональному анализу и вычислительной математике. Предложил новый метод решения гиперболич. уравнений с частными производными. Совместно с В. И. Смирновым разработал метод функционально-инвариантных решений для динамич. задач колебания слоистых сред. С. начато систематич. применение функционального анализа в теории уравнений с частными производными. Им введён класс функциональных пространств (т. н. пространств Соболева) и исследованы соотношения вложения для этих пространств. Ввёл понятия обобщённых решений уравнений с частными производными и дал первое (1935) строгое определение обобщённых функций; с помощью этих понятий изучил некоторые краевые задачи для уравнений с частными производными. В области вычислительной математики С. введено понятие замыкания вычислительных алгоритмов, дана точная оценка норм погрешности кубатурных формул.

С.— почётный доктор Берлинского ун-та (1963), почётный чл. Эдинбургского королевского общества (1963), чл. оргкомитета Ин-та Жизни (1963, Франция), чл. Американского математич. общества (1964), почётный доктор наук Карлова ун-та в Праге (1965), иностранный чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме (1966), АН ГДР (1967), почётный чл. Итальянского общества содействия прогрессу науки (1977), иностранный чл. Парижской АН (1978; чл.-корр. 1967). Государственные премии СССР (1941, 1951, 1953, 1986). Золотая (1981) и серебряная (1987) медали «За заслуги перед наукой и человечеством» Чехословацкой АН. Награждён 7 орденами Ленина (1945, 1949, 1951, 1953, 1958, 1967, 1975), орденом Октябрьской Революции (1978), орденом Трудового Красного Знамени (1954), орденом «Знак Почёта» (1940).

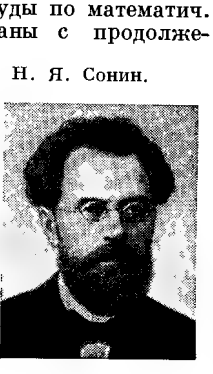
■ Уравнения математической физики, 4 изд., М., 1966; Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 3 изд., М., 1988; Введение в теорию кубатурных формул, М., 1974.

● Сергей Львович Соболев (К 60-летию со дня рождения), Новосиб., 1969; «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 5; 1979, т. 34, в. 1; 1983, т. 38, в. 6.

СО́МОВ Осип (Иосиф) Иванович [1(13). 6.1815, с. Отрада Клинского уезда Московской губ.,—26.4(8.5).1876, Петербург] — русский математик и механик, акад. Петербургской АН (1862; чл.-корр. 1852). В 1835 окончил Московский ун-т. С 1847 проф. Петербургского ун-та; преподавал также в Ин-те корпуса инженеров путей сообщения (1848—69) и в Ин-те корпуса горных инженеров (1849—62). Основные труды по теоретич. механике и математич. анализу. Для творчества С. характерно применение результатов, полученных в аналитич. механике, к вопросам геометрии; он ввёл понятие об ускорениях высших порядков и применил их к изучению ряда геометрич. свойств кривых и поверхностей. Автор исследований по теории эллиптич. функций и её приложениям к механике; ему удалось довести до конца решение задачи о вращении твёрдого тела вокруг неподвижной точки в случаях Эйлера — Пуансо и Лагранжа — Пуассона. Важны также труды С. по вопросам малых колебаний системы вокруг положения устойчивого равновесия. Автор оригинального курса «Рациональная механика» (ч. 1—2, 1872—77), к-рый в 1878 был переведён на немецкий язык. Демидовские премии Петербургской АН (1838, 1847, 1851).

● «Записки имп. АН», 1878, т. 31, с. 248—66; Никифорова Т. Р., Осип Иванович Сомов, М.—Л., 1964.

СО́НИН Николай Яковлевич [10(22). 2.1849, Тула,— 14(27).2.1915, Петроград] — русский математик, акад. Петербургской АН (1893; чл.-корр. 1891). В 1869 окончил Московский ун-т. С 1877 проф. Варшавского ун-та. Основные труды по математич. анализу; они связаны с продолжением исследований П. Л. Чебышева. К ним относится работа «О точности определения предельных величин интегралов» (1892), результаты к-рой связаны с доказательством предельной теоремы теории вероятностей, а также «О приближённом вычислении опре-

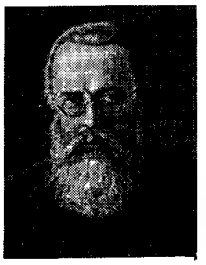


Н. Я. Сонин.

Ю. В. Сохоцкий.

Л. Н. Сретенский.

С. Стевин.



В. А. Стеклов.

делённых интегралов и входящих при этом вычислении целых функциях» (1887). С. исследовал важный для приложений класс интегральных уравнений с переменным пределом и ядром, зависящим от разности аргументов (1884). Автор работ по специальным функциям, в особенности цилиндрическим, а также асимптотич. разложениям функций.

■ Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, М., 1954.
● Кропотов А. И., Николай Яковлевич Сонин, Л., 1967.

СОФРО́НОВ Михаил [1729, Устюжна,—10(21).2.1760] — русский математик и переводчик, адъюнкт Петербургской АН (с 1753). Его диссертация «О спрямлении эллиптических дуг» (неопубл.) была одобрена Л. Эйлером.

● Смирнов В. И., Кулябко Е. С., Михаил Софронов — русский математик середины XVIII в., М.—Л., 1954.

СОХО́ЦКИЙ Юлиан Васильевич [24.1(5.2).1842, Варшава,— 14.12.1927, Ленинград] — русский математик. В 1866 окончил Петербургский ун-т, с 1873 проф. там же. Основные труды по теории функций комплексного переменного. В магистерской диссертации «Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями» (1868) впервые сформулировал и доказал теорему о поведении аналитич. функции в окрестности существенно особой точки (теорема Сохоцкого). В докторской диссертации «Об определённых интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды» (1873) изучил граничные значения интегралов типа интеграла Коши при весьма общих условиях. С. принадлежит оригинальный курс «Высшей алгебры» (ч. 1 — «Решение численных уравнений», 1882; ч. 2— «Начала теории чисел», 1888).

● Историко-математические исследования, в. 3, М.—Л., 1950, с. 399—406.

СПЕ́ЙДЕЛЛ Джон (Speidell John) (17 в.) — английский математик. Издал (1619) первые таблицы натуральных логарифмов чисел от 1 до 1000 и синусов.

СПЕ́НСЕР Доналд Клейтон (Spencer Donald Clayton) (р. 25.4.1912, Боулдер) — американский математик, чл. Национальной АН США (1968), Американской академии искусств и наук в Бостоне. Учился в Колорадском ун-те (1934), Массачусетсском технологич. ин-те (1936), Кембриджском ун-те (1939). Проф. Станфордского (1946—50, 1963—68) и Принстонского (в 1950—63 и с 1968) ун-тов. Основные труды по общей теории систем дифференциальных уравнений с частными производными и по теории деформаций структур на многообразиях.

■ Функционалы на конечных римановых поверхностях, М., 1957 (соавтор М. Шиффер).

СРЕ́ТЕНСКИЙ Леонид Николаевич [14(27).2.1902, Москва,—8.8.1973, там же] — советский учёный в области механики и математики, чл.-корр. АН СССР (1939). Окончил Московский ун-т (1923), с 1934 проф. там же. В 1923—34 работал в Ин-те математики и механики при Московском ун-те, в 1930—34 в Гидрометеорологич. ин-те, в 1931—41 в Центральном аэрогидродинамич. ин-те им. Н. Е. Жуковского, в 1941—45 в Ин-те теоретич. геофизики АН СССР, в 1951—62 в Морском гидрофизич. ин-те АН СССР. Основные труды по теории волновых движений жидкости: теории приливных волн, волн конечной амплитуды, корабельных волн, колебаний жидкости в сосудах и др., а также теории фигур равновесия вращающейся жидкости, обтеканию контура газовым потоком, теории движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки и отдельным вопросам математич. физики, интегральных уравнений и дифференциальной геометрии. Награждён 2 орденами Ленина (1953, 1972), орденом Трудового Красного Знамени (1945).

■ Теория ньютоновского потенциала, М.—Л., 1946.
● Леонид Николаевич Сретенский, М., 1967 (АН СССР. Материалы к биобиблиографии ученых СССР); «Вестник АН СССР», 1972, № 6.

СТЕ́ВИН Симон (Stevin Simon) (1548, Брюгге,—1620, Гаага) — нидерландский учёный и инженер. С 1583 преподавал в Лейденском ун-те, в 1600 организовал инженерную школу при Лейденском ун-те, где читал лекции по математике. Работа С. «Десятина» («De Thiende», 1585) посвящена десятичной системе мер и десятичным дробям, к-рые С. ввёл в употребление (в Европе).

■ The principal works, v. 1—5, Amst., 1955—66.
● Dеpau R., Simon Stevin, Brux., 1942.

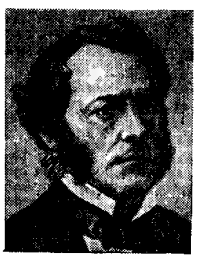
СТЕКЛО́В Владимир Андреевич [28.12.1863(9.1.1864), Нижний Новгород, ныне Горький,—30.5.1926, Крым, похоронен в Ленинграде] — советский математик, акад. Петербургской АН (1912; чл.-корр. 1902, адъюнкт с 1910), вице-президент АН СССР (с 1919). Племянник Н. А. Добролюбова. В 1887 окончил Харьковский ун-т, где учился у А. М. Ляпунова, в 1889—1906 работал там же на кафедре механики, сначала в качестве ассистента, затем приват-доцента (с 1891) и проф. (с 1896). В 1893—1905 был преподавателем теоретич. механики Харьковского технологич. ин-та. В 1894 защитил магистерскую диссертацию «О движении твёрдого тела в жидкости» (изд. 1893), а в 1902 — докторскую диссертацию «Общие методы решения основных задач математической физики» (изд. 1901). В 1906 С. перешёл на работу в Петербургский ун-т. Вёл большую общественную и научно-организационную работу, особенно в последние годы жизни. По его инициативе организован при АН Физико-математич. ин-т (1921), директором к-рого он состоял до конца своей жизни. В 1926 имя С. было присвоено Физико-математич. ин-ту, к-рый в 1934 разделился на два ин-та (один из них — Математич. ин-т АН СССР сохранил имя С.).

Основные направления научного творчества С.— приложения математич. методов к вопросам естествознания; большая часть его работ относится к математич. физике. С. получил ряд существенных результатов, касающихся основных задач теории потенциала. Для функций, обращающихся в нуль на границе области, С. вывел функциональное неравенство с точной константой. Большинство работ С. посвящено вопросам разложения функций в ряды по наперёд заданным ортогональным системам функций; обычно к таким системам приводят краевые задачи математич. физики. В основе этих исследований лежит введённое С. понятие замкнутости системы ортогональных функций. С. вплотную подошёл к понятию гильбертова пространства. При исследовании вопросов разложения в ряды С. развил асимптотич. методы, среди к-рых — метод получения асимптотич. выражений для классич. ортогональных многочленов, называемый методом Лиувилля — Стеклова. Установленные С. теоремы о разложимости в обобщённый ряд Фурье весьма близки к т. н. теоремам «равносходимости». С. ввёл особый метод сглаживания функций, к-рый затем получил большое развитие. С.— автор ряда работ по математич. анализу, в частности по теории квадратурных формул, а также по теории упругости и гидромеханике. С. известен как историк математики, философ и писатель. Ему принадлежат книги научно-биографич. характера о М. В. Ломоносове и Г. Галилее, очерки и статьи о жизни и деятельности П. Л.

В. В. Степанов.

Т. И. Стилтьес.

С. Стоилов.



Дж. Г. Стокс.

М. Х. Стоун.

В. В. Струминский.

Чебышева, Н. И. Лобачевского, М. В. Остроградского, А. М. Ляпунова, А. А. Маркова, А. Пуанкаре, Дж. Томсона и др., работа по философии «Математика и её значение для человечества» (1923), а также книга «В Америку и обратно. Впечатления» (1925). С.— почётный доктор наук Торонтского ун-та (1925), иностранный чл.-корр. Гёттингенской АН (1925).

■ Основные задачи математической физики, 2 изд., М., 1983.

● Памяти В. А. Стеклова. Сб. статей, Л., 1928; Смирнов В. И., Памяти Владимира Андреевича Стеклова, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1964, т. 73; Игнациус Г. И., Владимир Андреевич Стеклов, М., 1967; Владимиров В. С., Маркуш И. И., Владимир Андреевич Стеклов — ученый и организатор науки, М., 1981.

СТЕПА́НОВ Вячеслав Васильевич [23.8(4.9).1889, Смоленск,— 22.7.1950, Москва] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1946). Окончил Московский ун-т (1912), с 1928 проф. там же. Основные труды по теории дифференциальных уравнений и её применениям. В теории функций С. исследовал свойства важного класса функций, названных почти периодическими функциями Степанова. Им изучены условия существования общего и обобщённого дифференциала для функций двух переменных. С. является одним из основоположников советской школы в области качественной теории дифференциальных уравнений. Государственная премия СССР (1951). Награждён орденом «Знак Почёта» (1940).

■ Курс дифференциальных уравнений, М.—Л., 1937 (8 изд., М., 1959); Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.—Л., 1949 (соавтор В. В. Немыцкий).

● «Успехи матем. наук», 1950, т. 5, в. 5.

СТИЛТЬЕС Томас Иоаннес (Stieltjes Thomas Joannes) (29.12.1856, Зволле, Оверэйссел,—31.12.1894, Тулуза)— нидерландский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1894). Окончил Политехнич. школу в Делфте. Работал на Лейденской обсерватории (1877—83), с 1886 преподаватель, затем проф. ун-та в Тулузе. Основные труды по теории функциональных непрерывных дробей, проблеме моментов, теории ортогональных многочленов, приближённому интегрированию. С. пришёл (1894) к обобщению понятия интеграла — т. н. интегралу Стилтьеса.

■ Oeuvres complètes, t. 1—2, Groningen, 1914—18; Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, t. 1, P., 1905; Исследования о непрерывных дробях, Хар.—К., 1936.

СТИНРОД Норман Эрл (Steenrod Norman Earl) (р. 22.4.1910, Дейтон) — американский математик, чл. Национальной АН США. Окончил Мичиганский ун-т (1932). Преподавал с 1936 в Принстонском, с 1939 в Чикагском и с 1942 в Мичиганском ун-тах. С 1947 проф. Принстонского ун-та. Основные труды по алгебре, топологии, алгебраич. топологии. Редактор журнала «Annals of Mathematics» (1950—62).

■ Топология косых произведений, М., 1953; Основания алгебраической топологии, М., 1958 (соавтор С. Эйленберг); Первые понятия топологии, М., 1967 (соавтор У. Чинн); Когомологические операции, М., 1983 (соавтор Д. Эпстейн).

СТИРЛИНГ Джеймс (Stirling James) (1692, Гарден,—5.12.1770, Эдинбург)— шотландский математик, чл. Лондонского королевского общества (1729). Наиболее важный труд — «Метод разностей» («Methodus differentialis...», L., 1730), где С. впервые дал асимптотич. разложение логарифма гамма-функции (т. н. ряд Стирлинга), рассмотрел бесконечные произведения. Нек-рые результаты С. были получены также Л. Эйлером в его более общих исследованиях. Т. н. формула Стирлинга легко получается из ряда С., но у самого С. в явном виде не встречается.

● История математики, т. 3, М., 1972.

СТОЙЛОВ Симион (Stoilov Simion) (14.9.1887, Бухарест,—4.4.1961, там же) — румынский математик, чл. Румынской академии (1948). С 1949 первый директор Ин-та математики Румынской академии. Основные труды по топологич. теории функций комплексного переменного.

■ Теория функций комплексного переменного, т. 1—2, М., 1962; Лекции о топологических принципах теории аналитических функций, М., 1964.

СТОКС Джордж Габриель (Stokes George Gabriel) (13.8.1819, Скрин, Ирландия,—1.2.1903, Кембридж) — английский физик и математик, чл. Лондонского королевского общества (1851) и его президент (1885—90), чл. Парижской АН (1900). Окончил Кембриджский ун-т (1841), с 1849 проф. там же. Основные труды по физике. В математике одновременно с Ф. Зейделем ввёл (1848) понятие равномерной сходимости последовательности и ряда. Вывел (1854) одну из важнейших формул векторного анализа (формулу Стокса).

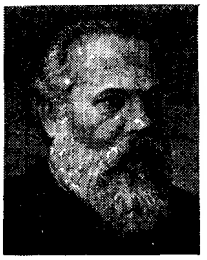
СТО́УН Маршалл Харви (Stone Marshall Harvey) (р. 8.4.1903, Нью-Йорк) — американский математик, чл. Национальной АН США (1938). Окончил Гарвардский ун-т (1922), проф. Чикагского (1946—68) и Массачусетсского (с 1968) ун-тов. Основные труды по топологии и функциональному анализу.

СТРОЙК Дирк Ян (Struik Dirk Jan) (р. 30.9.1894, Роттердам, Нидерланды) — американский математик. В 1922 окончил Лейденский ун-т, в 1917—24 ассистент Высшей технич. школы в Делфте, с 1926 в Массачусетсском технологич. ин-те в Кембридже (США). Основные труды по тензорной дифференциальной геометрии; часть работ в этой области выполнена им совместно с Я. Схоутеном. С. принадлежат также исследования по истории математики.

■ Theory of linear connections, B., 1934; A concise history of mathematics, v. 1—2, N. Y., 1948; Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 1—2, М.—Л., 1939—48 (соавтор Я. Схоутен); Очерк истории дифференциальной геометрии до XX столетия, М.—Л., 1941; Краткий очерк истории математики, 4 изд., М., 1983.

СТРУМИ́НСКИЙ Владимир Васильевич [р. 16(29).4.1914, Оренбург] — советский учёный в области аэродинамики, летательных аппаратов и теоретич. основ самолётостроения, акад. АН СССР (1966; чл.-корр. 1958). Окончил Московский ун-т (1938). В 1941—66 работал в Центральном аэрогидродинамич. ин-те им. Н. Е. Жуковского. Директор Ин-та теоретич. и прикладной механики Сибирского отделения АН СССР (1966—71). В 1971—77 зав. отделом физич. аэромеханики Ин-та проблем механики АН СССР, с 1977 зав. сектором механики неоднородных сред при Отделении механики и процессов управления АН СССР. Разработал теорию трёхмерного пограничного слоя и вихревую теорию крыла, с помощью к-рой были выявлены основные законы обтекания стреловидных и треугольных крыльев. Его исследования сыграли существенную роль в преодолении звукового барьера и достижении сверхзвуковых скоростей полёта. Другие труды по нелинейной теории устойчивости, динамич. теории турбулентности, кинетич. теории газов, по улучшению лётных данных самолётов путём ламинаризации пограничного слоя. Ленинская премия (1961), Государственные премии СССР

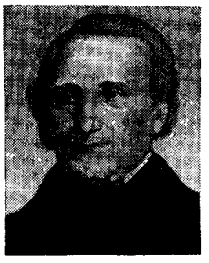
Стьюдент (У. С. Госсет).



Ф. М. Суворов.

М. Я. Суслин.

А. К. Сушкевич.



Э. Сэбин.

А. Н. Тавхелидзе.

(1947, 1948), 1-я премия и Золотая медаль имени Н. Е. Жуковского (1947). Награждён орденом Ленина (1957), орденом Трудового Красного Знамени (1975), орденом Красной Звезды (1945), орденом Дружбы народов (1984), орденом «Знак Почёта» (1953).

■ В сб.: «Турбулентные течения. Тр. школы 1974», М., 1977; в сб.: «Молекулярная газодинамика», М., 1982; Аэродинамика и молекулярная газовая динамика, М., 1985.

● «Прикладная математика и механика», 1984, т. 48, в. 2.

СТЬЮДЕНТ (Student) [псевдоним Уильяма Сили Госсета (William Sealy Gosset)] (13.6.1876, Кентербери,— 16.10.1937, Биконсфильд) — английский математик и статистик. Один из основоположников теории статистич. оценок и проверки гипотез. Установил статистич. правило проверки гипотез (критерий Стьюдента), распределение отношения двух независимых случайных величин (распределение Стьюдента).

СТЮАРТ Мэтью (Stewart Matthew) (1717, Ротсей, Шотландия,—23.1.1785, Эдинбург) — шотландский астроном и математик, проф. Эдинбургского ун-та (1747—75). Автор ряда теорем (иногда без доказательства) в области геометрии; в частности, доказал теорему о четырёх точках, из к-рых три лежат на одной прямой (теорема Стюарта).

СУАЙНСХЕД Ричард («Вычислитель») (Swineshead Richard) (14 в.)— английский естествоиспытатель. Один из первых учёных, к-рый применил математику в физике. Автор трижды издававшейся (Падуя, ок. 1477; Павия, 1498; Венеция, 1520) «Книги калькуляций» («Liber calculationum»), в к-рой получили развитие прообразы идей функциональной зависимости и её графич. изображения.

● История математики, т. 1, М., 1970.

СУВО́РОВ Фёдор Матвеевич [14(26). 9.1845—19.6(2.7).1911] — русский математик. Окончил Казанский ун-т (1867), с 1884 проф. там же. Основные труды по дифференциальной геометрии, в частности по теории кривизны трёхмерного пространства. Был активным пропагандистом идей Н. И. Лобачевского. Один из членов-учредителей Казанского физико-математич. общества.

● Историко-математические исследования, в. 9, М., 1956, с. 271—316.

СУНЬ-ЦЗЫ (3 в.) — китайский математик. Дал правило арифметич. действий на счётной доске. Изложил способ решения в целых числах неопределённых уравнений 1-й степени.

● История математики, т. 1, М., 1970.

СУ́СЛИН Михаил Яковлевич [3(15). 11.1894, с. Красавка, ныне Саратовской обл.,—1919] — русский математик. Ученик Н. Н. Лузина. С 1917 работал в Московском ун-те. Основным научным открытием С. было установление факта существования A-множеств. С. опубликовал (1917) только одну короткую заметку о своих открытиях; они изложены в книгах Ф. Хаусдорфа «Основы теории множеств» (2 изд., 1927), Н. Н. Лузина «Лекции об аналитических множествах и их применениях» (1930) и др.

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

СУШКЕ́ВИЧ Антон Казимирович [10 (22).1.1889, Борисоглебск, ныне Воронежской обл.,— 30.8.1961, Харьков] — советский математик. Окончил Петербургский ун-т (1913). Работал в Харьковском ун-те (с 1935 проф.). Основные работы в области алгебры (в частности, в теории полугрупп), теории чисел, истории и методики математики.

■ Основы высшей алгебры, 4 изд., М.—Л., 1941; Теория обобщенных групп, Хар.—К., 1937.

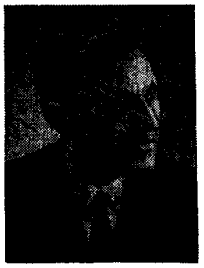
● «Успехи матем. наук», 1962, т. 17, в. 2.

СХО́ТЕН Франс ван (Schooten Frans van) (ок. 1615, Лейден,—29.5.1660, там же) — нидерландский математик. Подготовил и издал (1649) «Геометрию» Р. Декарта на латинском языке со своими комментариями, развил его геометрич. идеи, а также издал (1646) математич. труды Ф. Виета.

СХО́УТЕН, Схаутен Ян Арнольдус (Schouten Jan Arnoldus) (28.8. 1883, Амстердам,—29.1.1971, Эпе) — нидерландский математик, чл. Нидерландской королевской АН (1933). В 1908 окончил Высшую технич. школу в Делфте, в 1914—43 проф. там же.

Ф. ван Схотен.

Я. А. Схоутен.



Основные труды по тензорной дифференциальной геометрии и её приложениям; часть работ в этой области выполнена им совместно с Д. Стройком. Автор работ, посвящённых проблеме Пфаффа и релятивистской физике.

■ Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 1—2, М.—Л., 1939—48 (соавтор Д. Стройк); Тензорный анализ для физиков, М., 1965.

СЭБИН Эдуард (Sabine Edward) (14. 10.1788, Дублин,— 26.6.1883, Ричмонд) — английский физик, математик, путешественник, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1826). Основные труды по физике.

Т

ТАВХЕЛИ́ДЗЕ Альберт Никифорович (р. 16.12.1930, Тбилиси) — советский физик-теоретик, чл.-корр. АН СССР (1984), акад. (1974; чл.-корр. 1967) и президент (1986) АН Грузинской ССР. Чл. КПСС с 1954. Окончил Тбилисский ун-т (1953). В 1970—86 директор Ин-та ядерных исследований АН СССР. Основные труды по теоретич. и математич. физике, квантовой теории поля, теории элементарных частиц. Ленинская премия (1988). Государственная премия СССР (1973). Награждён орденом Октябрьской Революции (1978), орденом Трудового Красного Знамени (1971).

■ К вопросу о составных моделях элементарных частиц, Дубна, 1965 (соавторы Н. Н. Боголюбов, Б. В. Струминский); Об автомодельной асимптотике в квантовой теории поля, «Теоретическая и математическая физика», 1972, т. 12, № 1 (соавторы Н. Н. Боголюбов, В. С. Владимиров).

ТАКЕ́ Андре (Taquet André) (23.6. 1612, Антверпен,—22.12.1660) — бельгийский математик, проф. в колледжах иезуитов в Лувене (Лёвен) и Антверпене. Автор учебников по арифметике и геометрии, к-рые имели широкое распространение в 17 и 18 вв. Впервые (1656) употребил термин «перестановка» (введён в обиход Я. Бернулли); вывел сумму бесконечной геометрич. прогрессии со знаменателем <1.

● История математики, т. 2, М., 1970.

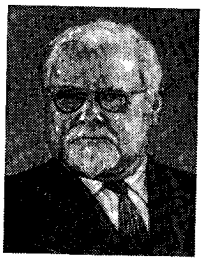
ТА́РСКИЙ Альфред (Tarski Alfred) (14.1.1902, Варшава,—1983)—польский

А. Тарский.

Н. Тарталья.

Б. Тейлор.

У. Тёрстон.


А. Н. Тихонов.

Р. Ф. Том.

логик и математик. С 1939 работает в США. Основные труды по теории множеств, математич. логике и основаниям математики.

■ Введение в логику и методологию дедуктивных наук, М., 1948.

ТАРТА́ЛЬЯ Никколо (Tartaglia Niccolo) [ок. 1499, Бреша,—13(или 14). 12.1557, Венеция] — итальянский математик. Основные труды по математике, механике, баллистике, геодезии, фортификации. В соч. «Новая наука» («Nova scientia...», 1537) он показал, что траектория полёта снаряда на всём протяжении есть кривая линия (парабола) и что наибольшая дальность полёта снаряда соответствует углу в 45°. Другая его важная работа — «Общий трактат о числе и мере» («General trattato di numeri et misure», Venetia, 1556—60) содержит обширный материал по вопросам арифметики, алгебры и геометрии. Имя Т., наряду с именем Дж. Кардано, связано с разработкой способа решения кубич. уравнений в радикалах.

● История математики, т. 1—2, М., 1970.

ТАУБЕР Альфред (Tauber Alfred) [5.11.1866, Пресбург,—1942(?)] — австрийский математик, с 1919 проф. Венского ун-та. Основные труды по теории чисел и теории функций. В математич. анализе важную роль играют т. н. тауберовы теоремы (1897).

ТАУРИ́НУС Франц Адольф (Taurinus Franz Adolf) (5.11.1794, Бад-Кёниг,— 13.2.1874, Кёльн) — немецкий математик. Развил (1825—26) следствия из допущения, что сумма углов треугольника меньше $2d$, и получил нек-рые теоремы неевклидовой геометрии.

ТЕ́ЙЛОР Брук (Taylor Brook) (18.8. 1685, Эдмонтон, Мидлсекс,— 29.12. 1731, Лондон) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1712). Нашёл (1712) общую формулу (т. н. формулу Тейлора) для разложения функций в степенные ряды (ряды Тейлора), к-рую опубликовал в труде «Прямой и обратный метод приращений» («Methodus incrementorum directa et inversa», L., 1715). В этом же труде Т. положил начало математич. изучению задачи о колебании струны. Ему принадлежат заслуги в разработке теории конечных разностей. Т. также автор работ о перспективе, центре качания, полёте снарядов, взаимодействии магнитов, капиллярности и др. К концу жизни занимался вопросами философии.

● История математики, т. 2, М., 1970.

ТЕО́Н из Смирны (Θέων) (2 в.) — греческий математик. Автор труда «О математических знаниях, необходимых для чтения Платона», к-рый и до наших дней является источником для изучения древнегреческой математики.

■ Theonis smyrnaei philosophi platonici expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium. Recensuit E. Hiller, Lipsiae, 1878.

ТЁПЛИЦ Отто (Toeplitz Otto) (1.8. 1881, Бреслау,—15.2.1940) — немецкий математик. Работал в Бонне. Основные труды по теории интегральных уравнений, линейной и полилинейной алгебре.

■ Числа и фигуры, 4 изд., М., 1966 (соавтор Г. Радемахер).

ТЁРСТОН Уильям (Thurston William) (р. 30.10.1946, Вашингтон) — американский математик. Основные труды по топологии многообразий. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1983).

ТЕЭТЕ́Т, Феэтет Афинский (Θεαίτητος) (4 в. до н. э.) — древнегреческий математик, сведения о к-ром сохранились в диалоге «Теэтет» Платона. Исследовал проблему о несоизмеримых отрезках. Предполагают, что он открыл додекаэдр, икосаэдр и октаэдр.

● История математики, т. 1, М., 1970.

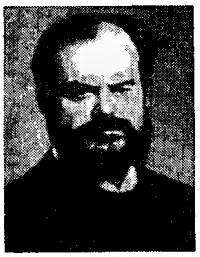
ТИ́ХОНОВ Андрей Николаевич [р. 17(30).10.1906, Гжатск, ныне Гагарин Смоленской обл.] — советский математик и геофизик, акад. АН СССР (1966; чл.-корр. 1939), дважды Герой Социалистич. Труда (1953, 1986). Окончил Московский ун-т (1927), преподаёт там же (проф. с 1936), с 1970 декан ф-та вычислительной математики и кибернетики. С 1953 работает в Ин-те прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР (с 1979 директор), чл. редколлегии «Математической энциклопедии».

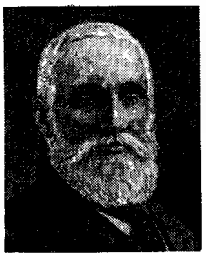
Первые работы посвящены топологии и функциональному анализу. Т. введено (1926) понятие произведения топологич. пространств (тихоновское произведение), доказаны теоремы о бикомпактности произведения бикомпактных пространств и о существовании неподвижной точки при непрерывных отображениях в топологич. пространствах. Последующие труды относятся к теории дифференциальных уравнений, математич. физике, геофизике и вычислительной математике. Т. доказаны теоремы единственности для уравнения теплопроводности (1935, 1937), изучены функциональные уравнения типа Вольтерры (1938). Т.— один из основоположников теории дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной (1948). Выполнил фундаментальные исследования по разработке теории и методике применения электромагнитных полей для изучения внутреннего строения земной коры (1950). Под руководством Т. созданы алгоритмы решения многих прикладных задач. Развита (1956—63) теория однородных разностных схем (совместно с А. А. Самарским). Введённое Т. понятие регуляризации (1943, 1963, 1985) позволило развить методы решения некорректных задач, в частности многих обратных задач классич. математики и естествознания, задач математич. диагностики.

Т.— почётный доктор Будапештского ун-та (1975), Высшей технич. школы в Карл-Маркс-Штадте (1976), иностранный почётный чл. Венгерской АН (1979), иностранный чл. АН ГДР (1980). Ленинская премия (1966), Государственные премии СССР (1953, 1976), премия Совета Министров СССР (1981), премия имени М. В. Ломоносова (МГУ, 1963). Награждён 6 орденами Ленина (1953, 1954, 1956, 1966, 1971, 1986), орденом Октябрьской Революции (1975), 3 орденами Трудового Красного Знамени (1945, 1949, 1961).

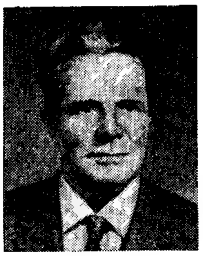
■ Уравнения математической физики, 5 изд., М., 1977 (соавтор А. А. Самарский); Теория функций комплексной переменной, 4 изд., М., 1979 (соавтор А. Г. Свешников); Методы решения некорректных задач, 2 изд., М., 1979 (соавтор В. Я. Арсенин); Дифференциальные уравнения, М., 1980 (соавторы А. Б. Васильева, А. Г. Свешников); Sur les espaces abstraits, «C. r. Acad. sci.», 1926, t. 182, p. 1519—22; Über die topologische Erweiterung von Räumen, «Math. Ann.», 1929, Bd 102, S. 544—61; Théorème d'unicité pour l'équation de la chaleur, «Матем. сб.», 1935, т. 42, с. 199—216; Об устойчивости обратных задач, «Докл. АН СССР», 1943, т. 39, № 5, с. 195—98; О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, «Матем. сб.», 1948, т. 22, № 2, с. 193—204; О регуляризации некорректно поставленных задач, «Докл. АН СССР», 1963, т. 153, № 1, с. 49—52; О задачах с неточно заданной исходной информацией, «Докл. АН СССР», 1985, т. 280, № 3, с. 559—62.

● «Успехи матем. наук», 1956, т. 11, в. 6; 1967, т. 22, в. 2; 1976, т. 31. в. 6; 1981, т. 36, в. 6; 1987, т. 42, в. 3.

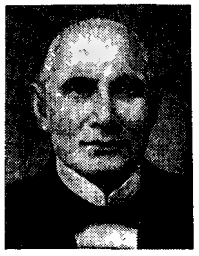

Дж. Г. Томпсон.


У. Томсон.

Э. Торричелли.


В. А. Трапезников.

А. М. Тьюринг.


А. Н. Уайтхед.

ТОМ Рене Фредерик (Thom René Frédéric) (р. 2.9.1923, Монбельяр) — французский математик, чл. Парижской АН (1976), проф. Страсбурского ун-та. Основные труды по алгебраической и дифференциальной топологии (пространства и классы Тома). Разработал т. н. теорию катастроф. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1958).

ТО́МПСОН Джон Григс (Thompson John Griggs) (р. 13.10.1932) — американский математик, чл. Национальной АН США (1984). Основные труды по теории групп. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1970).

ТО́МСОН, лорд Кельвин Уильям [Thomson (lord Kelvin)William] (26.6.1824, Белфаст,—17.12.1907, Ларгс, близ Глазго) — английский физик и математик, иностранный чл.-корр. (1877) и иностранный почётный чл. (1896) Петербургской АН, чл. Лондонского королевского общества (1851) и его президент (1890—95). Основные труды по физике. Автор ряда работ по приложению рядов Фурье к различным разделам физики; ввёл (1890) и изучил один класс цилиндрич. функций [функции Кельвина (Томсона)].

ТОРРИЧЕ́ЛЛИ Эванджелиста (Torricelli Evangelista) (15.10.1608, Фаэнца,—25.10.1647, Флоренция) — итальянский математик и физик, с 1642 проф. математики Флорентийского ун-та. В математике Т. развил т. н. метод неделимых, описал кривую, позднее названную логарифмич. спиралью; произвёл (независимо от Р. Декарта) спрямление и квадратуру этой спирали.

● История математики, т. 2, М., 1970.

ТРАМБЛЕ́, Трамблей Жан (Tremblay Jean) (13.4.1749, Женева,—18.9.1811, Ле-Мас-д'Ажне, Франция) — швейцарский математик, иностранный чл.-корр. (1793) и иностранный почётный чл. (1798) Петербургской АН. Основные труды по дифференциальным уравнениям.

● История математики, т. 3, М., 1972.

ТРАПЕ́ЗНИКОВ Вадим Александрович [р. 15(28).11.1905, Москва] — советский учёный в области машиностроения, автоматики и процессов управления, акад. АН СССР (1960; чл.-корр. 1953), Герой Социалистич. Труда (1965). Чл. КПСС с 1951. По окончании Московского высшего технич. училища (1928) работал (до 1933) во Всесоюзном электротехнич. ин-те. В 1930—41 преподавал в Московском энергетич. ин-те (проф. с 1939), с 1954 проф. Московского физико-технич. ин-та. С 1941 работает в Ин-те автоматики и телемеханики (ныне Ин-т проблем управления АН СССР), с 1951 директор. Основные труды по методам расчёта, построения и технико-экономич. анализа электрич. машин и трансформаторов; исследованию способов построения быстродействующих автоматич. устройств, агрегатных автоматич. систем; методам моделирования систем автоматич. регулирования; экономике научно-технич. прогресса. Т.— соавтор первых в СССР электронных моделирующих установок. Иностранный почётный чл. Венгерской АН (1967), иностранный чл. Чехословацкой АН (1972), Сербской академии наук и искусств (1976). Государственная премия СССР (1951). Награждён 2 орденами Ленина (1965, 1975), орденом Октябрьской Революции (1975), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1953, 1971), орденом Дружбы народов (1981).

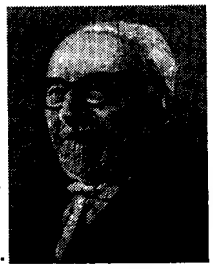
■ Основы проектирования серий асинхронных машин, М.—Л., 1937; Автоматический контроль линейных размеров изделий, М., 1947 (соавторы И.Е. Городецкий, Б.Н. Петров, А. А. Фельдбаум); Человек в системе управления, «Автоматика и телемеханика», 1972, № 2; Научно-технический прогресс и эффективность науки, «Вопросы экономики», 1973, № 2; Теория управления: развитие и проблемы, «Вестник АН СССР», 1974, № 2.

● «Вестник АН СССР», 1986, № 3.

ТРЕФФЦ Эрих (Trefftz Erich) (21.2.1888—21.1.1937) — немецкий математик и механик. Работал в Ахене и Дрездене. Основные труды по аэро- и гидродинамике и теории упругости. Предложил (1927) один из вариационных методов решения краевых задач (метод Треффца).

ТРИКО́МИ Франческо Джакопо (Tricomi Francesco Jacopo) (5.5.1897, Неаполь, — 21.11.1978, Турин) — итальянский математик, чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме (1962), Болонской АН. Преподавал с 1921 во многих ун-тах Италии. С 1925 проф. ун-та в Турине. Основные труды по дифференциальным (уравнение Трикоми) и интегральным ур-ниям.

Ф. Дж. Трикоми.



■ О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, М.—Л., 1947; Лекции по уравнениям в частных производных, М., 1957; Интегральные уравнения, М., 1960; Дифференциальные уравнения, М., 1962.

● «Успехи матем. наук», 1987, т. 42, в. 3.

ТУСИ́ — см. *Насирэддин Туси.*

ТУ́Э Аксель (Thue Axel) (19.2.1863, Тёнсберг,—7.3.1922, Кристиания, ныне Осло) — норвежский математик, с 1903 проф. ун-та в Кристиании. Учился в Кристиании, Лейпциге, Берлине. Основные труды по теории чисел, в частности по теории диофантовых уравнений.

ТЬЮРИНГ Алан Матисон (Turing Alan Mathison) (23.6.1912, Лондон,—7.6.1954, Уилмслоу, близ Манчестера) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1951). Окончил Кембриджский ун-т (1935). Основные труды по математич. логике и вычислительной математике. Ввёл (1936—37) понятие уточнённого абстрактного эквивалента алгоритма, или вычислимой функции. Автор идеи абстрактной универсальной вычислительной машины (машины Тьюринга).

У

УА́ЙТХЕД Алфред Норт (Whitehead Alfred North) (15.2.1861, Рамсгит, Кент,—30.12.1947, Кембридж, Массачусетс) — английский математик, логик и философ, чл. Лондонского королевского общества. Окончил Кембриджский ун-т (1884), с 1914 проф. в Кембриджском, Лондонском и Гарвардском (США) ун-тах. Основные труды по математич. логике, развивал дедуктивно-аксиоматич. построение логики.

У ВЭ́НЬЦЗЮ́НЬ, Ву (р.12.5.1919, Шанхай) — китайский математик, чл. Китайской АН (1957). Окончил математич. факультет Шанхайского ин-та связи (1940), почётный директор Научно-исследовательского ин-та системных наук АН КНР (1983), с 1984 председатель правления Китайского математич. общества. Основные труды по алгебраич. топологии (так наз. формулы Ву для характеристич.

Х. Уитни.

Э. Т. Уиттекер.

Улугбек.

П. Л. Ульянов.

П. С. Урысон.

Д. К. Фаддеев.

классов), а также по теории игр и истории математики Древнего Китая.

УИТНИ Хаслер (Whitney Hassler) (р. 23.3.1907, Нью-Йорк) — американский математик, чл. Национальной АН США, Парижской АН (1981). Окончил Йельский ун-т (1928). С 1933 работал в Гарвардском ун-те (с 1946 проф.), с 1952 — в Ин-те перспективных исследований в Принстоне. Основные труды по теории дифференцируемых функций и многообразий, алгебраич. топологии (классы Штифеля — Уитни), теории особенностей отображений.

■ Геометрическая теория интегрирования, М., 1960.

УИТТЕ́КЕР Джон Макнотен (Whittaker John Macnaghten) (р. 7.3.1905, Кембридж) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1949). Окончил Эдинбургский ун-т (1924). Работал во многих ун-тах Великобритании, в 1952—65 вице-канцлер Шеффилдского ун-та. Основные труды по теории функций комплексного переменного.

УИТТЕ́КЕР Эдмунд Тейлор (Whittaker Edmund Taylor) (24.10.1873, Саутпорт, Ланкашир,—24.3.1956, Эдинбург) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1905), чл. и президент (1939—44) Эдинбургского королевского общества. Учился в Кембриджском ун-те (1891—96), проф. Эдинбургского ун-та (1912—46). Основные труды по теории специальных функций. У. (совместно с Дж. Ватсоном) — автор широко известной монографии «Курс современного анализа» (ч. 1—2, 1902; рус. пер., 2 изд., 1963), содержащей сжатый обзор математич. анализа и весьма полную теорию важнейших специальных функций; автор ряда учебников, в частности по теории интерполяции, теории оптич. инструментов и книг по истории и философии естествознания.

● «Nature», 1956, v. 177, № 4512.

УИШАРТ Джон (Wishart John) (кон. 19—1-я пол. 20 вв.) — американский статистик. Получил (1928) формулу для совместного распределения элементов выборочной ковариационной матрицы для многомерного нормального распределения (распределение Уишарта).

УЛАМ Станислав Марцин (Ulam Stanislaw Marcin) (13.4.1909, Львов,— 3.5.1984, Санта-Фе) — американский математик, чл. Национальной АН США (1966), Американской академии наук и искусств в Бостоне (1957). Окончил Львовский ун-т (1932). С 1936 работал в Ин-те перспективных исследований в Принстоне, с 1945 проф. Колумбийского ун-та, с 1958 руководитель департамента математики Колорадского ун-та. Участвовал в «Манхаттанском проекте». Основные работы по топологии, функциональному анализу, математич. физике. Развил (1941—45) метод Монте-Карло (совм. с Дж. Нейманом).

■ Нерешенные математические задачи, М., 1964; Математика и логика. Ретроспектива и перспектива, М., 1971 (соавтор М. Кац).

УЛУГБЕ́К Мухаммед Тарагай ибн Шахрух ибн Тимур (22.3.1394, Сольтание,— 27.10.1449, Самарканд) — узбекский астроном и математик, основатель (ок. 1430) научного центра и обсерватории в Самарканде. Разработал алгебраич. метод, с помощью к-рого были составлены весьма точные тригонометрич. таблицы. Автор недошедшего до нас трактата, посвящённого задаче решения уравнения трисекции угла.

● Кары-Ниязов Т. Н., Астрономическая школа Улугбека, М.—Л., 1950 (2 изд., в его кн.: Избр. труды, т. 6, Таш., 1967).

УЛЬЯ́НОВ Пётр Лаврентьевич (р. 3.5.1928, с. Слепцовка Саратовской обл.) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1981). Окончил Саратовский ун-т (1950). С 1953 работает в Московском ун-те (с 1960 проф.); одновременно с 1957 — в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР, чл. редколлегии «Математической энциклопедии». Основные труды по теории функций (теория интеграла, тригонометрич. и ортогональных рядов, представление функций интегралами и рядами, теоремы вложения, приближение функций, интеграл типа Коши). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1988) и орденом Дружбы народов (1980).

■ Об интегралах типа Коши, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1961, т. 60; Расходящиеся ряды Фурье, «Успехи матем. наук», 1961, т. 16, в. 3; Вложение некоторых классов функций H_p^ω, «Изв. АН СССР. Сер. математическая», 1968, т. 32; Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$, «Успехи матем. наук», 1972, т. 27, в. 2.

● «Изв. ВУЗов. Математика», 1978, № 6.

УРЫСО́Н Павел Самуилович [22.1 (3.2).1898, Одесса,—17.8.1924, Ба, Бретань, Франция] — советский математик. Окончил Московский ун-т (1919). Был сотрудником Ин-та математики и механики Московского ун-та и проф. 2-го Московского ун-та (ныне Московский государственный педагогич. ин-т им. В. И. Ленина). Погиб от несчастного случая во время купания. Основные труды по топологии: теория размерности, метризационные теоремы, а также по нелинейным интегральным уравнениям, геометрии и др. В 1921—22 в Московском ун-те он прочитал впервые в нашей стране курс топологии.

■ Труды по топологии и другим областям математики, т. 1—2, М.—Л., 1951.

● Нейман Л., Радость открытия. Математик П. Урысон, М., 1972.

УСПЕ́НСКИЙ Яков Викторович [29.4(11.5). 1883, Угра,—27.1. 1947, США] — математик, акад. АН СССР (1921—30). Основные труды по теории чисел, алгебре и теории вероятностей, читал в Петербургском (Ленинградском) ун-те ряд общих и специальных математич. курсов. В 1929 уехал в США, где и прошла его дальнейшая научная деятельность.

■ Introduction to mathematical probability, N. Y.—L., 1965.

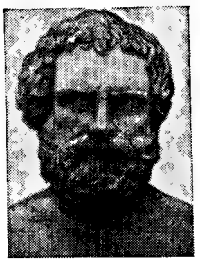
УЭЛЬ Гийом Жюль (Houël Guillaume Jules) (7.4.1823, Тан, Кальвадос,— 4.6.1886, близ Кана) — французский математик и механик, с 1859 проф. математики в Бордо. Математич. труды по алгебре и анализу, впервые (1878) изучил обратные гиперболич. функции.

ФА́БЕР Георг (Жорж) (Faber Georg) (5.4.1877, Кайзерслаутерн,— 1966)— немецкий математик, с 1916 проф. Высшей технич. школы в Мюнхене. Основные труды по теории функций комплексного переменного, где известны многочлены Фабера (1903). Составил (1935) обзор работ Л. Эйлера по теории рядов.

ФАДДЕ́ЕВ Дмитрий Константинович [р. 17(30).6.1907, Юхнов, ныне Калужской обл.] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1964). Окончил Ленинградский ун-т (1928), с 1937 проф. там же. С 1940 работает в Ленинградском отделении Математич. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды по теории

Л. Д. Фаддеев.

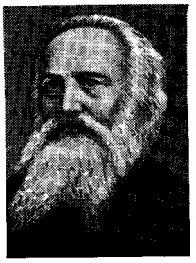
В. Н. Фаддеева.



Фалес.

Дж. К. Фаньяно.

М. Фарадей.



Е. С. Фёдоров.

чисел, алгебре, теории гомологий в группах, вычислительной математике. Государственная премия СССР (1981). Награждён орденом Ленина (1967), 3 орденами Трудового Красного Знамени (1951, 1957, 1975).

■ Теория гомологий в группах. I—II, «Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ. и астрон.», 1956, т. 7, в. 2; 1959, т. 7, в. 2 (соавтор З. И. Боревич); Таблицы основных унитарных представлений федоровских групп, М.—Л., 1961; Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.—Л., 1963 (соавтор В. Н. Фаддеева); Лекции по алгебре, М., 1984.

● «Успехи матем. наук», 1968, т. 23, в. 3; 1979, т. 34, в. 2.

ФАДДЕ́ЕВ Людвиг Дмитриевич (р. 23.3.1934, Ленинград) — советский математик и физик-теоретик, акад. АН СССР (1976). Сын Д. К. Фаддеева и В. Н. Фаддеевой. Окончил Ленинградский ун-т (1956), с 1967 проф. там же. С 1959 работает в Ленинградском отделении Математич. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР (с 1976 зам. директора по отделению). Основные труды по математич. и теоретич. физике. Ф. решена задача трёх тел в квантовой механике (уравнения Фаддеева), обратная задача теории рассеяния в многомерном случае (1966), построено квантование полей с бесконечномерными группами инвариантности (поля Янга — Миллса, поле тяготения Эйнштейна) при помощи континуального интегрирования (1967), сформулировано квантование частицеподобных решений (солитонов) уравнений теории поля (1975). Развитые Ф. методы применяются в разных областях математики, в квантовой механике, в теории элементарных частиц. Иностранный почётный чл. Американской академии искусств и наук в Бостоне (1979), вице-президент (1983—86) и президент (с 1986) Международного математич. союза. Государственная премия СССР (1971), премия имени Д. Хайнемана Американского физич. общества (1975). Награждён орденом Ленина (1987), орденом Трудового Красного Знамени (1981).

■ Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц, М.—Л., 1963; Ковариантное квантование гравитационного поля, «Успехи физич. наук», 1973, т. 111, в. 3 (соавтор В. Н. Попов); Обратная задача квантовой теории рассеяния. II, в кн.: Современные проблемы математики, т. 3, М., 1974; Гамильтонов подход к теории солитонов, М., 1986 (соавтор Л. А. Тахтаджян); Лекции по квантовой механике для студентов-математиков, Л., 1980 (соавтор О. А. Якубовский).

● Людвиг Дмитриевич Фаддеев. Библиографический указатель литературы, Л., 1984.

ФАДДЕ́ЕВА Вера Николаевна (7(20). 9.1906, Тамбов,— 15.10.1983, Ленинград) — советский математик. Окончила Ленинградский ун-т (1930), с 1942 работала в Ленинградском отделении Математич. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды по вычислительным методам линейной алгебры. Государственная премия СССР (1981).

■ Вычислительные методы линейной алгебры, 2 изд., М.— Л., 1963 (соавтор Д. К. Фаддеев); Параллельные вычисления в линейной алгебре, «Кибернетика», 1977, № 6; 1982, № 3 (соавтор Д. К. Фаддеев).

ФАЛЕ́С Милетский (Θαλῆς) (ок. 625—547 до н. э.) — древнегреческий математик, астроном и философ. Основатель ионийской (милетской) школы натурфилософии. Предполагают, что Ф. был первым греческим геометром. Ему приписывают доказательства нескольких геометрич. теорем (напр., теорема Фалеса об отрезках, лежащих на двух прямых, рассекаемых параллельными прямыми).

● История математики, т. 1, М., 1970.

ФА́ЛТИНГС, Фальтингс Герд (Faltings Gerd) (р. 28.7.1954, Гельзенкирхен) — немецкий математик. Окончил Мюнстерский ун-т (1978). С 1985 работает в Принстонском ун-те (США). Основные труды по диофантовым уравнениям. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1986).

ФАНЬЯ́НО деи Тоски Джулио Карло (Fagnano dei Toschi Giulio Carlo) (6.12.1682, Синигальс,—26.9. 1766, там же) — итальянский математик, чл. Лондонского королевского общества и Берлинской АН. Основные труды по дифференциальным уравнениям и алгебре. Изучал (1718) св-ва лемнискаты.

● История математики, т. 3, М., 1972.

ФАРАДЕ́Й Майкл (Faraday Michael) (22.9.1791, Лондон,—25.8.1867, там же) — английский физик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1830), чл. Лондонского королевского общества (1824). В математике ввёл понятия «векторное поле», «силовые линии».

ФА́РКАШ Юлиус (Farkas Julius) (28. 3.1847, Сегед,—27.12.1930, близ Будапешта) — венгерский математик и физик, в 1887—1915 проф. математич. физики в Коложваре (Клуж-Напока). Математич. труды по неравенствам в математич. анализе и алгебре.

ФАРХВАРСО́Н Андрей Данилович [Farquharson Henry (или Harry)] [ок. 1675, близ Абердина, Шотландия,— 28.11(9.12).1739, Петербург (?)] — русский математик. В 1698 приехал в Москву по приглашению Петра I. В 1701—16 преподавал в Московской школе математич. и навигацких наук, с 1716 в Петербургской морской академии. При участии Ф. изданы «Таблицы логарифмов» (1703), «Таблицы горизонтальные, северныя и южныя широты» (1722), ему принадлежит первое в России издание (1739) «Начал» Евклида, а также пособия по навигации и астрономии.

● Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

ФЁДОРОВ Евграф Степанович [10(22). 12.1853, Оренбург,—21.5.1919, Петроград] — русский кристаллограф, минералог, геолог и геометр, адъюнкт (1901—05) Петербургской АН (акад. с 1919). Основные труды по кристаллографии, где его работы связаны с геометрич. идеями. В труде «Начала учения о фигурах» (1885, М., 1953), в частности, приводятся параллелоэдры (тела Фёдорова) — выпуклые многогранники, к-рые Ф. положил в основу своей теории строения кристаллов. В 1885—90 выполнил серию работ по структуре и симметрии кристаллов, завершившуюся классич. трудом «Симметрия правильных систем фигур» (1890). В нём приведён вывод 230 пространственных групп (т. н. фёдоровских групп). Ф.— почётный чл. Баварской АН (1896), иностранный чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме (1909).

В 1944 в АН СССР учреждена премия имени Е. С. Фёдорова.

■ Симметрия и структура кристаллов. Основные работы, М., 1949; Правильное деление плоскости и пространства, Л., 1979.

● Шафрановский И. И., Е. С. Федоров, М.—Л., 1951.

ФЕ́ЙЕР Липот (Fejér Lipót) (9.2.1880, Печ,—15.10.1959, Будапешт) — венгерский математик, акад. Венгерской АН (1930; чл.-корр. 1908). В 1901 окончил ун-т в Будапеште, с 1911 проф. там же. Основные работы относятся к теории функций: сходимость и суммируемость тригонометрич. рядов, теория интерполирования и др.

■ Gesammelte Arbeiten, Bd 1—2, Bdpst, 1970.

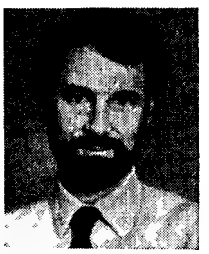
● «Успехи матем. наук», 1960, т. 15, в. 4.

ФЕ́ЙЕРБАХ Карл Вильгельм (Feuerbach Karl Wilhelm) (30.5.1800, Йена,—

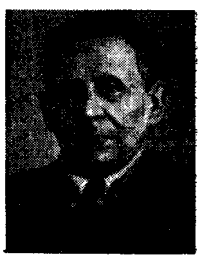
Л. Фейер.

У. Феллер.

П. Ферма


Ч. Л. Фефферман.

Дж. Ч. Филдс.


С. П. Фиников.

12.3.1834, Эрланген) — немецкий математик, преподаватель гимназии в Эрлангене. Основные труды по геометрии. Доказал (1822) теорему об окружности, проведённой через основания высот треугольника (теорема Фейербаха). Одновременно с А. Мёбиусом опубликовал (1827) работу с изложением основных идей барицентрич. исчисления, в к-рой пользовался однородными координатами.

ФЕ́ЛЛЕР Уильям (Вильям) (Feller William) (7.7.1906, Загреб,— 14.1.1970, Нью-Йорк) — американский математик, чл. Национальной АН США. Окончил Загребский ун-т (1925), доктор философии Гёттингенского ун-та (1926), с 1950 проф. Принстонского ун-та (США). Основные труды по теории вероятностей и её приложениям (в генетике, физике, экономике). Получил ряд первостепенных результатов в области предельных теорем теории вероятностей и теории диффузных случайных процессов. Автор получившего мировое признание учебника по теории вероятностей.

■ Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1—2, М., 1984.

● «Revue de l'Institut international de statistique», 1970, v. 38, № 3, p. 435—36.

ФЕРМА́ Пьер (Fermat Pierre) (17.8.1601, Бомон-де-Ломань,— 12.1.1665, Кастр) — французский математик. По профессии юрист, с 1631 был советником парламента в Тулузе. Автор ряда выдающихся работ, большинство из к-рых было издано после смерти Ф. его сыном под назв. «Разные математические сочинения» («Varia opera mathematica», Tolosae, 1679); при жизни Ф. полученные им результаты становились известны учёным благодаря переписке и личному общению.

Ф. является одним из создателей теории чисел, где с его именем связаны две знаменитые теоремы: великая теорема Ферма и малая теорема Ферма. В области геометрии Ф. в более систематич. форме, чем Р. Декарт, развил метод координат, дав уравнения прямой и кривых 2-го порядка и наметив доказательство положения о том, что все кривые 2-го порядка — конич. сечения. В области метода бесконечно малых дал общее правило дифференцирования степенной функции, к-рое распространил на любые рациональные показатели. В подготовке современных методов дифференциального исчисления большое значение имело данное им правило нахождения экстремумов. Доказал в общем виде правило интегрирования степенной функции, полученное в частных случаях уже ранее, также распространил его на случай дробных и отрицательных степеней. В трудах Ф., таким образом, получили систематич. развитие оба основных процесса метода бесконечно малых, однако он, как и его современники, прошёл мимо связи между операциями дифференцирования и интегрирования. Эта связь была чётко установлена несколько позднее И. Ньютоном и Г. Лейбницем. Работы Ф. оказали большое влияние на дальнейшее развитие математики. В области физики с именем Ф. связано установление вариационного принципа геометрич. оптики.

■ Oeuvres, t. 1—5, P., 1891—1922.

● История математики, т. 2, М., 1970; Itard J., Pierre Fermat, Basel, 1950; Mahoney M. S., The mathematical career of Pierre de Fermat (1601—1665), Princeton, 1973.

ФЕРРА́РИ Лудовико (Ferrari Ludovico) (2.2.1522, Болонья,—5.10.1565, там же) — итальянский математик. Ученик Дж. Кардано. Нашёл способ решения алгебраич. уравнений 4-й степени путём введения вспомогательной неизвестной, значение к-рой получается из кубич. уравнения, составляемого по заданному уравнению. Способ был опубликован в 1545 Дж. Кардано.

● История математики, т. 1, М., 1970.

ФЕ́РРО, Даль Ферро Сципион (Dal Ferro Scipione) (1465, Болонья,—1526, близ Болоньи) — итальянский математик, с 1496 проф. Болонского ун-та. С именем Ф. связано открытие правила решения в радикалах одного типа кубич. уравнений.

● История математики, т. 1, М., 1970.

ФЕ́ФФЕРМАН Чарлз Луис (Fefferman Charles Louis) (р. 18.4.1949, Вашингтон) — американский математик. Основные труды по комплексному анализу. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1978).

ФЕЭТЕ́Т — см. *Теэтет*.

ФИБОНА́ЧЧИ — см. *Леонардо* Пизанский.

ФИЛДС Джон Чарлз (Fields John Charles) (14.5.1863, Гамильтон,—9.8.1932, Торонто) — канадский математик, иностранный чл.-корр. АН СССР (1924), чл. Канадского королевского общества (1907), Лондонского королевского общества (1913), чл.-корр. Национальной АН США. Окончил ун-т в Торонто (1884), с 1905 проф. там же. Основные труды по алгебраич. функциям и абелевым интегралам. Оставил материальный фонд для основания международной премии (Золотая медаль и премия Дж. Филдса), к-рую с 1932 Международный математич. союз присуждает раз в 4 года молодым (до 40 лет) учёным за особые достижения в области математики.

ФИНИКОВ Сергей Павлович [3(15).11.1883, Новгород,—27.2.1964, Москва] — советский математик. Окончил Московский ун-т (1906), с 1918 проф. там же. Основные труды по дифференциальной геометрии. Получил ряд фундаментальных результатов в класич. задачах изгибания поверхностей, в метрической и проективной теории конгруэнций.

■ Дифференциальная геометрия, М., 1961; Проективно-дифференциальная геометрия, М.—Л., 1937; Изгибание на главном основании и связанные с ним геометрические задачи, М.—Л., 1937; Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.—Л., 1948; Теория конгруэнций, М.—Л., 1950; Теория пар конгруэнций, Л., 1956.

● «Успехи матем. наук», 1954, т. 9, в. 3; Историко-математические исследования, в. 29, М., 1985.

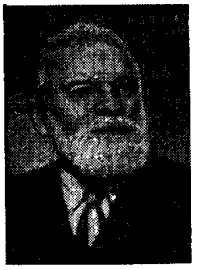
ФИНСЛЕР Пауль (Finsler Paul) (21.4.1894—1970) — швейцарский математик и астроном, проф. в Цюрихе. Основные математич. труды по основаниям математики и по геометрии (финслерова геометрия, 1918).

ФИХТЕНГО́ЛЬЦ Григорий Михайлович [24.5(5.6).1888, Одесса,— 26.6.1959, Ленинград] — советский математик, засл. деятель науки РСФСР (1940). Окончил Новороссийский (Одесса) ун-т (1911). С 1918 работал в Петроградском ун-те (проф. с 1926). Основные труды по теории функций и функциональному анализу. Большой популярностью пользуются его учебники по математич. анализу для вузов. Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1944).

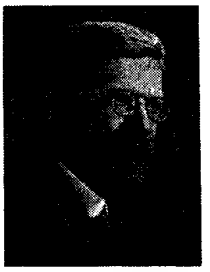
■ Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, М.—Л., 1947 (7 изд., М., 1969), т. 2, М.—Л., 1948 (7 изд., М., 1969), т. 3, М.—Л., 1949 (5 изд., М., 1969); Основы математического анализа, т. 1, М., 1955 (6 изд., М., 1968), т. 2, М., 1956 (5 изд., М., 1968).

● «Успехи матем. наук», 1959, т. 14, в. 5.

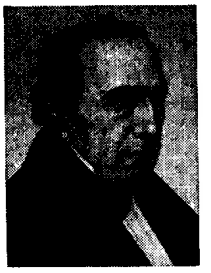
ФИШЕР Роналд Эйлмер (Fisher Ronald Aylmer) (17.2.1890, Лондон,—



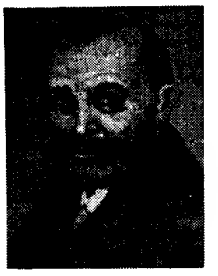
Г. М. Фихтенгольц.



Р. Э. Фишер.

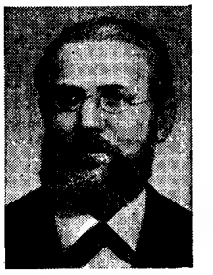


В. Фоссомброни.



Ф. Л. Г. Фреге.

П. Фризи.



Ф. Г. Фробениус.

29.7.1962, Аделаида, Австралия) — английский статистик и генетик, один из основателей математич. статистики, чл. Лондонского королевского общества (1929). Основные труды по статистике и генетич. теории эволюции. Ввёл понятие «достаточной статистики», построил теорию точечных и интервальных статистич. оценок, разработал методику планирования экспериментов и внёс существенный вклад в создание теории статистич. проверки гипотез.

■ Статистические методы для исследователей, М., 1958.

ФИ́ШЕР Эрнст Сигизмунд (Fischer Ernst Sigismund) (12.7. 1875, Вена,— 14.11.1954, Кёльн) — немецкий математик. Был проф. в Кёльне. Основные труды по теории функций и функциональному анализу (теорема Фишера — Рисса).

ФОМА́ БРАДВАРДИ́Н — см. *Брадвардин* Т.

ФОССОМБРО́НИ Витторио (Fossombroni Vittorio) (15.11.1754, Ареццо,— 13.4.1844, Флоренция) — итальянский математик и механик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1802). Основные труды по механике.

ФРЕ́ГЕ Фридрих Людвиг Готлоб (Frege Friedrich Ludwig Gottlob) (8.11.1848, Висмар,—26.7.1925, Бад-Клайнен) — немецкий математик и логик, в 1879—1918 проф. Йенского ун-та. В соч. «Основные законы арифметики» (т. 1—2, 1893—1903) предложил систему формализованной арифметики на основе разработанного им расширенного исчисления предикатов.

ФРЕ́ДГОЛЬМ, Фредхольм Эрик Ивар (Fredholm Erik Ivar) (7.4. 1866, Стокгольм,— 17.8.1927, Мёрбю) — шведский математик. Окончил Стокгольмский ун-т (1893), с 1906 проф. там же. Основные труды по интегральным уравнениям. В 1900 изложил основные свойства и теоремы теории интегральных уравнений, разработал общие методы решения нек-рых их видов (уравнений Фредгольма).

■ Oeuvres complètes, Malmö, 1955.

● Hellsten U., Ivar Fredholm (1866—1927), в кн.: Swedish men of science. 1650—1950, Stockh., 1952.

ФРЕ́ЙДЕНТАЛЬ Ханс (Freudental Hans) (р. 17.9.1905, Луккенвальде) — нидерландский математик, чл. Нидерландской королевской АН. Учился в 1923—30 в Берлинском и Парижском ун-тах. С 1946 проф. в Утрехтском ун-те. Основные труды по алгебраич. топологии, теории топологич. групп и алгебре, истории теории вероятностей и статистики.

■ Математика как педагогическая задача, ч. 1—2, М., 1982—83; Математика в науке и вокруг нас, М., 1977.

ФРЕНЕ́ Фредерик Жан (Frénet Frédéric Jean) [7.2.1816, Перигё (Дордонь),— 12.6.1900] — французский математик, в 1848—68 проф. Лионского ун-та. Основные труды по дифференциальной геометрии. Нашёл (1847, опубл. 1852) формулы (формулы Френе, или формулы Серре — Френе), связывающие направляющие косинусы касательной, нормали и бинормали. Составил (1856) задачник по математич. анализу, к-рым пользовались более 50 лет.

ФРЕ́НКЕЛЬ Адольф Абрахам (Fraenkel Adolf Abraham) (17.2. 1891, Мюнхен,— 15.10.1965, Иерусалим) — израильский математик и логик. Работал в Иерусалимском ун-те. Основные труды по теории множеств и математич. логике. Один из авторов (1921—22) важной системы аксиом теории множеств (системы аксиом Цермело — Френкеля).

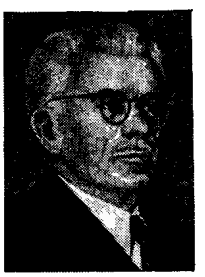
■ Основания теории множеств, М., 1966.

ФРЕШЕ́ Морис Рене (Fréchet Maurice René) (2.9.1878, Малиньи,— 4.6.1973, Париж) — французский математик, чл. Парижской АН (1956), Нидерландской королевской АН (1950), проф. Страсбурского (1919—27) и Парижского (1928—49) ун-тов. Основные труды по топологии и функциональному анализу, где он ввёл современные абстрактные понятия метрич. пространства, компактности, полноты и др. Работал также в области теории вероятностей.

■ Sur quelques points de calcul fonctionnel, P., 1906; Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale, P., 1928.

Э. И. Фредгольм.

М. Р. Фреше.



ФРИ́ДМАН Майкл (Freedman Michael) (р. 21.4.1951, Лос-Анджелес) — американский математик, проф. Калифорнийского ун-та. Окончил Принстонский ун-т (1973). Основные труды по алгебраич. топологии. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1986).

ФРИ́ДРИХС Курт Отто (Friedrichs Kurt Otto) (р. 28.9.1901, Киль) — немецкий математик, чл. Национальной АН США. С 1937 живёт в США. Основные труды по математич. физике и уравнениям с частными производными.

■ Сверхзвуковое течение и ударные волны, М., 1950 (соавтор Р. Курант); Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве, М., 1969.

ФРИ́ЗИ Паоло (Frisi Paolo) (13.4.1728, Милан,— 22.11.1784, там же) — итальянский математик, физик и астроном, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1756), проф. Миланского ун-та. Основные труды по физике, математич. труды по алгебре и аналитич. геометрии.

ФРОБЕ́НИУС Фердинанд Георг (Frobenius Ferdinand Georg) (26.10. 1849, Берлин,— 3.8.1917, Шарлоттенбург) — немецкий математик, чл. Берлинской АН (1893). Окончил — Берлинский ун-т, в 1875—92 проф. Цюрихского политехникума, с 1892 — Берлинского ун-та. Основные труды по алгебре, теории алгебраич. чисел, в частности по теории матриц, теории конечных групп и их представлений матрицами.

■ Теория характеров и представлений групп, Хар., 1937.

● «Vierteljahrsschrift des naturforschenden Gesellschaft in Zürich», 1917, Bd 62, S. 719.

ФУБИ́НИ Гвидо (Fubini Guido) (19.1. 1879, Венеция,—6.6.1943, Нью-Йорк)— итальянский математик, чл. Национальной академии деи Линчеи в Риме. Окончил Высшую нормальную школу в Пизе (1900). В 1910—38 проф. Туринского ун-та. С 1939 жил и работал в США. Основные труды по теории функций и геометрии. Установил (1907) теорему о возможности сведения двойного интеграла к повторному (теорема Фубини); предложил (1904) интерпретацию пространства Римана.

■ Opere scelte, v. 1—3, Roma, 1957—62.

ФУ́КС Иммануэль Лазарус (Fuchs Immanuel Lazarus) (5.5.1833, близ Познани,— 26.4.1902, Берлин) — немецкий математик, иностранный чл.-

И. Л. Фукс.

Ж. Б. Ж. Фурье.

Н. И. Фусс.

П. Н. Фусс.

корр. Петербургской АН (1895), чл. Берлинской АН (1884). Основные труды по теории линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с аналитич. коэффициентами (уравнения класса Фукса).

■ Gesammelte mathematische Werke, Bd 1—3, B., 1904—09.

ФУРЬЕ Жан Батист Жозеф (Fourier Jean Baptiste Joseph) (21.3.1768, Осер,— 16.5.1830, Париж) — французский математик, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1829), чл. Парижской АН (1817). Окончив военную школу в Осере, работал там же преподавателем. В 1796—98 преподавал в Политехнич. школе в Париже. В 1798 вместе с другими учёными принимал участие в Египетской экспедиции Наполеона Бонапарта. В 1802—15 Ф. был префектом департамента Изер; в 1817 переехал в Париж.

Первые труды Ф. относятся к алгебре. Уже в лекциях 1796 он изложил теорему о числе действительных корней алгебраич. уравнения, лежащих между данными границами (опубл. 1820). В 1818 Ф. исследовал вопрос об условиях применимости разработанного И. Ньютоном метода численного решения алгебраич. уравнений. Итогом работ Ф. по численным методам решения уравнений является «Анализ определённых уравнений» («Analyse des équations déterminées», pt. 1, P., 1831).

Основной областью занятий Ф. была математич. физика. В 1807 и 1811 он представил Парижской АН свои первые открытия по теории распространения тепла в твёрдом теле, а в 1822 опубликовал известную работу «Аналитическая теория тепла» («Théorie analytique de la chaleur»), сыгравшую большую роль в последующем развитии математики. В ней Ф. вывел дифференциальное уравнение теплопроводности и далеко развил идеи, в самых общих чертах намеченные ранее Д. Бернулли, разработал для решения уравнения теплопроводности при тех или иных заданных граничных условиях метод разделения переменных (т. н. метод Фурье), к-рый он применял к ряду частных случаев (куб, цилиндр и др.). В основе этого метода лежит представление функций тригонометрич. рядами Фурье, к-рые хотя и рассматривались иногда ранее, но стали действенным и важным орудием математич. физики только у Ф. «Аналитическая теория тепла» явилась отправным пунктом создания теории тригонометрич. рядов и разработки нек-рых общих проблем математич. анализа. Ф. привёл первые примеры разложения в тригонометрич. ряды Ф. функций, к-рые заданы на различных участках различными аналитич. выражениями. Тем самым он внёс важный вклад в решение знаменитого спора о понятии функции, в к-ром участвовали крупнейшие математики 18 в. Его попытка доказать возможность разложения в тригонометрич. ряд Ф. любой произвольной функции была неудачна, но положила начало большому циклу исследований, посвящённых проблеме представимости функций тригонометрич. рядами и интегралами (интеграл Фурье). С этими исследованиями было связано возникновение теории множеств и теории функций действительного переменного.

■ Oeuvres..., t. 1—2, P., 1888—90.

● Grattan-Guinness I., Joseph Fourier (1768—1830). A survey of his life, Camb.—L., 1972.

ФУСС, Фусс Николай Иванович (Fuss Nicolaus) [29.1.1755, Базель,— 23.12.1825 (4.1.1826), Петербург] — русский математик, акад. (1783; адъюнкт с 1776) и непременный секретарь (с 1800) Петербургской АН. В 1773 по приглашению Л. Эйлера переехал в Россию. Большинство его исследований находится в тесной связи с работами Л. Эйлера. Они относятся к различным областям математики (сферич. геометрия и тригонометрия, теория рядов, геометрия кривых, интегрирование дифференциальных уравнений и др.), к механике, астрономии и геодезии; почти все они напечатаны в изданиях Петербургской АН (на латинском и французском языках). Ф. опубликовал много мемуаров Л. Эйлера, в 1783 в АН прочитал «Похвальное слово памяти Л. Эйлера». Ему принадлежит ряд учебных руководств («Начальные основания чистой математики», ч. 1—3, 1810—12, и др.), к-рые сыграли заметную роль в развитии математич. образования в России.

● Лысенко В. И., Николай Иванович Фусс, М., 1975.

ФУСС, Фусс Павел Николаевич (Fuss Paul Heinrich) [21.5(1.6).1798, Петербург,— 10(22).1.1855, там же] — русский математик, акад. (1823; адъюнкт с 1818) и непременный секретарь (с 1826) Петербургской АН. Сын Н. И. Фусса. Опубликовал переписку Л. Эйлера с Х. Гольдбахом и Д. Бернулли, а также нек-рых других математиков 18 в.

● Ожигова Е. П., Математика в Петербургской Академии наук в конце XVIII—первой половине XIX в., Л., 1980.

X

ХАЙЯМ Омар — см. *Омар Хайям.*

ХАН, Ган Ханс (Ганс) (Hahn Hans) (27.11.1879, Вена,— 24.7.1934, там же) — австрийский математик. Окончил Венский ун-т (1902), с 1921 проф. там же. Основные труды по теории функций и функциональному анализу, где известна теорема Хана—Банаха о возможности продолжения линейного функционала.

ХАРДИ Годфри Харолд (Hardy Godfrey Harold) (7.2.1877, Кранли,— 1.12.1947, Кембридж) — английский математик, иностранный чл.-корр. (1924) и иностранный почётный чл. (1934) АН СССР, чл. Лондонского королевского общества (1910), проф. Оксфордского и Кембриджского ун-тов. Основные труды по теории чисел и теории функций. Большинство работ выполнены совместно с Дж. Литлвудом. В теории чисел занимался диофантовыми приближениями и, в частности, вопросами распределения дробных долей, аддитивной теорией чисел, теорией простых чисел и теорией дзета-функции. В теории функций занимался тригонометрич. рядами и исследованием неравенств. Ряд работ посвящён интегральным преобразованиям и интегральным уравнениям. Ему принадлежат также работы по генетике.

■ Collected papers, v. 1—7, Oxf., 1966—79; Неравенства, М., 1948 (соавторы Д. Е. Литтльвуд и Г. Полиа); Курс чистой математики, М., 1949; Расходящиеся ряды, М., 1951; Ряды Фурье, М., 1959 (соавтор В. В. Рогозинский).

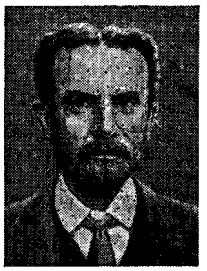
● «J. London Math. Soc.», 1950, v. 25, p. 81—101.

ХАССЕ Хельмут (Гельмут) (Hasse Helmut) (25.8.1898 — 26.2.1979) — немецкий математик. Работал в Галле, Марбурге, Гёттингене и Берлине. Основные труды по алгебре и теории чисел; известен принцип Хассе существования решений алгебраич. уравнений.

■ Лекции по теории чисел, пер. с нем., М., 1953.

ХАУСДОРФ Феликс (Hausdorff Felix) (8.11.1868, Бреслау,— 26.1.1942, Бонн) — немецкий математик. В 1891 окончил Лейпцигский ун-т, с 1895 преподавал там же (с 1902 проф.), позже проф. ун-та в Грайфсвальде, с 1921 — в Бонне. Основные труды по теории множеств, топологии, функциональному анализу. В книге «Основы теории множеств» (1914) Х. впервые дал определение и осуществил систематич. исследование важного класса топологич. пространств (хаусдорфовых пространств), став таким

Г. Х. Харди.



О. Хевисайд.

Л. Хёрмандер.

Э. Хилле.

Л. Хименес.

Х. Хопф.

образом основателем современной общей топологии. В 1916 одновременно с П. С. Александровым и независимо от него решил проблему мощности борелевских множеств. Х. принадлежат также понятия меры множества, топологич. предела, многих различных теорем теории множеств, общей топологии, математич. анализа, теории групп Ли. В 1942, узнав о предстоящей отправке его и его семьи в гитлеровский концлагерь, покончил жизнь самоубийством.

■ Nachgelassene Schriften, Bd 1—2, Stuttg., 1969; Теория множеств, М.—Л., 1937.

ХЕ́ВИСАЙД, Хэвисайд Оливер (Heaviside Oliver) (18.5.1850, Лондон,— 3.2.1925, Торки) — английский физик и инженер, чл. Лондонского королевского общества (1891). Разработал (1892) метод символического (операционного) исчисления, позволяющий достаточно просто решать многие сложные математич. задачи механики, электротехники, автоматики и т. д. Независимо от Дж. Гиббса и одновременно с ним объединил векторные представления У. Гамильтона и Г. Грассмана в векторное исчисление в его современном виде. Ввёл (1892) термин «орт» и назв. «набла» для оператора Гамильтона ∇; предложил (1891) обозначать векторы жирными буквами.

● Историко-математические исследования, в. 28, М., 1985.

ХЕ́ЛЬМЕРТ Фридрих Роберт (Helmert Friedrich Robert) (31.7.1843, Фрайберг,— 15.6.1917, Потсдам) — немецкий геодезист и математик, с 1887 проф. Берлинского ун-та. Математич. труды по теории ошибок; рассмотрел (1876) распределение хи-квадрат.

ХЕ́НРИЧИ Олаус Магнус Фридрих Эрдман (Henrici Olaus Magnus Friedrich Erdmann) [9.3.1840, Мельдорф,— 1918 (?)] — немецкий математик, чл. Лондонского королевского об-ва (1874). Ввёл (1903) обозначение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ для скалярного произведения векторов.

ХЁРМАНДЕР Ларс (Hörmander Lars) (р. 24.1.1935, Мьёльбю, Швеция) — шведский математик, чл. Шведской королевской АН, Национальной академии США, Американской академии искусств и наук в Бостоне. Проф. Стокгольмского, Станфордского (США) и Лундского ун-тов. Основные труды по общей теории дифференциальных операторов и уравнений с частными производными. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1962).

■ К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, М., 1959; Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, М., 1962; Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965; Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, М., 1968; Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 1—2, М., 1986.

ХИЛЛ Микая Джон Мюллер (Hill Micaiah John Muller) (22.2.1856—11.1.1929) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1894). Окончил Лондонский ун-т. С 1880 проф. Бирмингемского, с 1884 — Лондонского ун-тов. Основные труды по теории дифференциальных уравнений. Издал «Начала» Евклида на английском языке.

ХИ́ЛЛЕ Эйнар (Hille Einar) (28.6.1894, Нью-Йорк,— 12.2.1980) — американский математик, чл. Национальной АН США (1953). Окончил Стокгольмский ун-т (1915), преподавал там же, с 1921 — в Гарвардском, с 1922 — в Принстонском ун-тах. В 1933—62 проф. Йельского ун-та. Основные труды по функциональному анализу.

■ Функциональный анализ и полугруппы, 2 изд., М., 1962 (соавтор Р. Филлипс).

ХИМЕ́НЕС Леонардо (Ximénes Leonardo) (27.12.1716—3.5.1786, Флоренция) — итальянский математик и астроном, иностранный почётный чл. Петербургской АН (1764).

ХИ́НЧИН Александр Яковлевич [7(19).7.1894, Кондрово, ныне Калужской обл.,— 18.11.1959, Москва] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1939). Окончил Московский ун-т (1916), с 1922 проф. там же. Основные труды по теории функций действительного переменного, теории вероятностей и теории чисел. Перенёс методы метрич. теории функций в теорию чисел и теорию вероятностей. Является одним из создателей советской школы теории вероятностей (им получены важные результаты в области предельных теорем, открыт закон повторного логарифма, дано определение стационарного процесса и заложены основы теории таких процессов). Методы и результаты теории вероятностей Х. широко использовал в качестве математич. аппарата статистич. физики, им разработаны математич. методы теории массового обслуживания. Государственная премия СССР (1941). Награждён орденом Ленина (1953), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1944, 1945), орденом «Знак Почёта» (1940).

А. Я. Хинчин.

Х. Хиронака.

■ Краткий курс математического анализа, 3 изд., М., 1957; Восемь лекций по математическому анализу, 4 изд., М., 1977; Цепные дроби, 4 изд., М., 1978; Элементарное введение в теорию вероятностей, 9 изд., М., 1982 (соавтор Б. В. Гнеденко); Педагогические статьи, М., 1963; Асимптотические законы теории вероятностей, М.—Л., 1936; Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1938; Математические основания статистической механики, М.—Л., 1943; Математические основания квантовой статистики, М.—Л., 1951; Работы по математической теории массового обслуживания, М., 1963.

● «Успехи матем. наук», 1955, т. 10, в. 3; 1960, т. 15, в. 4; «Теория вероятн. и ее примен.», 1960, т. 5, № 1.

ХИРОНА́КА Хейсуке (Hironaka Heisuke) (р. 9.4.1931, Ямагути, Япония) — американский математик, чл. Парижской АН (1981). Проф. Гарвардского ун-та. Основные труды по алгебраич. геометрии. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1970).

ХОЛЛ Маршалл (Hall Marshall) (р. 17.9.1910) — американский математик, проф. Калифорнийского ун-та. Основные труды по теории групп и комбинаторному анализу.

■ Теория групп, М., 1962; Комбинаторика, М., 1970.

ХОЛЛ Филип (Hall Philip) (11.4.1904, Лондон,— 1982) — английский математик, чл. Лондонского королевского общества (1942), с 1953 проф. Кембриджского ун-та. Основные труды по теории групп. В комбинаторике сформулировал и доказал (1935) теорему о системе различных представителей (теорема Холла).

ХОПФ Хейнц (Hopf Heinz) (19.11.1894, Бреслау, ныне Вроцлав,— 3.6.1971, Золинген) — швейцарский математик, проф. Цюрихской высшей политехнич. школы (1931—65). Основные труды по топологии и топологич. вопросам дифференциальной геометрии. Международная премия имени Н. И. Лобачевского АН СССР (1969).

■ Topologie, Bd 1, B., 1935 (соавтор P. Alexandroff); Selecta, B.—[u. a.], 1964.

● «Успехи матем. наук», 1977, т. 32, в. 3, с. 203—08.

ХОПФ Эберхард (Hopf Eberhard) (17.4.1902, Зальцбург,—1983) — немецкий математик, проф. Лейпцигского ун-та (1936—47), с 1947 — ун-та штата Индиана (США). Основные труды по теории динамич. систем и дифференциальным уравнениям с частными производными. Х. принадлежит монография «Эргодическая теория» (рус. пер. см. «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 1), посвящённая спектральной теории динамич. систем. Имеются работы в области астрофизики.

■ Статистика геодезических линий на многообразиях отрицательной кривизны, «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, в. 2.

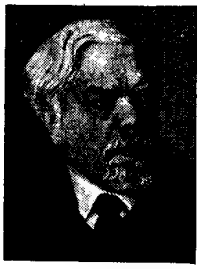
ХОРЕЗМИ́, аль-Хорезми Абу Абдалла Мухаммед бен Муса аль-Маджуси (787, Хива,— ок. 850) — среднеазиатский математик и астроном. Автор арифметич. трактата, к-рый в 12 в. был переведён с арабского на латинский язык и по к-рому в Европе познакомились с индийской позиционной системой счисления. В алгебраич. труде Х. [«Краткая книга восполнения и противопоставления» (Китаб мухтасар аль-джебр ва-л-мукабала)] алгебра впервые рассматривается как самостоятельная отрасль математики, вводятся правила действий с алгебраич. количествами и систематически решаются уравнения 1-й и 2-й степеней. Этот трактат долгое время служил основным руководством по алгебре в странах Европы. Название операции «аль-джебр», состоящей в перенесении членов из одной стороны уравнения в другую с изменением знака, впоследствии стало названием раздела математики (алгебра). Имя аль-Хорезми (латинизированное Algorithmi) вошло в математику вначале как обозначение арифметики с помощью индийских чисел, а затем как общее название (алгоритм) всякой системы вычислений, выполняемых по строго определённым правилам. Х. принадлежат также сочинения по астрономии. Им были написаны работы об астролябии, о солнечных часах, астрономич. таблицы. С 1878 известна географич. рукопись Х.— «Изображение земли».

■ Математические трактаты, Таш., 1964.

● История математики, т. 1, М., 1970; Сираждинов С. Х., Матвиевская Г. П., Ал-Хорезми — выдающийся математик и астроном средневековья, М., 1983; Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А., Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды, кн. 2, М., 1983, с. 40—45.

ХРИСТИАНО́ВИЧ Сергей Алексеевич [р. 27.10(9.11).1908, Петербург] — советский учёный в области механики, акад. АН СССР (1943; чл.-корр. 1939), Герой Социалистич. Труда (1969). Чл. КПСС с 1949. Окончил Ленинградский ун-т (1930). Работал в Государственном гидрологич. ин-те, проф. Московского физико-технич. ин-та (с 1947). В 1937—53 в Центральном аэрогидродинамич. ин-те им. Н. Е. Жуковского, в 1956—57 в Ин-те химич. физики АН СССР. В 1957—61 зам. председателя Сибирского отделения АН СССР, в 1957—65 директор Ин-та теоретич. и прикладной механики Сибирского отделения АН СССР. В 1965—72 во Всесоюзном научно-исследоват. ин-те физико-технич. и радиотехнич. измерений, с 1972 в Ин-те проблем механики АН СССР. Основные труды по механике жидкости и газа и механике деформируемого твёрдого тела. Разработал метод решения задач о распространении и отражении длинных волн (1938). Решил плоскую задачу об определении напряжений в пластич. средах по силам, заданным на замкнутом контуре (1936). Внёс вклад в теорию фильтрации жидкости и газа и в теорию движения газожидкостных смесей (1941). Исследовал обтекание газом профиля при наличии подъёмной силы при больших дозвуковых скоростях (1940). Предложил основы теории расчёта газовых эжекторов (1944). Исследовал течение газа с трансзвуковой и сверхзвуковой скоростями (1941—47). Разработал теорию гидравлич. разрыва пласта, внёс вклад в теорию трещин (1955—57). Исследовал вопросы распространения и отражения слабых ударных волн (1955—65). Предложил теорию пластич. деформирования упрочняющих материалов (1972). Выполнил работы в области парогазовых турбин и методов внутрицикловой очистки мазутов от серы на тепловых электростанциях (1960—76). Государственные премии СССР (1942, 1946, 1952). Награждён 6 орденами Ленина (1943, 1944, 1953, 1958, 1967, 1969), орденом Октябрьской Революции (1978), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1956, 1975), 2 орденами Отечественной войны 1-й степени (1945, 1945).

С. А. Христианович.



С. А. Чаплыгин.

ХУА́ ЛОГЭ́Н (12.11.1910, провинция Цзянсу, Китай,— 12.6.1985, Токио) — китайский математик, чл. Китайской АН. Изучал математику самостоятельно, учился в ун-те Циньхуа. В 1946 работал в СССР по приглашению АН СССР и в Принстонском ин-те перспективных исследований (США), с 1948 — в Иллинойсском ун-те. В 1950 Х. Л. возвратился в Китай, был проф. ун-та Цинхуа, директором Научно-исследовательского ин-та математики АН КНР и ин-та прикладной математики АН КНР, зам. президента АН КНР, председателем Китайского математич. об-ва. Основные труды по аналитич. теории чисел, геометрии матриц, комплексному и гармонич. анализу. Инициатор прикладных применений математики и создания ЭВМ.

■ Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях, М., 1959; Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел, М., 1964.

Ц

ЦЕ́ЙЛЕН ван — см. *Лудольф* ван Цейлен.

ЦЕ́РМЕЛО Эрнст (Zermelo Ernst) (27.7.1871, Берлин,— 21.5.1953, Фрайбург) — немецкий математик. В 1894 окончил Берлинский ун-т, с 1926 проф. ун-та в Фрайбурге. Основные труды по теории множеств, в к-рой он ввёл общую аксиоматику (включающую известную аксиому Цермело, или аксиому свободного выбора) и с помощью названной аксиомы доказал, что всякое множество может быть вполне упорядочено (теорема Цермело). Аксиома свободного выбора играет существенную роль не только в теории множеств, но и во всём классич. анализе, и вопрос о её допустимости вызывал и вызывает оживлённые споры, стимулирующие развитие оснований математики и математич. логики. Занимался также вариационным исчислением и вопросами приложения теории вероятностей к статистич. физике.

● Медведев Ф. Д., Ранняя история аксиомы выбора, М., 1982.

ЦЗУ ЧУНЧЖИ́ (ок. 430 — ок. 501) — китайский математик и астроном. Показал, что число π содержится между 3,1415926 и 3,1415927, предложил приближение $\pi \approx 355/113$.

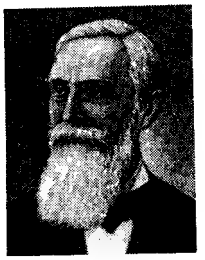
ЦИНЬ ЦЗЮША́О (13 в.) — китайский математик. Соч. «Девять книг по математике» (1247) содержит сведения по теории чисел и решению алгебраич. уравнений высших степеней.

● Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961.

Ч

ЧАПЛЫ́ГИН Сергей Алексеевич [24.3(5.4).1869, Раненбург, ныне г. Чаплыгин Липецкой обл.,— 8.10.1942, Новосибирск] — советский учёный в области теоретич. механики, один из основоположников современной гидроаэродинамики, акад. АН СССР (1929; чл.-корр. 1924), Герой Социалистич. Труда (1941). Окончил Московский ун-т (1890). Совместно с Н. Е. Жуковским участвовал в организации Центрального аэродинамич. ин-та (1918, с 1921 научный руководитель). Основ-

Н. Г. Чеботарёв.



П. Л. Чебышев.

ные труды по теоретич. механике, гидро-, аэро- и газовой динамике. В математике предложил метод приближённого решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка (м е т о д Ч а п л ы г и н а). Награждён 2 орденами Ленина (1933, 1941), орденом Трудового Красного Знамени (1932).

В 1942 в АН СССР учреждена премия имени С. А. Чаплыгина.

■ Собр. соч., т. 1—4, М.—Л., 1948—50.

ЧЕБОТАРЁВ Николай Григорьевич [3(15).6.1894, Каменец-Подольский, ныне Хмельницкой обл.,— 2.7.1947, Москва] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1929). Окончил Киевский ун-т (1916), с 1928 проф. Казанского ун-та. Основные труды по алгебре, получил (1924) наиболее глубокое обобщение теоремы Дирихле о простых числах в арифметич. прогрессии, дал (1930) первую общую теорему теории резольвент и др. Государственная премия СССР (1948). Награждён орденом Ленина (1944), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1944, 1945).

■ Собр. соч., т. 1—3, М.—Л., 1949—50; Теория Галуа, М.—Л., 1936; Основы теории Галуа, ч. 1—2, М.—Л., 1934—37; Теория групп Ли, М.—Л., 1940; Теория алгебраических функций, М.—Л., 1948; Введение в теорию алгебр, М.—Л., 1949. ● «Успехи матем. наук», 1947, т. 2, в. 6.

ЧЕБЫШЁВ (произносится Чебышёв) Пафнутий Львович [4(16).5.1821, с. Окатово, ныне Калужской обл.,— 26.11(8.12). 1894, Петербург] — русский математик и механик, акад. Петербургской АН (1856; адъюнкт с 1853). Родился в дворянской семье. Первоначальное образование получил дома, шестнадцати лет поступил в Московский ун-т. В 1841 за соч. «Вычисление корней уравнений» (тема была предложена факультетом) награждён серебряной медалью. В том же году окончил Московский ун-т. В 1846 при Московском ун-те защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» (М., 1845). В 1847 переехал в Петербург, где в том же году при ун-те защитил диссертацию «Об интегрировании с помощью логарифмов» на право чтения лекций, был утверждён в звании доцента и начал чтение лекций по алгебре и теории чисел. В 1849 защитил при Петербургском ун-те докторскую диссертацию «Теория сравнений» (СПБ, 1849), удостоенную в том же году Демидовской премии Петербургской АН, и в 1850 стал проф. Петербургского ун-та. Длительное время принимал живое участие в работах артиллерийского отделения военно-учёного комитета и учёного комитета Министерства народного просвещения. В 1882 Ч. прекратил чтение лекций в Петербургском ун-те и, выйдя в отставку, целиком отдался научной работе, продолжавшейся до последних дней его жизни. Ч. является основателем Петербургской математич. школы, наиболее крупными представителями к-рой были А. Н. Коркин, Е. И. Золотарёв, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Д. А. Граве.

Характерными чертами творчества Ч. являются разнообразие областей исследования, умение находить посредством элементарных средств большие научные результаты и неизменный интерес к вопросам практики. Исследования Ч. относятся к теории приближения функций многочленами, интегральному исчислению, теории чисел, теории вероятностей, теории механизмов и многим другим областям математики и смежных областей знания. В каждой из упомянутых областей Ч. сумел создать ряд основных, общих методов и выдвинул идеи, наметившие ведущие направления в дальнейшем развитии этих областей. Стремление увязать проблемы математики с принципиальными вопросами естествознания и техники в значительной мере определяют его своеобразие как учёного. Многие его открытия навеяны прикладными интересами. Это неоднократно подчёркивал и сам Ч., говоря, что в создании новых методов исследования «науки находят себе верного руководителя в практике» и что «сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования...» (Полн. собр. соч., т. 5, 1951, с. 150).

К теории вероятностей Ч. обращался несколько раз — в начале, середине и конце научного пути («Опыт элементарного анализа теории вероятностей», 1845; «Элементарное доказательство одного общего положения теории вероятностей», 1846; «О средних величинах», 1867; «О двух теоремах относительно вероятностей», 1887). В идейном отношении ему принадлежит заслуга систематич. введения в рассмотрение случайных величин и создание нового приёма доказательства предельных теорем теории вероятностей — т. н. метода моментов. Им был доказан закон больших чисел в весьма общей форме; при этом его доказательство поражает своей простотой и элементарностью. Исследование условий сходимости функций распределения сумм независимых случайных величин к нормальному закону Ч. не довёл до полного завершения. Однако посредством нек-рого дополнения методов Ч. это удалось сделать А. А. Маркову. Без строгих выводов Ч. наметил также возможность уточнений этой предельной теоремы в форме асимптотич. разложений функции распределения суммы независимых слагаемых по степеням $n^{-1/2}$, где n — число слагаемых. Работы Ч. по теории вероятностей составляют важный этап в её развитии; кроме того, они явились базой, на к-рой выросла русская школа теории вероятностей, вначале состоявшая из непосредственных учеников Ч.

В теории чисел Ч., впервые после Евклида, существенно продвинул изучение вопроса о распределении простых чисел («Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины», 1849; «О простых числах», 1852). Ч. впервые доказал, что функция $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x, удовлетворяет неравенствам

$$a\frac{x}{\ln x}<\pi(x)<b\frac{x}{\ln x},$$

где $a<1$ и $b>1$ — вычисленные Ч. постоянные ($a=0{,}921$, $b=1{,}06$). Исследование расположения простых чисел в ряду всех целых привело Ч. также к исследованию квадратичных форм с положительными определителями. Позднее теория квадратичных форм была предметом исследований ряда его учеников — А. Н. Коркина, Е. И. Золотарёва, А. А. Маркова, Г. Ф. Вороного. Работа Ч. «Об одном арифметическом вопросе» (1866), посвящённая приближению чисел рациональными числами, сыграла важную роль в развитии теории диофантовых приближений. Ч. явился создателем новых направлений исследований в теории чисел и новых методов исследований, а также организатором русской школы теории чисел.

Наиболее многочисленны работы Ч. в области математич. анализа; ему была, в частности, посвящена диссертация на право чтения лекций (1847), в к-рой Ч. исследовал интегрируемость нек-рых иррациональных выражений в алгебраич. функциях и логарифмах. Интегрированию алгебраич. функций Ч. посвятил также ряд других своих мемуаров. В одном из них («Об интегрировании иррациональных дифференциалов», 1853) была в качестве следствия общих результатов получена известная его теорема об условиях интегрируемости в элементарных функциях дифференциального бинома. Вторым большим направлением исследований Ч. по математич. анализу явились его работы по построению общей теории ортогональных многочленов. Толчком к созданию этой теории послужило параболич. интерполирование по способу наименьших квадратов. К этому же кругу идей примыкают исследования Ч. по проблеме моментов и по квадратурным формулам. Имея в виду сокращение вычислений, Ч. предложил рассматривать квадратурные формулы с равными коэффициентами («О квадратурах», 1873). Исследования по квадратурным

формулам и по теории интерполирования были тесно связаны с задачами, к-рые ставились перед Ч. в артиллерийском комитете.

Ч. является основоположником т. н. конструктивной теории функций, основным составляющим элементом к-рой является теория наилучшего приближения функций. Простейшая постановка задачи Ч. такова («Теория механизмов, известных под названием параллелограммов», 1854): дана непрерывная функция $f(x)$; среди всех многочленов степени n найти такой $P(x)$, чтобы в данном промежутке $[a, b]$ выражение $\max |f(x)-P(x)|$ было возможно меньшим. Помимо указанного равномерного наилучшего приближения, Ч. рассматривал также квадратич. приближение, а помимо приближений алгебраич. многочленами — приближение посредством тригонометрич. полиномов и с помощью рациональных функций.

Теория машин и механизмов была одной из тех дисциплин, к-рыми Ч. систематически интересовался всю жизнь. Особенно многочисленны его работы, посвящённые синтезу шарнирных механизмов, в частности параллелограмму Уатта («О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта», 1861; «О параллелограммах», 1869; «О параллелограммах, состоящих из трёх каких-либо элементов», 1879, и др.). Большое внимание он уделял конструированию и изготовлению конкретных механизмов. Интересны, в частности, его механизмы с остановками, а также т. н. парадоксальный механизм, в к-ром передаточное отношение между ведущим и ведомым валами меняется в зависимости от направления движения. Следует отметить также его стопоходящую машину, имитирующую движение животного при ходьбе, а также автоматич. арифмометр; изучение параллелограмма Уатта и стремление усовершенствовать его натолкнуло Ч. на постановку задачи о наилучшем приближении функций. Оттолкнувшись же от этой прикладной задачи, он заложил основы большой математич. теории, значение к-рой оказалось несравненно более широким, чем решение первичной практич. задачи. К прикладным работам Ч. относится также оригинальное исследование «О построении географических карт» (1856), где он поставил задачу найти такую картографич. проекцию данной страны, сохраняющую подобие в малых частях, чтобы наибольшее различие масштабов в разных точках карты было наименьшим. Ч. высказал без доказательства мнение, что для этого отображение должно сохранять на границе постоянство масштаба, что впоследствии и было доказано Д. А. Граве.

Ч. оставил глубокий и яркий след в развитии математики, дал толчок созданию и развитию многих её разделов как собственными исследованиями, так и постановкой соответствующих вопросов перед молодыми учёными. Так, по его совету А. М. Ляпунов начал цикл исследований по теории фигур равновесия вращающейся жидкости, частицы к-рой притягиваются по закону всемирного тяготения. Труды Ч. ещё при его жизни нашли широкое признание как в России, так и за границей; он был избран иностранным чл. Берлинской АН (1871), Болонской АН (1873), Парижской АН (1874; чл.-корр. 1860), Лондонского королевского общества (1877), Шведской королевской АН (1893) и почётным членом многих других русских и иностранных научных обществ, академий и ун-тов.

В 1944 в АН СССР учреждена премия имени П. Л. Чебышева.

■ Сочинения, т. 1—2, СПБ, 1899—1907; Полное собрание сочинений, т. 1—5, М.—Л., 1944—51 (в т. 5 имеются биографические материалы); Избр. труды, М., 1955.

● Ляпунов А. М., Пафнутий Львович Чебышев, в кн.: Чебышев П. Л., Избранные математические труды, М.—Л., 1946; Стеклов В. А., Теория и практика в исследованиях Чебышева. Речь ..., П., 1921; Крылов А. Н., Пафнутий Львович Чебышев. Биографический очерк, М.—Л., 1944; Научное наследие П. Л. Чебышева, в. 1—2, М.—Л., 1945; Делоне Б. Н., Петербургская школа теории чисел, М.—Л., 1947; Прудников В. Е., Пафнутий Львович Чебышев. 1821—1894, Л., 1976.

Э. Чезаро.

А. Чёрч.

Н. Г. Четаев.

Э. Чех.

ЧЕВА Джованни (Ceva Giovanni) (3.3.1648, Милан,— 13.12.1734, Мантуя) — итальянский инженер и математик. Окончил Пизанский ун-т. Основные работы по геометрии и механике. Доказал (1678) теорему о соотношении отрезков нек-рых прямых, пересекающих треугольник (теорема Чевы). Построил учение о секущих, к-рое положило начало синтетич. геометрии; оно изложено в соч. «О взаимно пересекающихся прямых» («De lineis rectis se inuicem secantibus», Mediolani, 1678).

ЧЕЗА́РО Эрнесто (Cesaro Ernesto) (12.3.1859, Неаполь,— 12.9.1906, Торре-Аннунциата, близ Неаполя) — итальянский математик, проф. Неапольского ун-та. Основные труды по математич. анализу и геометрии. Разработал методы суммирования расходящихся рядов (1880). Создал «натуральную геометрию», в к-рой кривые и поверхности определяются через величины, не изменяющиеся при преобразованиях координат.

■ Opere scelte, Roma, 1964; Introduzione alla teoria matematica della Clasticita. Torino, 1895; Lezioni di geometria intrinseca, Napoli, 1896; Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ч. 1, [2 изд.], Л.—М., 1936, ч. 2, Од., 1914.

ЧЕРНОУ́СЬКО Ф. Л.— см. стр. 772.

ЧЁРЧ Алонзо (Church Alonzo) (р. 14.6.1903, Вашингтон) — американский логик и математик, проф. Принстонского и Калифорнийского ун-тов. Внёс большой вклад в развитие математич. логики и теории автоматов; известен тезис Чёрча.

■ Введение в математическую логику, М., 1960.

ЧЕТА́ЕВ Николай Гурьевич [23.11 (6.12).1902, с. Карадули, ныне Лаишевского р-на Татарской АССР,— 17.10.1959, Москва] — советский математик и механик, чл.-корр. АН СССР (1943). Окончил Казанский ун-т (1924), в 1930—40 проф. там же, создал школу специалистов по теории устойчивости движения, с 1940 проф. Московского ун-та. С 1940 работал в Ин-те механики АН СССР. Установил общую теорему о неустойчивости движения, обратил теорему Лагранжа об устойчивости равновесия, предложил методы решения задач об устойчивости неустановившихся движений, нашёл достаточные условия устойчивости вращательных движений снаряда. Ряд работ посвящён проблемам аналитич. динамики. Распространил принцип Гаусса на случай неголономной связи. Ленинская премия (1960). Награждён орденом Ленина (1953), орденом Трудового Красного Знамени (1945).

■ Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, М., 1968.

ЧЕХ Эдуард (Čech Eduard) (29.6.1893, Страчов,— 15.3.1960, Прага) — чешский математик, чл. Чехословацкой АН. Основные труды по дифференциальной геометрии и топологии. Внёс существенный вклад в теорию бикомпактных пространств и общую теорию гомологич. инвариантов. Государственные премии ЧССР (1951, 1954).

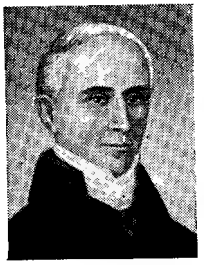
● «Чехословацкий матем. журнал», 1953, т. 3, № 2.

ЧЖУ ШИЦЗЭ́ (13 в.) — китайский математик. В трактате «Яшмовое зеркало четырёх элементов», описав метод, аналогичный методу Горнера, и приёмы составления уравнений, разработал систему записи уравнений высших степеней с четырьмя неизвестными и решил ряд приводящихся к ним задач.

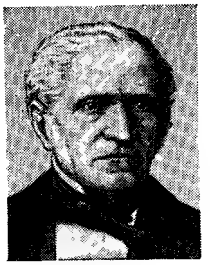
● Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961.

ЧЖЭНЬ ШЭНШЭ́НЬ (Черн) (Chern Shiing-shen) (р. 26.10.1911) — американский математик, чл. Национальной

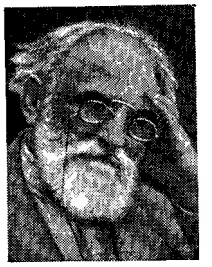
Чжэнь Шэншэнь.



Д. С. Чижов.



М. Шаль.



С. О. Шатуновский.

Л. Шварц.

К. Э. Шеннон.

АН США (1961). Окончил ун-т в Тяньцзине (1930). В 1937—43 проф. ун-та Цинхуа в Пекине, в 1946—48 директор ин-та математики Китайской академии (Нанкин). С 1949 проф. Чикагского, с 1960 — Калифорнийского (Беркли) ун-тов. Основные труды по алгебраич. и дифференциальной топологии и геометрии в целом.

■ Комплексные многообразия, М., 1961.

ЧИЖО́В Дмитрий Семёнович [не позднее 10(21).4.1785—26.5(7.6).1852, Петербург] — русский математик и механик, чл.-корр. (1826) и почётный чл. (1841) Петербургской АН, чл. Российской академии (1828). Читал курсы высшей математики и механики в Петербургском ун-те и в Ин-те корпуса инженеров путей сообщения. Основные труды по механике.

● История отечественной математики, т. 2, К., 1967.

ШАЛЬ Мишель (Chasles Michel) (15.11.1793, Эпернон,— 18.12.1880, Париж)— французский математик и историк математики, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1861), чл. Парижской АН (1851; чл.-корр. 1839), проф. Политехнич. школы в Париже (с 1841) и Парижского ун-та (с 1846). Основные труды по геометрии, где его исследования способствовали разработке проективной геометрии, по истории математики «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов», 1837, рус. пер. 1883).

● История математики в XIX веке. Геометрия. Теория аналитических функций, М., 1981.

ШАТУНО́ВСКИЙ Самуил Осипович [13(25).3.1859, с. Великая Знаменка, ныне Запорожской обл. — 27.3.1929, Одесса] — русский математик, проф. Новороссийского (Одесса) ун-та. Основные труды по алгебре, аксиоматике линейной величины и площади, обоснованию понятия объёма многогранника без использования понятия предела, построению алгебры и, в частности, теории Галуа как учения о сравнениях по функциональным модулям без использования закона исключённого третьего в применении к бесконечным совокупностям.

● «Успехи матем. наук», 1940, в. 7, с. 316—321; Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968.

ШАФАРЕ́ВИЧ Игорь Ростиславович (р. 3.6.1923, Житомир)—советский математик, чл.-корр. АН СССР (1958). В 1940 окончил Московский ун-т, в 1944—75 преподавал там же (с 1953 проф.). С 1943 работает в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР (с 1960 зав. отделом). Президент Московского математич. общества (1970—74).Основные труды по алгебре и теории алгебраич. чисел. Ш.— чл. Германской академии естествоиспытателей «Леопольдина» (1960), Лондонского математич. общества (1974), иностранный чл. Национальной АН США (1974), Американской академии искусств и наук в Бостоне (1974), почётный доктор Парижского ун-та (1978), иностранный чл. Лондонского королевского общества (1981). Ленинская премия (1959), премия Хейнемана Гёттингенской АН (1973).

■ Теория чисел, 3 изд., М., 1985 (соавтор З. И. Боревич); Основы алгебраической геометрии, М., 1972; Геометрии и группы, М., 1983 (соавтор В. В. Никулин); Основные понятия алгебры, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 11, Алгебра-1, М., 1986.

● «Успехи матем. наук», 1984, т. 39, в. 1.

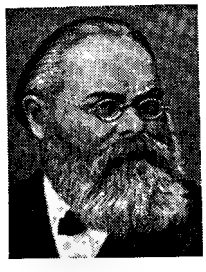
ШВАРЦ Карл Герман Амандус (Schwarz Karl Hermann Amandus) (25.1.1843, Хермсдорф,— 30.11.1921, Берлин) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1897), чл. Берлинской АН (1893). Основные работы по геометрии (изучение минимальных поверхностей) и теории конформных отображений. Предложил решение проблемы Дирихле для произвольных контуров.

■ Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd 1—2, B., 1890.

● «Z. angew. Math. und Mech.», 1921, Bd 1, S. 494.

ШВАРЦ Лоран (Schwartz Laurent) (р. 5.3.1915, Париж) — французский математик, чл. Парижской АН (1975; чл.-корр. 1973). Окончил Парижский ун-т, с 1953 проф. там же. Основные труды

И. Р. Шафаревич.



К. Г. А. Шварц.

по топологии, гармонич. и функциональному анализу и математич. физике. Большое значение имеет его теория распределений (теория обобщённых функций). Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1950).

■ Комплексные аналитические многообразия. Эллиптические уравнения с частными производными, пер. с исп., М., 1964; Применение обобщенных функций к изучению элементарных частиц в релятивистской квантовой механике, М., 1964; Математические методы для физических наук, М., 1965; Анализ, т. 1—2, М., 1972; Théorie des distributions, nouv. éd., P., 1978.

ШВЕЙКАРТ Фердинанд Карл (Schweikart Ferdinand Karl) (28.2.1780, Эрбах,— 17.8.1857, Кёнигсберг) — немецкий математик и юрист, с 1820 проф. Кёнигсбергского ун-та. Основные труды по геометрии. Ш. пришёл к выводу, что аксиому Евклида о параллельных нельзя доказать логически и что можно построить геометрию, в к-рой сумма углов треугольника меньше двух прямых.

ШЕВАЛЛЕ́ Клод (Chevalley Claude) (р. 11.2.1909, Йоханнесбург) — французский математик. Окончил Высшую нормальную школу в Париже (1929). В 1939—54 жил в США; с 1939 преподавал в Принстонском, с 1948 — в Колумбийском ун-тах. С 1954 проф. Парижского ун-та. Один из основателей группы Бурбаки. Основные труды по алгебре, топологии и теории чисел.

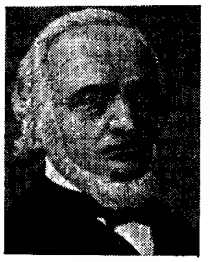
■ Теория групп Ли, т. 1—3, М., 1948—58; Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной, М., 1959.

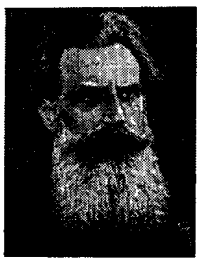
ШЕ́ННОН Клод Элвуд (Shannon Claude Elwood) (р. 30.4.1916, Гейлорд, шт. Мичиган) — американский математик и инженер, один из создателей математич. теории информации, чл. Национальной АН США (1956) и Американской академии искусств и наук в Бостоне. Окончил Мичиганский ун-т (1936), с 1957 проф. Массачусетсского технологич. ин-та. Основные труды по алгебре логики, теории релейно-контактных схем, теории информации, кибернетике (теорема Шеннона).

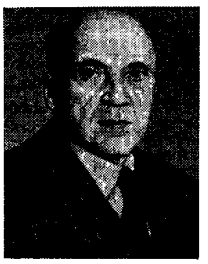
■ Работы по теории информации и кибернетике, пер. с англ., М., 1963.

ШЁНФЛИС Артур Мориц (Schoenflies Arthur Moritz) (17.4.1853, Ландсберг,— 27.5.1928, Франкфурт-на-Майне) — немецкий математик. Работал в Гёттингене, Кёнигсберге, Франкфурте. Основные труды по топологии и геометрии. Независимо от Е. С. Фёдорова

А. И. Ширшов.


Л. Шлефли.


О. Ю. Шмидт.


Э. Шмидт.

Л. Г. Шнирельман.

Ю. И. Шокин.

он методами теории групп решил (1891) задачу классификации всех кристаллических пространственных решёток.

ШЁРФЕР Карл (Scherffer Karl) (3.11. 1716, Гмунден,— 25.7.1783, Вена) — австрийский физик и математик, проф. Венского ун-та. Математич. труды по геометрии, тригонометрич. функциям. Ввёл (1772) современные обозначения $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$.

ШИККАРД Вильгельм (Schickard Wilhelm) (22.4.1592, Херренберг,— 23.10. 1635, Тюбинген) — немецкий математик и астроном. Окончил (1613) ун-т в Тюбингене, с 1631 проф. там же. В 1623 сконструировал первую вычислительную машину, выполнявшую четыре арифметич. действия.

● Гутер Р. С., Полунов Ю. Л., От абака до компьютера, М., 1975.

ШИРШОВ Анатолий Илларионович (8.8.1921, с. Колывань, ныне Новосибирской обл.,— 28.2.1981, Новосибирск) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1964). Чл. КПСС с 1951. Окончил Ворошиловградский педагогич. ин-т (1949). В 1950—60 работал в Московском ун-те, с 1960 в Ин-те математики Сибирского отделения АН СССР, чл. редколлегии «Математической энциклопедии». Основные труды по алгебре, в частности по общей теории неассоциативных алгебр, альтернативных колец, алгебр Ли. Награждён 3 орденами Трудового Красного Знамени (1967, 1971, 1975).

■ Подалгебры свободных лиевых алгебр, «Матем. сб.», 1953, т. 33, в. 2; Некоторые вопросы теории колец, близких к ассоциативным, «Успехи матем. наук», 1958, т. 13, в. 6; Кольца и алгебры. Избр. труды, М., 1984.

● История отечественной математики, т. 3, К., 1968; «Успехи матем. наук», 1981, т. 36, в. 5.

ШЛЁМИЛЬХ Оскар Ксавер (Schlömilch Oskar Xawer) (13.4.1823, Веймар,— 7.2.1901) — немецкий математик, чл. Саксонской АН. Работал в Йене, Дрездене. Основные труды по математич. анализу, теории функций и геометрии. Ввёл (1857) назв. «бесселевы функции», сделал первую попытку построить теорию бесселевых функций.

ШЛЁФЛИ Людвиг (Schläfli Ludwig) (15.1.1814, Грассвиль,— 20.3.1895, Берн) — швейцарский математик, чл. Гёттингенской АН (1887), Национальной академии деи Линчеи в Риме (1883). Основные труды по теории функций, конформным отображениям и геометрии. Основоположник многомерной геометрии. Предпринял систематич. исследование сферич. функций (1881).

■ Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd 1—3, Basel, 1950—56.

● Burckhardt J. J., Ludwig Schläfli, Basel, 1948.

ШМИДТ Отто Юльевич [18(30).9.1891, Могилёв,— 7.9.1956, Москва] — советский математик, астроном, геофизик, государственный и общественный деятель, акад. (1935; чл.-корр. 1933) и вице-президент (1939—42) АН СССР и акад. АН УССР (1934), Герой Советского Союза (1937). Чл. КПСС с 1918. Окончил Киевский ун-т (1913), с 1916 приват-доцент там же. После Октябрьской революции 1917 чл. коллегии ряда наркоматов (Наркомпрода в 1918—20, Наркомфина в 1921—22 и др.) и один из организаторов высшего образования, науки (работал в Наркомпросе, Государственном учёном совете при СНК СССР, Коммунистич. академии) и издательского дела (зав. Госиздатом в 1921—24, главный редактор Большой советской энциклопедии в 1924—41, главный редактор журнала «Математический сборник» с 1932). С 1923 проф. Московского ун-та. В 1930—32 директор Арктич. ин-та. В 1932—39 начальник Главсевморпути. В 1939—42 вице-президент АН СССР. В 1937 по инициативе Ш. был организован Ин-т теоретич. геофизики АН СССР, директором к-рого Ш. был до 1949.

Основные труды в области математики относятся к алгебре; монография «Абстрактная теория групп» (1916, 2 изд. 1933) оказала значительное влияние на развитие этой теории. Ш.— основатель Московской алгебраич. школы. В сер. 40-х гг. Ш. выдвинул новую космогонич. гипотезу об образовании Земли и планет Солнечной системы, разработку к-рой продолжал совместно с группой советских учёных до конца жизни. Ш.— один из крупных исследователей Арктики. В 1929 и 1930 возглавлял экспедиции на ледокольном пароходе «Георгий Седов», организовавшие на Земле Франца-Иосифа первую научно-исследовательскую станцию, обследовавшие северо-восточную часть Карского моря, западные берега Северной Земли и открывшие ряд островов. В 1932 экспедиция на ледокольном пароходе «Сибиряков» под руководством Ш. впервые прошла за одну навигацию из Архангельска в Тихий океан. В 1933—34 Ш. возглавлял плавание на пароходе «Челюскин» по Северному морскому пути. В 1937 руководил воздушной экспедицией по организации дрейфующей станции «Северный полюс-1», а в 1938 — операцией по снятию персонала станции со льдины. Чл. ЦИК СССР. Депутат Верховного Совета СССР 1-го созыва. Награждён 3 орденами Ленина (1932, 1937, 1953), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1937, 1945), орденом Красной Звезды (1934). Именем Ш. названы: остров в Карском море, мыс на побережье Чукотского моря, район в Чукотском автономном округе Магаданской обл., Ин-т физики Земли АН СССР и др.

В АН СССР учреждена премия имени О. Ю. Шмидта.

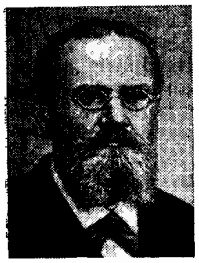
■ Избр. труды. Математика, М., 1959; Избр. труды. Географические работы, М., 1960; Избр. труды. Геофизика и космогония, М., 1960.

● «Успехи матем. наук», 1951, т. 6, в. 5; 1956, т. 11, в. 6; Отто Юльевич Шмидт. Жизнь и деятельность, М., 1959; Подвигина Е. П., Виноградов Л. К., Академик и герой, М., 1960; «Природа», 1973, № 4; Митрофанов Н. Н., Твердый сплав, в кн.: Этюды о лекторах, М., 1974; Дуэль И. И., Линия жизни, М., 1977.

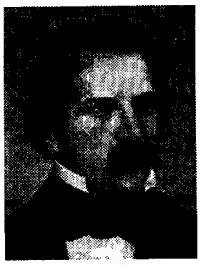
ШМИДТ Эрхард (Schmidt Erhard) (14.1.1876, Дерпт,— 6.12.1959, Берлин) — немецкий математик, с 1917 проф. Берлинского ун-та. В 1946—58 первый директор Ин-та математики АН ГДР. Основные труды по теории функций, интегральным уравнениям, функциональному анализу. Определил и изучил геометрически гильбертово пространство в полной аналогии с геометрией Евклида. Занимался квадратичными формами. Известен оператор Гильберта — Шмидта.

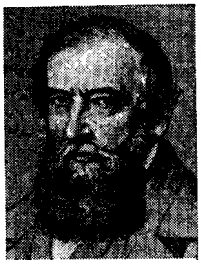
ШНАЙДЕР Теодор (Schneider Theodor) (р.7.5.1911, Франкфурт-на-Майне) — немецкий математик. Окончил Франкфуртский ун-т (1934), с 1948 проф. в ун-тах Гёттингена, Эрлангена, Фрайбурга. В 1934 решил (независимо от А. О. Гельфонда) 7-ю проблему Гильберта о трансцендентности чисел вида α^β (где $\alpha \neq 0$ и 1, а β — алгебраич. число степени $\geqslant 2$).

ШНИРЕЛЬМАН Лев Генрихович [2(15).1.1905, Гомель,— 24.9.1938, Москва] — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1933). Окончил Московский ун-т (1925). С 1934 работал в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. В цикле работ, написанных Ш. совместно с Л. А. Люстерником,

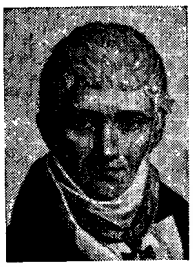

Э. Шрёдер.

К. Г. К. Штаудт.


К. А. Штейнгейль.


Я. Штейнер.

Ж. Ш. Ф. Штурм.


Ф. И. Шуберт.

были развиты топологич. методы вариационного исчисления, в частности решена задача о трёх геодезических. В теории чисел Ш. предложил общие метрич. методы, ввёл понятие плотности последовательности в ряду натуральных чисел; это позволило ему доказать, что всякое число представимо в виде суммы ограниченного числа простых чисел.

■ Топологические методы в вариационных задачах, М., 1930 (соавтор Л. А. Люстерник); Простые числа, М.—Л., 1940.

● «Успехи матем. наук», 1939, т. 6, с. 3—8.

ШОКЕ Густав Альфред (Choquet Gustave Alfred) (р. 1.3.1915, Солем) — французский математик, чл. Парижской АН (1976). Окончил Высшую нормальную школу в Париже. С 1950 проф. Парижского ун-та и Политехнич. школы (1965—70). Основные труды по топологии и теории потенциала.

ШОКИН Юрий Иванович (р. 9.7.1943, Канск Красноярского края) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1984). Чл. КПСС с 1975. Окончил Новосибирский ун-т (1966). С 1969 работает в Сибирском отделении АН СССР (с 1983 директор Вычислительного центра в Красноярске). Основные труды по прикладной математике: теории разностных схем, интервальному анализу, численному моделированию. Награждён орденом «Знак Почёта» (1982).

■ Метод дифференциального приближения, Новосиб., 1979; Интервальный анализ, Новосиб., 1981; Численное моделирование волн цунами, Новосиб., 1983 (соавторы А. Г. Марчук и Л. Б. Чубаров); Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике, Новосиб., 1985 (соавтор Н. Н. Яненко); Методы интервального анализа, Новосиб., 1986 (соавторы С.А. Калмыков, З. Х. Юлдашев).

ШРЁДЕР Эрнст (Schröder Ernst) (25.11.1841, Мангейм,— 16.6.1902, Карлсруэ) — немецкий математик и логик, с 1876 проф. Высшей технич. школы в Карлсруэ. Дал систематич. изложение математич. логики (точнее, алгебры логики); ввёл термин «исчисление высказываний». Автор принципа двойственности и ряда других законов математич. логики. Ввёл (1890) знаки $\subset$ и $\supset$ для понятий «содержится», «включается» и «содержит», «включает».

■ Abriss der Algebra der Logik, Bd 1—2, Lpz.—B., 1909—10.

ШТАУДТ Карл Георг Кристиан фон (Staudt Karl Georg Christian von) (24.1.1798, Ротенбург,— 1.6.1867, Эрланген) — немецкий математик, с 1835 проф. ун-та в Эрлангене. Основные труды по проективной геометрии. Ввёл общие проективные (однородные) координаты и истолковал введение мнимых величин в проективную геометрию.

■ Geometrie der Lage, Nürnberg, 1847; Beiträge zur Geometrie der Lage, H. 1—3, Nürnberg, 1856—60.

● История математики XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций, М., 1981.

ШТЕЙНГЕЙЛЬ, Штайнхайль Карл Август (Steinheil Karl August) (12.10.1801—14.9.1870, Мюнхен) — немецкий математик и физик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1835). Основные труды по физике.

ШТЕЙНЕР Якоб (Steiner Jacob) (18.3.1796, Утценсторф,— 1.4.1863, Берн) — швейцарский математик, чл. Берлинской АН (1834), проф. Берлинского ун-та (с 1835). Основные труды по проективной геометрии. Ш. уточнил и систематизировал идею проективного образования сложных геометрич. образов из более простых.

■ Gesammelte Werke, Bd 1—2, B., 1881—82; Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга, М., 1939.

● Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.—Л., 1937; История математики XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций, М., 1981.

ШТЕЙНИЦ, Стейниц Эрнст (Steinitz Ernst) (13.6.1871, Лаурахютте,— 29.9.1928, Киль) — немецкий математик. Основные труды по алгебраич. теории чисел, алгебре и геометрии (теорема Штейница о многогранниках, 1917).

ШТЁРМЕР, Стёрмер Фредрик Карл Мюлерц (Størmer Fredrik Carl Mülertz) (3.9.1874, Скин,— 13.8.1957, Осло) — норвежский геофизик и математик, иностранный чл.-корр. (1918) и иностранный почётный чл. (1934) АН СССР, чл. Норвежской академии наук и литературы, иностранный чл. Парижской АН (1947) и Лондонского королевского общества (1957). Окончил (1896) ун-т в Кристиании (Осло), с 1903 проф. там же. Предложил метод расчёта траекторий космич. лучей, к-рый вошёл в современную математику как метод численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений [метод Штёрмера (Стёрмера)].

■ Проблема полярных сияний, М.—Л., 1933.

ШТИФЕЛЬ Михель (Stifel Michel) (19.4.1487, Эслинген,— 19.4.1567, Йена) — немецкий математик, с 1559 проф. Йенского ун-та. Одним из первых в Европе стал оперировать с отрицательными числами; ввёл дробный и нулевой показатели степени, а также термин «показатель»; дал правило деления на дробь (1544). Внёс существенный вклад в развитие алгебры.

● История математики, т. 1, М., 1970.

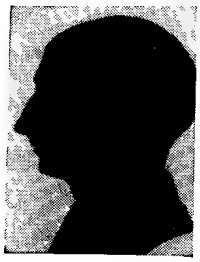
ШТУДИ Эдуард (Study Eduard) (23.3.1862, Кобург,— 6.1.1930, Бонн) — немецкий математик, с 1893 проф. ун-та в Марбурге, затем ун-та Джонса Хопкинса (США), Боннского ун-та (1894—1897 и с 1904). Основные труды по проективной геометрии. Ввёл термины «интегральный инвариант» (1905), «собственный» и «несобственный» (1901—02).

ШТУРМ Жак Шарль Франсуа (Sturm Jacques Charles François) (29.9.1803, Женева,— 18.12.1855, Париж)—французский математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1836), чл. Парижской АН (1836), с 1840 проф. Политехнич. школы в Париже. Основные труды по краевым задачам уравнений математич. физики и связанной с ними задаче (1837—41) о разыскании собственных значений и собственных функций для обыкновенных дифференциальных уравнений (задача Штурма — Лиувилля). Дал общий метод для определения числа корней алгебраич. уравнений, лежащих на заданном отрезке (правило Штурма). Ему принадлежат также работы по оптике и механике.

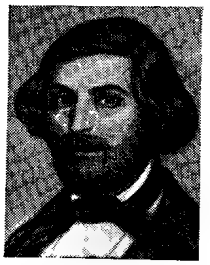
● «Enseignement mathématique», 1938, t. 37, p. 249—74.

ШТУРМ Иоганн Кристофер (Sturm Johann Christopher) (3.11.1635, Хипольштайн, Бавария,— 25.12.1703, Альтдорф) — немецкий математик, астроном и физик, с 1669 проф. математики и физики ун-та в Альтдорфе. Издал (1670) на немецком языке труды Архимеда с подробными комментариями, написал учебники математики. Занимался наблюдением комет.

ШУБЕРТ Фёдор Иванович (Фридрих Теодор) (Schubert Friedrich Theodor) [19 (30).10.1758, Хельмштадт, Германия,— 10 (22).10.1825, Петербург] — русский математик, астроном, геодезист, акад. Петербургской АН (1789; адъюнкт с 1786). Прадед С. В. Ковалевской. С 1804 зав. академич. обсерваторией. Произвёл (1805) магнитные наблюдения по маршруту Петербург — Казань — Тобольск — Иркутск. Автор «Руководства к астрономическим наблюдениям...» (1803), «Популярной

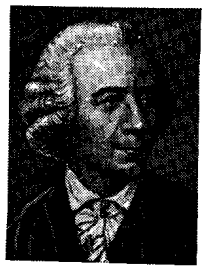


Н. Г. Шультен.



Ф.Г.М. Эйзенштейн.

И. А. Эйлер.



Л. Эйлер.

астрономии» (чч. 1—3, 1804—10), излагавшей в доступной форме систему мироздания. Математич. труды Ш. (связанные с астрономией и картографией) относятся к сферич. геометрии, где он изучил свойства локсодромы, в работах 1788—89 ввёл термин «конформная проекция». Другие труды относятся к алгебре и теории особых точек кривых.

● Ожигова Е. П., Математика в Петербургской Академии наук в конце XVIII—первой половине XIX в., Л., 1980.

ШУ́ЛЬТЕН Нафанаил Гергард (Schulten Nathanaël Gerhard) (16.6.1794—5.8.1860, Турку) — математик, чл.-корр. Петербургской АН (1821). Основные труды по математич. анализу и его приложению к геометрии.

ШУР Иссай (Schur Issai) (10.1.1875, Могилёв,— 10.1.1941, Тель-Авив) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. АН СССР (1929), чл. Берлинской АН (1921). Основные труды по теории функций и теории групп. Сформулировал (1904—05) основные свойства неприводимых представлений.

ШУР Фридрих (Schur Friedrich) (27.1.1856, Познань,— 10.3.1932, Бреслау) — немецкий математик, проф. Дерптского ун-та (1888—97), Политехникума в Карлсруэ (1897—1909), Страсбургского ун-та (1909—19), ун-та в Бреслау (с 1919). Основные труды по геометрии, группам преобразований. Автор работ (1885—87) по римановым пространствам постоянной кривизны. Международная премия имени Н. И. Лобачевского.

ШЮКЁ Никола (Chuquet Nicolas) (15 в.) — французский математик. Автор рукописного трактата по арифметике и алгебре «Наука о числах в трёх частях» («Le triparty en la science des nombres», 1484, Rome, 1881), где он ввёл в употребление отрицательные и нулевые показатели степеней. Символика Ш. приближается к современной.

● Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961.

Э

ЭЙЗЕНШТЕЙН Фердинанд Готхольд Макс (Eisenstein Ferdinand Gotthold Max) (16.4.1823, Берлин,— 11.10.1852, там же) — немецкий математик, чл. Берлинской АН (1852). Работал в Берлинском ун-те (с 1847). Основные труды по теории форм, теории чисел и теории функций. Сформулировал и доказал (1844) законы взаимности для кубич. вычетов бинарных кубич. форм. Ввёл коварианты.

● Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей, М., 1978.

ЭЙЛЕНБЕРГ Сэмюэл (Eilenberg Samuel) (р. 30.9.1913, Варшава) — американский математик, чл. Национальной АН США. С 1947 проф. Колумбийского ун-та. Чл. группы Бурбаки. Основные труды по алгебраич. топологии.

■ Гомологическая алгебра, М., 1960 (соавтор А. Картан); Основания алгебраической топологии, М., 1958 (соавтор Н. Стинрод).

ЭЙЛЕР Иоганн Альбрехт (Euler Johann Albrecht) [16(27).11.1734, Петербург,— 6(17).9.1800, там же] — русский математик, физик и астроном, акад. (1766) и конференц-секретарь (с 1769) Петербургской АН. Старший сын Л. Эйлера. Основные труды по небесной механике и астрономии, математич. работы посвящены вариац. задачам.

● Ожигова Е. П., Математика в Петербургской Академии наук в конце XVIII—первой половине XIX века, Л., 1980.

ЭЙЛЕР Леонард (Euler Leonhard) [4.4.1707, Базель,— 7(18).9.1783, Петербург] — математик, механик и физик. Родился в семье небогатого пастора Пауля Эйлера. Образование получил сначала у отца (к-рый в молодости занимался математикой под руководством Я. Бернулли), затем поступил (осенью 1720) в Базельский ун-т, где в 1724 произнёс речь, посвящённую сравнению философии Р. Декарта и И. Ньютона, и был удостоен степени магистра искусств. С кон. 1723 Э. по настоянию отца стал изучать богословие, но вскоре целиком отдался изучению любимой им математики. В Базельском ун-те Э. слушал лекции по математике И. Бернулли, но особенное значение имели беседы, проводимые с ним И. Бернулли по субботам в течение нескольких лет. В 1726—27 Э. выступил в журнале «Acta eruditorum» с первыми научными работами, посвящёнными актуальным задачам об изохроне в сопротивляющейся среде и о траекториях. Тогда же он принял участие в конкурсе работ на тему о наилучшем расположении мачт на корабле; сочинение Э. было опубликовано в 1728.

В 1725 два друга Э., сыновья его учителя — Даниил и Николай Бернулли, не найдя применения своим силам в Базеле, приняли приглашение только что организованной Академии наук в Петербурге. По словам Э., он «преисполнился невыразимым желанием поехать вместе с ними» тогда же. В кон. 1726 по рекомендации братьев Бернулли его пригласили на одно из свободных мест в Петербургской АН. Он оставил Швейцарию и в мае 1727 приехал в Петербург.

В Петербурге (где Э. жил в 1727—41 и с 1766 до конца жизни) Э. нашёл весьма благоприятные условия для научной деятельности: материальное обеспечение, широкую возможность публикации трудов, круг учёных с общими интересами в лице Д. Бернулли, Х. Гольдбаха, Я. Германа и др. Э. сразу приступил к занятиям математикой и механикой. Его статьи на латинском языке появлялись в органе академии — «Commentarii Academiae imp. scientiarum Petropolitanae» начиная со 2-го тома за 1727 (1729) и публиковались в этом журнале (несколько раз менявшем своё название) без перерыва до самой его смерти и ещё десятилетия спустя. За 14 лет первого петербургского периода жизни Э. подготовил к печати около 80 трудов и опубликовал свыше 50; впоследствии его научная продукция значительно выросла. Значение своей работы в русской академии для себя лично Э. оценил в письме к руководителю академич. канцелярией И. Д. Шумахеру от 18 ноября 1749 следующим образом: «Что собственно до меня касается, то при отсутствии такого превосходного обстоятельства я бы вынужден был, главным образом, обратиться к другим занятиям, в которых, по всем признакам, мог бы заниматься только крохоборством. Когда его королевское величество (Фридрих II Прусский.— *Ред.*) недавно меня спросил, где я изучал то, что знаю, я, согласно истине, ответил, что всем обязан своему пребыванию в Петербургской Академии».

Э. участвовал во многих направлениях деятельности академии. Он читал лекции студентам академич. ун-та, написал общедоступное «Руководство к арифметике» (нем. изд. 1738—40, рус. пер., 2 чч., 1740, 2 изд., 1760), участвовал в различных технич. экспертизах. Многие годы он успешно работал над составлением карт России. По специальному поручению академии Э. подготовил к печати «Морскую науку» (2 чч., 1749) — фундаментальный труд по теории кораблестроения и кораблевождения. Позднее на основе этой книги он написал для учащихся морских школ сокращённое руководство на французском языке (1773), русский перевод к-рого опубликовал (1778) его ученик М. Е. Головин.

В Петербурге Э. изучил русский язык. В 1733 он женился на Е. Гзелль — дочери академич. живописца. В Петербурге же родились два

его сына: математик, физик и астроном Иоганн Альбрехт (1734—1800) и врач Карл (1740—90). Третий сын Кристоф (1743—1808), участник астрономич. экспедиции академии 1769, служа в армии, достиг чина генерал-лейтенанта и был директором оружейного завода в Сестрорецке.

Тревожное и неустойчивое положение в период регентства Анны Леопольдовны заставило Э. принять в 1741 предложение прусского короля Фридриха II переехать в Берлин, где предстояла реорганизация почти бездействовавшего Общества наук в большую новую академию. В Берлинской АН Э. занял пост директора класса математики и члена правления, а после смерти её первого президента П. Мопертюи несколько лет (с 1759) фактически руководил академией, вникая во все детали её деятельности, вплоть до хозяйственных и финансовых дел. За 25 лет жизни в Берлине он полностью или вчерне подготовил около 300 работ, среди них ряд больших монографий. В 40—50-е гг. он участвовал в нескольких научных и философских дискуссиях. С позиций картезианского механич. материализма, к-рый сочетался у него с глубокой личной религиозностью, Э. выступал против учения о монадах и предустановленной гармонии Г. Лейбница и Х. Вольфа. С Ж. Д'Аламбером он вёл спор о свойствах логарифмов отрицательных и мнимых чисел, с Ж. Д'Аламбером и Д. Бернулли — о природе решений дифференциального уравнения колеблющейся струны. Этот спор, в к-ром приняли участие и другие крупнейшие математики 2-й пол. 18 в., имел большое значение в развитии математич. физики, учения о тригонометрич. рядах и в обобщении понятия функции.

Э. продолжал заниматься и чисто прикладными задачами. Так, он перевёл с английского на немецкий язык «Новые принципы артиллерии» Б. Робинса (1745) и в обширных дополнениях к этой книге и одном мемуаре (1753) существенно развил учение о движении круглого снаряда в воздухе. Э. консультировал работы по проведению канала между Хавелем и Одером, по водоснабжению дворца Сан-Суси, по организации лотерей. Изучая действие сегнерова колеса, он заложил основы теории турбин. Он внёс ценный вклад в оптич. технику, теоретически установив, что путём соединения двух линз различной преломляемости можно избежать хроматич. аберрации, мешавшей дальнейшему усилению телескопов-рефракторов; первый ахроматич. объектив по принципу Э. построил в 1758 Дж. Доллонд. Э. существенно усовершенствовал также волшебный фонарь. Он занимался и вопросами практич. механики, изыскивая целесообразную форму зубцов зубчатых передач, изучал устройство ветряных мельниц и т. д. Ценный вклад внёс Э. и в учение о сопротивлении материалов, где его имя, напр., носит известная формула для критич. нагрузки колонн.

Живя в Берлине, Э. не переставал интенсивно работать для Петербургской АН, сохраняя звание её почётного члена и получая пенсию. Он вёл с Петербургом обширную научную и научно-организационную переписку, в частности переписывался с М. В. Ломоносовым, к-рого высоко ценил. Э. редактировал математич. отдел русского академич. научного органа, где опубликовал за это время почти столько же статей, сколько в «Мемуарах» Берлинской АН. Он деятельно участвовал в подготовке русских математиков; в Берлин командировались для занятий под его руководством будущие академики С. К. Котельников, С. Я. Румовский и М. Софронов. Большую помощь Э. оказывал Петербургской АН, приобретая для неё научную литературу и оборудование, ведя переговоры с кандидатами на должности в академии и т. д.

В бытность Э. в Берлине несколько раз вставал вопрос о его возвращении в Россию. Трения Э. с королём Фридрихом II, связанные с расхождениями в деловых вопросах работы академии, но более всего с глубоким антагонизмом во многих взглядах и вкусах короля и учёного, постепенно привели к разрыву между ними. Король долго не отпускал учёного с мировым именем, но Э. настоял на своём и 17 (28) июля 1766 вместе с семьёй вернулся в Петербург.

Несмотря на преклонный возраст и постигшую его почти полную слепоту (правый глаз Э. потерял в 1738, а левым почти не видел с осени 1766), работоспособность его не снизилась. Благодаря сохранившейся силе ума и феноменальной памяти, а также помощи способных молодых секретарей, его учеников — И. А. Эйлера, В. Л. Крафта, А. И. Лекселя, Н. И. Фусса, М. Е. Головина, Э. смог до конца жизни по-прежнему продуктивно работать. За 17 лет вторичного пребывания в Петербурге им было подготовлено около 400 работ, среди них несколько больших книг. За один 1777 он вместе с Н. И. Фуссом подготовил почти 100 статей. Э. продолжал участвовать и в организационной работе в академии. В 1776 он был одним из экспертов проекта одноарочного моста через Неву, предложенного И. П. Кулибиным, и из всей комиссии один оказал широкую поддержку выдающемуся русскому изобретателю.

Заслуги Э. как крупнейшего учёного и организатора научных исследований получили высокую оценку ещё при его жизни. Помимо Петербургской и Берлинской академий, он состоял членом крупнейших научных обществ: Парижской АН, Лондонского королевского общества и т. д. В различных научных конкурсах работы Э. неоднократно удостаивались премий.

Э. скончался в Петербурге от кровоизлияния в мозг и был похоронен на Смоленском кладбище. В 1837 Петербургская АН воздвигла на его могиле памятник; в 1956 его прах был перенесён в Ленинградский некрополь.

Одной из отличительных сторон творчества Э. является его исключительная продуктивность. Только при жизни Э. было опубликовано около 550 его книг и статей (список трудов Э. содержит примерно 850 названий). В 1909 Швейцарское естественнонаучное общество приступило к изданию полного собрания сочинений Э. в трёх сериях: математической, механико-астрономической и физической. К настоящему времени из печати вышло 67 томов и готовится ещё 5. Большой интерес представляет и колоссальная научная переписка Э. (около 3000 писем), до сих пор опубликованная только частично. С 1975 начато в рамках Собрания сочинений Э. полное издание его научной переписки, к-рое составит четвёртую серию, пока что изданы 3 тома из 8 намеченных, впрочем часть научных писем опубликована ранее в других изданиях.

Необыкновенно широк был круг занятий Э., охватывавших все отделы современной ему математики и механики, теорию упругости, математич. физику, оптику, теорию музыки, теорию машин, баллистику, морскую науку, страховое дело и т. д. Около $^3/_5$ работ Э. относится к математике, остальные $^2/_5$ преимущественно к её приложениям. В этом соотношении нашла выражение тесная связь математич. исследований Э. с практикой. Математику он разрабатывал в значительной части как аппарат естествознания, особенно механики и техники. Но Э. прежде всего был математиком. Часто черпая задачи из практики, он развивал математику не от случая к случаю, но как органич. целое, части к-рого находятся в тесной и глубокой взаимосвязи. Свои результаты и результаты, полученные другими, Э. систематизировал в ряде классич. монографий, написанных с поразительной ясностью и снабжённых ценными примерами. Таковы, напр., «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (2 тт., 1736), «Введение в анализ бесконечных» (2 тт., 1748), «Дифференциальное исчисление» (1755), «Теория движения твёрдого тела» (1765), «Универсальная арифметика» (2 тт., 1768—69), выдержавшая около 30 изданий на 6 языках, «Интегральное исчисление» (3 тт., 1768—70, 4-й т., 1794) и др. Особенностью этих руководств является постоянная забота Э. раскрыть пути, ведущие к излагаемым результатам; благодаря этому многие книги Э. и сейчас интересны не только для специалистов, но и для учащейся молодёжи. В 18 в., а отчасти и в 19 в. огромную популярность приобрели общедоступные «Письма о разных физических и филозофических материях,

писанных к некоторой немецкой принцессе...» (3 чч., 1768—74), к-рые выдержали свыше 40 изданий на 10 языках. Бóльшая часть содержания монографий Э. вошла затем в учебные руководства для высшей и отчасти для средней школы. Невозможно перечислить все доныне употребительные теоремы и методы Э., из к-рых только немногие фигурируют в литературе под его именем.

В «Механике» Э. впервые изложил в широком объёме динамику точки при помощи нового математич. анализа. В первом томе этого сочинения рассмотрено свободное движение точки под действием различных сил как в пустоте, так и в сопротивляющейся среде; во втором томе — движение точки по данной линии или по данной поверхности. При этом Э. не только упростил приёмы решения уже известных проблем, но и решил многие новые задачи, открыл пути к дальнейшим исследованиям. В частности, большое значение для развития небесной механики имела глава о движении точки под действием центральных сил. В 1744 он впервые корректно сформулировал механич. принцип наименьшего действия и показал его первые применения. В «Теории движения твёрдых тел» Э. разработал кинематику и динамику твёрдого тела и дал уравнение его вращения вокруг неподвижной точки, положив начало теории гироскопов. В своей теории корабля Э. внёс ценный вклад в теорию устойчивости. Всё это подготовило почву для создания системы аналитич. механики Лагранжа. Велики были открытия Э. и в небесной механике. Соревнуясь с А. Клеро, он значительно продвинул теорию движения Луны. Метод, изложенный в первой монографии Э. по этому вопросу (1753), был использован Т. Майером для вычисления лунных таблиц, долгое время служивших для определения долготы в открытом море; высокие достоинства предложенного Э. другого метода определения лунной орбиты (1772) получили должную оценку лишь в кон. 19 в. Мемуары 1757—71 внесли большой вклад в механику сплошных сред (основные уравнения движения идеальной жидкости в форме Э. и в т. н. переменных Лагранжа, колебания газа в трубах и пр.). Обширный цикл работ, начатый в 1748, Э. посвятил математич. физике: задачам о колебании струн, пластинок, мембраны и др. Все эти исследования стимулировали развитие теории дифференциальных уравнений, приближённых методов анализа, специальных функций, дифференциальной геометрии и т. д. Многие чисто математич. открытия Э. содержатся именно в этих его работах.

Главным делом Э. как математика явилась разработка математич. анализа, самые рамки к-рого он значительно расширил по сравнению со своими предшественниками. Он заложил основы нескольких математич. дисциплин, к-рые только в зачаточном виде имелись или вовсе отсутствовали в исчислении бесконечных малых И. Ньютона, Г. Лейбница и Я. и И. Бернулли. Так, Э. первый систематически ввёл в рассмотрение функции комплексного аргумента («Введение в анализ бесконечных», т. 1) и исследовал свойства основных элементарных функций комплексного переменного (показательная, логарифмич. и тригонометрич. функции). В частности, он вывел формулы, связывающие тригонометрич. функции с показательной (формулы Эйлера), следует заметить, что эта связь была ранее упомянута без доказательства в одной работе Р. Котеса. Работы Э. в этом направлении, выяснение им нек-рых свойств аналитич. функций (уравнения Д'Аламбера — Эйлера, связь с конформными отображениями) и, наконец, применение мнимых величин к вычислению интегралов положили начало теории функций комплексного переменного.

Э. явился создателем вариационного исчисления, изложенного в работе «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума...» (1744). Несколько позднее Ж. Лагранж существенно переработал и усовершенствовал метод Э., ввёл понятие и знак вариации. После чего Э. оригинально изложил вариационное исчисление в ряде статей и «Интегральном исчислении». Метод, с помощью к-рого Э. в 1744 вывел необходимое условие экстремума функционала (уравнение Эйлера), явился прообразом прямых методов вариационного исчисления 20 в.; позднее Э. ввёл в рассмотрение поле экстремалей.

Систематически развивая новые приёмы интегрирования дифференциальных уравнений, введя ряд основных понятий в этой области, Э. создал как самостоятельную дисциплину теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и заложил основы теории уравнений с частными производными. Здесь ему принадлежит огромное число открытий: классич. общий способ решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами, метод вариации произвольных постоянных, выяснение основных свойств уравнения Риккати, интегрирование линейных уравнений с переменными коэффициентами (в частности, т. н. уравнения Бесселя) с помощью бесконечных рядов, критерии особых решений, учение об интегрирующем множителе, различные приближённые методы и ряд приёмов решения уравнений с частными производными. Значительную часть этих результатов Э. собрал в своём «Интегральном исчислении».

Э. обогатил также дифференциальное и интегральное исчисление в узком смысле слова. Достаточно назвать широкое развитие учения о замене переменных, теорему об однородных функциях, подстановки Эйлера, понятие двойного интеграла (известное также Ж. Лагранжу) и вычисление многих специальных интегралов (т. н. эйлеровы интегралы). В теорию рядов Э. внёс новые идеи, к-рые показывают, что он умел видеть на многие десятилетия вперёд. Примером может служить его трактовка проблемы сходимости рядов. В «Дифференциальном исчислении» Э. высказал и подкрепил примерами убеждение в целесообразности применения расходящихся рядов и предложил методы обобщённого суммирования рядов. При тогдашнем состоянии науки он не мог выяснить и даже вполне конкретно поставить вопрос об условиях, в к-рых законны его определения и методы; он не знал также всей важности построения теории сходимости рядов. Тем не менее в своих воззрениях и в методах суммирования он предвосхищал идеи современной строгой теории расходящихся рядов, созданной на рубеже 19 и 20 вв. Кроме того, Э. получил в теории рядов множество конкретных результатов. Он открыл т. н. формулу суммирования Эйлера — Маклорена, предложил преобразование рядов, носящее его имя, определил суммы громадного количества рядов, ввёл в математику новые важные типы рядов (напр., тригонометрич. ряды, т. н. ряды Ламберта). Сюда же примыкают исследования Э. по теории непрерывных дробей и др. бесконечных процессов.

Э. является основоположником теории специальных функций. Он первым начал рассматривать синус и косинус как функции, а не как отрезки в круге. Им получены почти все классич. разложения элементарных функций в бесконечные ряды и произведения. В его трудах создана теория гамма-функции. Он исследовал свойства эллиптич. интегралов, гиперболич. и цилиндрич. функций, дзета-функции, нек-рых тэта-функций, интегрального логарифма и важных классов специальных многочленов.

По замечанию П. Л. Чебышева, Э. положил начало всем изысканиям, составляющим общую часть теории чисел, к к-рой относится свыше 100 мемуаров Э. Так, Э. доказал ряд утверждений, высказанных П. Ферма, разработал основы теории степенных вычетов и теории квадратичных форм, обнаружил (но не доказал) квадратичный закон взаимности и исследовал ряд задач диофантова анализа. В работах о разбиении чисел на слагаемые и по теории простых чисел Э. впервые использовал методы анализа, явившись тем самым создателем аналитич. теории чисел. В частности, он ввёл знаменитую дзета-функцию и доказал т. н. тождество Э., связывающее простые числа со всеми натуральными.

Велики заслуги Э. и в других областях математики. В алгебре ему при-

надлежат работы о решении в радикалах уравнений высших степеней и об уравнениях с двумя неизвестными, а также т. н. тождество Э. о четырёх квадратах. Э. значительно продвинул аналитич. геометрию, особенно учение о поверхностях 2-го порядка. В дифференциальной геометрии он детально исследовал свойства геодезич. линий, впервые применил натуральные уравнения кривых, а главное, заложил основы теории поверхностей. Он ввёл понятие главных направлений в точке поверхности, доказал их ортогональность, вывел формулу для кривизны любого нормального сечения, начал изучение развёртывающихся поверхностей и т. д.; в одной посмертно опубликованной работе (1862) он частично предварил исследования К. Гаусса по внутренней геометрии поверхностей. Э. занимался и отдельными вопросами топологии и, например, доказал важную теорему о выпуклых многогранниках (встречающуюся в рукописях Р. Декарта без доказательства).

Э.-математика нередко характеризуют как гениального «вычислителя». Действительно, он был непревзойдённым мастером формальных выкладок и преобразований, в его трудах многие математич. формулы и символика впервые получают современный вид (напр., ему принадлежат обозначения для e и π). Однако Э. был не только исключительной силы «вычислителем». Он внёс в науку ряд глубоких идей. Даже в тех вопросах, где он, как и другие математики 18 в., стоял на шаткой почве, его рассуждения, как правило, могут быть строго обоснованы и служат образцом глубины проникновения в предмет исследования.

По выражению П. Лапласа, Э. явился общим учителем математиков 2-й пол. 18 в. От его работ непосредственно отправлялись в разнообразных исследованиях П. Лаплас, Ж. Лагранж, Г. Монж, А. Лежандр, К. Гаусс, позднее О. Коши, М. В. Остроградский, П. Л. Чебышев и др. Русские математики высоко ценили творчество Э., а деятели чебышевской школы видели в Э. своего идейного предшественника в его постоянном чувстве конкретности, в интересе к конкретным трудным задачам, требующим развития новых методов, в стремлении получать решения задач в форме законченных алгоритмов, позволяющих находить ответ с любой требуемой степенью точности.

■ Opera omnia... Series 1—Opera mathematica, v. 1—29, Lausannae, 1911—56, Series 2 — Opera mechanica et astronomica, v. 1—30, B.—Lpz., 1912—74, Series 3 — Opera physica, Miscellanae epistolae, v. 1—12, Lausannae, 1911—73, Series 4 — Commercium epistolicum, v. 1, Basel, 1975; Универсальная арифметика, т. 1—2, СПБ, 1768—1769; Полное умозрение строения и вождения кораблей, сочиненное в пользу учащихся навигации..., СПБ, 1778; Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле, М.—Л., 1934; Основы динамики точки, М.—Л., 1938; Новая теория движения Луны, Л., 1934; Дифференциальное исчисление, М.—Л., 1949; Введение в анализ бесконечных, т. 1—2, М., 1961; Интегральное исчисление, т. 1—3, М., 1956—1958; Избранные картографические статьи, М., 1959.

● Ernest Öm G., Verzeichnis der Schriften Leonard Eulers, Lfg 1—2, Lpz., 1910—13 (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzungsband 4, Lfg 1—2) [лит.]; Fuss N., Eloge de monsieur Léonard Euler..., St.-Pb., 1783 (в рус. пер.— Похвальная речь покойному Леонарду Эйлеру..., в кн.: Академические сочинения, выбранные из первого тома Деяний Академии наук, под заглавием: Nova Acta Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, ч. 1, СПБ, 1801); Симонов Н. И., Прикладные методы анализа у Эйлера, М., 1957; Леонард Эйлер. Сб. ст., М., 1958; Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР, т. 1, М.—Л., 1962; Юшкевич А. П., История математики в России до 1917 года, М., 1968; Тиле Р., Леонард Эйлер, пер. с нем., К., 1983.

ЭНГЕЛЬ Фридрих (Engel Friedrich) (26.12.1861—29.9.1941) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. Петербургской АН (1899). Был популяризатором идей Н. И. Лобачевского в Зап. Европе, перевёл на немецкий язык две его работы. Основные труды по теории функций и неевклидовой геометрии.

ЭНЕЕВ Тимур Магометович (р. 23.9. 1924, Грозный) — советский учёный в области механики и процессов управления, чл.-корр. АН СССР (1968). Чл. КПСС с 1957. Окончил Московский ун-т (1948). С 1953 работает в Ин-те прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР. Основные труды по динамике и управлению полётом космич. аппаратов и приложению методов небесной механики к вопросам космогонии. Ленинская премия (1957). Награждён орденом Ленина (1961), 2 орденами Трудового Красного Знамени (1956, 1974).

ЭРАТОСФЕ́Н Киренский ('Ερατοσθένης) (ок. 276, Кирена,— 194 до н. э.) — древнегреческий учёный. Заведовал Александрийской библиотекой. В области математики дал известный способ нахождения простых чисел (решето Эратосфена), заложил основы математич. географии.

ЭРБРА́Н Жак (Herbrand Jacques) (12.2. 1908, Париж,— 27.7.1931, Ла-Берард, Изер) — французский математик. Окончил Высшую нормальную школу в Париже (1925). Основные труды по математич. логике (исчисление предикатов, рекурсивные функции, теоремы о дедукции, конструктивная логика) и алгебре (поля, алгебраич. числа).

ЭРИГО́Н Пьер (Hérigone Pierre) (17 в.) — французский математик. Автор 6-томного «Курса математики» («Cursus mathematicus», Parisiis, 1634—37), в к-ром излагает арифметику и алгебру, вводит весьма развитую математич. символику (в частности, знак перпендикулярности $\perp$, 1634). Независимо от Н. Тартальи получил формулу для числа сочетаний из n элементов по m (без повторений).

ЭРЛАНГ Агнер Краруп (Erlang Agner Krarup) (кон. 19 в.— 1-я пол. 20 в.) — датский инженер. Своими работами

Т. М. Энеев.

Ш. Эрмит.

20-х гг. вызвал интерес к математич. задачам, возникающим в организации телефонных сетей, и тем самым способствовал становлению теории массового обслуживания, где известны формулы Эрланга.

ЭРМИ́Т Шарль (Hermite Charles) (24.12.1822, Дьёз,— 14.1.1901, Париж) — французский математик, иностранный чл.-корр. (1857) и иностранный почётный чл. (1895) Петербургской АН, чл. Парижской АН (1856), Лондонского королевского общества (1873), с 1869 проф. Парижского ун-та. Э. принадлежат исследования по различным вопросам классич. анализа, алгебры и теории чисел. Основные труды по теории эллиптич. функций и её приложениям. Э. изучил класс ортогональных многочленов (многочлены Эрмита). Ряд работ Э. посвящён теории алгебраич. форм и их инвариантов (эрмитова форма). Доказал (1873) трансцендентность числа e.

■ Oeuvres, t. 1—4, P., 1905—17; Курс анализа, Л.—М., 1936.

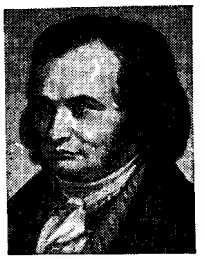
● Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., ч. 1, М.—Л., 1937; Ожигова Е. П., Шарль Эрмит, 1822—1901, Л., 1982; «Math. Ann.», 1902, Bd 55, S. 337—85.

Ю

ЮШКЕ́ВИЧ Адольф-Андрей Павлович [р. 2(15).7.1906, Одесса] — советский историк математики. Засл. деятель науки РСФСР (1966). Окончил Московский ун-т (1929). В 1930—52 работал в Московском высшем технич. училище (с 1940 проф.), с 1945 — в Ин-те истории естествознания и техники АН СССР. Основные труды по истории средневековой математики, математики 17—19 вв. (особенно по истории математич. анализа) и отечественной математики. Издатель трудов многих классиков математики. Основатель (в 1948 совместно с Г. Ф. Рыбкиным) и ответственный редактор сборников «Историко-математические исследования» (к 1987 вышло 30 выпусков). Ю.— чл.-корр. (1956), действительный чл. (1960) и президент (1965—68) Международной академии истории науки, чл. Германской академии естествоиспыта-

А. П. Юшкевич.

С. В. Яблонский.



К. Г. Я. Якоби.

Н. Н. Яненко.

К. П. Яновский.

Яу Шинтан.

телей «Леопольдина» (1958), чл.-корр. Научного общества имени Г. В. Лейбница (1967), чл.-корр. Королевской академии литературы в Барселоне (1972), иностранный чл.-корр. Германского общества историков естествознания, техники и медицины (1976), почётный чл. Чехословацкого общества историков науки и техники (1979), чл. Французского математич. общества (1982). Серебряная медаль имени Г. В. Лейбница Научного общества имени Г. В. Лейбница (1967), медаль имени А. Койре Международной академии истории науки (1971), медаль имени Дж. Сартона Американского общества историков науки (1978), медаль имени Г. В. Лейбница АН ГДР (1978), премия Дуасто-Блютеля Парижской АН (1982), 2 медали имени Л. Эйлера АН ГДР (1957, 1983). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1951).

■ История математики в средние века, М., 1961; Омар Хайям, М., 1965 (соавтор Б. А. Розенфельд); История математики в России до 1917 г., М., 1968; Христиан Гольдбах, М., 1983 (соавтор Ю. Х. Копелевич); Les mathématiques arabes, P., 1976; Lazare Carnot savants..., P., 1979 (соавтор Ch. Gillispie).

● Историко-математические исследования, 1976, в. 21, с. 312—27; 1986, в. 30, с. 353—357.

Я

ЯБЛО́НСКИЙ Сергей Всеволодович (р. 6.12.1924, Москва) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1968). Чл. КПСС с 1953. Окончил Московский ун-т (1950), с 1963 проф. там же. С 1953 работает в Ин-те прикладной математики АН СССР, чл. редколлегии «Математической энциклопедии». Специалист в области дискретной математики и математич. вопросов кибернетики. Основные труды по теории управляющих систем, исследованию функциональных систем с операциями, вопросам контроля и надёжности управляющих систем, изучению алгоритмич. трудностей синтеза управляющих систем. Ленинская премия (1966). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1974), орденом Отечественной войны 2-й степени (1945), 2 орденами Красной Звезды (1944, 1945), орденом Славы 3-й степени (1944).

■ Функциональные построения в к-значной логике, «Тр. Матем. ин-та АН СССР», 1958, т. 51; Основные понятия кибернетики, в сб.: Проблемы кибернетики, в. 2, М., 1959; Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем, там же; Функции алгебры логики и классы Поста, М., 1966 (соавторы Г. П. Гаврилов, В.Б. Кудрявцев); Введение в дискретную математику, М., 1979.

ЯКО́БИ Карл Густав Якоб (Jacobi Carl Gustav Jacob) (10.12.1804, Потсдам,— 18.2.1851, Берлин) — немецкий математик, иностранный чл.-корр. (1830) и иностранный почётный чл. (1833) Петербургской АН, чл. Берлинской АН (1836), Парижской АН (1846), Лондонского королевского общества (1833), проф. Кёнигсбергского ун-та (1829—42). Один из создателей теории эллиптич. функций. Ввёл и изучил тэта-функции и нек-рые другие трансцендентные функции. Я. принадлежат открытия в области теории чисел, алгебры, вариационного исчисления, интегрального исчисления и теории дифференциальных уравнений. Исследовал дифференциальные уравнения динамики, указав ряд новых методов их решения. Я. ввёл в употребление функциональные определители (якобианы) и указал на их роль при замене переменных в кратных интегралах и при решении уравнений с частными производными. Исследовал класс ортогональных многочленов (многочлены Якоби).

■ Gesammelte Werke, Bd 1—7, B., 1881—91.

● Koenigsberger L., Carl Gustav Jacob Jacobi: Festschrift zur Feier der 100 Wiederkehr seines Geburtstages, Lpz., 1904.

ЯНЕ́НКО Николай Николаевич (22.5.1921, Куйбышев Новосибирской обл.,— 16.1.1984, Новосибирск) — советский математик и механик, акад. АН СССР (1970; чл.-корр. 1966), Герой Социалистич. Труда (1981). Чл. КПСС с 1952. Окончил Томский ун-т (1942). Работал в Геофизич. ин-те АН СССР (1948—53). С 1960 проф. Новосибирского ун-та. С 1963 зав. лабораторией Вычислительного центра Сибирского отделения АН СССР, с 1976 директор Ин-та теоретич. и прикладной математики Сибирского отделения АН СССР. Основные труды по многомерной дифференциальной геометрии, нелинейным задачам математич. физики и механики сплошной среды и численным методам их решения. Государственные премии СССР (1953, 1972, 1985). Награждён орденом Ленина (1981), орденом Октябрьской Революции (1975), 3 орденами Трудового Красного Знамени (1954, 1956, 1971), орденом Красной Звезды (1945).

■ Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, М., 1968 (соавтор Б. Л. Рождественский); Введение в разностные методы математической физики, ч. 1—2, Новосиб., 1968; Введение в математический анализ, ч. 1—2, Новосиб., 1972—74 (соавтор Ю. И. Шокин); Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосиб., 1967; Нелинейные уравнения переменного типа, Новосиб., 1983 (соавторы Н. А. Ларькин, В. А. Новиков).

● «Успехи матем. наук», 1984, т. 39, в. 4.

ЯНО́ВСКИЙ Кирилл Петрович [18(30).3.1822—12(25).7.1902] — русский математик и педагог, почётный чл. Петербургской АН (1891). Окончил Киевский ун-т. С 1843 преподавал математику в гимназиях, с 1878 попечитель Кавказского учебного округа. Большое внимание уделял улучшению методов преподавания школьных предметов, оснащению школ наглядными пособиями.

● «Вестник воспитания», 1902, № 6.

ЯН ХУЭЙ (13 в.) — китайский математик. В его работах содержится изложение методов решения уравнений 4-й и высших степеней, встречаются правила решения полного квадратного уравнения, суммирования прогрессий, приёмы построения магич. квадратов и др. Он был знаком и с треугольником Паскаля (арифметич. треугольником).

● Юшкевич А. П., История математики в средние века, М., 1961.

ЯУ ШИНТА́Н (р. 4.4.1949, Гуаньдун) — американский математик. Основные труды по дифференциальным уравнениям. Золотая медаль и премия Дж. Филдса (1983).

ДОПОЛНЕНИЯ

ВОЕВО́ДИН Валентин Васильевич (р. 22.3.1934, с. Шилово Рязанской обл.) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1987). Чл. КПСС с 1975. Окончил Московский ун-т (1957), с 1971 проф. там же. В 1957—81 работал в научно-исследовательском Вычислительном центре Московского ун-та. С 1981 зав. лабораторией Отдела вычислительной математики АН СССР. Основные труды по вычислительной математике, математич. обеспечению ЭВМ, численным методам решения задач алгебры, оценке устойчивости алгоритмов и изучению их структуры. Награждён орденом «Знак Почёта» (1976).

■ Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы, М., 1966; Линейная алгебра, 2 изд., М., 1980; Матрицы и вычисления, М., 1984 (соавтор Ю. А. Кузнецов); Вычислительные основы линейной алгебры, М., 1977; Математические модели и методы в параллельных процессах, М., 1986; Параллельные структуры алгоритмов и программ, М., 1987.

ИЛЬЙН Владимир Александрович (р. 2.5.1928, Козельск Калужской обл.) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1987). Окончил Московский ун-т (1950), с 1953 работает там же (проф. с 1959). С 1973 в Математич. ин-те им. В. А. Стеклова АН СССР. Основные труды по математич. физике, вычислительной математике, спектральной теории дифференциальных операторов, математич. моделированию. Государственная премия СССР (1980), премия имени М. В. Ломоносова (МГУ, 1980). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1980).

■ Аналитическая геометрия, 3 изд., М., 1981 (соавтор Э. Г. Позняк); Линейная алгебра, 3 изд., М., 1984 (соавтор Э. Г. Позняк); Основы математического анализа, ч. 1, 4 изд., М., 1982; ч. 2, 2 изд., М., 1980 (соавтор Э. Г. Позняк); Математический анализ, ч. 1—2, М., 1985—87 (соавторы В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов).

● «Дифференциальные уравнения», 1978, т. 14, № 5.

КУЗНЕЦО́В Николай Васильевич (р. 24.6.1939, Хачмас Азербайджанской ССР) — советский математик, чл.-корр. АН СССР (1987). Чл. КПСС с 1986. Окончил Московский физико-технич. ин-т (1962). В 1973—81 в Хабаровском комплексном научно-исследовательском ин-те, с 1981 зам. директора Вычислительного центра Дальневосточного отделения АН СССР. Основные труды по математич. физике, теории автоморфных функций и теории чисел.

■ О собственных функциях одного интегрального уравнения, «Записки научных семинаров Ленинградского отделения Математического ин-та АН СССР», 1970, т. 17; Свертка коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна — Мааса, там же, 1983, т. 129.

МА́РЧЕНКО Владимир Александрович (р. 7.7.1922, Харьков) — советский математик, акад. АН СССР (1987) и АН УССР (1969; чл.-корр. 1961). Окончил Харьковский ун-т (1945), в 1945—61 работал там же (проф. с 1952). С 1961 зав. отделом Физико-технич. ин-та низких температур АН УССР. Основные труды по спектральной теории дифференциальных операторов, краевым задачам математич. физики, теории функций, методам интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений, прикладной и вычислительной математике. Ленинская премия (1962), премия имени Н. М. Крылова АН УССР (1982). Награждён 2 орденами Трудового Красного Знамени (1967, 1982).

■ Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей, К., 1974 (соавтор Е. Я. Хруслов); Нелинейные уравнения и операторные алгебры, К., 1986; Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, «Труды Московского матем. общества», 1952, т. 1, с. 327—420; 1953, т. 2, с. 3—83. ● «Успехи матем. наук», 1982, т. 37, в. 6.

МЕРКУ́РЬЕВ Станислав Петрович (р. 28.4.1945, с. Фёдоровка Кустанайской обл.)— советский математик, чл.-корр. АН СССР (1987). Чл. КПСС с 1968. Окончил Ленинградский ун-т (1967), с 1967 работает там же (проф. с 1983, ректор с 1986). Основные труды по математич. физике, им разработана квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц в конфигурационном пространстве. Иностранный чл.-корр. Академии наук и искусств в Барселоне (1985). Награждён орденом «Знак Почёта» (1986).

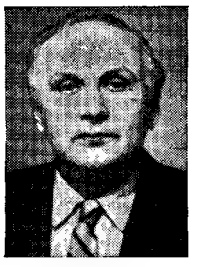
■ Координатная асимптотика волновых функций для систем трех заряженных частиц, «Теоретическая и математическая физика», 1977, т. 32, № 2, с. 187—207; Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц, М., 1985 (соавтор Л. Д. Фаддеев).

ПЛАТО́НОВ Владимир Петрович (р. 1.12.1939, дер. Стайки Витебской обл.)— советский математик, акад. АН СССР (1987), акад. (1972; чл.-корр. 1969) и президент (с 1987) АН БССР. Засл. деятель науки БССР (1982). Чл. КПСС с 1971. Окончил Белорусский (Минск) ун-т (1961), в 1961—71 работал там же (проф. с 1968). С 1971 в Ин-те математики АН БССР (с 1977 директор). Главный редактор журнала «Доклады АН БССР» (с 1987). Основные труды по теории алгебраич. групп, топологич. алгебре, алгебраич. геометрии, алгебраич. теории чисел. Ленинская премия (1978), премия Ленинского комсомола (1968). Награждён орденом Трудового Красного Знамени (1979).

■ Теория алгебраических линейных групп и периодические группы, «Изв. АН СССР. Сер. математическая», 1966, т. 30, № 3; Проблема сильной аппроксимации и гипотеза Кнезера — Титса для алгебраических групп, там же, 1969, т. 33, № 6; Проблема Таннака — Артина и приведенная K-теория, там же, 1976, т. 40, № 2; Гипотеза Дьедонне о строении унитарных групп над телом и эрмитова K-теория, там же, 1984, т. 48,

В. В. Воеводин.

В. А. Ильин.



Н. В. Кузнецов.

В. А. Марченко.

С. П. Меркурьев.

В. П. Платонов.

В. Г. Романов.

Ф. Л. Черноусько.

№ 6 (соавтор В. И. Янчевский); Мультипликативная структура тел над числовыми полями и норменный принцип Хассе, «Труды Матем. ин-та АН СССР», 1984, т. 165 (соавтор А. С. Рапинчук).

РОМА́НОВ Владимир Гаврилович (р. 5.11.1938, Надеждинск Свердловской обл.)— советский математик, чл.-корр. АН СССР (1987). Чл. КПСС с 1971. Окончил Московский ун-т (1961). С 1961 работает в Сибирском отделении АН СССР (с 1987 зам. директора Ин-та математики), с 1962 — в Новосибирском ун-те (проф. с 1974). Основные труды по теории обратных задач для уравнений математич. физики, интегральной геометрии, математич. методам в геофизике. Государственная премия СССР (1987).

■ Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, Новосиб., 1972; Некорректные задачи математической физики и анализа, М., 1980 (соавторы М. М. Лаврентьев, С. П. Шишатский); Обратные задачи математической физики, М., 1984.

ЧЕРНОУ́СЬКО Феликс Леонидович (р. 16.5.1938, Ленинград) — советский математик и механик, чл.-корр. АН СССР (1987). Чл. КПСС с 1979. Окончил Московский физико-технич. ин-т (1961). С 1968 работает в Ин-те проблем механики АН СССР. Основные труды по механике, процессам управления, вычислительной математике. Государственная премия СССР (1980), премия Ленинского комсомола (1971).

■ Вариационные задачи механики и управления, М., 1973 (соавтор Н. В. Баначук); Игровые задачи управления и поиска, М., 1978 (соавтор А. А. Меликян); Оптимальное управление при случайных возмущениях. М., 1978 (соавтор В. Б. Колмановский); Управление колебаниями, М., 1980 (соавторы Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов).

МАТЕМАТИКА В ЭНЦИКЛОПЕДИЯХ ПРЕЖНИХ ЛЕТ

Статьи по математике и о математиках начали появляться в справочных изданиях типа энциклопедий (от греч. ἐγκύκλιος παιδεία — обучение по всему кругу знаний) и словарей (перевод греческого λεξικόν, от λέξις — слово) около 300 лет назад. Большое число энциклопедий и словарей (лексиконов), включавших математич. статьи, вышло в кон. 17 — нач. 18 вв. В большинстве случаев термины располагались в алфавитном порядке.

Одним из первых удачных изданий такого рода явилась выдержавшая с 1728 менее чем за 20 лет 5 изданий 2-томная английская «Циклопедия, или Всеобщий словарь искусств и наук» («Cyclopaedia, or Anniversal dictionary of arts and sciences») Э. Чеймберса (E. Chambers, 1680—1740), написавшего и многие помещённые в ней статьи. Однако наиболее знаменитой энциклопедией «века просвещения», оказавшей огромное влияние на развитие идеологии той эпохи, вскоре стала «Энциклопедия, или Толковый словарь наук, искусств и ремёсел» («Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers»), 28 томов (17 томов текста и 11 томов «гравюр») к-рой вышли в 1751—72, 5 томов дополнений в 1777 и 2-томный указатель в 1780. Редактором этого гигантского труда с начала и до конца был Д. Дидро (D. Diderot, 1713—84) и до 1758—Ж. Д'Аламбер (J. D'Alembert, 1717—83), поместивший в «Энциклопедии» ряд статей по математике (перевод нек-рых из них помещён ниже), а кроме того, вводный общий «Очерк происхождения и развития наук», содержащий их классификацию. «Энциклопедия» имела огромный успех и уже вскоре после завершения в 1772 основной её части была переведена на 4 иностранных языка. Биографич. статьи в «Энциклопедии» отсутствовали. В редакционном предисловии говорилось, что цель «Энциклопедии» — собрать и систематически изложить совокупность знаний для блага человечества в настоящем и будущем с тем, чтобы люди стали образованнее и тем самым доброжелательнее и счастливее. Позднее статьи «Энциклопедии», сгруппированные по научным дисциплинам, издавались под общим названием «Систематическая энциклопедия» («Encyclopédie méthodique...»); в 1782—1832 было выпущено 199 томов, отдельно были изданы, в частности, все статьи по математике (2-е издание их потребовалось уже в 1789).

На протяжении 2-й пол. 18 — 19 вв. во всех цивилизованных странах были созданы многочисленные энциклопедии на национальных языках. Получили особенную известность следующие из них. Английская «Британская энциклопедия» («The Encyclopaedia Britannica», Edinburgh, 1768—71), впервые вышедшая в 3 томах, затем переиздававшаяся вплоть до настоящего времени, причём число томов неуклонно возрастало (с нач. 40-х гг. 20 в. издаётся в США). Различные немецкие словари, выпускавшиеся в 19 в. фирмой, основанной Ф. А. Брокгаузом (F. A. Brockhaus, 1772—1823) и названной в 1814 его именем. Французский 17-томный «Большой всеобщий словарь XIX века» («Grand Dictionnaire universel du XIX siècle», P., 1865—90) П. Ларусса (P. Larousse, 1817—1875), также много раз переиздававшийся. При этом во многих странах конкурировали различные энциклопедии. Как правило, в них имелись статьи по всем главным отраслям знания и биографии учёных.

В 19 в. аналогичные издания появились и в России. Среди них — широко задуманный «Энциклопедический лексикон» А. А. Плюшара (1806—65), сумевшего, однако, в силу финансовых обстоятельств выпустить в 1835—41 лишь 17 томов (до буквы Д включительно); затем «Энциклопедический словарь, составленный русскими учёными и литераторами», издание к-рого также вынужденным образом оборвалось на 6-м томе (1861—63) (три статьи, написанные для этого словаря П. Л. Чебышевым, помещены ниже). Более удачными явились «Настольный словарь для справок по всем отраслям знания» под редакцией Ф. Г. Толля (1823—67), все три тома к-рого вместе с двумя дополнениями были изданы в Петербурге в 1863—77, и «Русский энциклопедический словарь» в 17 томах (1873—1879) под редакцией И. Н. Березина (1818—96). Все эти и другие энциклопедии, однако, далеко уступают не только по числу статей, но и по их качеству превосходному состоящему из 82 основных и 4 дополнительных полутомов (всего 43 тома) «Энциклопедическому словарю», выпущенному в 1890—1907 в Петербурге двумя фирмами: Ф. А. Брокгауза (Лейпциг) и И. А. Ефрона (Петербург). К составлению словника этого издания, написанию и редактированию статей были привлечены лучшие специалисты, и неудивительно, что оно имело очень большой успех. «Энциклопедический словарь» содержит весьма обстоятельные и компетентные статьи по всему циклу физико-математич. наук (статья В. В. Бобынина «Математика» воспроизводится ниже), а также сведения об отдельных учёных, университетах, научных обществах и т. д. Словарь сохраняет свою ценность до наших дней. Много внимания математике и математикам уделено в «Большой советской энциклопедии» (1-е изд., 65+1 томов, М., 1926—47; 2-е изд., 50+1 томов, М., 1950—58; 3-е изд., 30 томов, М., 1969—78).

Первые специализированные математич. словари появились в кон. 17 в. Они были составлены итальянцем Дж. Витале (G. Vitale, 1624—98), автором «Математического лексикона» («Lexicon mathematicum», P., 1668), англичанином Дж. Моксоном (J. Moxon, 1627—1700), автором «Доступной математики, или Математического словаря» («Mathematics made Easie, or Mathematical Dictionary», L., 1679), и французом Ж. Озанамом (J. Ozanam, 1640—1717), в «Математическом словаре» («Dictionnaire mathématique», P., 1690) к-рого статьи расположены в предметном порядке, но им можно пользоваться и как алфавитным словарём благодаря наличию алфавитного предметного указателя. Впрочем, названные труды заслуживают упоминания только как первые издания в своём роде; по содержанию же они весьма небогаты. Гораздо более полным и полезным был немецкий алфавитный «Математический лексикон» («Mathematisches Lexicon», Lpz., 1716) Х. Вольфа (Ch. Wolff, 1679—1754), пере-

воды отдельных статей к-рого помещены ниже. Из математич. словарей, вышедших на рубеже 18 в. и 19 в., заслуживает упоминания также «Математический словарь» («Mathematisches Wörterbuch») Г. С. Клюгеля (G. S. Kluegel, 1739—1812), успевшего подготовить лишь первые 3 тома (Lpz., 1803—08); 4—5-е тт. и 2 дополнительных тома, вышедшие в 1823—36, были подготовлены другими учёными. В России «Лексикон чистой и прикладной математики» начал, но не закончил издавать В. Я. Буняковский (1804—89), располагавший статьи в алфавитном порядке их французских названий; он довёл дело только до буквы Д включительно («Предуведомление» к этому «Лексикону» и примеры статей воспроизведены ниже). Из современных нам специализированных математич. энциклопедий следует отметить немецкий (ГДР) «Математический словарь» Й. Нааза (J. Naas) и Г. Л. Шмида (H. L. Schmid) («Mathematisches Wörterbuch», 3 Aufl., Bd 1—2, B., 1974), японский «Энциклопедический математический словарь» («Encyclopedic Dictionary of Mathematics», 2 ed., v. 1—4, Camb. (Mass.) — L., 1987) и наиболее фундаментальную отечественную «Математическую энциклопедию» (т. 1—5, М., 1977—85), изданную под редакцией И. М. Виноградова.

Что касается биографий математиков, то литература здесь поистине неисчерпаема. Биографии приводятся, помимо универсальных энциклопедий, в различных «Национальных биографиях» выдающихся деятелей культуры, например в «Критикобиографическом словаре русских писателей и ученых» С. А. Венгерова (1855—1920), к сожалению, не вполне законченном (6 тт., СПБ, 1889—1904), в отдельных монографиях, брошюрах, сборниках и т. д.

Несколько особняком стоят специализированные предметные энциклопедии, в к-рых материал распределён по отдельным дисциплинам, методам, проблемам и т. п. Наиболее обширным математич. трудом такого рода была изданная в начале нашего столетия «Энциклопедия математических знаний, с включением их применений» («Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen», Bd 1—6, Lpz., 1898—1934; 2 Aufl., Bd 1—3, Lpz., 1950—67), вдохновителем и одним из редакторов к-рой был Ф. Клейн (F. Klein, 1849—1925). В 1904 начал печататься французский вариант этого издания («Encyclopédie des sciences mathématique pures et appliquées», t. 1—7, P.— Lpz., 1904—14). На более элементарном уровне составлялась итальянская энциклопедия этого типа («Enciclopedia delle matematiche elementari...», v. 1—3, Milano, 1930—53). В этих изданиях нет биографий учёных, но немало историч. справок, а в итальянской энциклопедии значительная часть последнего тома отведена истории элементарной математики (до исчисления бесконечно малых включительно). Из более поздних изданий этого типа следует отметить отечественную «Энциклопедию элементарной математики» (т. 1—5, М., 1951—66, редакторы П. С. Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин) и немецкую однотомную «Маленькую энциклопедию. Математика» («Mathematik. Kleine Enzyklopädie», Lpz., 1965; 12 Aufl., Lpz., 1983), снабжённую интересными иллюстрациями и удобным предметным указателем.

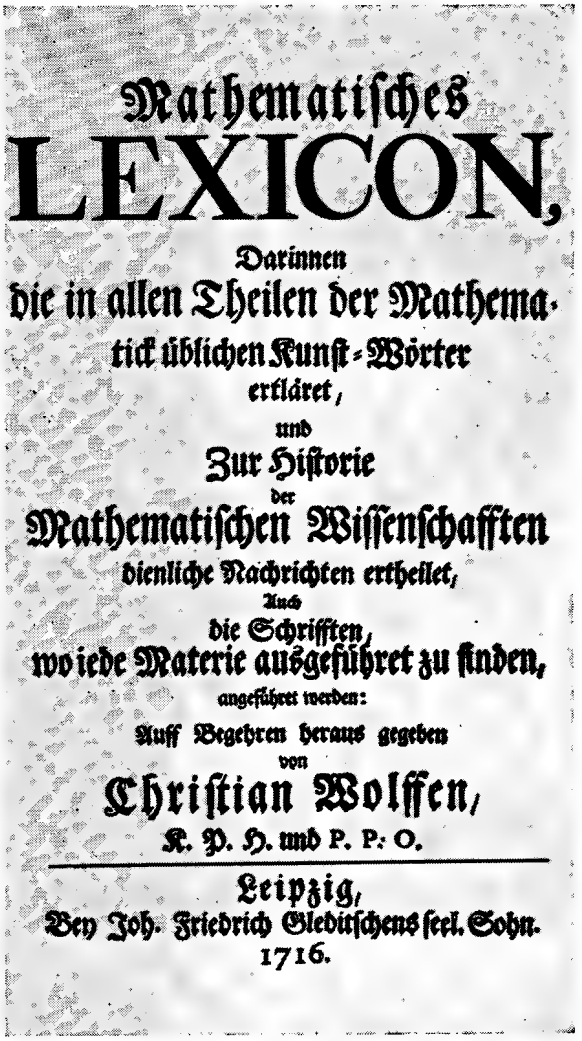
А. П. Юшкевич.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЛЕКСИКОН Х. ВОЛЬФА

(см. ниже примечание [1]) вышел в 1716.

Автор «Лексикона» Х. Вольф (1679—1754) — немецкий учёный и философ, профессор в Галле и Марбурге, автор руководств, оказавших значительное влияние на постановку преподавания математики в Германии и России. Сильной стороной Х. Вольфа была его поистине энциклопедическая образованность; вместе с тем он не был сколько-нибудь оригинальным мыслителем и учёным. Как мыслитель и как математик, он примыкал к школе Г. Лейбница, с к-рым был лично знаком и вёл переписку. Х. Вольф сыграл положительную роль и в развитии русской культуры: с ним консультировались при организации Петербургской академии наук, он был учителем М. В. Ломоносова, к-рый, впрочем, не разделял многие его натурфилософские воззрения. При жизни Х. Вольф пользовался большой известностью, о чём свидетельствует его избрание иностранным членом Берлинской, Парижской, Петербургской академий наук и Лондонского королевского общества.

Ниже в переводе с немецкого приведены полностью или в выдержках статьи о математике, дифференциальном исчислении, интегральном исчислении и теории вероятностей. Переводы и примечания сделаны А. П. Юшкевичем.


Mathematiſches
LEXICON,
Darinnen
die in allen Theilen der Mathematick üblichen Kunſt-Wörter
erkläret,
und
Zur Hiſtorie
der
Mathematiſchen Wiſſenſchafften
dienliche Nachrichten ertheilet,
Auch
die Schrifften,
wo iede Materie ausgeführet zu finden,
angeführet werden:
Auff Begehren heraus gegeben
von
Chriſtian Wolffen,
K. P. H. und P. P. O.
Leipzig,
Bey Joh. Friedrich Gleditſchens ſeel. Sohn.
1716.

Полный перевод титульного листа гласит:

Математический
лексикон,
в котором
объяснены общеупотребительные во всех частях математики термины и сообщаются сведения, полезные для истории математических наук, а также указаны сочинения, в которых можно найти изложение каждого вопроса, изданный попечением
Христиана Вольфа

МАТЕМАТИКА (см. [1], стр. 863—864) есть наука измерять всё, что поддаётся измерению. Обычно её описывают как науку о количествах, науку о величинах, то есть о тех вещах, которые могут увеличиваться или уменьшаться. Так как все конечные вещи могут измеряться во всём том, что они имеют в себе конечное, то есть чем они являются, то на свете нет ничего, к чему не могла быть применена математика. И так как нельзя иметь никакого более точного познания, чем если свойства вещей можно измерить, то математика приводит нас к наиболее совершенному познанию всех возможных в мире вещей. Так как, далее, это познание позволяет нам применять силы природы по нашему усмотрению для нашей пользы в той мере, в какой мы желаем, то мы достигаем благодаря математике господства над природой. А из этого объяснения математики вместе с тем явствует, что она состоит, собственно говоря, только из геометрии, арифметики и алгебры, ибо всё измерение покоится на этих науках. Таким образом, все остальные части математики суть не что иное, как заимствованные из других наук разделы, переработанные или доведённые до их совершенства с помощью математики. Так, мы имеем из физики механику, статику, гидростатику, гидравлику, оптику, катоптрику, диоптрику, перспективу, акустику, аэрометрию, астрономию, географию, гидрографию; из метафизики или, скорее, из онтологии — хронологию и гномонику; из политики получаем военное и гражданское строительство. Пользу математики я разъяснил в предисловии к моим «Eleménta Matheseos» [2].

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ (см. [1], стр. 283—284) есть наука вычислять бесконечно малую величину, которая, взятая бесконечно много раз, равна данной величине, а с другой стороны, по данной бесконечно малой величине находить ту, которой она, взятая бесконечно много раз, равна. Обыкновенно название дифференциального исчисления применяют только к первой части. Например, когда я провожу в полукруге половину ординаты PM и рядом ещё другую pm, которая берётся к ней бесконечно близко, то есть настолько близко, что их разность mR уже не может быть задана и потому без неподходящей ошибки линии PM и pm можно принять равными, то абсцисса AP увеличивается на бесконечно малую частицу Pp, полуордината PM — на бесконечно малую pm, дуга AM — на другую Mm и, наконец, площадь AMP — на бесконечно малую $PMpm$. Когда величину этих частиц вычисляют по уравнению круга, то при этом употребляют дифференциальное исчисление в узком смысле. Но это исчисление необходимо также в более широком смысле, когда ищется по бесконечно малой дуге Mm длина дуги AM, по бесконечно малой частице полуординаты mR сама полуордината и, наконец, по бесконечно малой площади $MPpm$ площадь AMP. Это исчисление придумал господин фон Лейбниц [3].

ДИФФЕРЕНЦИО - ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ (см. [1], стр. 288—289) есть часть дифференциального исчисления, в которой вычисляется бесконечно малая разность бесконечно малых частей. Я объясняю её в своих «Началах анализа бесконечных», разд. 4, и показываю её пользу, когда хотят найти точку перегиба кривых линий или определить радиус эволюты или соприкасания кривой в данной точке [4].

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ (см. [1], стр. 289) есть остроумнейшая часть дифференциального исчисления, с помощью которой дифференцируют экспоненциальные величины и суммируют или, по крайней мере, приводят к геометрическим построениям их дифференциальные величины. Экспоненциальными называют величины, которые имеют переменный показатель [5].

ИНТЕГРАЛЬНОЕ, ИЛИ СУММИРУЮЩЕЕ, ИСЧИСЛЕНИЕ (см. [1], стр. 290) есть другая главная часть дифференциального исчисления, которая учит суммировать бесконечно малые частицы, то есть как можно находить величины, из дифференцирования которых они возникли [6].

РЯД БЕСКОНЕЧНЫЙ (см. [1], стр. 1257) есть ряд чисел без конца, постоянно следующих в некотором порядке, так что их можно отчётливо постичь и отличить ото всех других рядов чисел. Таким образом, если найдены несколько членов такого ряда, то можно тотчас добавить сколько кому угодно других. Таков ряд $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+$ $+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}$ и т. д. до бесконечности. Голл-

штинец Николай Меркатор, проживающий в Англии, впервые показал в своей «Logarithmotechnia» (1668), как можно квадрировать кривые линии с помощью бесконечных рядов, если они не поддаются квадрированию иначе [7].

СТОХАСТИКА, ИСКУССТВО ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ (см. [1], стр. 1328—1329), есть наука определять вероятность какой-либо вещи. Например, кто имеет больше надежды выиграть в играх, чем другой; какова надежда попасть в воздвигнутую на данном расстоянии мишень; как учесть ход каких-либо вещей. Это искусство было до сих пор изучено очень мало. Такой труд решился предпринять Якоб Вернулли; однако, к сожалению, он не смог его завершить, ибо в его «Искусстве предположений», посмертно изданном сыном его брата господином Николаем Вернулли, не достаёт приложения к морали и политике и приведены лишь примеры различных игр, подобных тем, какие рассматривали сперва Паскаль и Ферма во Франции. Гюйгенс впервые ясно и подробно изложил начала этого искусства, которые с его согласия опубликовал в своих «Геометрических этюдах» Франц ван Схотен и вновь напечатал вместе со своими учёными примечаниями Вернулли в указанном ранее сочинении. Сюда относится также «Анализ азартных игр» Ремона де Монмора, значительно дополненный во втором издании [8].

ПРИМЕЧАНИЯ. 1. «Математический лексикон» («Mathematisches Lexicon», Lpz., 1716) Х. Вольфа не был первым изданием такого рода. Ему предшествовали словари, составленные итальянцем Дж. Витале (Париж, 1668), англичанином Дж. Моксоном (Лондон, 1679) и французом Ж. Озанамом (Париж, 1690), но по своему научному уровню и богатству терминологии труд Х. Вольфа неизмеримо превосходил более ранние и явился первой серьёзной математич. энциклопедией. В основном тексте его 1494 столбца; указатель терминов в конце книги занимает столбцы 1495—1608. Термины расположены в алфавитном порядке их латинских названий (с их немецким переводом). Этот труд Х. Вольфа воспроизведён в издании: Georg Olms, Hildesheim, 1965, подготовленном И. Э. Гофманом, в своём предисловии давшим критич. оценку книги и добавившим именной указатель.

2. Гномоника, к-рой Х. Вольф посвящает отдельную статью,— это учение о конструкции на какой-либо поверхности солнечных, лунных или звёздных часов. Далее следуют нек-рые замечания о преподавании математики, стр. 865—866. К статье «Математика» примыкают на стр. 868 статьи «Математика прикладная» и «Математика чистая, или Собственно математика», к к-рой принадлежат арифметика, геометрия с тригонометрией и алгебра, и ещё нек-рые другие статьи.

3. Далее, на стр. 284—288, следует довольно подробное изложение истории открытия дифференциального исчисления с упоминанием переписки И. Ньютона с Г. Лейбницем 1676—77, их взаимоотношений и спора о приоритете и указанием важнейшей литературы того времени, причём Х. Вольф становится в этом споре на сторону Г. Лейбница; попутно он замечает, что в Англии дифференциальное исчисление называется методом флюксий, переменные величины — флюентами, а дифференциалы — флюксиями. К цитированной статье примыкают ещё две заметки, характеризующие начальный этап развития дифференциального исчисления, а именно введение дифференциалов высших порядков и открытие правила дифференцирования показательной функции.

4. Здесь, как и в предыдущей, а также в последующих статьях, Х. Вольф ссылается на своё руководство «Elementa matheseos universae», Halle, 1713—41, а также на «Analyse de infiniment petits», Paris, 1696, Г. Лопиталя.

5. Дифференцирование экспоненциальных, т. е. показательных, функций представило вначале Г. Лейбницу нек-рые трудности, к-рые он и независимо И. Вернулли преодолели в 1697, о чём и говорится в статье Х. Вольфа. Между прочим, в определении показательной функции «Математический словарь» содержит опечатку: вместо einen veränderlichen Exponenten напечатано keinen . . .

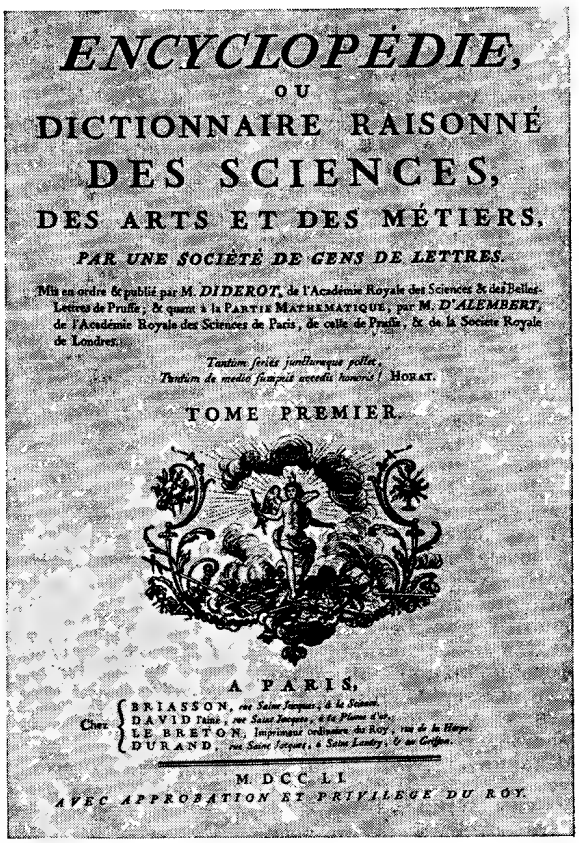
6. Далее, на стр. 290—291, говорится о нек-рых работах по интегрированию функций и дифференциальных уравнений, в частности с помощью бесконечных рядов, и добавлено, что интегральное исчисление «ещё далеко не достигло своего совершенства», почему не существует сводного труда по этому вопросу. Заглавие статьи объясняется тем, что первоначально, начиная с 1675, Г. Лейбниц пользовался термином «сумма», к-рый был заменён на «интеграл» по предложению Я. Вернулли, сделанному в 1690.

7. Н. Меркатор произвёл квадратуру гиперболы $y=\frac{1}{1+x}$, т.е., другими словами, представил $\ln(1+x)$ почленным интегрированием ряда, возникающего путём деления $1:(1+x)$. Далее, на стр. 1257—1261, Х. Вольф довольно подробно резюмирует многие результаты Дж. Валлиса, Дж. Грегори, У. Броункера, И. Ньютона, Г. Лейбница.

8. «Ars conjectandi» Я. Вернулли вышло из печати в 1713, но участие Н. Вернулли в его издании ограничилось только написанием предисловия и составлением списка опечаток. «Exercitationes geometricae» Ф. ван Схотена, в к-рых помещён был латинский перевод небольшого трактата об азартных играх Х. Гюйгенса, были напечатаны в 1657, а два издания «Essay d'analyse des jeux du hasard» Р. де Монмора, в подготовке второго из к-рых большое участие принял Н. Вернулли, увидели свет в Париже в 1708 и 1713 соответственно. Как видно из приведённой статьи, Х. Вольф не сумел оценить принципиальной новизны теоретико-вероятностной концепции Я. Вернулли, и в частности открытия и доказательства им закона больших чисел.

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ, ИЛИ ТОЛКОВЫЙ СЛОВАРЬ НАУК, ИСКУССТВ И РЕМЁСЕЛ

(см. примечание [1]) вышла в 1751—80. «Энциклопедия» сыграла огромную роль в развитии прогрессивной идеологии «века просвещения». Руководите-


ENCYCLOPÉDIE,
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS,
PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.
Mis en ordre & publié par M. DIDEROT, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Prusse; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, & de la Société Royale de Londres.
Tantùm series juncturaque pollet,
Tantùm de medio sumptis accedit honoris! HORAT.
TOME PREMIER.
A PARIS,
Chez BRIASSON, rue Saint Jacques, à la Science.
DAVID l'aîné, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.
LE BRETON, Imprimeur ordinaire du Roy, rue de la Harpe.
DURAND, rue Saint Jacques, à Saint Landry, & rue Gracieuse.
M. DCC. LI
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Полный перевод титульного листа гласит:

Энциклопедия,
или
Толковый словарь
наук,
искусств и ремёсел,
составленный обществом образованных людей.
Приведённый в порядок и изданный г. *ДИДРО*, членом Королевской Академии Наук и Прусской Академии Словесности, и в части математики г. *Д'АЛАМБЕРОМ*, членом Королевской Академии Наук в Париже, Пруссии и Лондонского Королевского Общества

...великую силу и важность
Можно и скромным словам
придать расстановкой и связью. ГОРАЦИЙ.

[Перевод с латинского М. Гаспарова; см. кн.: Квинт Гораций Флакк. Оды. Эподы. Сатиры. Послания. М., 1970, стр. 389—«Наука поэзии», строки 242, 243.]

лем этого издания, завоевавшего огромную популярность (число подписчиков «Энциклопедии», несмотря на её дороговизну, было около 4000, а служила она нескольким поколениям читателей), являлся выдающийся писатель и просветитель Д. Дидро (1713—84), к-рый привлёк к написанию статей многих крупных мыслителей и учёных. Математич. раздел возглавлял один из крупнейших математиков и механиков того времени Ж. Д'Аламбер (1717—83), написавший большое «Вступительное рассуждение» — очерк происхождения, развития и классификации наук (это «Рассуждение» имеется в русском переводе: «Очерк происхождения и развития наук», в кн.: Родоначальники позитивизма, вып. I, СПБ, 1910), а также многие математические статьи. Несколько лет Ж. Д'Аламбер был ближайшим помощником Д. Дидро, но в 1758 отошёл от этого дела, опасаясь преследований со стороны светских и церковных властей, весьма враждебно относившихся к «Энциклопедии».

Ниже в переводе с французского приведены полностью или в выдержках статьи Ж. Д'Аламбера по основаниям математич. анализа (статья «Предел» написана совместно с де ла Шапеллем); они следуют в порядке французского алфавита. Перевод сделан с двухтомного издания, в к-ром были особо объединены все статьи по математике и механике (см. [2]), но указаны годы выхода в свет соответствующих томов оригинального издания. Переводы и примечания сделаны А. П. Юшкевичем.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ (1754, [2, т. 1, с. 524—525]).

Нам важно заняться здесь метафизикой дифференциального исчисления. Эта метафизика, о которой столько писали, ещё важнее, и её, быть может, ещё труднее развить, чем сами правила этого исчисления ... [3].

Ньютон исходил из другого принципа, и можно сказать, что метод этого великого математика, данный в его исчислении флюксий, очень точен и ясен, хотя Ньютон и ограничился тем, что лишь бегло очертил его. Ньютон никогда не считал дифференциальное исчисление исчислением бесконечно малых, а видел в нём метод первых и последних отношений, т. е. метод определения пределов отношений. Этот знаменитый учёный никогда поэтому не дифференцировал величины, а только уравнения, ибо всякое уравнение заключает в себе отношение между двумя переменными, и дифференцирование состоит только в определении отношений между конечными разностями содержащихся в уравнении двух переменных ... [4].

ФЛЮКСИЯ (1756, [2, т. 2, с. 76—78]).

Г. Ньютон называет так в геометрии бесконечного то, что г. Лейбниц называет разностью. См. Разность и Дифференциал.

Г. Ньютон использовал слово флюксия, потому что рассматривает математические количества как порождённые движением; он ищет отношение переменных скоростей, с которыми описываются эти количества; эти-то скорости он называет флюксиями количеств: например, можно представить себе параболу, порождённую движением равномерно движущейся параллельно самой себе линии вдоль абсциссы, между тем как точка пробегает по этой линии с переменной скоростью, такой, что пройденная часть всегда есть средняя пропорциональная между какой-либо данной линией и соответствующей частью абсциссы. Отношение между скоростью этой точки в каждое мгновение и равномерной скоростью всей линии таково же, как флюксии ординаты к флюксии абсциссы; то есть $\dot{y}$ к $\dot{x}$: так как г. Ньютон обозначает флюксию количества поставленной сверху точкой [5].

Английские геометры, по крайней мере большей частью, приняли эту идею г. Ньютона и его характеристику; однако характеристика г. Лейбница, состоящая в том, что впереди ставится d, представляется более удобной и менее подверженной ошибке. (Буква) d видна лучше и при печатании меньше забывается, чем простая точка. С точки зрения метода, если рассматривать как флюксии то, что г. Лейбниц называет разностью [6], то несомненно, что он более правилен и более строг. Однако, мне кажется, ещё проще и точнее рассматривать разности или, скорее, отношение разностей как предел отношения конечных разностей, как это разъяснено под словом Дифференциал. Вводить здесь движение — это вводить чуждую тут идею, вовсе не требующуюся для доказательства: впрочем, нет достаточно чёткой идеи о том, что такое скорость тела в каждое мгновение, когда эта скорость переменная. Скорость не есть что-либо действительное, см. Скорость; когда скорость равномерная, то это отношение пространства ко времени: об этом см. статью Уравнение (в конце). Но когда движение переменное, это уже более не отношение пространства ко времени, это отношение дифференциала пространства к дифференциалу времени; отношение, о котором нельзя составить чёткой идеи иначе чем с помощью идеи пределов. Таким образом, для того чтобы дать чёткую идею флюксий, необходимо вернуться к этой последней идее. Впрочем, исчисление флюксий абсолютно такое же, как дифференциальное исчисление; смотрите поэтому слово Дифференциал, где операции и метафизика этого исчисления разъяснены самым простым и самым ясным образом.

БЕСКОНЕЧНО МАЛОЕ (1759, [2, т. 2, с. 210]).

Так в геометрии называют количества, которые рассматривают как меньшие, чем любая определённая величина. Под словом Дифференциал мы в достаточной мере разъяснили, что это за так называемые (prétendus) количества, и мы доказали, что на самом деле они не существуют ни в природе, ни в допущениях геометров.

ПРЕДЕЛ (1765, [2, т. 2, с. 311—312]).

Говорят, что величина является пределом другой величины, если вторая может приблизиться к первой ближе чем на любую данную величину, сколь бы малой её не предположить, без того, однако, чтобы приближающаяся величина могла когда-либо превзойти величину, к которой она приближается; таким образом, разность между таким количеством и её пределом абсолютно неопределима (inassignable).

Например, предположим, что в круг вписаны и около него описаны два многоугольника. Очевидно, что можно увеличивать число их сторон [7] сколько угодно; в таком случае каждый многоугольник будет всё время всё более и более приближаться к окружности круга, контур вписанного многоугольника будет увеличиваться, а описанного уменьшаться; но периметр или контур первого не превзойдёт длины окружности, а у второго не станет меньше той же окружности; следовательно, окружность круга есть предел увеличения первого многоугольника и уменьшения второго.

1°. Если две величины представляют собой предел одного и того же количества, эти две величины равны между собой.

2°. Примем, что $A \times B$ есть произведение двух величин A и B. Допустим, что C есть предел величины A и D — предел величины B. Я утверждаю, что $C \times D$, произведение пределов, будет необходимым образом пределом $A \times B$ произведения обеих величин A, B.

Два эти предложения, которые в точности доказаны в «Основаниях геометрии» [8], служат принципами при строгом доказательстве того, что при умножении полуокружности на её радиус получается площадь круга (см. [2], т. 2, стр. 331 и след.).

Теория пределов есть основание истинной метафизики дифференциального исчисления. См. Дифференциал, Флюксия, Исчисление, Бесконечное. Собственно говоря, предел никогда не совпадает или же никогда не оказывается равным количеству, пределом которого является, но оно всё более и более к нему приближается и может отличаться от него сколь угодно мало. Например, круг есть предел вписанных и описанных многоугольников, ибо он никогда строго не совпадает с ними, хотя они и могут приближаться к нему до бесконечности. Это понятие может служить для разъяснения некоторых математических предложений. Например, говорят, что сумма убывающей геометрической прогрессии, первый член которой есть a и второй b, есть $\frac{aa}{a-b}$; это значение не есть, собственно говоря, сумма прогрессии, но предел этой суммы, то есть количество, к которому она может приблизиться сколь угодно близко, никогда не дойдя до него в точности [9]. Так как если e есть последний член прогрессии, то точное значение суммы есть $\frac{aa-be}{a-b}$, что всегда меньше $\frac{aa}{a-b}$, потому что даже в убывающей геометрической прогрессии последний член e никогда не равен 0; однако так как этот член непрестанно приближается к нулю, никогда его не достигая, то ясно, что 0 есть его предел и что, следова-

тельно, предел $\frac{aa-be}{a-b}$ есть $\frac{aa}{a-b}$, принимая $e=0$, то есть ставя на место e его предел. См. Последовательность, или ряд, Прогрессия и т. д.

ПРИМЕЧАНИЯ. Успехи математич. анализа в 1-й трети 18 в. были очень велики. Это относится и к методу флюксий, к-рый разрабатывал с 1665—66 И. Ньютон, и к дифференциальному и интегральному исчислению, к разработке к-рого независимо приступил в 1675 Г. Лейбниц. Неясности основных понятий, присущие обоим вариантам математич. анализа, а также необоснованность основных правил, служивших при выводе его теорем и их приложений, дали повод к критике, особенно резко выраженной в сочинении «Аналист» («Analyst», London, 1734) известного философа-идеалиста Дж. Беркли (1685—1753). Критика со стороны Дж. Беркли произвела сильное впечатление на современных ему математиков и породила обширную литературу как в Англии, так и на континенте Европы. Были предложены различные варианты обоснования анализа. Варианты математич. анализа, разработанные И. Ньютоном и Г. Лейбницем, в собственно математич. смысле были, по существу, равносильными, но отличались в терминологии и в методологич. плане. Метод флюксий И. Ньютона в известной мере продолжал традиции оксфордской математич. школы 14 в.: переменные величины (термин Г. Лейбница) И. Ньютон именовал флюэнтами (fluentes), текущими величинами, скорости их изменения — флюксиями (fluxiones), т. е. течениями (у Г. Лейбница этому соответствовало отношение дифференциалов). И. Ньютон пользовался бесконечно малыми, и, в частности, дифференциалу или разности (первоначальный термин), Г. Лейбница соответствовали у И. Ньютона моменты (momentum). Г. Лейбниц и его последователи — Я. и И. Бернулли, Г. Лопиталь и др.— открыто пользовались принципом пренебрежения в дифференциальных суммах бесконечно малыми членами в сравнении с конечными или бесконечно малыми высших порядков в сравнении с низшими. И. Ньютон провозглашал, что в математике нельзя пренебрегать и самыми малыми ошибками, но на практике не следовал своему собственному предложению; во многих случаях он именовал бесконечно малые величины исчезающими или едва-едва зарождающимися величинами. В «Математических началах натуральной философии» («Philosophiae naturalis principia mathematica», London, 1687) И. Ньютон дал систему теорем о «последних отношениях» величин исчезающих или «первых отношениях» величин зарождающихся; для таких отклонений величин он предложил термин «предел», не дав ему определения, как интуитивно очевидному, подобно понятию мгновенной скорости.

Защищая метод И. Ньютона, нек-рые английские математики предложили те или иные определения предела; несомненно, что здесь коренятся начала теории пределов, наиболее влиятельным пропагандистом к-рой стал Ж. Д'Аламбер; за Ж. Д'Аламбером, опубликовавшим в «Энциклопедии» несколько статей по основаниям математич. анализа, последовали многие, хотя далеко не все, математики последних десятилетий 18 в., а затем и 19 в., одним из первых — С. Люилье (1750—1840) в сочинении, премированном Берлинской АН по предложению Ж. Лагранжа, к-рый, впрочем, не был сторонником теории пределов и предложил своеобразную «теорию аналитических функций», основанную на допущении о представимости, вообще говоря, всех функций анализа их рядами Тейлора (1797). В России убеждённым сторонником теории пределов выступил С. Е. Гурьев (1766—1813).

1. Encyclopédie, ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des metiérs, 1751—1780.

2. Encyclopédie méthodique ou par ordre de matières, t. 1—2, Nouv. éd., Padoue, 1787—1789.

3. Далее Ж. Д'Аламбер кратко характеризует исчисление бесконечно малых Г. Лейбница.

4. Термин «производная» ввёл в 1797 Ж. Лагранж.

5. Пунктированное обозначение флюксий И. Ньютон ввёл только в 90-х гг. 17 в.

6. Термин и знак дифференциала Г. Лейбниц предложил в своей основополагающей статье, напечатанной в 1684.

7. Изложение в статье «Предел», написанной до слов «Теория пределов есть основание ...» де ла Шапеллем, а далее Ж. Д'Аламбером, не всегда корректное. Следовало бы говорить не только об увеличении числа сторон, но и о неограниченном уменьшении их длин. С. Е. Гурьев в 1799 заметил, что пропущено в данном авторами определении указание на то, что предполагается постоянство величины, называемой пределом.

Очевидно, что в определении предела предполагается монотонность изменения переменной величины. Так поступали и многие другие авторы, в том числе уже упоминавшийся С. Люилье в своём «Элементарном изложении начал высших исчислений»(«Exposition élémentaire des principes des calcules superièrs», Berlin, 1786). Впрочем, тот же С. Люилье отказался от этого ограничения в латинском издании своего труда (Тюбинген, 1795).

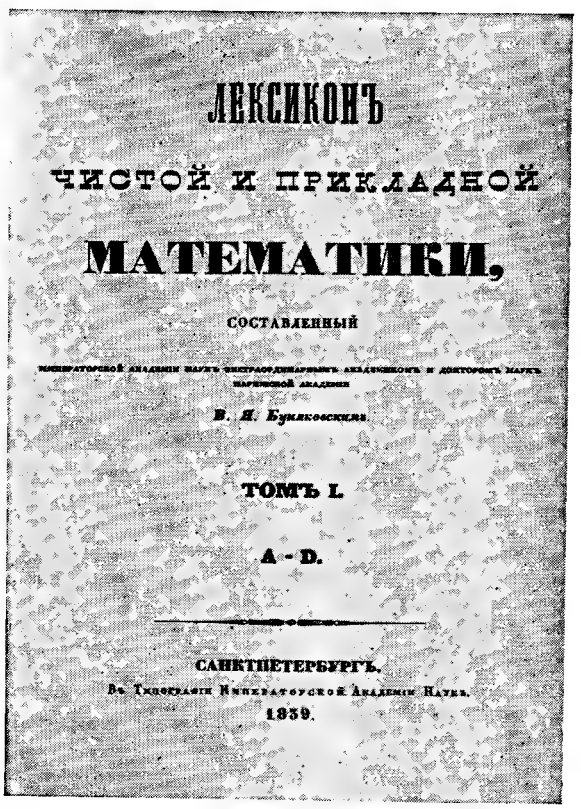
8. Речь идёт об учебнике де ла Шапелля «Institutions de geometrie»(vol. 1—2, Paris, 1746), изданном после официального одобрения Парижской АН (и, в частности, Ж. Д'Аламбером). Де ла Шапелль (de la Chapell, 1710—92) состоял королевским цензором в Париже.

9. Утверждение, что переменная, имеющая предел, никогда не достигает своего предельного значения, связанное с тем, что имелись в виду монотонные последовательности, стало одним из пунктов, вызвавших в своё время горячие споры.

ЛЕКСИКОН ЧИСТОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

В. Я. Буняковский (1804—89) задумал составить ещё в годы учения, когда он занимался под руководством крупнейших математиков знаменитой Политехнической школы в Париже, из к-рых особенно сильное влияние на него оказал О. Коши. Подготовке «Лексикона» В. Я. Буняковский уделил много времени и сил. Однако многочисленные другие занятия не позволили ему завершить задуманный им «Лексикон»; свет увидел в 1839 только I том, содержащий статьи, названия к-рых начинаются с А до Д — первых четырёх букв французского алфавита; расположены статьи именно в алфавитном порядке французских терминов, тут же переведённых на русский язык. Причиной такой структуры «Лексикона» явились недостаточная разработанность русской научной терминологии и абсолютная свобода, с к-рой составитель словаря владел французским. Нек-рое время В. Я. Буняковский продолжал подготовку статей и на последующие буквы алфавита: в Ленинградском отделении Архива АН СССР сохранились незаконченные и весьма краткие наброски небольшого числа таких статей, не доведённых, однако, до конца.

Многие статьи I тома «Лексикона» очень содержательны и обстоятельны. Неудивительно, что выход в свет I тома «Лексикона» был одобритель-


ЛЕКСИКОНЪ
ЧИСТОЙ И ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ,
СОСТАВЛЕННЫЙ
В. Я. Буняковскимъ
ТОМЪ I.
A - D.
САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
1839.

но встречен научной общественностью, быстро откликнувшейся на появление этого труда. Ниже с сохранением орфографии тех лет воспроизводятся «Предуведомление» к «Лексикону», статьи о деривационном исчислении Л. Арбогаста, изложение к-рого на русском языке остаётся весьма неполным, статья о производной и фрагмент статьи о дифференциальном исчислении, где рассматривается история спора о приоритете в открытии дифференциального и интегрального исчисления. Этот спор между сторонниками И. Ньютона и Г. Лейбница не вполне заглох до настоящего времени. Общий вывод В. Я. Буняковского (открытие И. Ньютоном метода флюксий предшествовало открытию Г. Лейбницем дифференциального исчисления, но первая публикация Г. Лейбница предшествовала публичному обнародованию метода флюксий И. Ньютона) не вызывает сомнений, как и его убеждение в независимости открытия Г. Лейбница. Вместе с тем многие детали спора между обеими сторонами были В. Я. Буняковскому неизвестны, также и подробности последующей дискуссии между противниками и сторонниками исчисления бесконечно малых, к-рой В. Я. Буняковский посвящает несколько строк (подробнее об этом см., напр., [1]). В своём изложении дифференциального исчисления В. Я. Буняковский довольно близко следует О. Коши, знаменитые лекции по исчислению бесконечно малых к-рого он перевёл на русский язык (см. [2]); это изложение в нашем Словаре опущено.

[1] История математики, т. 2, М., 1972, с. 241 и сл.; [2] К о ш и О., Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении, СПБ, 1831.

ПРЕДУВЕДОМЛЕНИЕ

Бедность нашей ученой литературы никогда еще не была так ощутительна как теперь, несмотря на довольно значительное число оригинальных и переводных сочинений, приобретенных ею в последнее двадцатипятилетие. Это кажущееся противоречие объясняется тем, что любовь к положительным знаниям более нежели когда нибудь начинает развиваться в нашем отечестве. Очень естественно, что при таком стремлении настоящаго поколения к умственному образованию, число существующих у нас учебных и ученых пособий должно было оказаться весьма недостаточным. Любознательность породила новыя требования, и сделала нас более взыскательными к достоинству произведений, появляющихся в области наук. Может быть, иные скажут, что эта самая взыскательность есть одна из причин скудости нашей современной ученой литературы, и это потому, что не всякий решается обнародовать свой труд, более или менее несовершенный, опасаясь суда знатоков, правда, еще немногочисленных. Но могла ли эта робость и недоверчивость к собственным силам замедлить ощутительным образом нашу литературную деятельность? Будем откровенны и сознаемся, что главная причина нашей бедности по всем отраслям положительных знаний есть незрелость умов, неразлучная с состоянием народа, уже ознаменовавшаго себя воинскими и гражданскими доблестями, но недавно вступившаго на поприще умственнаго образования. Это сознание не должно опечаливать нас: развитие ума человеческаго подлежит тому же закону строгой постепенности, как и явления в вещественном мире. Если примем в соображение короткий промежуток времени, отделяющий нас от поры невежества Русскаго народа, то утвердительно скажем, что возможное в великом деле просвещения исполнено у нас. И ежели бы чужеземец, считающий столетиями давность образованности своего отечества, упрекнул нас в застое умственнаго развития, то мы раскрыли бы перед ним наши летописи на тех эпохах, когда Англия озарялась гением Бекона, Локка, Ньютона, когда Франция гордилась Декартом, Паскалем, Ферматом, Германия — Кеплером, Лейбницем, Италия — Галилеем: он увидел бы, что в те времена едва заводились у нас типографии для печатания церковных книг. Беспристрастное сравнение России XVIII века с Россиею XIX столетия вполне убедит его в той истине, что может быть ни один народ, в такое короткое время, не сделал столь быстрых успехов в просвещении, как народ Русский.

Сказанное о бедности Русской ученой литературы вообще, может быть отнесено преимущественно к литературе математической, состояние которой составляет разительную противоположность с особенным влечением нашего юношества к изучению точных наук. Не находя на Русском языке удовлетворительных пособий, любители Математики по необходимости должны прибегать к иностранным сочинениям; но, уразумение книг, написанных не на родном языке, сопряжено для большей части читателей с непреодолимыми затруднениями, с одной стороны потому что в обыкновенных Лексиконах математические термины переданы с большею неточностию, а с другой, по причине недостаточности Русской математической номенклатуры.

Можно сказать с достоверностию, что при таких обстоятельствах, первая потребность для распространения и усиления математических наук в нашем отечестве, есть издание полнаго курса Математики и Математическаго Лексикона. Составление хорошаго и вместе полнаго курса чрезвычайно трудно: легко убедиться в этом, приняв в соображение, что ни на одном языке не существует еще такого руководства, которое не заключало бы в себе важных недостатков, или, по крайней мере, пропусков. В ожидании полнаго курса Математики на отечественном языке, я предпринял удовлетворить второму требованию изданием Лексикона. Повторяю, необходимость такой книги становится у нас со дня на день более и более ощутительною *. Специальный Лексикон, составленный с добросовестностию и с знанием дела, может заменить в некотором отношении целую библиотеку по излагаемой в нем науке, конечно не для ученых, но для людей, занимающихся предметом с целию изучить его основательно.

С такими мыслями о потребностях нашей математической литературы, я приступил к осуществлению предприятия, которое давно сделалось любимою моею мечтою. Еще на скамьях аудиторий, слушая лекции знаменитых Европейских геометров, я замышлял уже Математический Лексикон. По мере того, как круг наук расширялся передо мной, я более и более убеждался в трудности предприятия; и теперь, отложил бы непременно на несколько лет издание моего Лексикона, если бы не был уверен, что не смотря на все его недостатки, он может принести пользу моим соотечественникам. Увлекаясь с одной стороны этим убеждением, а с другой ободряемый некоторыми любителями Математики, которые конечно судили слишком снисходительно о достоинстве моего труда, я решился приступить к его напечатанию, и представляю ныне на суд ученых первый том Лексикона.

Считаю необходимым войти в некоторыя подробности относительно цели, образа исполнения и средств, которыми я располагал при составлении моего Математическаго Лексикона.

Главная цель издания состояла в том, чтобы доставить моим соотечественникам, занимающимся Математикою, и уже несколько знакомым с нею, такую книгу, в которой они могли бы почерпнуть достаточныя сведения о всех важнейших теориях, как старых, так и новейших. Для этого я объяснил в моем Лексиконе все термины *Чистаго Анализа*, *Аналитической* и *Начертательной Геометрии*, *Механики*, *Исчисления Вероятностей*, значительное число слов из *Астрономии*, *Геодезии*, *Прикладной Механики*, *Оптики*, *Гномоники*, *Опытной* и *Математической Физики* и из других наук, более или менее соприкосновенных с Математикою.

Второю целию издания было обогащение Русской математической номенклатуры, весьма неполной во многих отношениях. Я старался достигнуть этой цели во первых, введением новых слов в тех случаях,— и число их довольно значительно,— когда, для выражения известных понятий, мы не имеем никаких терминов, а во вторых, уместным употреблением математических речений, получивших уже право гражданства в нашем языке. Когда, при переводе какого либо Французскаго термина, выставлено в моем Лексиконе несколько Рус-

* Чтобы не обвинили меня в умышленном или неумышленном пропуске, я вынужден упомянуть об одном опыте в этом роде: я разумею *Военный и Математический Словарь* Вельяшева-Волынцова, напечатанный в 1808 году. Но, стоит только раскрыть это руководство, чтоб удостовериться в совершенном его ничтожестве в отношении математических наук. Об этой книге можно смело сказать, что если она не причинила вреда своими превратными понятиями о предметах, а также своим искаженным языком, то наверное не могла принести и никакой пользы. Сколько мне известно, других опытов на Русском языке не было.

ских слов, то *вообще* первое слово, по моему мнению, должно быть предпочтено другим по каким либо причинам, например, по своей определительности, или потому что оно более свойственно духу Русскаго языка, и т. п. Впрочем, иногда слова бывают равносильныя; тогда фразеология покажет, в каких случаях должно употреблять одно, преимущественно пред другим.

Наконец, третья цель состояла в том, чтобы доставить любителям точных наук, мало знакомым с Французским языком, возможность читать и понимать Французския математическия книги. Польза от этого очевидна: утвердительно можно сказать, что ни один народ не имеет такой богатой математической литературы, как Французский. Для достижения этой цели я расположил Лексикон по Французскому алфавиту, и перевел все термины на Русский язык с надлежащими объяснениями, и с присовокуплением фразеологии, по возможности подробнейшей. Надеюсь, что в этом отношении он удовлетворит даже взыскательных читателей. В нем найдут они самый полный свод Французских математических слов. Что касается до фразеологии, то меня скорее могут упрекнуть в излишней полноте, чем в противном недостатке. Наконец, для удобности читателей, во-все незнающих Французскаго языка, будет помещен в конце Лексикона полный алфавитный список Русских математических слов с их переводом на Французский язык. При таком пособии, приискивание статей не будет представлять ни малейшаго затруднения.

Когда какая либо теория, по значительному объему своему, не могла войти в Лексикон со всеми подробностями, то я делал ссылки на книги или на отдельныя записки, в которых можно почерпнуть полныя сведения о том предмете. То же самое наблюдал я вообще и в рассуждении различных отраслей Чистой и Прикладной Математики. Так, например, в статьях: *Алгебра*, *Астрономия*, *Исчисление Конечных Разностей* и проч. читатели найдут указания на лучшие трактаты об этих науках. Впрочем, при изложении статей большаго объёма, я старался по возможности обозначать порядок предложений и ход доказательств так, чтобы читатель, несколько сведущий в Математике, мог безтруда пополнить сам пропущенное за недостатком места. Подобный способ изложения имеет без сомнения весьма полезную сторону, ибо заставляет читателя прибегать иногда к собственным своим силам, а это самое ведет его к более основательному изучению предмета.

В состав Лексикона вошла также История различных отраслей математических наук. Равным образом читатели найдут в нем историческия и хронологическия показания о разных теориях и задачах, относящихся к чистому и прикладному анализу. Эти две статьи, весьма важныя по моему мнению, служат необходимым дополнением к курсам Математики, в которых, по большей части, во-все опущены как историческия, так и хронологическия сведения.

Я уже сказал, что число новых Русских слов, входящих в мой Лексикон, довольно значительно. Они не отмечены в тексте особенным знáком; читатели, сведущие в Русской математической литературе, легко заметят их. Опытность и время покажут, какия из предлагаемых мною нововведений могут быть приняты и которыя из них должны быть откинуты. Впрочем, я тогда только отступал от номенклатуры и языка Русских писателей о Математике, когда, по разумению моему, изменения были необходимы.

Для удобнейшаго приискания статей, объясняющих чертежи, выставлены на сих последних относящияся к ним страницы текста.

Что касается до средств, которыми я располагал при составлении моего Лексикона, то в этом отношении я не мог терпеть никакого недостатка. С одной стороны замечания ученых моих сослуживцев по Академии, преимущественно же советы Г. Остроградскаго, а с другой, богатство Библиотеки Императорской Академии Наук, поставили меня в возможность дать моему труду такую полноту, которой трудно было бы достигнуть, даже нескольким делателям, при обстоятельствах, менее благоприятных. Вменяю себе в приятный долг изъявить пред всеми искреннюю благодарность тем Гг. Академикам, советами которых я пользовался при составлении моего Лексикона.

Всякое сочинение, как дело человеческое, имеет свои недостатки. Я очень знаю, что мой труд, более нежели многие другие, должен, по сущности своей, подать повод к справедливым критическим замечаниям. Разнообразие предметов, которые для полноты должны входить в состав Лексикона Чистой и Прикладной Математики, трудность соразмерить объём статей с относительною их важностию и не упустить из виду единства в изложении, решительная невозможность избежать в некоторых случаях повторений, необработанность нашего математическаго языка,— все это заставляет меня думать, что несмотря на все мои старания, книга моя далёко еще не удовлетворит условиям хорошаго лексикографическаго руководства. Может быть, отечественные математики найдут также, что некоторые термины и речения переданы не совсем удачно в моем Лексиконе; заранее прошу их быть снисходительными к таким недостаткам. До сих пор у нас не было никакого авторитета для Русскаго математическаго языка; и так, может ли первый опыт установить терминологию науки, в такой степени обширной и многосторонней, как Математика?

Сознаваясь с откровенностию в слабых сторонах моего труда, я позволяю себе вместе с тем обратить внимание читателей на полноту моего Лексикона в разсуждении числа математических терминов по предмету Чистаго Анализа, Геометрии, Умозрительной Механики и Исчисления Вероятностей. Смело скажу, что в этом отношении, Лексикон мой имеет преимущество пред всеми доселе изданными на иностранных языках математическими словарями, и вот на чем я основáваю это утверждение. При составлении алфавитнаго списка математических терминов, я имел в виду почти все Математические Лексиконы и списки слов на Французском и на Немецком языках. Сверх того, безпрерывныя справки с Записками главных Академий и Ученых Обществ, а также чтение отдельных сочинений, журналов и диссертаций по разным предметам математических наук, доставили мне огромный итог терминов, сводом которых я уже занимаюсь слишком десять лет. При таких пособиях нетрудно было составить самый полный сборник слов и речений математических. Смею также надеяться, что Лексикон мой не отстал и от современнаго состояния науки.

Предпринятое мною сочинение будет состоять из *трех* томов: первый подвергается ныне суду отечественных ученых. Для втораго и третьяго, уже собрано у меня очень много материалов; но эти материалы требуют еще тщательной обработки и значительных пополнений. В конце третьяго тома будут помещены некоторыя дополнения ко всему изданию. *В. Буняковский.*

Апреля 17 дня 1839-го года.

ДЕРИВАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. Так назвал *Арбогаст*, профессор Математики в Стразбурге, придуманный им общий способ для разложения в ряды различных видов функций об одной или нескольких переменных. Сочинение его под заглавием: *Du Culcul des Dèrivations, par L. F. A. Arbogast*, à Strasbourg, An VIII (1800), in-4°, содержит в себе подробное изложение правил этого исчисления и множество весьма примечательных приложений, свидетельствующих о плодовитости и о пользе теории, о которой говорим. Непонятно почему способ Арбогаста не имел общаго успеха, котораго в праве был ожидать: может быть невнимание бóльшей части математиков к его книге произошло оттого, что она, не смотря на ясность изложения, по многочисленности новых знакоположений, требовала тщательного изучения, а следовательно и не мало времени.

Чтоб объяснить сущность Деривационнаго Исчисления приводим здесь слова Арбогаста, которыя заимствуем из его предисловия к упомянутому выше сочинению:

«Чтобы составить себе понятие о деривациях, заметим, что количества или функции, выводимыя одни из других посредством единообразных действий, суть количества производныя: таковы, например, последовательные дифференциалы. Можно распространить это понятие разсматривая количества, выводимыя одни из других не относительно их значений, но только в разсуждении действий, которыя соединяют и связывают их, при чем самыя количества предполагаются произвольными, независимыми между собою. И так, допустив, что из нескольких различных букв, только первая входит в некоторую функцию, между тем как две первыя входят известным образом в ея производную, три первыя, по тому же закону, в производную этой производной, и так далее, получим производныя функции в том обширном смысле, в котором я разумел их. Здесь уже количества, изображенныя различными буквами, не производятся одни от других; я разсматриваю производныя преимущественно в смысле производных от действий, чем производных от количеств. Подобным образом и Алгебра за-

нимается более действиями, которыя должны быть произведены над величинами, нежели самым вычислением этих величин».

«Деривация есть действие, посредством котораго выводят производную из предшествующей ей, или из функции. Способ Деривацій состоит вообще в определении закона, который связывает между собою различныя совокупления каких ни есть количеств, и в его употреблении для перехода от одной производной к другой».

Чтоб ознакомить сколько нибудь наших читателей с самыми приёмами Деривационнаго Исчисления, предлагаем в самом кратком виде некоторыя из основных его начал; при этом изложении будем придерживаться первой главы сочинения Арбогаста.

§ 1. Пусть будет $f(\alpha+x)$ какая ни есть функция двучленнаго количества $\alpha+x$. Известно, что получится ряд вида

$$(1)\qquad f(\alpha+x)= a+bx+\frac{c}{1\cdot 2}x^2+\frac{d}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{e}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 \text{ и проч.},$$

в котором $a=f(\alpha)$, b выводится из a или $f(\alpha)$, c из b, d из c и проч. по одному и тому же закону. И так, зная каким образом b выводится из a или из $f(\alpha)$ мы будем в состоянии вывести c из b, d из c и проч.

Если изобразим характеристикою D действие, которое должно произвести над $f(\alpha)$ чтоб получить b, то очевидно будет $b=Df(\alpha)$, $c=DDf(\alpha)=D^2f(\alpha)$, $d=D^3f(\alpha)$ и проч. Следовательно ряд (1) может быть представлен в виде

$$(2)\qquad f(\alpha+x)= =f(\alpha)+\frac{Df(\alpha)}{1}x+\frac{D^2f(\alpha)}{1\cdot 2}x^2+\frac{D^3f(\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$$

Но мы знаем (Смот. Тейлора теорема), что приняв α за переменную, имеем

$$Df(\alpha)=\frac{df(\alpha)}{d\alpha},\quad D^2f(\alpha)=\frac{d^2f(\alpha)}{d\alpha^2},$$

$$D^3f(\alpha)=\frac{d^3f(\alpha)}{d\alpha^3} \text{ и пр.},$$

где $d\alpha$ изображает произвольную постоянную величину. Приняв $d\alpha=1$, получим просто

$$Df(\alpha)=df(\alpha),\ D^2f(\alpha)=d^2f(\alpha),$$
$$D^3f(\alpha)=d^3f(\alpha),\ \ldots,$$

а отсюда заключаем, что правила для определения деривацій в том случае, который разсматривается теперь, одинаковы с правилами для дифференцирования.

Для разложения функции $f(\alpha+\beta x)$ стоит только изменить x в βx в уравнении (2), в следствие чего получится

$$(3)\qquad f(\alpha+\beta x)= =f(\alpha)+\frac{Df(\alpha).\beta}{1}x+\frac{D^2f(\alpha).\beta^2}{1\cdot 2}x^2+ +\frac{D^3f(\alpha).\beta^3}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$$

В этом разложении можно разсматривать степени β как бы происшедшими от действий, произведенных над функциею $f(\alpha)$. Действительно, положим что α есть такая функция $f(a)$ переменной a, что $df(a)=\beta$, а $da=1$; в таком предположении $Df(\alpha)$ обратится в $\frac{df(\alpha)}{d\alpha}\cdot\frac{df(a)}{da}=\frac{df(\alpha)}{d\alpha}\cdot df(a)= =Df(\alpha)\cdot Df(a)$. Но так как, по причине $da=1$, имеем $Df(a)=df(a)=\beta$ и $D^2f(a)= =d^2f(a)=0$, то стоит только взять $f(a)=\beta a$, разумея под β величину постоянную.

Чтоб отличить это новое состояние деривации $Df(\alpha)$ от перваго, в котором $d\alpha=1$ и $D\alpha=1$, Арбогаст ставит точку после буквы D; и так $D.f(\alpha)=Df(\alpha).\beta$. В следствие этого условия $D.f(\alpha)$ будет производная от функции $f(\alpha)$, в которой α принимается за переменную, имеющую свою производную $D.\alpha=\beta=df(a)$; что касается до знакоположения $Df(\alpha)$, без точки после D, то оно изображает производную от $f(\alpha)$, где α принимается также за переменную, производная которой равна $D\alpha=1=d\alpha$.

Если над деривациею D, $f(\alpha)=Df(\alpha).D.\alpha= =Df(\alpha).\beta$ произведем то же действие, какое произвели над функциею $f(\alpha)$, то положив $D.\alpha=\beta$ постоянною, получим $D^2.f(\alpha)=D.(Df(\alpha).D.\alpha)=D^2f(\alpha).(D.\alpha)^2=D^2f(\alpha).\beta^2$; точно таким образом найдется $D^3.f(\alpha)=D.[D^2f(\alpha).(D.\alpha)^2]=D^3f(\alpha).(D.\alpha)^3=D^3f(\alpha).\beta^3$, и так далее. Следовательно ряд (3) примет вид

$$(4)\qquad f(\alpha+\beta x)= =f(\alpha)+\frac{D.f(\alpha)}{1}x+\frac{D^2.f(\alpha)}{1\cdot 2}x^2+ +\frac{D^3.f(\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$$

§ 2. Чтобы перейти от разложения функций двучленных количеств к многочленным, возьмем функцию φ обеих частей уравнения (4); получим

$$\varphi f(\alpha+\beta x)=\varphi\left(f(\alpha)+\frac{D.f(\alpha)}{1}x+ +\frac{D^2.f(\alpha)}{1\cdot 2}x^2+\ldots\right),$$

и, сверх того, подставив в формулу (4) φf вместо f,

$$\varphi f(\alpha+\beta x)=\varphi f(\alpha)+ +\frac{D.\varphi f(\alpha)}{1}x+\frac{D^2.\varphi f(\alpha)}{1\cdot 2}x^2+\frac{D^3.\varphi f(\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$$

И так, положив $f(\alpha)=a$, $D.f(\alpha)=D.a$, $D^2.f(\alpha)=D^2.a$ и проч. получится

$$(5)\quad\begin{cases}\varphi\left(a+\frac{D.a}{1}x+\frac{D^2.a}{1\cdot 2}x^2+\ldots\right)=\\ =\varphi(a)+\frac{D.\varphi(a)}{1}x+\frac{D^2.\varphi(a)}{1\cdot 2}x^2+\ldots\end{cases}$$

Остается только разложить деривации... $D.\varphi(a)$, $D^2.\varphi(a)$, $D^3.\varphi(a)$, ... Для этого вспомним, что $D.\varphi(a)=D\varphi(a).D.a$; но так как в настоящем случае $D^2.a$, $D^3.a$, ... не равны нулю, то деривации $D^2.\varphi(a)$, $D^3.\varphi(a)$, ... не будут соответственно равны величинам... $D^2\varphi(a).(D.a)^2$, $D^3\varphi(a).(D.a)^3$, ...; к этим членам должно еще прибавить другие, происходящие от изменяемости деривацій D.a, $D^2.a$ и проч.

Для определения $D^2.\varphi(a)$ надобно произвести над $D.\varphi(a)=D\varphi(a).D.a$, то самое действие, какое производили над функциею $\varphi(a)$, когда выводили из нея $D.\varphi(a)$, принимая при том $D^2.a$ за производную от D.a. Но так как правила для нахождения деривацій и дифференциалов одинаковы, то и получим:

$$D^2.\varphi(a)=D.(D\varphi(a).D.a)= =D\varphi(a)\times D.(D.a)+D.(D\varphi(a))\times D.a= =D\varphi(a).D^2.a+D^2\varphi(a).(D.a)^2;$$

подобным образом найдем:

$$D^3.\varphi(a)=D.\left[D^2.\varphi(a)\right]= =D.\{D\varphi(a).D^2.a+D^2\varphi(a).(D.a)^2\}= =D.\varphi(a).D^3.a+D^2.\varphi(a).D.a.D^2.a+ +D^2\varphi(a).2D.a.D^2.a+D^3\varphi(a).(D.a)^3= =D\varphi(a).D^3.a+3D^2\varphi(a).D.a.D^2.a+ +D^3\varphi(a).(D.a)^3;$$

и так далее.

Из этого легко усмотреть, что коэффициенты последовательных степеней x во второй части уравнения (5) происходят одни из других и из перваго члена $\varphi(a)$ по одному и тому же закону. Этот закон, собственно говоря, одинаков с тем, по которому составляются последовательные члены разложения функции $f(\alpha+x)$; одно только различие, что в $f(\alpha+x)$ производная $D\alpha=1$, между тем как в разсмотренном нами случае производная D.a есть величина переменная, которой производная равна $D^2.a$ и проч.

§ 3. Положим теперь что ищется функция φ многочленнаго выражения

$$a+bx+\frac{c}{1\cdot 2}x^2+\frac{d}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\text{и проч.}$$

в котором ни b не зависит от a, ни c от b, ни d от c, ... и где, одним словом, все коэффициенты a, b, c, d, ... изображают количества совершенно произвольныя. Если вообразим, что величины a, b, c, d, ... производятся одне от других, то получим как и выше

$$(6)\quad\begin{cases}\varphi\left(a+bx+\frac{c}{1\cdot 2}x^2+\frac{d}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots\right)=\\ =\varphi(a)+D.\varphi(a).x+\frac{D^2.\varphi(a)}{1\cdot 2}x^2+\\ +\frac{D^3.\varphi(a)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots\end{cases}$$

с тем условием, чтобы по составлении деривацій $D.\varphi(a)$, $D^2.\varphi(a)$, $D^3.\varphi(a)$, ... переменить D.a на b, $D^2.a$ на c, $D^3.a$ на d и проч.

Действительно, вторая часть уравнения (6), до подстановления b на место D.a, c на место $D^2.a$, d на место $D^3.a$, ... равна второй части уравнения (5); но, по разложении деривацій $D.\varphi(a)$, $D^2.\varphi(a)$, $D^3.\varphi(a)$,... в той формуле (5), получим тожественное уравнение, то есть такое, в котором деривации D.a, $D^2.a$, $D^3.a$,... могут быть принимаемы независимыми между собою, почему и можно будет в уравнении (5), по составлении деривацій, написать b вместо D.a, c вместо $D^2.a$, d вместо $D^3.a$ и проч. И так получим следующую теорему:

Изобразим чрез a, b, c, d, ... *какия ни есть количества, и положим что требуется разложить функцию*

$$\varphi\left(a+bx+\frac{c}{1\cdot 2}x^2+\frac{d}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots\right)$$

в ряд вида

$$A+Bx+\frac{C}{1\cdot 2}x^2+\frac{D}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots+\frac{An}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}x^n+$$

и прочие.

Коэффициенты A, B, C, D, . . . этого разложения определяются следующими формулами:

$$A=\varphi(a),\ B=D.\varphi(a),\ C=D^2\varphi(a),$$

$$D=D^3\varphi(a),\ \ldots$$

и вообще $A_n=D^n\varphi(a)$, *с тем условием, чтобы по разложении сих дериваций в предположении* D.a, D^2a, . . . *переменных, поставили* b на место D.a, c *на место* D^2a *или* D.b, d *на место* D^3a *или* D.c, *и проч.*

§ 4. Чаще случается, что многочленное выражение представляется в виде

$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots+\alpha_n x^n+$ и проч.,

то есть, без численных коэффициентов $\frac{1}{1\cdot2}$, $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}$, $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$, . . .; в таком случае должно предположить

$\varphi(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots+\alpha_n x^n+$ и проч.$)=$
$=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots+A_n x^n+$ и проч.

Определение коэффициентов *A*, *B*, *C*, *D*, . . . не представляет никакого затруднения: действительно, мы приводим предыдущий ряд к прежде-разсмотренному положив

$$\gamma=\frac{\gamma'}{1\cdot2};\ \delta=\frac{\delta'}{1\cdot2\cdot3},\ \ldots,\ \alpha_n=\frac{\alpha_n'}{1\cdot2\cdot3\ldots n},$$

$$C=\frac{C'}{1\cdot2},\ D=\frac{D'}{1\cdot2\cdot3},\ \ldots,\ A_n=\frac{A_n'}{1\cdot2\cdot3\ldots n},$$

в следствие чего он примет вид

$$\varphi\left(\alpha+\beta x+\frac{\gamma'}{1\cdot2}x^2+\frac{\delta'}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots+\frac{\alpha_n'}{1\cdot2\cdot3\ldots n}x^n+\text{ и проч.}\right)=$$
$$=A+Bx+\frac{C'}{1\cdot2}x^2+\frac{D'}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots+\frac{A_n'}{1\cdot2\cdot3\ldots n}x^n+\text{ и проч.}$$

Определив величины *A*, *B*, *C'*, *D'*, . . . , A_n' по объясненным выше правилам, и подставив потом

$1\cdot2\cdot\gamma$ *вместо* γ', $1\cdot2\cdot3\cdot\delta$ *вместо* δ', . . .,

$1\cdot2\cdot3\ldots\ldots n\cdot\alpha_n$ *вместо* α_n',

$1\cdot2\cdot C$ *вместо* C', $1\cdot2\cdot3\cdot D$ *вместо* D', . . .,

$1\cdot2\cdot3\ldots\ldots n\cdot A_n$ *вместо* A_n'

получим разложение функции $\varphi(\alpha+\beta x+\gamma x+$ $+\ldots)$.

Можно также поступить другим образом: прямо искать дериваци D.$\varphi(\alpha)$, $D^2\varphi(\alpha)$, $D^3\varphi(\alpha)$, . . . и потом подставить в них

β *вместо* D.α, $1\cdot2\gamma$ *вместо* $D^2\alpha$, $1\cdot2\cdot3\cdot\delta$ *вместо* $D^3\alpha$, . . ., $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\alpha_n$ *вместо* $D^n\alpha$,

B вместо D.*A*, $1\cdot2\,C$ *вместо* D^2A, $1\cdot2\cdot3\cdot D$ *вместо* D^3A, . . ., $1\cdot2\cdot3\ldots nA_n$ *вместо* D^nA.

Легко усмотреть, что если будем вычислять последовательно коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D*, . . ., делая в то же время сокращения, то надобно будет подставить

β *вместо* D.α, 2γ *вместо* D.β,

3δ *вместо* D.γ, . . ., $n\alpha_n$ *вместо* D.α_{n-1}.

B вместо D.*A*, $2C$ *вместо* D.*B*, 3D *вместо* D.*C*, . . ., nA_n *вместо* D.A_{n-1}.

Что касается до правил для определения дериваций D.$\varphi(\alpha)$, $D^2\varphi(\alpha)$, $D^3\varphi(\alpha)$ и проч., то они, для разсмотреннаго нами случая, совершенно одинаковы с правилами, по которым находим дифференциалы $d.\varphi(\alpha)$, $d^2\varphi(\alpha)$, $d^3\varphi(\alpha)$ и проч. в предположении количества α и последовательных его дифференциалов $d\alpha$, $d^2\alpha$, $d^3\alpha$, . . . переменных. Если сверх того заметим, что деривации, означаемыя характеристикою D без точки, то есть знакоположения $D\varphi(\alpha)$, $D^2\varphi(\alpha)$, $D^3\varphi(\alpha)$, . . ., соответственно изображают выражения $d\varphi(\alpha)$, $d^2\varphi(\alpha)$, $d^3\varphi(\alpha)$, . . ., в которых $d\alpha$ принимается за единицу, то получим

$$D.\varphi(\alpha)=D\varphi(\alpha)\times D.\alpha,$$

$$D^2\varphi(\alpha)=D\varphi(\alpha)\times D^2\alpha+D^2\varphi(\alpha)\times(D.\alpha)^2,$$

$$D^3\varphi(\alpha)=D\varphi(\alpha)\times D^3\alpha+3D^2\varphi(\alpha)\times D.\alpha\times D^2\alpha+$$
$$+D^3\varphi(\alpha)\times(D.\alpha)^3,$$

. . . . . .

или, написав β вместо D.α, $1\cdot2\cdot\gamma$ вместо $D^2\alpha$, $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\delta$ вместо $D^3\alpha$, . . .,

$$(7)\quad\begin{cases}D.\varphi(\alpha)=D\varphi(\alpha)\cdot\beta,\\ D^2\varphi(\alpha)=D\varphi(\alpha)\cdot1\cdot2\cdot\gamma+D^2\varphi(\alpha)\cdot\beta^2,\\ D^3\varphi(\alpha)=D\varphi(\alpha)\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\delta+\\ +3D^2\varphi(\alpha)\cdot\beta\cdot(1\cdot2\cdot\gamma)^2+D^3\varphi(\alpha)\cdot\beta^3,\end{cases}$$

. . . . . .

Первый член $\varphi(\alpha)$, из котораго выводятся все последующие, Арбогаст называет *началом дериваций*.

§ 5. Для объяснения приведенных здесь правил Деривационнаго Исчисления, предлагаем несколько примеров.

Пример I. Разложить логарифмическую функцию

$$log\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\ldots)$$

в ряд вида

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots$$

Если положим $x=0$, то найдем $A=\log\alpha$; из этого перваго члена, на основании сказаннаго в §§ 3 и 4, выводим последовательные коэффициенты *B*, *C*, *D*, *E*, . . . Вот подробности этих вычислений:

$A=log\,\alpha$,

$$B=D.log\,\alpha=\frac{D.\alpha}{\alpha}=\alpha^{-1}\cdot\beta,$$

$$2C=D.(\alpha^{-1}\cdot\beta)=\alpha^{-1}\cdot2\gamma-\alpha^{-2}\cdot\beta^2,$$

откуда

$$C=\alpha^{-1}\cdot\gamma-\frac{\alpha^{-2}\beta^2}{2};$$

взяв деривацию, получим

$$3D=\alpha^{-1}\cdot3\delta-\alpha^2\beta\gamma-\frac{\alpha^{-2}}{2}\cdot2\beta\cdot2\gamma+\frac{2\alpha^{-3}}{2}\beta\cdot\beta^2,$$

ли, по сокращении

$$D=\alpha^{-3}\cdot\delta-\frac{\alpha^{-2}}{2}\cdot2\beta\gamma+\frac{\alpha^{-3}}{3}\beta^3;$$

взяв опять деривацию, найдем

$$4E=\alpha^{-1}\cdot4\varepsilon-\alpha^{-2}\beta\delta-\frac{\alpha^{-2}}{2}(2\beta\cdot3\delta+2\cdot2\gamma^2)+$$
$$+\frac{2\alpha^{-3}}{2}\beta\cdot2\beta\gamma+\frac{\alpha^{-3}}{3}\cdot3\beta^2\cdot2\gamma-\frac{3\alpha^{-4}}{3}\beta^4,$$

откуда по сокращении,

$$E=\alpha^{-1}\cdot\varepsilon-\frac{\alpha^{-2}}{2}(2\beta\delta+\gamma^2)+\frac{\alpha^{-3}}{3}\cdot3\beta^2\gamma-\frac{\alpha^{-4}}{4}\cdot\beta^4,$$

и так далее. Если положим $\gamma=\delta=\varepsilon=\ldots=0$, то получим

$$(8)\ log\,(\alpha+\beta x)=log\,\alpha+\frac{\beta x}{\alpha}-\frac{\beta^2x^2}{2\alpha^2}+\frac{\beta^3x^3}{3\alpha^3}-\text{и проч.}$$

Этот же способ приводит самым простым образом к определению коэффициентов *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, . . . *в возвратном виде*, то есть с помощию формул, заключающих в себе коэффициенты, предшествующие тому, который определяется. В настоящем случае имеем $A=log\,\alpha$, откуда $D.A=\frac{D.\alpha}{\alpha}$ или $B=\frac{\beta}{\alpha}$. И так, получим

$$A=log\,\alpha,$$
$$B\alpha=\beta;$$

взяв деривацию, найдется

$$2C\alpha+B\beta=2\gamma,$$

или

$$C\alpha+\frac{1}{2}B\beta=\gamma;$$

$$3D\alpha+C\beta+\frac{1}{2}\cdot2C\beta+\frac{1}{2}B\cdot2\gamma=3\delta,$$

или

$$D\alpha+\frac{2}{3}C\beta+\frac{1}{3}B\gamma=\delta;$$

$$4E\alpha+D\beta+\frac{2}{3}\cdot3D\beta+\frac{2}{3}C\cdot2\gamma+\frac{1}{3}\cdot2C\gamma+$$
$$+\frac{1}{3}B\cdot3\delta=4\varepsilon,$$

а по сокращении

$$E\alpha+\frac{3}{4}D\beta+\frac{2}{4}C\gamma+\frac{1}{4}B\delta=\varepsilon,$$

и так далее. Из этих уравнений выводим как нельзя проще каждый из коэффициентов *C*, *D*, *E*, . . . посредством предшествующих коэффициентов.

Пример II. Разложить тригонометрическую функцию

$$Sin\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\ldots)$$

в ряд вида

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots$$

Положив $x=0$ получим $A=Sin\,\alpha$, откуда, посредством правил Деривационнаго Исчисления,

$$A=Sin\,\alpha,$$
$$B=Cos\,\alpha\cdot\beta,$$
$$C=Cos\,\alpha\cdot\gamma-\frac{Sin\,\alpha}{1\cdot2}\cdot\beta^2,$$
$$D=Cos\,\alpha\cdot\delta-\frac{Sin\,\alpha}{1\cdot2}\,2\beta\gamma-\frac{Cos\,\alpha}{1\cdot2\cdot3}\cdot\beta^3,$$
$$E=Cos\,\alpha\cdot\varepsilon-\frac{Sin\,\alpha}{1\cdot2}(2\beta\delta+\gamma^2)-\frac{Cos\,\alpha}{1\cdot2\cdot3}\cdot3\beta^2\gamma+$$
$$+\frac{Sin\,\alpha}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\beta^4,$$

. . . . . .

§ 6. Арбогаст, изложив способ для определения коэффициентов *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, . . . в том виде, в котором он предложен здесь, переходит к его упрощению. Он показывает, каким образом из определеннаго коэффициента выводится непосредственно следующий за ним в самом простом виде, то есть со всеми возможными сокращениями как относительно подобных членов, так и численных коэффициентов. И так, в I-ом примере, вместо величины

$$4E=\alpha^{-1}\cdot4\varepsilon-\alpha^{-2}\cdot\beta\delta-\frac{\alpha^{-2}}{2}(2\cdot\beta\cdot3\delta+2\cdot2\gamma^2)+$$
$$+\frac{2\alpha^{-3}}{2}\beta\cdot2\beta\gamma+\frac{\alpha^{-3}}{3}\cdot3\beta^2\cdot2\gamma-\frac{3\alpha^{-4}}{3}\cdot\beta^4,$$

по сокращенному способу получится непосредственно

$$E=\alpha^{-1}\cdot\varepsilon-\frac{\alpha^{-2}}{2}(2\beta\delta+\gamma^2)+\frac{\alpha^{-3}}{3}\cdot3\beta^2\gamma-\frac{\alpha^{-4}}{4}\cdot\beta^4.$$

Правила, предлагаемые на этот конец Арбогастом, доводят вычисление коэффициентов *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, . . . до возможной степени простоты; нахождение их, по его способу,

и с надлежащим навыком, едва ли требует большаго времени, как сколько нужно для того, чтобы писать их. Пределы нашего Лексикона не позволяют нам привести этого сокращеннаго способа, требующаго довольно подробнаго изложения; отсылаем по сему предмету к сочинению Арбогаста.

§ 7. В заключение предложим еще один пример разложения, приводящаго к определению суммы n-ых степеней всех корней какого ни есть алгебраическаго уравнения в функции его коэффициентов, и независимо от сумм низших степеней.

Пусть предложенное уравнение будет

$$x^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+dx^{m-3}+\ldots=0,$$

и α, β, γ, δ, ... его корни; следовательно

$$x^m+bx^{m-1}+cx^{m-2}+dx^{m-3}+\ldots=$$
$$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots$$

Если положим $x=\frac{1}{z}$, то это уравнение примет вид

$$1+bz+cz^2+dz^3+\ldots=$$
$$=(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)\ldots;$$

взяв логарифмы обеих частей, получим

$$log\,(1+bz+cz^2+dz^3+\ldots)=$$
$$=log\,(1-\alpha z)+log\,(1-\beta z)+log\,(1-\gamma z)+$$
$$+log\,(1-\delta z)+\ldots$$

Но ежели в формуле (8) положим $\alpha=1$, $\beta=-m$, $x=z$, то найдем

$$log\,(1-mz)=-mz-\frac{m^2}{2}z^2-\frac{m^3}{3}z^3-\frac{m^4}{4}z^4-\ldots;$$

следовательно

$$log\,(1+bz+cz^2+dz^3+\ldots)=-(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)z-$$
$$-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\ldots)\frac{z^2}{2}-$$
$$-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\ldots)\frac{z^3}{3}-$$
$$-.\ldots\ldots\ldots\ldots.-$$
$$-(\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n+\ldots)\frac{z^n}{n}-$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

И так, положив

$$B=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots$$
$$C=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\ldots$$
$$D=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

предыдущее уравнение примет вид

$$(9)\quad\begin{cases} log\,(1+bz+cz^2+dz^3+\ldots)= \\ =-Bz-\frac{C}{2}z^2-\frac{D}{3}z^3-\ldots-\frac{A_n}{n}z^n-\ldots \end{cases}$$

Для определения величин B, C, D, ... в функции коэффициентов b, c, d, ... предложеннаго уравнения, стоит только разложить первую часть уравнения (9) по степеням переменной z. Чтобы удобнее произвести это разложение, поставим a вместо перваго члена 1; и так, $log\,a$ будет первым членом второй части уравнения (9); но так как $a=1$, то $log\,a=0$, что и должно быть. По объясненным выше правилам получим последовательно:

$$(-B)=a^{-1}\cdot b,$$
$$1\cdot 2\cdot\left(-\frac{C}{2}\right)=a^{-1}\cdot 1\cdot 2\cdot c-a^{-2}b^2,$$
$$1\cdot 2\cdot 3\left(-\frac{D}{3}\right)=a^{-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot d-$$
$$-6a^{-2}bc+2a^{-3}b^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

откуда

$$B=\alpha+\beta+\gamma+\ldots=-b$$
$$C=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots=-2c+b^2$$
$$D=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\ldots=-3d+3\ -b^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Что касается до общаго члена A_n, то основываясь на сокращенном способе, о котором упомянуто было выше, Арбогаст нашел

$$A_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n+\ldots=$$
$$=-\frac{n}{1}\overset{\cdot}{\mathrm{D}}_{\mathrm{c}}^{n-1}b+\frac{n}{2}\overset{\cdot}{\mathrm{D}}_{\mathrm{c}}^{n-2}b^2-\frac{n}{3}\overset{\cdot}{\mathrm{D}}_{\mathrm{c}}^{n-3}b^3+\ldots$$
$$\pm\frac{n}{n-1}\mathrm{D}.b^{n-1}\mp\frac{n}{n}b^n,$$

или, написав члены в обратном порядке,

$$A_n=\mp\frac{n}{n}b^n\pm\frac{n}{n-1}\mathrm{D}.b^{n-1}\mp\frac{n}{n-2}\overset{\cdot}{\mathrm{D}}_{\mathrm{c}}^{2}b^{n-2}\pm$$
$$\pm\frac{n}{n-3}\overset{\cdot}{\mathrm{D}}_{\mathrm{c}}^{3}b^{n-3}\mp\ldots-\frac{n}{1}\overset{\cdot}{\mathrm{D}}_{\mathrm{c}}^{n-1}b.$$

Закон этой формулы очевиден: буква c, поставленная для сокращения под характеристикою D, означает знаменателя, равнаго произведению целых чисел от 1 до порядка деривации. И так

$$\overset{\cdot}{\mathrm{D}}_{\mathrm{c}}^{2}b^{n-2}=\frac{\overset{\cdot}{\mathrm{D}}^2b^{n-2}}{1\cdot 2},\quad\overset{\cdot}{\mathrm{D}}_{\mathrm{c}}^{3}b^{n-3}=\frac{\overset{\cdot}{\mathrm{D}}^3b^{n-3}}{1\cdot 2\cdot 3},\quad\ldots$$
$$\overset{\cdot}{\mathrm{D}}_{\mathrm{c}}^{n-1}b=\frac{\overset{\cdot}{\mathrm{D}}^{n-1}b}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}.$$

Легко также определить коэффициенты B, C, D, E, ... в возвратном виде; действуя как показано было выше, найдем

$$B=-b,$$
$$C=-bB-2c,$$
$$D=-bC-cB-3d,$$
$$E=-bD-cC-dB-4e,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Вот самое краткое изложение начал *Дериваціоннаго Исчисления*. Можно почерпнуть обширныя сведения об этом предмете в сочинении Арбогаста. Но чтобы показать каким пособием в Анализе может служить способ, о котором говорим, мы считаем неизлишним познакомить читателей наших с содержанием этой книги. Сочинение Арбогаста разделено на семь следующих глав: 1°. *Легкий и общий способ для разложения в ряды функций каких ни есть полиномий, и для вычисления какого ни есть члена этого разложения, независимо от других членов.* 2°. *Разложение в ряды функций двух или нескольких полиномий, расположенных по степеням одной и той же буквы.* 3°. *Разложение функций одной или нескольких полиномий, простирающихся по степеням и произведениям двух или нескольких различных букв в ряды, расположенные таким же образом.* 4°. *Приложения Дериваціоннаго Исчисления к возвратным рядам, простым, двойным, тройным и вообще какого ни есть порядка.* 5°. *Приложения Дериваціоннаго Исчисления к обращению рядов.* 6°. *Употребление дериваций в Дифференціальном Исчислении. Об обратных дериваціях и приложение их к Интегральному Исчислению.* 7°. *Приложения Дериваціоннаго Исчисления к другим отраслям теории рядов.*

ПРОИЗВОДНЫЯ ФУНКЦИИ. Когда разлагаем в ряд какую ни есть функцию одной или нескольких переменных, то получаем в разложении новыя функции, которыя *Лагранж* назвал *производными*. Чтобы показать в чем состоит теория производных функций, изобразим чрез $f(x)$ какую ни есть функцию переменной x, и положим что x получило произвольное приращение h; в таком предположении $f(x)$ изменится в $f(x+h)$. Можно доказать, что ряд, в который разложится функция $f(x+h)$ при неопределенном x, не будет заключать в себе ни отрицательных, ни дробных степеней приращения h. Сверх того, легко видеть, что член разложения, независящий от h, будет не иное что, как первоначальная функция $f(x)$. И так, можно предположить

$$f(x+h)=f(x)+ph+qh^2+rh^3+sh^4+\ldots$$

В этом ряду количества p, q, r, s, ... зависят от переменной x и от вида функции, означенной характеристикою f; для определения этой зависимости, положим что x получило новое приращение i, независящее от h, в следствие чего функция $f(x+h)$ обратится в $f(x+i+h)$. Но очевидно, что получится та самая величина $f(x+i+h)$, когда в функции $f(x+h)$ подставим $h+i$ вместо h. Пусть будут

$$f(x)+f'(x)\,i+\ldots$$
$$+p+p'i+\ldots$$
$$+q+q'i+\ldots$$
$$+r+r'i+\ldots$$
$$+s+s'i+\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

первые члены разложения функций $f(x)$, p, q, r, s, ..., в которых заменили x суммою $x+i$. В следствие сделаннаго сейчас замечания, найдется следующее уравнение:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)+f'(x)\,i+\ldots \\ +(p+p'i+\ldots)\,h+\ldots \\ +(q+q'i+\ldots)\,h^2+\ldots \\ +(r+r'i+\ldots)\,h^3+\ldots \\ +(s+s'i+\ldots)\,h^4+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}=f(x)+p\,(h+i)+q\,(h+i)^2+r(h+i)^3+s\,(h+i)^4+\ldots$$

Так как это равенство должно иметь место при всяких величинах для h и i, то сравнивая коэффициенты перед i, hi, h^2i, h^3i, ..., получим

$$p=f'(x),\ 2q=p',\ 3r=q',\ 4s=r',\ \ldots$$

Функция $f'(x)$, изображающая коэффициент у первой степени h в разложении $f(x+h)$, называется *первою производною* функции $f(x)$; очевидно что p' выводится из p точно так, как $f'(x)$ из $f(x)$, почему и будет *первою производною* функции p; q' — функции q; r' — функции r, и так далее. Для единообразия изобразим чрез $f''(x)$ первую производную функции $f'(x)$, чрез $f'''(x)$ первую производную функции $f''(x)$, ...; получим

$$p=f'(x),\ q=\frac{1}{2}f''(x),\quad r=\frac{1}{2\cdot 3}f'''(x),$$
$$s=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}f^{\mathrm{IV}}(x),\ \ldots,$$

следовательно

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\,h+f''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2}+$$
$$+f'''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+f^{\mathrm{IV}}(x)\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$$

Функция $f(x)$ в отношении к функциям $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... называется *первообразною функциею*, а функции $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ...— *производными функциями*. Первая из них, $f'(x)$, принимает название *первой производной* или *производной перваго порядка*; вторая, $f''(x)$, называется *второю производною* или *производною втораго порядка*; третья, $f'''(x)$, *третею производною* или *производною третьяго порядка*, и так далее.

Если изобразим первообразную функцию $f(x)$ чрез y, то последовательныя ея произ-

водныя могут быть означены чрез y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$ или еще чрез $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ..., $\frac{d^ny}{dx^n}$, так что

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx},$$

$$f''(x)=y''=\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$f'''(x)=y'''=\frac{d^3y}{dx^3},$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x)=y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. Открытие Дифференциальнаго Исчисления составляет без сомнения самую блистательную эпоху в летописях точных наук, даже, можно сказать, в истории успехов ума человеческаго. От времен Архимеда и Аполлония, величайших геометров древности, до самаго Декарта, не встречаем ни одного открытия, которое бы значительно расширило пределы знаний математических. В начале XVII века знаменитый Французский философ произвел счастливый переворот в Геометрии, введя в нее формулы аналитическия; Смот. К р и в а я. Но множество важных вопросов, относящихся к чистому Анализу, к Геометрии, и в особенности к Естественной Философии, оставались нерешенными: их решение превышало силы Декартова анализа. Недостаточность новаго способа обнаруживалась преимущественно в изысканиях, в которых надлежало уловить отношения изменяющихся по известному закону величин в то самое мгновение, когда эти величины исчезают. Многия попытки для решения такого разряда задач из Геометрии кривых, были предложены математиками XVII столетия; удовлетворительнейший опыт в этом роде был способ для проведения касательных к кривым, придуманный Английским математиком *Барровым* (*Barrow*), наставником *Ньютона*. Мы упоминаем о способе проведения касательных потому что этот вопрос, по всей вероятности, привел к изобретению Дифференциальнаго Исчисления.

Древние геометры умели проводить касательныя к коническим сечениям и к некоторым другим алгебраическим кривым; *Архимед* решил эту задачу даже для спирали, трансцендентной кривой. Но способы древних были все односторонни: для каждой кривой они употребляли особенный приём, ей одной свойственный. Первые единообразные способы для проведения касательных были предложены не прежде XVII столетия. Примечательнейшие из них принадлежали *Декарту*, *Ферматy* и *Баррову*, о котором мы уже упомянули. Хотя все эти способы и имели большое преимущество пред приёмами древних со стороны общности, но далеко еще не удовлетворяли всем требованиям. Они нетолько не распространялись на трансцендентныя кривыя, но даже требовали, чтобы уравнение и алгебрической кривой было освобождено от радикалов; удовлетворение последнему условию, в бо́льшей части случаев, приводило к выкладкам весьма сложным.

В таком состоянии находилась задача о касательных до 1684 года, незабвеннаго в летописях Математики. В этом году *Лейбниц* напечатал в *Лейпцигских Актах* (за Октябрь месяц) Разсуждение под заглавием: Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus. В нем заключались первыя начала Дифференциальнаго Исчисления, а в 1686 году он же, в Разсуждении своем: De Geometriâ recondità et Analysi indivisibilium atque infinitorum, положил основания *Интегральному Исчислению*. С этого времени начинается для наук математических новая эпоха: множество из важнейших вопросов чистаго анализа, Геометрии и Естественной Философии, решение которых было предметом тщетных усилий первостепенных геометров прежняго времени, были подвергнуты новому анализу: попытки бо́льшею частию увенчались успехом. Тогда поняли могущество новаго орудия, и все старания обратились на его усовершение.

В начале 1687 года, следовательно спустя два года после того, как Лейбниц обнародовал свое открытие, Ньютон издал свои *Математическия начала Естественной Философии* (Philosophiae naturalis principia mathematica). В этом безсмертном творении он объяснил посредством наблюдений и вычислений главныя явления природы, и преимущественно движения небесных тел. При решении труднейших вопросов Ньютон руководствовался так названным им *способом флюкций*. Этот способ, по сущности своей, был одно и то же что Лейбницево Дифференциальное Исчисление, от котораго отличался только знакоположением и метафизическим воззрением на основныя начала.

Вот первые труды, положившие основание Дифференциальному и Интегральному Анализу. Теперь возникает вопрос, кому из двух великих геометров принадлежит слава открытия? Этот вопрос подал повод к жаркому прению между Лейбницем и Ньютоном, или, лучше, между Германиею и Англией. Первостепенные математики того и другаго Государства, соединяя с первенством этого важнаго открытия понятие о народной славе, защищали права роднаго им геометра. Такое прение не могло быть беспристрастным; и действительно, при жизни двух знаменитых совместников, спорная статья осталась нерешенною. Если бы время обнародования Новаго Анализа могло решить вопрос, то первенство неотъемлемо осталось бы за Лейбницем, потому что Разсуждение Германскаго геометра, как сказано выше, напечатано в 1684 году, а книга Ньютона издана только в начале 1687 года. Но, не говоря уже о том, что знаменитое творение Ньютона, по многотрудности изложенных в ней теорий, не могло быть написано в короткий промежуток времени, протекший со дня обнародования Лейбницем своего открытия,— чем Английский геометр ограждается от всякаго подозрения в заимствовании своего способа у Лейбница,— некоторыя письма Ньютона доказывают, что он обладал уже способом флюкций гораздо прежде 1684 года. Это обстоятельство послужило предлогом к обвинению Лейбница в присвоении чужаго открытия. Войдем в некоторыя подробности по этому спорному вопросу.

Женевский математик *Николай Фацио Дюилье* (*Fatio de Duiller*), поселившийся в Лондоне, был первым зачинщиком прения между Лейбницем и Ньютоном. Подстрекаемый с одной стороны Англичанами, а с другой может быть личным неудовольствием на Лейбница, будто бы не оказавшим должнаго уважения его знаниям в Математике, он, в письме к *Гугенсу* от 18/28 Декабря 1691 года, нетолько назвал Ньютона первым изобретателем Дифференциальнаго Исчисления, но даже намекнул, что Лейбниц заимствовал свой способ из переписки, которую вел с Ньютоном. Фацио повторил содержание письма в напечатанном им сочинении об *кривой наискорейшаго ската и об теле наименьшаго сопротивления*. На это явное оскорбление Лейбниц отвечал с умеренностию, что отнюдь не желает вступать в прение о первенстве с Ньютоном, к которому исполнен глубокаго уважения, и уверен, что Ньютон не одобрит поступка Фацио. Потом Лейбниц привел некоторые факты в опровержение навета Фацио, и окончательно объявил, что во всем полагается на свидетельство и добросовестность самаго Ньютона. Нападки Женевца, не основанные ни на каких доказательствах, были забыты на несколько лет.

Новый случай подал повод к возобновлению прежняго спора. В 1704 году изданы в свет два сочинения Ньютона: *De quadratura curvam* и *Enumeratio linearum tertii ordinis*. Разбор этих сочинений, помещенный в Лейпцигских Актах, и, как думают, с согласия Лейбница, был несовсем благоприятен для Ньютона. Английские математики оскорбились этим отзывом. Один из них, по имени Кейл, в Philosophical Transaction за 1708 год, поместил статью, в которой назвал Ньютона первым изобретателем способа флюкций, и присовокупил, что Лейбниц, в изданном им Разсуждении в 1684 г. переменил только название способа и его знакоположение. Лейбниц видя, что Кейл явно обвиняет его в присвоении чужаго открытия, отнесся письмом к *Ганс Слоану* (*Hans Sloane*), Секретарю Лондонскаго Королевскаго Общества, требуя чтобы автор этой статьи гласно отрекся от слов своих. На это Кейл, в письме к Ганс Слоану, отвечал, что не может отложиться от прежняго своего мнения, в подтверждение котораго привел разные доводы; к этому Кейл прибавил, что Ньютон сообщил о своем новом способе столько намеков Лейбницу, что даже ум посредственный мог бы разгадать тайну. Это письмо было сообщено Лейбницу. Оскорбленный таким поступком, он обратился к Королевскому Обществу с настоятельною просьбою прекратить необдуманные толки человека, который пытается очернить его доброе имя. В следствие этого, Королевское Общество нарядило Коммисию для разсмотрения спорнаго дела. Коммисары представили свое мнение, основанное на разных документах, которые и были напечатаны в первый раз 1712 года под заглавием: *Commercium epistolicum de analysi promotâ*,

и потом, со многими дополнениями, в 1722 году. Предлагаем нашим читателям это мнение в переводе.

Донесение членов Королевскаго Общества, наряженных для разсмотрения жалобы Лейбница на Кейля.

«Между всеми письмами и сборниками, находящимися в Архиве Общества, также между бумагами Г. *Коллинса*, мы разсмотрели все, что было писано с 1669 по 1677 год включительно; мы показывали эти бумаги людям, которые знали почерк Гг. *Барров*а, *Коллинса*, *Ольденбурга* и *Лейбница*; они признали подлинность писем; письма же Г. *Грегори*, мы сравнили между собою, и сверили некоторыя из них с копиями, списанными Г. *Коллинсом*. Мы сняли копии с тех из упомянутых бумаг, которыя имели какую либо связь с возложенным на нас делом; свидетельствуем в верности всех сих выписок, и представляем их вместе с подлинными.

Из сих писем и бумаг мы заключили следующее:

1°. Г. *Лейбниц* был в Лондоне в начале 1673 года, а оттуда отправился в Париж в начале Марта того же года. В бытность свою в Париже он вел переписку с Г. *Коллинсом* до Сентября 1676 года; посредником переписки был Г. *Ольденбург*. Потом Г. *Лейбниц* возвратился в Ганновер, и на возвратном пути был опять в Лондоне и в Амстердаме. Впрочем, из писем видно, что Г. *Коллинс*, сообщал искусным математикам всё, что узнавал сам от Гг. *Ньютона* и *Грегори*.

2°. Г. *Лейбниц*, во время перваго своего пребывания в Лондоне, говорил что изобрел способ исчисления, который назвал Дифференциальным; хотя Доктор *Пелль* и показывал ему, что это исчисление не иное что, как способ *Мутона* *), но *Лейбниц* настаивал, что открытие принадлежит ему: во первых, потому что до изобретения своего исчисления он ничего не знал о способе *Мутона*, а во вторых, что он развил свое открытие гораздо более, нежели *Мутон*. Мы не могли заметить, чтобы Г. *Лейбниц* знал иной Дифференциальный способ, кроме *Мутонова*, прежде письма, которое он писал к *Ольденбургу* 21 Июня 1677 года, следовательно спустя год после того, как письмо *Ньютона* к *Коллинсу* от 10 Декабря 1672 года было послано в Париж для сообщения *Лейбницу*, и по прошествии слишком четырех лет с того времени, как *Коллинс* начал сообщать это самое письмо многим ученым, с которыми был в сношейиях. Должно заметить, что в упоминаемом письме Г. *Ньютона*, изложение способа флюкций покажется удовлетворительным для ума сметливаго.

3°. Из письма Г. *Ньютона* от 15 Июня 1676 года очевидно следует, что он обладал способом флюкций за пять лет перед тем временем, как писал это письмо, а трактат его: *Analysis per AEquationes numero terminorum infinitas*, посланный в 1669 году Г. *Коллинсу* Доктором *Барровым*, доказывает, что *Ньютон* открыл свой способ еще прежде.

4°. Дифференциальный способ одинаков со способом флюкций: они различаются между собою только названием и знакоположением. Г. *Лейбниц* называет *дифференциалами* то, что Г. *Ньютон* именует *моментами* или *флюкциями*; сверх того, Г. *Ньютон* не употребляет знака *d*, которым Г. *Лейбниц* означает дифференциалы. По сей-то причине мы и думаем, что вопрос вовсе не состоит в том, чтобы знать, кто открыл тот или другой из этих двух способов; но надобно решить, кто был первым изобретателем способа, который, по сущности своей, один и тот же. В этом отношении мы думаем, что те, которые приписывали Г. *Лейбницу* первенство сего открытия, не имели достаточных сведений, а может быть и никаких, о переписке, которую Г. *Лейбниц* вел гораздо прежде с Гг. *Коллинсом* и *Ольденбургом*, и что им также было неизвестно, что Г. *Ньютон* обладал способом флюкций еще за 15 лет перед тем, как Г. *Лейбниц* напечатал в *Лейпцигских Актах* свое Разсуждение об этом предмете.

По всем сим причинам нам кажется, что Г. *Ньютон* есть первый изобретатель исчисления, о котором говорим, и мы думаем, что Г. *Кейл*, во всем сказанном им, не оскорбил Г. *Лейбница*. Предоставляем Обществу разсудить, не признает ли он нужным напечатать выписки из писем и бумаг, которыя мы ныне представляем, и присовокупить к ним всё, что находится по сему предмету в третьем томе сочинений *Вальиса*».

Это донесение раздражило Лейбница, и спор не прекратился. Разныя безъименныя сочинения, в которых скорее нападали на способ Ньютона, чем защищали права Лейбница на первенство открытия, были изданы на твердой земле. Английские математики отвечали на них. В продолжении этой полемики, Лейбниц желая, как он выразился, *пощупать пульс у Англичан*, предложил им чрез других математиков задачу об *траекториях*. Вопрос состоял в определении кривой линии, пересекающей ряд данных кривых одного и того же рода под углом, или постоянным, или изменяющимся по известному закону. Ньютон, к которому собственно относился вызов, немедленно предложил способ для приведения этого вопроса к дифференциальному уравнению. В это время умер Лейбниц (1716 г.); *Иван Бернулли*, вступаясь за дело знаменитаго Германскаго геометра, прочитал решение Ньютона, и объявил, что оно вовсе не удовлетворительно, потому что главное затруднение состоит в интегрировании дифференциальнаго уравнения, чего не сделал Ньютон. С этого времени, сколько известно, Ньютон, с одной стороны обезпеченный своею громкою славою, а с другой, по преклонности лет, не принимал уже никакого участия в распре; но некоторые приверженцы и ученики его не покинули поприща прения. Наиболее отличившийся на нем был известный *Тайлор*.

Из всех приведенных здесь обстоятельств можно заключить с достоверностию, что способ флюкций, или, что всё равно, Дифференциальное Исчисление есть открытие Ньютона. Этот факт не подлежит никакому сомнению. Остается решить вопрос: открыл ли Лейбниц со своей стороны это исчисление, или заимствовал его из писем Ньютона и разговоров с Английскими математиками во время своего пребывания в Англии, что было, как мы видели, в начале 1673 года?

Ныне математики почти единогласно решают этот вопрос в пользу Лейбница. Представляем в коротких словах обстоятельства, на которых можно основать оправдание его против обвинения Английских математиков. И заметим во первых, что донесение членов Лондонскаго Королевскаго Общества было написано под влиянием обстоятельств, неблагоприятных для Лейбница. Действительно, коммисары могли быть увлечены невольным образом за пределы справедливости с одной стороны чувством народной славы, а с другой глубоким уважением к Ньютону, бывшему тогда Президентом Королевскаго Общества, из среды котораго они были назначены. Во вторых, при внимательном чтении писем, напечатанных в *Commercium epistolicum*, усматриваем, что Лейбниц не мог извлечь из них никакого сведения о способе флюкций; и в самом деле, в этих письмах упоминается только о выгодах и о пользе способа Ньютона; что же касается до начал, на которых основано его исчисление, то об этом ничего в них не находим. В одном только письме к Ольденбургу, от 24 Октября 1676 года, Ньютон приводит без доказательств несколько предложений, основанных на способе флюкций, и прибавляет, что вывел эти теоремы из решения одного общаго вопроса, который и приводит в письме своем, но в загадочном виде, переставляя буквы. Если бы даже Лейбниц и разобрал этот логогриф, то прочел бы только следующее: *Дано уравнение, заключающее в себе количества текущия, найти течения, и наоборот*. Мог ли Лейбниц узнать из этого хотя что либо о способе флюкций? Это письмо было сообщено Лейбницу в 1677 году, и он, в ответе своем от 21 Июня 1677, писанном к Ольденбургу в следствие этого письма, объяснил открыто начала своего Дифференциальнаго Исчисления, присовокупляя, что давно уже употребляет этот способ для проведения касательных к кривым.

Наконец, сильнейший довод в пользу Лейбница есть свидетельство самого Ньютона. Мы говорим о *Примечании* на VII *Предложение* второй книги: *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Вот перевод этого примечания: «*Десять лет тому назад, когда я вел переписку с весьма ученым геометром Г. Лейбницем, я писал к нему,*

*) Способ, о котором упоминается здесь, состоял в *суммировании рядов* посредством конечных разностей их членов. Доктор *Пелль* показал *Лейбницу*, что способ, который он считал новым, напечатан уже в 1670 году в книге *об видимых диаметрах солнца и луны*, изданной Лионским каноником *Мутоном*. Это обстоятельство приводит сам Лейбниц в письме своем к Ольденбургу, присовокупляя к тому, что он изобрел уже другой, совершеннейший способ. Впрочем должно заметить, что способ, о котором идет речь, не есть собственно Дифференциальный, ибо в нем разсматриваются *конечныя*, а не *безконечно малыя* разности. *Примеч. соч. Лексикона.*

что имею способ для определения наибольших и наименьших величин, для проведения касательных и для решения других подобных вопросов, и что способ мой с такою же удобностию может быть употреблен для уравнений, заключающих в себе радикалы, как и для рациональных. Я скрыл тогда свой способ под переставленными буквами, которых значение было следующее: Дано уравнение, заключающее в себе сколько угодно количеств текущих, найти течения, и наоборот. *На это знаменитый Лейбниц отвечал, что с своей стороны он нашел подобный способ, который и сообщил мне в том же письме; его способ разнился от моего только названием и знакоположением*». Это примечание находится еще в изданиях 1713 и 1714 годов, напечатанных, как полагают, без ведома Нютона, а выпущено из издания 1726 года.

Представив краткое обозрение обстоятельств, относящихся к прению, которому подало повод открытие Дифференциальнаго Исчисления, должно упомянуть также и о нападениях на новый анализ. Ньёвентиит (*Nieuwentiit*), весьма посредственный математик, первый вооружился против новаго способа; на его возражения, напечатанныя в 1694 и 1695 годах, отвечал сам Лейбниц (Act. Lips. 1694), а впоследствии *Бернулли* и *Герман*, которые с очевидностию доказали, что противник Дифференциальнаго Исчисления решительно не понимал его.

В 1701 году искусный алгебрист *Ролль*, изобретатель *способа каскад*, возстал против новаго анализа, и с необыкновенным жаром и самоуверенностию преследовал его до 1705 года. Он нетолько нападал на основныя начала Дифференциальнаго Исчисления, но старался даже доказать удачно выбранными примерами, что оно часто приводит к заключениям ошибочным. *Сорен* (*Saurin*) и *Вариньон*, ревностный защитник Дифференциальнаго Исчисления, отвечали на эти возражения, и объяснили кажущияся противоречия, которыми Ролль старался вселить сомнения на счёт непогрешительности результатов, доставляемых новым анализом.

В 1734 году Английский Эпископ, Доктор *Берклей*, возобновил гонение на способ флюкций, и присовокупил к тому еще безразсудное обвинение математиков в неверии. *Миддлетон* и *Смит*, имея в виду преимущественно странность второй обвинительной статьи, в ответе своем осмеяли Берклея. *Вильсон* и *Робинс* издали также в 1735 году небольшия ответныя сочинения на возражения Берклея против Нютонова способа флюкций.

После сего краткаго очерка истории открытия Дифференциальнаго Исчисления, надлежало бы представить читателям обозрение его успехов. Но, в этом отношении, *Дифференциальное Исчисление*, собственно говоря, заключает в себе мало любопытнаго. Почти все примечательныя теории и усовершенствования Анализа Безконечных принадлежат к истории Интегральнаго Исчисления, к которой и отсылаем читателей. Историческия же подробности, собственно относящияся к Дифференциальному Исчислению, помещены в своем месте в отдельных статьях нашего Лексикона. Скажем только, что из современников Нютона и Лейбница преимущественно содействовали успехам Дифференциальнаго Исчисления братья *Яков* и *Иван Бернулли*, *Маркиз де Л'Опиталь*, известный сочинением своим: *Analyse des infiniment petits*, *Паран* (*Parent*), *Вариньон*, *Сорен* и некоторые другие математики, менее известные.

. . . . . .

После Нютона и Лейбница некоторые первостепенные геометры излагали начала Дифференциальнаго Исчисления по собственному воззрению. *Эйлер*, с целию согласить простоту Лейбницева способа с строгостию математическою, разсматривал безконечно малыя количества как настоящие нули, различающиеся между собою только происхождением, почему взаимныя их отношения приводятся к величинам определенным. На основании этой мысли, Эйлер, в сочинении своем *Institutiones Calculi differentialis*, определил Дифференциальное Исчисление способом, посредством котораго определяются отношения исчезающих приращений, получаемых какими ни есть функциями, когда самым переменным, от которых сии функции зависят, приписывают исчезающия же приращения.

Лагранж заметил в объяснении Эйлера то неудобство, что количества разсматриваются в исчезающем их состоянии, следовательно в то мгновение, когда они, собственно говоря, перестают быть величинами. «И в самом деле, говорит Лагранж, хотя мы ясно понимаем, что должно разуметь под отношением двух количеств, когда разсматриваются количества конечныя, но это самое отношение не представляет уму никакого яснаго и определеннаго понятия, когда в одно время оба члена содержания обращаются в нуль».

Лагранж, в Записках Берлинской Академии за 1772 год, предложил теорию разложения функций в ряды. Его Разсуждение заключало в себе истинныя начала Дифференциальнаго Исчисления, освобожденнаго от разсматривания безконечно малых количеств или исчезающих величин, и флюкций или пределов. Позже, он издал об этом предмете два сочинения: *Théorie des fonctions analytiques* и *Calcul des fonctions*. Отсылаем для некоторых подробностей к статье Производныя функции нашего Лексикона.

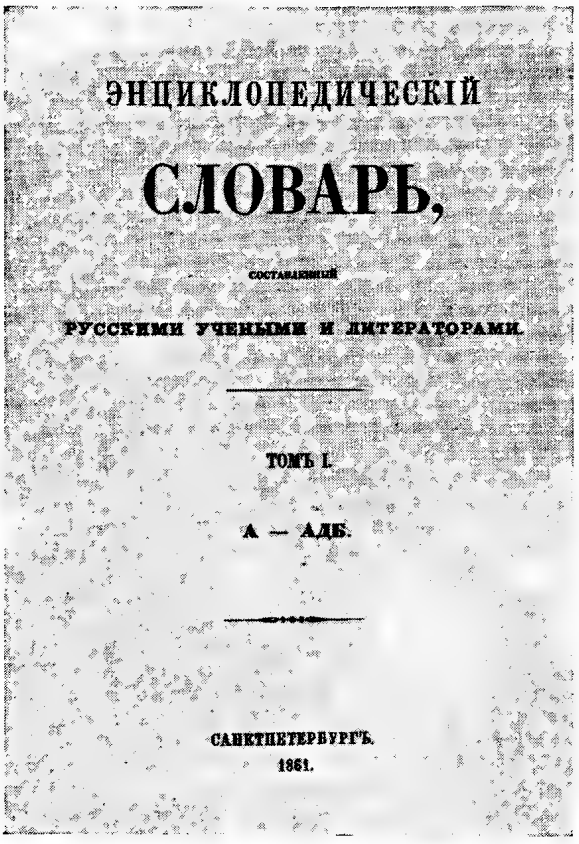
Маклорен и *Д'Аламберт* основали Дифференциальное Исчисление на теории пределов, или, что всё равно, на способе первых и последних содержаний Нютона. Они разсматривали отношение дифференциала функции к дифференциалу переменнаго количества как предел отношения конечнаго приращения функции к конечному же приращению переменнаго количества, когда члены этого содержания обращаются оба в нуль.

Кроме поименованных математиков и некоторые другие предложили свои способы разсматривания Дифференциальнаго Исчисления. Примечательнейшие из них *Лаплен*, издавший в 1764 году по сему предмету книгу: *The residual analysis*; *Паскич* (*Pasquich*), *Грузон* (*Gruson*); *Крамп* и *Арбогаст*.

ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ, СОСТАВЛЕННЫЙ РУССКИМИ УЧЁНЫМИ И ЛИТЕРАТОРАМИ

издавался в России в начале 60-х годов 19 века. Сотрудничали в словаре виднейшие русские учёные того времени, в том числе математики В. Я. Буняковский, М. В. Остроградский, И. И. Сомов и П. Л. Чебышев. К сожалению, «Энциклопедический словарь» просуществовал всего три года (СПБ, 1861—1863), и дальнейшее его издание было запрещено по политич. причинам. Всего вышло шесть томов «Энциклопедического словаря»: пять — на букву «А» и один на букву «Е». Среди математич. статей и заметок в этих томах были помещены следующие.

В. Я. Буняковский — Абака, Абсолютное, Абсурдум, Абсцисса, Азартные игры (математическая часть статьи), Алгебраические кривые, Алгоризм, Алгорифм, Алгорифмия, Алеф-


ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКІЙ

СЛОВАРЬ,

СОСТАВЛЕННЫЙ

РУССКИМИ УЧЕНЫМИ И ЛИТЕРАТОРАМИ.

ТОМЪ I.

А — АДБ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

1861.

функция, Анализ математический, Аналогии дифференциальные, Аналогии неперовы, Антилогарифм, Антипараллельные линии, Аполлоний Пергский, Апориам, Апотома, Арбогаст, Аргумент, Аренарий (Псаммит), Арифметика, Арифмограф, Арифмография, Арифмология, Архит Тарентский, Аршеневский В. А., Евдоксий, Единица.

М. В. Остроградский — Аламберово (д') правило и часть статьи Аламбер (д'), содержащая обзор его математич. трудов.

И. И. Сомов — Аксиома, Алгебра, Алгебраические знаки, Ангармоническое отношение, Архимед, Асимптота, Асимптотическая поверхность, Ахиллесова задача, Евклид.

П. Л. Чебышев — Абелева теорема, Абелевы функции, Абель.

Ниже полностью приведены с сохранением особенностей орфографии эти три статьи П. Л. Чебышева.

АБЕЛЕВА ТЕОРЕМА. Так называется одна из теорем, открытых великим геометром Абелем. Эта теорема заключается в выражении суммы или разности нескольких значений интеграла какого-либо алгебраического дифференциала через совокупность значений того же интеграла с прибавлением, в общем виде, членов алгебраическаго и логарифмических, которыя, в известных случаях, приводятся к нулю. Эту теорему Абель сначала доказал для частнаго случая в мемуаре под заглавием: Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendentes (Oeuvres complètes de N. Abel, t. 1, p. 288), где и показал приложение ея к трансцендентным функциям, известным ныне под названием «абелевых». Впоследствии, в записке под заглавием Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe des fonctions transcendantes (Oeuvres complètes, t. 1, p. 324), он доказал ее в самом общем виде.

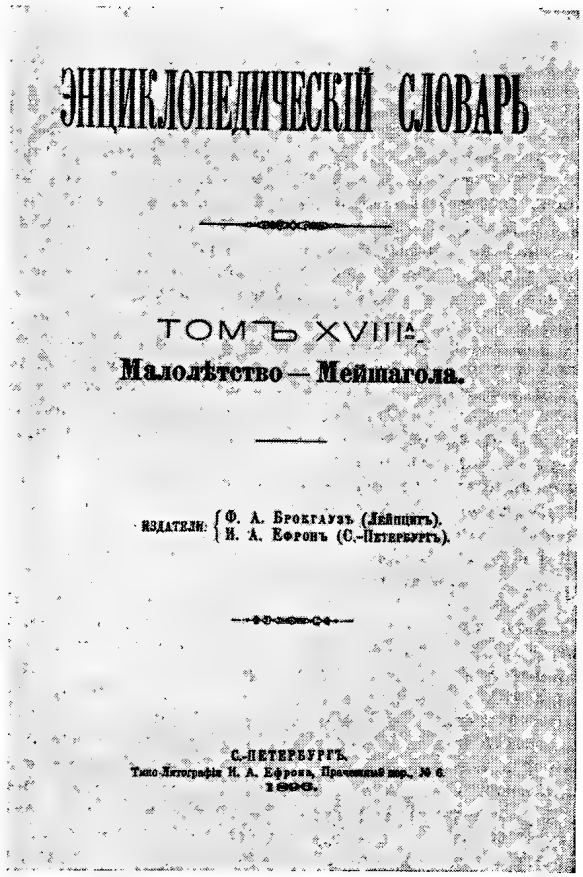
АБЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ (Fonctions abéliennes). Так называются трансцендентныя функции, к которым приводятся интегралы дифференциалов, заключающих в себе, рациональным образом, радикал второй степени из полинома выше четвертой степени. Эти функции называются «абелевыми» по имени великого геометра Абеля, положившаго основание их теории. Лежандр предложил для этих интегралов название ультраэллиптических функций.

АБЕЛЬ *Николай-Генрих* (Niels Henrik, Nikolas Henri Abel), один из величайших математиков. Он первый строго доказал невозможность общаго решения в радикалах таких уравнений, которых степень выше четвертой, вследствие чего совершенно изменился взгляд математиков на решение уравнений высших степеней. Ему же наука обязана общими началами для исследования возможности и невозможности интегрирования различных дифференциалов в конечном виде, что дало совершенно-новый вид этой части интегральнаго исчисления. Кроме того, он дал новые приемы для исследования интегралов алгебрических дифференциалов и показал весьма-замечательное свойство их, известное под именем *теоремы Абеля* (см. Абелева теорема). Теория эллиптических функций обязана Абелю многими развитиями. Он же положил основание теории трансцендентных функций того же рода, но высшаго разряда, которыя позднейшие геометры назвали его именем (см. Абелевы функции). Этими-то изысканиями, положившими начало трудам многих позднейших математиков, Абель в-особенности снискал себе почетнейшее место между великими геометрами. Но, сверх того, им сделаны изыскания по некоторым другим частям анализа, и все они представляют в себе что-либо оригинальное и чрезвычайно-замечательное. Из этих открытий Абеля особеннаго внимания заслуживают: определение вида функций, по уравнениям, выражающим их свойства; исследования относительно рядов, весьма-важныя по своим приложениям; прямое решение вопроса об определении кривой, по которой точка, двигаясь от действия тяжести, в данное время проходит известныя дуги, откуда, как частный случай, получается уравнение *тавтохроны* (см. Тавтохрона).

Абель родился 5-го августа 1802 г. в Норвегии, в приходе Финдое (Findoe), где отец его был пастором. Его начал учить сам отец. Тринадцати лет Абель отдан был в училище при соборной церкви в Христиании. Особенныя способности его к математике обнаружились на шестнадцатилетнем его возрасте, при решении различных алгебрических и геометрических вопросов, и тогда он ревностно стал изучать математику. Пройдя со своим наставником сочинения Эйлера «Introductio in Analysin infinitorum» и «Institutiones Calculi differentialis et integralis», он сам начал читать творения различных геометров, в-особенности Лагранжа. К этому времени относятся первыя его изыскания, которыя он предпринял имея только очень-ограниченныя сведения в математической литературе. В 1821 году, по окончании курса в училище, Абель поступил в университет в Христиании, где обратил на себя внимание своими способностями к математике. Впродолжение университетскаго курса, он написал несколько математических статей, из которых некоторыя помещены в «Magasin für Naturvidenskaberne»; преимущественно же он занимался в это время вопросом о решении уравнений 5-й степени — вопросом, прославившим его имя. Сначала, подобно многим своим предшественникам, он нашел ошибочное решение таких уравнений в радикалах; но потом, сам заметив свою ошибку и продолжая изыскания по этому предмету, успел строго доказать, что уравнения 5-й степени, в общем виде, по самому существу своему, неразрешимы в радикалах, чтó и составляет одно из важнейших открытий в математике. Доказательство этого свойства уравнений 5-й степени было напечатано Абелем в Христиании, в 1824 году, на французском языке, в мемуаре под заглавием: «Mémoires sur les équations algébriques où on demontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré». По окончании университетскаго курса, в 1825 г., Абель отправился путешествовать. В Берлине он подружился с германским математиком Крелле и принял деятельное участие в издаваемом им математическом журнале. В 1826 г., Абель был в Париже, где познакомился с Коши и другими знаменитыми геометрами. Но, несмотря на те великия открытия, которыя им были уже сделаны и которыя ставили его выше многих членов парижской академии наук, он не успел на себя обратить ея внимание, и мемуар, представленный им в парижскую академию 30-го октября 1826 года, под заглавием: «Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes», остался без мнения, наравне с трудами, незаслуживающими никакого внимания. После смерти Абеля, парижская академия напечатала этот мемуар в своих изданиях (Mémoires presentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France, t. VII, 1841), как произведение особенно-замечательное. По возвращении из путешествия, через два года, Абель, продолжая неутомимо свои изыскания, заболел чахоткою и умер 6-го апреля 1829 г., на флорандском чугунном заводе (Froland), близ Арендаля (Arendal), где была его невеста девица Кемп (Kemp). Там и похоронен он близ церкви. После смерти Абеля, ему, вместе с кёнигсбергским знаменитым геометром *Якоби*, парижская академия присудила, в 1830 г., премию за развитие теории эллиптических функций. Часть этой премии, следовавшую Абелю и составлявшую 1,500 франков, академия выдала его наследникам. Полное собрание сочинений Абеля издано в Христиании, в 1839 г., под заглавием: «Oeuvres complètes de N. H. Abel, publiées en français par Holmboe» (2 vol. in-4°).

ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ БРОКГАУЗА И ЕФРОНА —

крупнейшая дореволюционная русская энциклопедия, выходившая в издании Ф. А. Брокгауза (немецкий издатель) и И. А. Ефрона (русский типограф-предприниматель). Первое издание (второе не закончено) словаря состояло из 82 основных и 4 дополнительных полутомов (всего 43 тома), средним объёмом в 66 авторских листов в одном полутоме. Основные полутомы выходили в течение 1890—1904, а четыре дополнительных полутома были выпущены в последующие 3 года. Словарь располагал обильным справочным материалом и большим количеством крупных статей. Его тираж доходил до 75 000 экз. В первых томах (до буквы В), выходивших под редакцией И. Е. Андреевского, было помещено большое количество статей, переведённых из немецкого словаря Брокгауза. После смерти И. Е. Андреевского новая редакция во главе с К. К. Арсентьевым и Ф. Ф. Петрушевским значительно увеличила количество больших, самостоятельных статей и привлекла к сотрудничеству в словаре нек-рых крупнейших русских учёных: Д. И. Менделеев возглавлял химико-технич. и фабрично-заводской


ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКІЙ СЛОВАРЬ

ТОМЪ XVIIIA.

Малолѣтство — Мейшагола.

ИЗДАТЕЛИ: Ф. А. Брокгаузъ (Лейпцигъ). И. А. Ефронъ (С.-Петербургъ).

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типо-Литографія И. А. Ефрона, Пречистенскій пер., № 6.
1900.

отдел, А. И. Воейков — отдел географии, А. Н. Бекетов, В. Т. Шевяков и А. О. Ковалевский — отдел биологич. наук и др.

Ниже воспроизводится статья «Математика», написанная В. В. Бобыниным.

МАТЕМАТИКА.—Слово «математика» происходит от греческаго μάθημα (наука, учение), в свою очередь происходящаго, вместе с имеющим одно с ним значение словом μάθησις, от глагола μανθάνω, первоначальное значение котораго, «учусь через размышление», устанавливало строгое разграничение между выражаемым им понятием и понятием учения путем опыта. М., по обычным, установившимся с давняго времени, взглядам, есть наука о величинах, предмет которой состоит в измерении величин, или, согласно с поправкой, внесенной Огюстом Контом, в непрямом измерении величин. Такое определение, если и может считаться удовлетворительным, то только для отдаленнаго прошлаго, когда задачи М. не шли далее практических искусств счета и измерения протяжений. Но уже с IV в. до Р. Хр. практическая арифметика, под именем «логистики», и практическая геометрия, в форме землемерия, потеряли почти всякий интерес в глазах математиков древней Греции и на первый план выдвинулись для них изучение свойств протяжений или теоретическая геометрия и в меньшей степени изучение свойств чисел или по терминологии нашего времени, теория чисел. По определению Вильгельма Вундта, вполне выражающему современное состояние М., ея предмет состоит в задаче «подвергнуть исчерпывающему свой предмет исследованию мыслимыя формы чистаго усматривания, также как и выполнимыя, на основании чистаго усматривания, формальныя построения понятий, в отношении всех их свойств и взаимных отношений». Это определение отвлечено автором от содержания создавшагося в последнее время, под именем учения о многообразиях или учения о формах (Mannigfaltigkeitslehre Риманна или Formenlehre Германна Грассманна), самаго общаго математическаго учения, в отношении котораго все отдельныя математическия науки являются не более как его специальными ветвями. Содержание названнаго сейчас общаго математическаго учения с полною ясностью раскрывает также и связь, существующую между М. и другими науками. Выражения «многообразие» и «форма» характеризуют это содержание с двух разных сторон, так как указывают на два необходимыя условия, которыя должны быть выполнены при всяком математическом исследовании, какой бы предмет оно не имело. Первое из этих условий состоит в наличности многообразия объектов мышления, составляющих известную совокупность; второе — в чисто формальном способе обработки, т. е. в таком, который привлекает к рассмотрению не собственныя конкретныя свойства объектов мышления, а только одни взаимныя отношения последних. Область математическаго исследования становится таким образом чрезвычайно обширною, способною к распространению даже на формальную часть логики, как на удовлетворяющую указанным условиям, и потому вполне готовую к принятию форм математическаго алгорифма. В настоящее время это принятие есть уже совершившийся факт, представляемый недавно созданным трудами Буля, Роберта Грассмана, Шредера и др. логическим исчислением или алгеброю логики. Если затем принять во внимание, что все доставляемое опытом может быть сведено на отношения многообразных объектов мышления, то становится необходимым заключить, что всякая опытная наука, по самой своей природе, должна быть доступна формальному или математическому способу обработки. Степень же приложимости математической обработки предмета зависит исключительно от чисто внешних условий исследования. «Рациональная или теоретическая механика», «небесная механика», «математическая физика», попытки создания «математической химии», «теория вероятностей» и «математическая статистика» дают изложенным сейчас абстрактным заключениям фактическое реальное подтверждение. Развитие математики началось с создания практических искусств счета и измерения линий, поверхностей и объемов. Началом этого развития можно считать появление у первобытнаго человека определеннаго представления единицы и неопределеннаго представления множества. Затем все последующее развитие первобытнаго счисления состояло в последовательном выделении из неопределеннаго представления множества определенных представлений два, три, четыре и т. д. до пределов, которые определялись у различных народов самыми разнообразными обстоятельствами. Обстоятельством, определившим форму и ход первоначальнаго развития счисления, была, коренящаяся в условиях и законах первоначальнаго развития представлений, невозможность для первобытнаго человека в течение значительных промежутков времени отделять числовое представление от конкретнаго представления содержащей его группы предметов. Счет в начале, вследствие этого обстоятельства, мог быть и был только вещественным. Промежутки времени, необходимые для выделения последовательных числовых представлений, были вообще очень большими, но особенно значительную продолжительность имели они в эпоху развития представлений чисел два, три и четыре. На исключительно большую величину промежутка времени, в продолжение котораго выделялось представление числа три и поэтому вся доступная человечеству область счисления ограничивалась определенными представлениями единицы и два и неопределенным — множества, указывает факт существования во многих языках двойственнаго числа. К этому же громадному промежутку времени восходят начало развития счисления дробей и связанное с ним первое образование системы счисления. Первою дробью, с которою познакомилось человечество, была половина. Вслед за нею постепенно выходили на свет сознания и ближайшия к ней другия дроби двоичной системы. Половина какого нибудь предмета могла быть, в свою очередь, разделена на две пол-половины; пол-половина — на две пол-пол-половины и т. д. до предела, до котораго могли доходить требования практической жизни. Вполне характеристичный пример этого образования дробей двоичной системы представляет древнерусская система земельных мер. Землемерныя рукописи и официальные акты по землемерию до-Петровской эпохи доходили в образовании этих дробей до 8, 9 и даже 10 повторений приставки пол- к слову половина (о дальнейшем развитии счисления дробей см. в статье Дроби). Первоначальное разнообразие групп предметов, заимствуемых человеком из окружающей природы для употребления в качестве орудий и средств счета, сменилось, после выделения представления числа четыре, почти исключительным употреблением группы, представляемой пальцами руки, как ближайшей к человеку и постоянно находящейся в его распоряжении. С этого времени дальнейшее развитие счисления так тесно связалось с развитием уменья пользоваться при счете пальцами, что для словеснаго выражения вновь выделяемых числовых представлений стали в

чрезвычайно широких размерах употребляться названия предметов и действий пальцеваго счета. После выделения представления числа 5 дальнейшее развитие счисления встретило важное затруднение, состоявшее в невозможности, при выделении следующаго числового представления шесть, пользоваться пальцами одной руки, как уже занятыми выражением числа 5. Наблюдения над пальцевым счетом современных дикарей обнаруживают существование и размеры разсматриваемаго затруднения в этом и аналогичных других случаях с полною ясностью. После значительнаго промежутка времени некоторыя племена пришли к мысли освобождать занятые выражением числа 5 пальцы одной руки помощью употребления особаго знака, напоминающаго человеку, что число 5 уже получено один раз. Этим знаком бывали: черта, проведенная на песке, или красящим веществом на какой нибудь поверхности, камень, и т. д. Этим приемом была создана пятиричная система счисления в ея примитивном виде счета по пяткам и положено начало развитию письменнаго счисления. Действительно употребление для условнаго обозначения предмета других знаков, чем жесты и звуки, и есть уже письмо в самом обширном значении этого слова (см. П и с ь м е н н о е с ч и с л е н и е). Последовавшее за введением указанного приема развитие счисления состояло в том, что при выделении, с помощью пальцев одной руки, всех следующих числовых представлений до известнаго предела, попутно выделялись сперва простыя кратныя пяти, как основного числа пятиричной системы, а затем и единицы следующих разрядов той же системы вместе с кратными им. Другим средством устранения представившагося затруднения, найденным другими племенами, было употребление при выделении следующих за 5-ю числовых представлений пальцев другой руки. Но когда эти племена, достигнув числа 10, должны были перейти к 11, тогда они опять встретились с затруднением, подобным прежнему, и состоявшем в невозможности пользоваться пальпами обеих рук, как уже занятыми выражением числа 10. Те же два средства, как и прежде, послужили и для устранения новаго затруднения. Одни из племен, придя к мысли обозначать десяток особым знаком, создали получившую позднее всеобщее распространение десятичную систему счисления; другия, напротив, остановившись на мысли воспользоваться пальцами ног, продолжали развивать счисление в прежнем направлении, пока, наконец, достигнув числа 20, не пришли в дальнейшем развитии счисления к созданию двадцатиричной системы, закончившему собою цикл образования пальцевых или натуральных систем счисления. Средства, при помощи которых происходило дальнейшее развитие счета, оставались все последующее время в сущности теми же, какими были в начале, изменяясь только более или менее резким образом в своих внешних формах, в зависимости от достигаемых человечеством ступеней развития. Согласно двум главным родам употребляемых средств, счет бывает или вещественным, или мысленным. Первый пользуется или предметами, принадлежащими человеческому телу, главным образом пальцами, или же предметами, посторонними человеку. И в том, и в другом случае счет пользуется употребляемыми им предметами или в их непосредственном виде, или в форме изображений, с течением времени все более и более удаляющихся от оригиналов и кончающих переходом в системы условных знаков или образованием письменнаго счета в тесном смысле. Не смотря на свою распространенность в позднейшее время, письменный счет не является единственной формой вещественнаго счета в его позднейшем состоянии. Другою формою, и при том стоящею гораздо ближе к своему древнему прототипу, является инструментальный счет, пользующийся для своих целей различными, более или менее сложными искусственными инструментами или орудиями, начиная с первобытнаго шнурка с узлами и кончая усовершенствованной счетной машиной последней конструкции. Другой главный вид счета — мысленный — в своей чистой первоначальной форме слагается из операций, совершаемых вне сознания и выводимых перед ним с значительным трудом и в более или менее смутных образах только в позднейшее время, по достижении владеющими им лицами значительно высших ступеней развития. При таких свойствах этого счета об употреблении его в древности мы можем судить только по перешедшим в памятники древней математической литературы результатам его приложения к решению различных задач и вопросов. Недостаток данных истории М. может быть пополнен наблюдениями над феноменальными счетчиками нашего времени. Этим именем обозначаются прежде всего лица, которыя, без всякой предварительной подготовки, оказываются в состоянии в поразительно короткие промежутки времени производить очень большия вычисления и решать задачи, которыя должны быть признаны совершенно выходящими из круга ведения не только неграмотнаго человека, но даже и лиц, получивших элементарное школьное образование. Можно указать на обратившаго на себя недавно внимание всего образованнаго мира *Жака Иноди* и на изученных более или менее обстоятельно *Анри Монде*, во Франции, и *Ивана Петрова*, в России. Наблюдения над этими феноменальными счетчиками дают нам основание думать, что начало употребления мысленнаго счета восходит к очень отдаленным временам развития счисления. Данных для изучения первоначальнаго развития *геометрии* наука в настоящее время почти совсем не имеет. Первое ознакомление с основными геометрическими понятиями доставляло человечеству созерцание предметов окружающей природы. Но это ознакомление было-бы очень поверхностным, еслибы к нему не присоединялось с ранняго времени воспроизведение образов, представляющихся человеку в окружающем его мире, вызываемое или стремлением к подражанию, или практическими нуждами. Воспроизведение, явившееся результатом первой из этих двух причин, выразилось в первобытных формах живописи и ваяния, и второй — в различных ремеслах и в первобытной форме архитектуры. Но большая часть доставляемых этими средствами геометрических сведений оставалась вне сознания. Прогрессировать в ясности и определенности эти представления едва-ли могли ранее эпохи, когда явилась надобность в измерении разстояний, в определении величины земельных участков, в вычислении содержания жидкостей, зерен, плодов и проч. в сосудах и различных помещениях. Употребляемые в начале приемы этих измерений и определений были исключительно эмпирическаго и индуктивнаго происхождения. Умозрение стало приводить к сколько-нибудь заметным результатам только значительно позже, и притом первые результаты умозрения в области геометрии могли быть в большинстве случаев только ошибочными. Вполне характерным примером их является, имевшее в свое время всеобщее распространение, ложное учение о равенстве площадей фигур при равенстве их периметров, и обратно. Учение это получило очень обширное и притом вполне умозрительное развитие. Площадь какого-нибудь даннаго четырехугольника вычислялась, напр., как площадь прямоугольника, имеющаго одинаковый с ним периметр, именно такого, неравныя стороны котораго равнялись полусуммам противоположных сторон разсматриваемаго четырехугольника (египетския землемерныя надписи храма в Эдфу). Площади многоугольника, круга, всякой криволинейной фигуры вычислялись как площади квадратов, имеющих сторонами $^1/_4$ периметра разсматриваемой фигуры. Вычитание площадей фигур заменялось вычитанием их периметров и следующим затем определением площади квадрата, периметр котораго равнялся полученной разности (русския землемерныя рукописи XVII столетия).

Древнейшим из известных современной науке памятников древней математической литературы является составленный, за 1700 лет до Р. Хр., по источникам еще более древним, восходящим именно к промежутку 2221—2179 гг. до Р. Хр., египетский *папирус Ринда* (см. П а п и р у с ы м а т е м а т и ч е с к и е). В таблицах, составляющих его арифметическую часть, исследователь, кроме действий над целыми и дробными числами, встречает еще случаи возвышения в степени, пропорциональное деление, учение о геометрических отношениях и пропорциях в примитивном виде, определение средняго арифметическаго, задачи, занимающиеся арифметическими прогрессиями, решение уравнений 1-й степени с одним неизвестным. Изложение решений вопросов и задач в папирусе Ринда лишено даже намека на что-нибудь подобное объяснению или доказательству. Искомый результат или дается прямо, или вычисляется, как-бы по рецепту, в обоих случаях он поверяется, так как уверенность в правильности предписаннаго решения только при посредстве поверки и может быть достигнута. Такой способ изложения, как свидетельствующий, по меньшей мере, о неясности для сознания найденнаго решения вопроса, показывает, что в начале исключительно, а позднее во всех более трудных случаях решение задач и вопросов доставлялось феноменальными

счетчиками и затем, как умственное наследие, передавалось из поколения в поколение. Методов, которыми безсознательно пользовались феноменальные счетчики при своих решениях вопросов и задач, как показывают наблюдения над людьми этого типа в новейшее время, было два, из них один может быть назван методом попыток. Сущность метода состоит в совершении ряда попыток, имеющих целью достигнуть вполне точнаго решения вопроса или возможно более к нему приблизиться. Так как для успеха дела число таких попыток должно быть возможно более ограниченным, то прежде чем приступить к ним необходимо определить, на основании условий вопроса их низший или высший предел, или оба вместе. Затем для первой из попыток, следовательно, в качестве числа, представляющаго для всего их ряда точку исхода, или, короче, в качестве исходнаго числа берется или один из этих пределов, или число, близкое к нему. Выбор для дальнейших попыток, в случае неудачи первой, чисел в ряду следующих за исходным числом всегда следует принципу удобнейших (главным образом для вычисления) чисел. Оценка делаемых попыток в их отношениях к своей главной цели, т. е. по вопросам о том, доставляется ли ими искомое решение вопроса или, в противном случае, на сколько оне приближают к этому решению, производится помощью их поверки условиями задачи; без поверки употребление метода делается совершенно немыслимым. Существенной характеристической чертой метода попыток является его применимость к решению самых разнообразных задач и вопросов как теоретическаго, так и практическаго характера. Метод попыток может быть прямым, когда попытки занимаются непосредственным определением искомаго числа, и непрямым, когда ими определяется число, находящееся в установленной условиями задачи связи с искомым. Частным случаем метода попыток является метод постепеннаго образования или составления искомаго числа на основании условий вопроса. В этом методе или все попытки, кроме первой, или некоторая часть их, заменяются рядом изменений, совершаемых или в исходном числе или в числе, доставленном какою-нибудь из последующих попыток. Изменения эти производятся таким образом, чтобы составляющее их объект число постепенно приближалось к искомому. Приложение этого метода допускается, впрочем, далеко не всеми вопросами, решаемыми методом попыток, а потому он и является не более как только частным его случаем. Другим, находящимся в распоряжении феноменальных счетчиков, методом был обычно употребляемый в современной науке метод выражения искомаго неизвестнаго в данных задачи. Феноменальные счетчики, а затем обыкновенные, пользовались им для решения вопросов с немногими и простыми условиями, указывающими с полною очевидностью ряд действий, исполнение которых над данными числами приводит к искомому неизвестному. В папирусе Ринда встречается только одно правило, имеющее для области обнимаемых им случаев, хотя и крайне тесной, общее значение. Результат умножения каждой дроби с единицей в числителе на дробь $^2/_3$, говорит это правило, всегда состоит из $^1/_2$ умножаемой дроби и из ея $^1/_6$. Так как изложение этого правила следует непосредственно за рядом примеров, его подтверждающих, то исследователь получает право заключить, что оно было найдено помощью индукции через простое перечисление. По всей вероятности и все другия правила общаго характера в разсматриваемую отдаленную эпоху выводились таким-же образом. Представляемыя папирусом Ринда геометрическия сведения древних египтян стоят на гораздо более низкой степени развития, чем их арифметическия знания. Для суждения о качественной стороне дела достаточно заметить, что все употребляемые в нем приемы измерения, как величины земельных участков, так и вместимости житниц, неточны. Притом в первом случае они хотя и имеют умозрительный характер, но на степени развития, не стоящей выше учения о равенстве площадей при равенстве периметров; во втором же случае они являются прямо и грубо эмпирическими. Гораздо более высокое положение, приближающееся до некоторой степени к философскому и научному уровню арифметических знаний, занимает в геометрическом отделе папируса Ринда, по точности результатов и по философскому и научному значению основных идей, статья о вычислении пирамид, как заключающая в себе в примитивном виде учение о подобии трехугольников и пользующаяся для определения равенства углов в прямоугольных трехугольниках приемами, состоящими в смысле науки нашего времени в определении синусов и тангенсов. Высокою для своего времени степенью точности обладает в папирусе Ринда также и прием вычисления площади круга, состоящий в возвышении в квадрат 8/9 его диаметра (см. К в а д р а т у р а к р у г а, т. XIV, стр. 840). Определенное по этому приему отношение окружности к диаметру равно 3,16. В тоже время, как и в Египте, или немного позже, математическия знания достигли довольно высокой степени развития у жителей Вавилона и Ассирии, у *халдеев*. Главным источником сведений о том являются таблицы из *Сенжере*, занимающияся возвышением последовательных натуральных чисел от 1 до 60 в квадрат и куб и пользующияся для изображения чисел 60-ричной системой счисления. Кроме того, из сочинений греческих писателей мы узнаем, что учение о пропорциях было принесено Пифагором в Грецию из Вавилона. Не имея таким образом оснований для суждения об объеме и свойствах математических знаний халдеев, мы можем указать, как на единственную известную нам черту различия между ними и знаниями египтян,— на характер приложений тех и других. Египетския математическия знания прилагались к решению вопросов, имеющих практическое утилитарное значение, напротив халдейския — главным образом преследовали мистическия цели и служили для предсказаний будущаго. Умственное развитие, а вместе с ним и развитие науки никогда не шло во всем человечестве равномерно. В то время как одни народы стояли во главе умственнаго движения человечества, другие оказывались едва вышедшими из первобытнаго состояния. Когда у последних вместе с улучшением условий их жизни, появлялись, под действием внутренних или внешних импульсов, стремления к приобретению знаний, тогда они должны были прежде всего догонять передовыя племена. Если в то же время передовыя племена, достигнув высшей доступной им по их способностям или по созданным для них историею условиям жизни степени развития, вырождались и падали, в умственном развитии всего человечества происходил застой или даже видимый временный упадок: приобретение новых знаний прекращалось и умственная работа человечества сводилась единственно к упомянутому усвоению отставшими племенами знаний, уже приобретенных человечеством. Только по достижении этого усвоения отставшия племена получили возможность вести далее дело приобретения новых знаний и через это, в свою очередь, становиться во главе умственнаго движения человечества. Таким образом в истории умственной деятельности каждого народа, когда нибудь занимавшаго место в ряду передовых деятелей человечества и затем свершившаго весь свой жизненный цикл, исследователь должен различать три периода: период усвоения знаний, уже приобретенных человечеством; период самостоятельной деятельности в общей всему человечеству области приобретения новых знаний и, наконец, период упадка и умственнаго вырождения. Обращаясь от этого общаго разсмотрения хода умственнаго развития человечества к той из отдельных его областей, которая представляется развитием М., мы находим, что при современном состоянии историко-математических знаний нам доступно изучение вполне завершеннаго цикла деятельности отдельнаго народа в области развития М. только на одной нации, на древних греках. Усвоение приобретенных человечеством знаний греками, как нацией, далеко отставшей от передовых народов, началось с особенно усилившагося, после изгнания гиксов из Египта, перехода египетских знаний к народам Малой Азии и в самую Грецию. В течение очень большого промежутка времени, от 1700 г. и ранее и до 600 г. до Р. Хр., эти знания были исключительно практическаго характера, относящияся к потребностям обыденной жизни и к необходимейшим промыслам, ремеслам и искусствам. В области М. переход научных знаний из Египта в Грецию начался с возвращения, около 590 г. до Р. Хр., *Фалеса Милетскаго* на родину, в Милет, после долговременнаго пребывания в Египте. Принесенныя им оттуда геометрическия и астрономическия сведения составляли первое время почти исключительное достояние основанной им ионийской школы. Но это время было очень непродолжительно, так как труд перенесения египетских, а затем и халдейских математических знаний скоро взяли на себя и другия лица: *Пифагор*, *Ойнопид Хиосский* и *Демокрит* из Абдеры. Особенно много сделал в этом направлении Пифагор, что и было главною причиной широкаго развития занятий М. в основанной им пифагорейской школе.

Так как последовательныя стадии развития человечества никогда не сменяют друг друга резко, то в этой школе еще до окончания периода усвоения, исследователь встречается уже с проявлениями самостоятельной деятельности греков в области М. Различить, однако же, в том, что нам известно о математических знаниях пифагорейцев, принадлежащее им самим от заимствованнаго у египтян и халдеев, в настоящее время нет пока никакой возможности. После разрушения, около 450 г. до Р. Хр., представляемаго этою школою религиознаго братства, ея математическия знания, строго оберегаемыя наравне со всеми другими знаниями от распространения между лицами, не принадлежащими к союзу, сделались общим достоянием греческой нации. Особенно широкое распространение получили они на родине пифагорейского союза, в греческих колониях Южной Италии или в так называемой Великой Греции и в Афинах. В Италии это распространение создало италийскую математическую школу, крупнейшими представителями которой в последующее время были *Архитас Тарентский*, *Эвдокс Книдский* и *Архимед*. В Афинах распространение пифагорейских математических знаний выразилось в деятельности математиков V стол., крупнейшим представителем которых был пифагореец *Гиппократ Хиосский*. Деятельность эта была посвящена главным образом попыткам решения трех знаменитых задач: трисекции угла, квадратуры круга и удвоения куба. Этому же столетию принадлежит и первая попытка составления свода геометрических знаний в научной обработке, сделанная Гиппократом Хиосским. С деятельностью математиков V ст., кроме значительнаго усиления самостоятельности математических работ греческих ученых, связываются в истории М. два важные момента: начало дедуктивнаго периода развития М., которое в действительности, может быть, относится к еще более раннему времени, напр. к пифагорейской школе или даже к самому Египту, и полное выяснение направления и характера математическаго гения греческой нации, который с этого времени начал проявлять такую исключительную склонность к геометрическим исследованиям, что на них, можно сказать, сосредоточилась вся деятельность греческой нации в области математики до самаго наступления периода упадка. С началом дедуктивнаго периода закончился в истории развития М. во всем человечестве первоначальный донаучный период.

Период усвоения греками математических знаний, приобретенных человечеством, можно считать закончившимся ко времени деятельности *Платона*, который хотя и ездил в Египет с целью непосредственнаго ознакомления с египетскими науками, но, по высокому сравнительно состоянию математических знаний в пифагорейской школе и у математиков V ст., он едва ли мог найти в египетской М. что-нибудь оставшееся для греков неизвестным. Итак, период вполне самостоятельной деятельности греков в области М. начинается с деятельности Платона и основанной им в 389 г. философской школы, известной под именем академии, или даже еще ранее, с работ математиков V ст. С этого времени последующее развитие, если не всей М. вообще, то несомненно геометрии, сосредоточивается исключительно в руках одной греческой нации, которая и ведет его, пока находит в своем распоряжении необходимыя средства. Главным результатом математической деятельности самого Платона было создание философии М. и в частности ея методологии. Как известно, его собственныя работы очень мало касались увеличения математических знаний в количественном отношении и были направлены главным образом на установление строгих и точных определений основных понятий геометрии, на обнаружение и отведение настоящаго места ея основным положениям, на приведение приобретеиных ранее математических знаний в строгую логическую связь как между собою, так и с основными понятиями и положениями и, наконец, на приведение в полную ясность и изучение методов открытия и доказательства новых истин, методов, хотя уже давно употребляемых в науке, но еще не выяснившихся в достаточной степени перед сознанием. Методов, разработанных Платоном, по свидетельству Прокла, было три: аналитический, синтетический и анагогический. Особенной новизной для современников Платона отличались, повидимому, результаты произведеннаго им изучения аналитическаго метода, как это можно видеть из того, что Диоген Лаэрций и с меньшею уверенностью Прокл смотрят на этот метод как на нововведение Платона. В дошедших до нас сочинениях Платона не содержится никаких сведений об его исследованиях по разсматриваемому предмету, так что для суждения об их результатах нам не остается ничего другого, как воспользоваться определением этих методов у перваго по времени известнаго нам писателя, который его дает. Таким писателем является Эвклид, по определению котораго «анализ есть принятие искомаго как-бы найденным; чем через следствия достигается то, что найдено истинным, а синтез есть принятие уже найденнаго, чем через следствия достигается то, что найдено истинным». Изложенныя, на основании позднейших исследований предмета, более полным и главное более определенным образом, эти определения представляются в следующем виде. Аналитический метод состоит в образовании цепи предложений, из которых каждое вытекает из следующаго за ним, как непосредственное следствие. Первым звеном этой цепи служит доказываемое предложение, последним — предложение уже доказанное. Схема метода такова: требуется доказать существование *D*. Доказательство: *D* существует, если *C* существует; *C* существует, если *B* существует; *B* существует, если *A* существует, но существование *A* есть уже доказанная истина, следовательно, и существование *D* доказано, так как правильно выведенное следствие предложения, представляющаго истину, всегда есть истина. Если между двумя следующими одно за другим предложениями цепи существует обратимость, т. е. если при следовании справедливости перваго предложения из справедливости второго, также следует обратно и справедливость второго из справедливости перваго, то отыскивание этого второго предложения при составлении цепи, как предложения, из котораго первое вытекает как следствие, может быть заменено более легким действием вывода второго предложения, как следствия перваго. Если обратимость предложений распространяется на всю цепь, то аналитический метод принимает более легкую частную форму, состоящую в образовании цепи предложений, из которых каждое есть непосредственное следствие предыдущаго. Эту частную форму обыкновенно и принимают за выраженную определением Эвклида, хотя неопределенность его выражения и не дает для этого достаточнаго основания. Если же принять во внимание, что, при непонимании значения обратимости предложений, греческие геометры, употребляя эту форму, должны были безпрестанно приходить к ложным выводам, то придется заключить, что путем горькаго опыта они должны были придти к употреблению общей формы анализа, как никогда не обманывающей возлагаемых на нее надежд. Синтетический метод есть обращение аналитическаго и, поэтому, состоит в образовании цепи предложений, из которых первое есть доказанная истина, а каждое из последующих есть следствие ему предшествующаго. Об анагогическом методе или методе приведения к нелепости (reductio ad absurdum) Эвклид не говорит, но довольно ясное его определение на ряду с неясными определениями анализа и синтеза дает Прокл, при своем приписывании их Платону. «Третий (анагогический) метод», говорит он, «есть приведение к невозможному, которое не доказывает прямо того, что ищется, а опровергает то, что ему противоречит, и таким образом через связь того и другого находит истину». В основании этого метода лежит истина, что если из двух предложений одно вполне отрицает другое, или, другими словами, если два предложения противоречащия, то для убеждения в справедливости одного достаточно показать ложность другого. Анагогический метод есть собственно видоизменение аналитическаго, в котором первым звеном цепи предложений вместо доказываемаго предложения является его отрицание, а последним какое-нибудь заведомо ложное или нелепое предложение. Ученые математики, принадлежавшие к академии во все время ея существования, распадались на две группы: на ученых, получивших свое математическое образование независимо от академии и находившихся только в более или менее тесных сношениях с нею, и на бывших учеников академии. К числу первых принадлежали *Теэтет Афинский*, *Леодамас Тазосский*, *Архитас Тарентский* и позднее *Эвдокс Книдский*; к числу вторых — *Неоклид*, *Леон*, *Амикл из Гераклеи*, братья *Менехм* и *Диностратъ*, и во время старости Платона *Теюдий из Магнезии*, *Кизикен Афинский*, *Гермотим Колофонский*, *Филипп из Менде* и *Филипп из Опуса*. В школе Платона часто по его указаниям, а иногда и при непосредственном руководстве, продолжалась разработка планиметрии, получила значительное движение вперед мало разработанная ранее стереометрия, создалось учение о конических сечениях и более

общее о геометрических местах. Кроме того в ней продолжал свое развитие получивший, на сколько нам известно, начало в трудах Гиппократа Хиосскаго метод исчерпывания, о котором мы будем говорить далее, и были сделаны две новыя попытки составления книги «Элементов» геометрии: *Леоном*, в начале существования академии, и *Теодием из Магнезии* в конце жизни Платона. «Элементы» Леона замечательны по введению в них впервые так назыв. диоризма, то есть исследования задачи, состоящаго в разсмотрении условий возможности или невозможности ея решения, а также в первом случае и в определении числа ея различных решений. Из математиков, современных академии, но не принадлежавших к ней, более известны нам по своей деятельности *Автолик из Питаны* и *Аристей Старший*. Создание в школе Платона философии М. должно было повести необходимым образом к разработке существенно необходимой для нея истории М. Дело этой разработки взяла на себя основанная учеником Платона, *Аристотелем*, школа перипатетиков в лице двух своих представителей, *Эвдема Родосскаго* и *Теофраста Лесбосскаго*. Нельзя не заметить, что в трудах по истории М. этих ученых заключается все крупное, что было сделано школою перипатетиков для развития наук математических. Покровительство науке, оказываемое династией Птоломеев, царей новой греко-египетской монархии, возникшей после смерти Александра Македонскаго на почве древняго Египта сделало, приблизительно с 300 г. до Р. Хр., из столицы этой монархии, Александрии, главный центр умственной и духовной жизни греческаго мира. Щедрыя денежныя пожертвования на дело науки и просвещения со стороны династии Птоломеев, и особенно трех первых из них: *Птолемея Сотера*, *Птолемея Филадельфа* и *Птолемея Эвергета*, привлекли в Александрию выдающихся представителей науки древней Греции и собрали в александрийской библиотеке все сокровища греческой ученой и изящной литературы. Самыми крупными из представителей М. в Александрии были *Эвклид*, *Эратосфен* и *Аполлоний Пергейский*. Написанные Эвклидом «Элементы» геометрии закончили собою ряд попыток составления сочинений того же рода. До нынешняго времени остаются они произведением, не имеющим в своей области себе равнаго. Также классическим, хотя и далеко не в такой степени, является завершившее собою развитие учения о конических сечениях в древней Греции сочинение Аполлония Пергейскаго: «Восемь книг о конических сечениях», заключающее в себе все сделанное в этой области самим автором, его предшественниками и современниками. Старшим современником Эратосфена и Аполлония Пергейскаго был самый крупный математик своей эпохи, представитель италийской школы, *Архимед*. Из его работ особенно важное значение должно быть признано за изследованиями, относящимися к коническим сечениям, к происходящим от них телам вращения и к спиралям. Во всех этих исследованиях, также как и при решении некоторых вопросов планиметрии и стереометрии, он широко пользовался методом исчерпывания, который в его руках достиг наибольшей доступной ему высоты развития. Началом развития метода являются первыя попытки раскрытия отношений, существующих между простейшею криволинейною фигурою, кругом, и фигурами прямолинейными. После того как было найдено, что площади правильных одноименных многоугольников относятся как квадраты диаметров описанных кругов, сама собою должна была явиться мысль о возможности перехода от этих многоугольников к кругам через посредство удваивания числа сторон многоугольников, делающаго периметры последних все более и более близкими к окружностям кругов. Но так как уходящее в безконечность удваивание числа сторон многоугольника, а вместе с ним и безпредельное приближение периметра того же многоугольника к окружности, не дают места непосредственному усмотрению, то явилась необходимость для удержания за очевидностью ея прав в принятии основанием всех исследований разсматриваемаго рода такого вспомогательнаго предложения, с помощью котораго требования очевидности были бы удовлетворены. Таким предложением в «Элементах» Эвклида является следующее: «Если даны две неравныя величины и от большей отнимается более половины, от оставшагося также более половины, и так далее, то останется величина, которая будет меньше всякой данной малой величины» (книга X, предл. I). Так как в устанавливаемом этой теоремой процессе всякий остаток сравним с следующим за ним, то строгия требования греческой геометрии являются удовлетворенными. С помощью этой теоремы Эвклид доказывает, что всякий конус составляет третью часть цилиндра, имеющаго одинаковыя с ним основание и высоту; из тех же оснований он выводит, что круги относятся как квадраты их диаметров, что трехугольныя пирамиды, конусы, цилиндры при одной и той же высоте относятся соответственно, как площади их оснований; что отношение шаров равно отношению кубов их диаметров. С гораздо большею строгостью относился к методу исчерпывания Архимед, положивший в его основание теорему: «если две линии, две поверхности или два объема неравны, то всегда возможно величину, на которую большее превосходит меньшее, прилагать к самой себе столько раз, что получится результат, превосходящий всякую данную конечную величину одного с ним рода». Пользуясь этой теоремой, Архимед дает, например, два способа решения вопроса о квадратуре параболы. Общий прием, заключающийся как в этих двух, повидимому очень различных способах, так и в подобных им, относящихся к другим родам протяжений, состоит в том, что определяемая величина разсматривается как предел ряда каких-нибудь величин, находящихся к ней в известном отношении. Но так как для практических приложений этого приема не было выработано никаких общих правил, как относительно закона составления требуемых им рядов и формы их членов, так даже и относительно самаго выбора ряда, который бы мог привести к цели, то исследователь получал в этом приеме только одни неопределенныя общия указания на находящийся в его распоряжении путь исследования; во всем же остальном он был предоставлен собственной эрудиции и собственному остроумию. Это и было причиной, что только в руках такого гениальнаго геометра, как Архимед, метод исчерпывания мог получить сколько-нибудь значительныя приложения. В деятельности Эвклида, Аполлония Пергейскаго и особенно Архимеда период самостоятельной деятельности греков в области М. достиг момента наибольшей высоты математических исследований как в количественном, так и в качественном отношении. Затем начинается период упадка. Работы греческих математиков мельчают. Дело идет уже не о создании новых отраслей науки и решении ея труднейших вопросов, а о пополнении тех, говоря относительно, неважных пробелов, которые были оставлены предыдущим быстрым развитием науки. В этой первой фазе упадка деятельность представителей математики: *Никомеда*, *Диоклеса*, *Персея*, *Зенодора*, *Гипсикла Александрийскаго*, астронома *Гиппарха* все еще остается верною прежнему направлению, которое, как продукт характеристических свойств и особенностей греческой нации, может быть названо национальным. Материалы для этой деятельности черпались действительно из отраслей М., продолжение разработки которых было завещано предыдущей эпохой. Этими отраслями были: во первых, элементарная геометрия и в ней главным образом стереометрия, где и после работ Эвклида и Архимеда все еще оставались некоторые пробелы; во вторых, кривыя высших порядков, толчек к изучению которых был дан Архимедом через посредство его исследования спиральных линий, и в третьих, числовая геометрия, также указанная последующим математикам Архимедом в относящейся к ней его работе по предмету вычисления круга. К первой отрасли относились работы Зенодора (изопериметрическия фигуры) и Гипсикла Александрийскаго (правильные многогранники), ко второй — работы Никомеда (конхоида), Диоклеса (циссоида) и Персея (спиры и спирическия кривыя) и к третьей — работы Гиппарха (создание тригонометрии и вычисление хорд). В следующую затем фазу упадка, начавшуюся около 100 г. до Р. Хр., прежняя стойкость греческаго гения в удержании национальнаго направления оказывается совершенно утраченною и если работы греческих математиков могут считаться греческими, то только по языку, а никак не по духу. К тому же и авторами их являются в большинстве случаев лица, чистота греческаго происхождения которых в высшей степени сомнительна. Первым из чуждых греческому гению направлений, явившихся на смену национальнаго, было прикладное направление, развившееся на почве древняго Египта и бывшее, по всей вероятности, наследием египетской М., об утилитарном направлении которой во времена составления папируса Ринда уже говорилось ранее. Первое и едва ли не самое резкое выражение нашло это направление в самом начале своего развития, ок. 100 г. до Р. Хр., в сочинениях *Герона Алек-*

сандрийскаго, посвященных главным образом разработке геодезии и механики и во многом напоминающих приемы, формы, а изредка даже и содержание египетской М. К этому же направлению должна быть отнесена и вызванная потребностями астрономии разработка тригонометрии, начатая в трудах Гиппарха еще в эпоху национальнаго направления и потому являющаяся звеном, связующим последнее с прикладным направлением. Самыми крупными деятелями разработки тригонометрии были *Менелай Александрийский* и *Клавдий Птолемей*. Связующий национальное и прикладное направления характер этой разработки выражается как в трудах по геометрии самого Птолемея, так и в еще большей степени в геометрических работах второстепенных деятелей эпохи: *Геминуса Родосскаго*, *Феодосия из Триполи*, *Діонисодора* и *Серенуса из Антиссы*. Как на известнаго нам представителя эпохи упадка этого направления можно указать на *Секста Юлия Африканскаго*, бывшаго, не смотря на свое римское имя, греческим писателем. Еще более чуждым греческому гению было арифметическо-алгебраическое направление, получившее начало в неопифагорейской школе, образовавшейся в I ст. после Р. Хр. Деятелями арифметики в этой школе были: *Никомах Геразенский*, *Теон Смирнский* и *Тимарид*. Продолжение работ неопифагорейцев в области арифметическо-алгебраическаго направления взяла на себя основанная во II в. после Р. Хр. неоплатоновская школа в лице главным образом двух своих представителей, *Порфирия* и *Ямблиха*. Но самым крупным деятелем в области арифметическо-алгебраическаго направления, закончившим его развитие, был стоявший вне философских школ *Диофант Александрийский*. На работы этого ученаго следует смотреть как на последнюю яркую вспышку угасающей греческой математической науки, напомнившую ея славное прошлое и более уже не повторявшуюся. Третьей фазой упадка греч. М. была эпоха исключительной деятельности комментаторов великих произведений греческой математической литературы прошлаго времени. Крупным представителем начала этой эпохи, подобнаго которому в дальнейшем ея течении уже не встречалось, был *Папп Александрийский*. Он, действительно, в своем «Собрании», этом важнейшем из его сочинений, был еще в состоянии к изложению содержания сочинений разсматриваемых им авторов присоединять от себя различныя предложения, объясняющия или дополняющия предмет, хотя нередко и стоящия с ним в очень отдаленной связи. Этою способностью, все еще вносящею в науку кое-что новое, последующие деятели разсматриваемой эпохи: *Теон Александрийский*, его дочь *Ипатия*, *Прокл Диадох*, *Дамасций из Дамаска*, *Эвтокий Аскалонский*, *Асклепий из Траллеса* и *Иоанн Филопон* уже не обладали. Четвертою и последнею фазою упадка греческой математики была эпоха византийских ученых, продолжавшаяся от VII века после Р. Хр. до взятия турками Константинополя (1453). В эту эпоху произведения древних греческих математиков сделались до того недоступными новым, что о самом их существовании эти последние нередко узнавали от арабов и персов; в то время, когда арабские математики прилагали все усилия к тому, чтобы иметь на своем языке переводы всех сколько-нибудь выдающихся в греческой математической литературе произведений, византийские математики не были в силах справляться даже с самыми незначительными элементарными произведениями арабской математической литературы и для переделок и переводов на греческий язык нужных им сочинений обращались уже к совершенно ничтожной математической литературе персов, представляемой, напр., такими писателями как *Шамсальдин Бухарский*. Особеннаго развития это пользование персидскими отголосками таких произведений прежней греческой литературы, как Алмагест, достигло в XIV в. в трудах *Хіониадеса Константинопольскаго*, *Георга Хризококцеса*, *Федора Мелитениота* и монаха *Исаака Аргиры*. Кроме этих ученых, деятелями разсматриваемой эпохи в области М., оставившими более или менее заметный след в византийской литературе, были *Михаил Пселл*, *Николай Кабазилас*, монах *Варлаам*, *Иоанн Педиазимус* или *Галенус*, *Максим Плануд*, *Николай Рабда из Смирны* и *Мануил Москопул*.

Народом, одновременно с греками, стоявшим во главе умственнаго развития человечества, были индусы. Это положение было занято им, впрочем, значительно ранее греков, как это можно видеть из того, что в то время, когда греки были еще скромными учениками египтян, слава о мудрости браминов уже гремела на Востоке. До нас дошли даже темныя известия, что учиться этой мудрости ездили в Индостан и некоторые из греков, именно Пифагор и Демокрит из Абдеры. Как показывают две великия религиозныя системы, созданныя индусами, браманизм и буддизм, национальными чертами индусскаго гения были склонность к философскому созерцанию, к умозрениям, стремящимся проникнуть в самую сокровенную сущность вещей и постичь необъятное и непостижимое, и стремление к построению таких систем философско-религиознаго миросозерцания, которыя, представляя стройное логическое целое, давали бы ответы на все великие и труднейшие вопросы и загадки, представляемыя жизнью макрокозма и микрокозма, вселенной и человека. Направленныя исключительно на познание внутренних отношений между вещами, индусския умозрения весьма мало заботились о внешних преходящих формах. В этом отношении индусы резко отличаются от греков, для которых так много значила форма. Занятия геометрией, как наукой, имеющей очень много дела с формами, должны были, поэтому, представлять для индуса гораздо менее привлекательности, чем для грека. Другое дело — наука чисел. Уже одно созерцание ряда чисел, уходящаго всюду в безконечность как при своем продолжении в обе стороны, так и в промежутках между каждыми двумя его членами, могло, хотя отчасти и кажущимся образом, приближать мысль к постижению идеи безконечности. С другой стороны для ума, имеющаго исключительное пристрастие к познанию внутренней природы вещей, очень много привлекательнаго должно было представлять изучение свойств чисел и взаимных отношений между ними, являющихся так часто поразительными и неожиданными. Различия в характере национальнаго гения у индусов и греков сказались и в различиях склада и направления способности мышления у тех и других. Индусы придают гораздо более цены результату, чем обоснованию исследования; гораздо более заботятся об ответе на вопрос как?, чем на вопрос почему? В исследовании они обращают внимание главным образом на идеи и представления и гораздо менее на понятия. Вследствие этого, очень много теряя в определенности и строгости, они выигрывают в глубине и широте. При этом указанныя выше склонности ума нередко увлекают их так далеко от действительности, что глубина исследования с помощью фантазии обращается в безпредельность, а его широта — в необъятность. Отсутствие в нашем распоряжении всяких сведений о математической литературе индусов за время, предшествующее V в. после Р. Хр. совершенно лишает нас возможности составить себе хотя общее представление о развитии М. у индусов. Мы имеем за это отдаленное время только одни отрывочныя сведения о широком развитии интереса к счислению у индусов, выразившемся в таких фактах, как существование в санскритском языке, в эпоху создания Магабхараты, следовательно, за много лет до Р. Хр., отдельных независимых друг от друга названий для единиц первых 17 разрядов десятичной системы, или, как разсказ имеющаго каноническое значение жизнеописания Будды, Lalitavistara, написаннаго, как полагают, за 246 лет до Р. Хр., об экзамене Будды из арифметики, на котором он назвал имена всех разрядов чисел до 53-го включительно, и на «мольбу» о счете, доходящем до пыли первых атомов, и об определении числа их на протяжении одной мили, он ответил решением, представляемым 15-значным числом. Бо́льшая часть наших сведений о результатах, достигнутых развитием М. у индусов, доставлена находящимися в нашем распоряжении сочинениями трех индусских астрономов и математиков: *Ариабгатты*, *Брамагупты* и *Баскары Ахарии*, написанными соответственно в начале VI в., VII и XII вв. после Р. Хр. Сведения эти не могут претендовать на достаточную широту и глубину как по незначительности числа произведений, известных нам в такой обширной литературе, как индусская, так и в особенности потому, что все они, как посвященныя астрономии, уделяют для изложения того, что может быть для нее нужно из области М., только одну, две главы. Из изложения этих глав мы узнаем, что арифметика, алгебра и неопределенный анализ достигли у индусов наивысшей для соответствующих эпох степени развития. Если под алгеброй подразумевать приложение арифметических операций к сложным величинам всякого рода, будут-ли оне рациональными или иррациональными числами, или пространственными величинами, то индусов следует признать истинными изобретателями этой науки, развитие которой они довели, если иметь в виду современныя программы ея изложения, до

квадратных уравнений включительно. Но особенно высокой степени развития достиг у индусов неопределенный анализ, в области котораго они обладали вполне разработанными методами решения в целых числах неопределенных уравнений с двумя неизвестными 1-й и 2-й степеней. Из этих методов тот, который, под именем «циклическаго», они употребляли для решения неопределенных уравнений 2-й степени, по своему утонченному остроумию превосходит решительно все, что было сделано в области теории чисел до Лагранжа. Да и самый этот метод европейские математики, в лице Лагранжа, вторично нашли независимо от индусов только около 1769 г. (см. мемуар Лагранжа: « Sur la solution des problèmes indéterminés du 2 degré », в « Mémoires de l'Académie de Berlin », t. 23). Если таким образом в области науки чисел индусы в свое время стояли во главе развития М., то ничего подобнаго нельзя сказать о геометрии, в области которой они далеко отставали от греков. Да и то, что они сделали в ней более замечательнаго, как найденное помощью приложения алгебраических методов, должно быть отнесено к области приложений алгебры к геометрии. Для чистой геометрии, в том виде, в каком она сформировалась, напр., у греков, индусы сделали сравнительно немного. Главную причину такой отсталости индусской геометрии от греческой едва-ли не следует видеть в различии приемов доказательства, употребляемых тем и другим народом в области этой науки. В то время как греки пользовались для этого строго определенными логическими построениями, индусы ограничивались одним непосредственным усматриванием справедливости доказываемаго, достигаемым путем продолжительнаго разсматривания фигуры, снабженной всеми необходимыми вспомогательными линиями. Главнейшими вспомогательными средствами при этом, повидимому, служили принцип совпадения вместе с вытекающим из него, в качестве особаго случая, принципом симметрии и принцип подобия. С помощью этих принципов, при условии их полнаго и точнаго определения, могло бы быть развито все содержание геометрии и при том не в форме конгломерата, как в элементах Эвклида, а в строгой систематической форме, в которой прогресс науки был бы руководим идеями не случайнаго происхождения, а лежащими в существе предмета. С тригонометрией индусов находящияся в нашем распоряжении сочинения знакомят только по ея приложениям к астрономии. Но и этого достаточно, чтобы видеть, что она на столько же отличается от греческой, на сколько все арифметическо-алгебраическое направление математическаго гения индусской нации отличается от греческаго национальнаго направления. Всего яснее это выражается в способах составления тригонометрических таблиц. В то время, как греческие астрономы пользовались для этого целыми хордами, соответствующими двойным центральным углам, индусы составляли свои таблицы с помощью синусов, косинусов и синусов-верзусов и существующей между ними зависимости, исходя из определяемых помощью геометрии величин sin 30° и sin 45°. Это дает нам право заключить, что тригонометрия у индусов разрабатывалась как один из отделов приложений алгебры к геометрии, т. е. в той же форме, какую она имеет и в настоящее время.

Отставшей нацией, которая в деле дальнейшаго продолжения умственнаго развития человечества готовилась выступить на смену его последних по времени передовых представителей, индусов и греков, были арабы. Вполне осуществить принимаемую ими в этом на себя великую задачу им, однако же, не удалось. В области М., пройдя период усвоения знаний, приобретенных человечеством, они, вследствие неблагоприятных политических обстоятельств, должны были остановиться на самом начале следующаго периода самостоятельной деятельности. Находясь под одновременным воздействием индусов и греков, арабы в деле заимствования от тех и других сокровищ их науки шли не одним и тем же путем. Знакомство с индусской наукой приобреталось ими, повидимому, таким же образом, как в древности знакомство греков с египетскими знаниями, т. е. через изучение на месте, производимое главным образом помощью устной передачи. Действительно, переводов индусских математических сочинений на арабский язык у арабов, на сколько нам известно, совсем не было, и все, что они приобрели от индусов, было принесено к ним или их собственными путешественниками, отправлявшимися в Индостан, или такими как *Альбируни*, жившими там иногда долгое время, или приходившими к ним учеными индусами. Полная доступность греческой науки для всех желающих, составлявшая с самаго распадения пифагорейскаго союза характеристическое ея свойство, дала арабам возможность видеть их всех переведенными на свой язык. Это счастливое для арабов обстоятельство дополнялось еще тем, что в лице освоенных до некоторой степени с греческой образованностью просвещенных людей Малой Азии и Персии, между которыми выдающееся положение занимали сирийские христиане — несториане, арабская литература имела готовый контингент способных и знающих дело переводчиков. Наибольшаго развития переводческая деятельность этих последних достигла во второй половине VIII и первой IX ст. Наиболее выдающимися из них в области М. были: *Гунаин ибн Исгак*, сын его *Исгак ибн Гунаин*, *Табит ибн Курра* и *Куста ибн Лука*. Не смотря на гораздо меньшую доступность арабам индусской М., они вполне усвоили арифметическо-алгебраическое направление индусов и остались почти совершенно чуждыми строго-геометрическому направлению греков. Нам, конечно, при нашем недостаточном знакомстве с индусской математической литературой, трудно отделить в сочинениях арабских математиков то, что принадлежит им самим от заимствованного у индусов, но несомненно одно, что все известныя нам сочинения араб. математиков, которыя могут быть признаны самостоятельными, принадлежат арифметическо-алгебраическому направлению, а, следовательно, к нему-же принадлежат, за немногими исключениями, и все самостоятельныя работы арабских математиков. Более выдающимися из известных нам деятелей арабской М. у восточных арабов были в IX в.: *Мухаммед ибн Муза Альхваризми*, *Мухаммед ибн Муза ибн Шакир* и его братья, *Ахмед* и *Альгасан* (известны своими работами по геометрии), *Табит ибн Курра* (упомянут выше в числе переводчиков), *Альмагани*, *Абу Джафар Альхазин*, астроном *Аль-Баттани* (известен своими работами по тригонометрии); в X в. астрономы: *Абул Вафа* и *Алькухи* (последний известен своими работами по геометрии), также известные работами по геометрии *Ас-Сагани* и *Альсиджци* или *Альсинджари*, *Абу Мухаммед Альходжанди* (работы по теории чисел), *Альхузаин* (работы по приложениям алгебры к геометрии); в XI веке: *Ибн-Сина* или в западно-европейской переделке *Авиценна* (работы по арифметике), *Альбируни* (работы по арифметике и геометрии), *Абул-Джуд* (работы по геометрии и алгебре), известные работами по алгебре и по калькуляторской части М. *Альназави* и *Алькарки*, *Омар Алькайами*. К восточно-арабским математикам следует причислить также и двух, действовавших на почве древняго Египта: жившаго в X веке *Ибн-Юнуса* из Каира и жившаго в XI веке *Ибн Альгаитама*. Последний не был даже уроженцем Египта и происходил из города аль-Басра. У западных арабов главное внимание было обращено на изучение астрономии. Вследствие этого М. занимала у них второстепенное положение. Только как преподавателей мы и знаем первых из известных нам западно-арабских математиков: X-го в. *Альмадскрити* и действовавших главным образом в XI в. его учеников: *Алькармани*, *Ибн ас-Сафари* и *Альгарнати*. Также и жившие в XIII в. *Ибн-Альбанна* и в XV — *Алькальсади* известны нам как авторы сочинений, имеющих ясно выраженный учебный характер. Другим характером отличается разве только, входящая в состав сочинения по астрономии, работа по тригонометрии астронома XI века *Джабира ибн Афлах*. Главную причину такого невысокаго состояния западно-арабской М., почти не способнаго дать место самостоятельным исследованиям, едва-ли не следует видеть в постоянных войнах, которыя западные арабы вели между собою, и кроме того — и с христианами. Преждевременный конец только-что начавшемуся периоду самостоятельной деятельности арабов в М. был положен начавшимися ок. 1100 г. крестовыми походами, а также и происходившими одновременно с ними междоусобными войнами, и затем довершен покорением восточно-арабской монархии монголами. Все известныя нам в XII в. и в следующих столетиях произведения араб. математической литературы свидетельствуют о ясно выраженном периоде упадка. Известными нам деятелями этой печальной эпохи в области М. были: в XIII в. *Абу Джафар Мухаммед ибн Гасан аль Тузи*, более известный под прозвищем *Насир-Эддина*, в XIV веке *Кадизадех Ар-Руми*, в XV в. сын предыдущаго — *Мирам Челеби* и *Джитат эддин аль-Каши*, в XVI и в начале XVII в. *Бега-Эддин*. В заключение нельзя не заметить также, что и период усвоения арабами знаний, приобретенных человечеством в области М., не может счи-

таться законченным. Продолжать развитие М. арабы оказались способными только в духе и направлении индусов. До овладения же направлением и духом греческой геометрии им было еще далеко. Несколько ранее арабов начала готовиться к продолжению умственнаго развития человечества Западная Европа. Но природа северных народов не позволила М. двигаться в этом направлении с такой-же быстротой, с какой, благодаря живой восприимчивой природе южан, прогрессировали арабы. Начав позже Западной Европы, они сделались, как мы сейчас увидим, ея учителями. Период усвоения Западною Европою знаний, приобретенных человечеством, представляет две ясно различимыя фазы. Первою была фаза усвоения римских знаний.

Из народов, бывших учениками греков, римляне, в области М., едва-ли не оказались наименее способными. Все, что в течение своих многовековых сношений с греками они могли заимствовать от них по части наук математических, не шло далее или энциклопедических обозрений содержания их элементарной части, представляемых сочинениями *Варрона*, *Марциана Капеллы* и *Кассиодора*, или собраний сведений, необходимых для архитектуры, как в сочинении *Витрувия*, и особенно для землемерия, как в сочинениях *Колумеллы*, *Фронтинуса* и землемеров по профессии — *Гигинуса*, *Бальбуса*, *Нипсуса*, *Эпафродитуса* и *Витрувия Руфуса*, или, наконец, таких элементарных произведений учебнаго характера, как принадлежащий *Апулею* перевод «Арифметики» Никомаха Геразенскаго и как другой перевод той-же книги, сделанный *Боэцием*, вместе с сочинением последняго, посвященным геометрии. В виду такого низменнаго состояния римских математических знаний нельзя и надеяться найти в них проблески самостоятельной мысли. Можно сказать вообще, что даже и в периоде усвоения знаний, приобретенных человечеством, римляне ушли вперед очень недалеко. Усвоение же римских математических знаний Западною Европою сосредоточивалось почти исключительно в монастырях, которые со времен *Бенедикта Нурсийскаго* и Кассиодора взяли на себя роль охранителей сокровищ древней науки от безследнаго уничтожения. Поэтому первыми деятелями западно-европейской математической литературы являются исключительно монахи, из которых более выдающимися для своего времени были: *Изидор Испанский* в VII в., *Беда Досточтимый* и *Алкуин* в VIII в. и *Герберт* в X в., бывший под именем *Сильвестра II* римским папой. Второю фазою усвоения Западною Европою знаний, приобретенных человечеством, было усвоение арабской науки, начавшееся в области М. с деятельности Герберта, затем все усиливавшееся и с эпохи крестовых походов сосредоточившее единственно на себе всю деятельность западно-европейских математиков. Деятельность переводчиков арабских математических соч. на лат. язык началась в оставшейся за христианами части Испании еще до посещения ея Гербертом и едва-ли не с трудов *Люпитуса Барцелонскаго*. Наибольшее развитие она получила в XII в., к которому принадлежат такие крупные ея представители, как *Ателарт Батский*, *Платон Тибуртинский*, *Герард Кремонский*, *Рудольф из Брюгге* и *Иоанн Севильский* или *Испанский*. В XIII в. она уже стала падать, не смотря даже на деятельную поддержку, оказываемую ей такими меценатами, как император *Фридрих II* и король кастильский *Альфонс X*. Самым выдающимся из переводчиков в этом веке был *Джованни Кампано*, а более замечательными из второстепенных — *Гильельмо де-Люнис* и астроном *Герард из Саббионетты*. Работами Кампано деятельность переводчиков с арабскаго языка на латинский в области М., повидимому, закончилась, так как современной науке неизвестно ни одного перевода, сделаннаго позже 1270 г. Прекращение этой деятельности произошло с такою же быстротою и неожиданностью, как и переход ея с начала XII в. от почти незаметнаго состояния к размерам, которые для своего времени прямо могут быть названы грандиозными. Усвоения арабских математических знаний Западная Европа достигла, говоря относительно, довольно рано, именно с самаго начала XIII столетия, но только в лице одного человека, значительно опередившаго современников, именно — *Леонарда Пизанскаго*, известнаго под фамилией *Фибоначчи*. На усвоение содержания его сочинений, а вместе с тем и всего, что было доставлено Европе деятельностью переводчиков, соотечественниками Леонарда — итальянцами, а за ними, или, точнее, через посредство их университетов, и всей Западной Европой, было потрачено около 3-х столетий. Более выдающимися деятелями этой эпохи в области М. были: в XIII в. в Германии: *Иордан Неморариус*, *Виттеллио* и *Вильгельм Мербеке*; в Англии: *Иоанн Сакробоско* и *Рожер Бако*; во Франции *Винцент де Бове*; в XIV в. в Англии: *Ричард Валлингфорд*, *Модиз*, *Симон Бредон* (*Бирданус*) и *Томас Брадвардин*; во Франции: *Иоанн де Мурис*, *Иоанн де Линериис*, *Доминик Парижский* и *Николай Орезм*; в Германии: *Альберт Саксонский* и *Генрих Гессенский*; в Италии: *Паоло Дагомари* и *Биаджио из Пармы*; в XV в. в Англии: *Иоанн Норфольк*; в Германии: *Иоанн Гемунден*, *Георг Пеурбах*, *Николай Куза*, *Иоанн Видманн из Егера* и *Иоанн Мюллер* или *Регномонтан*; в Италии: *Просдочимо де Бельдомандн*. Насколько Леонард Пизанский опередил свое время, всего лучше можно видеть из того, что усвоение арабской науки даже в самой Италии двигалось до такой степени медленно, что достижение его средним уровнем итальянских математиков может считаться вполне состоявшимся никак не ранее второй половины XV в. Внешним обнаружением факта этого достижения является составление около 1494 г. таким дюжинным заурядным математиком, как *Лука Пачиоло*, свода почти всего, что получила Европа от арабов в области М.— свода, составленнаго главным образом по сочинениям Леонарда Пизанскаго. Таким образом в конце XV в. фаза усвоения арабской математической науки Западной Европой может считаться законченной. Еще более сильным подтверждением этого заключения является начатое с первых лет XVI в., итальянскими математиками *Ферро*, *Тартальей*, *Карданом* и *Феррари* вполне самостоятельное продолжение работ араб. математиков в области алгебры. В работах названных четырех математиков ученики арабов не только сравнялись с учителями, но и повели их дело дальше. Однако же, явившись таким образом самостоятельными деятелями на почве усвоеннаго ими в форме арабской М. арифметическо-алгебраическаго направления, западно-европейские математики все еще оставались слабыми и робкими учениками в отношении гораздо более зрелой и развитой греческой науки, с которой они теперь впервые стали лицом к лицу, после падения Византии. Ранее, в Средние века, знакомство с некоторыми из этих произведений достигалось не непосредственно, а с помощью арабских и сделанных с них более или менее искаженных латинских переводов. Следствием такого изменения отношений Западной Европы к греческой науке было широкое развитие с самаго начала XVI в. переводческой деятельности с греческаго языка на латинский и даже на некоторые из новых языков. Но, к сожалению, в области М. эта деятельность сосредоточивалась главным образом в руках ученых типографов, не бывших специалистами по М. Из математиков в XVI столетии много занимались переводами *Мавролик* и *Коммандин* в Италии; *Пельтье* или *Пелетариус* во Франции; *Вильгельм Гольцманн* или *Ксиландер*, *Конрад Дазиподиус*, *Кристоф Клавиус* в Германии. Сделавшееся путем этих переводов доступным Западной Европе содержание классических произведений греческих геометров усвоивалось ея математиками очень медленно; в глубь же методов они совсем не могли проникнуть, так что поневоле должны были ограничиваться только крайне поверхностным знакомством с ними. Некоторые проблески самостоятельной мысли в духе греческой геометрии замечаются, в разсматриваемую эпоху, только у двух знаменитых художников, бывших в то-же время и геометрами, у *Леонардо да Винчи* и у *Альбрехта Дюрера*. Менее заметными деятелями в той-же области в течение XVI в. были в Италии: *Георг Валла* и *Бенедетти*; во Франции: *Шарль де Бувелль*, *Жан Бютео* и философ *Петр Рамус*; в Германии: *Иоанн Вернер*, *Иоанн Рихтер* или *Преториус* и *Яков Кристман*; в Голландии: *Симон Стевин* и *Адриен фан-Роомен*.

Как и следовало ожидать, главная часть сил западно-европейской М. предалась работам в области арифметики и алгебры. За исследованиями, значительно раздвинувшими пределы последней, последовало ея приведение в стройную научную систему, впервые сделанное *Рафаэлем Бомбелли* и потребовавшее с его стороны некоторых дополнительных изысканий. В том же направлении углубления и разработки уже открытых частей алгебры очень много сделал *Франсуа Виета*. Особенно важное значение в философском и научном отношении должно быть признано за его трудами по установлению и развитию алгебраическаго знакоположения, результатом которых был переход последняго из предыдущаго хаотическаго состояния в частную форму идейнаго письма, хотя еще и до сих пор не достигшую своего идеала, но все-таки постепенно к

нему приближающуюся. Более заметными деятелями арифметическо-алгебраической литературы XVI в. были в Италии: *Галигай* и *Габриель де Араторибус*; во Франции: *Николай Шюке*, *Этьен де ла Рош*, *Ороний Финеус*, *Жан Фернель*, и *Иодокус Клихтовеус*; на Пиренейском полуо-ве: *Цируело*, *Жуан де Ортега* и *Педро Нунес*; в Англии: *Тонсталль* и *Роберт Рекорд*; в Германии: *Генрих Шрейбер* или *Грамматеус*, *Христофф Рудольфф*, *Генрих Штромер*, *Петр Апиан*, *Филипп Меланхтон*, *Гемма Фризиус*, *Грегор Рейш*, *Хусвирт*, *Тцвифель*, *Яков Кобель*, *Адам Ризе*, и самый выдающийся из германских алгебраистов XVI в. *Михаил Штифель*. Так как самостоятельныя геометрическия работы в духе и направлении греческих геометров совсем отсутствовали в Западной Европе, то все сколько нибудь ценные вклады в науку геометрии доставлялись завещанною индусско-арабской наукой областью приложений алгебры к геометрии и такими их отделами, как циклометрия и тригонометрия. В общей области приложений обращают на себя внимание в XVI в. труды *Франсуа Виеты*, в отделе тригонометрии труды *Петра Апиана*, *Иоанна Вернера*, *Ретикуса* и *Бартоломея Питискуса* в Германии и *Адриена фан Роомена* в Голландии; в отделе циклометрии: *Жозефа Скалигера* во Франции; *Людольфа фан Цейлен* и *Адриена Меция* в Голландии. Прогресс геометрии даже и в духе арифметическо-алгебраическаго направления совершался с большею медленностью до тех пор, пока философ и математик *Рене Декарт* не завершил в XVII веке предшествующую ему разработку приложений алгебры к геометрии, окончательным введением геометрии в круг наук, развивающихся с помощью алгебры или, вообще говоря, анализа. В методах великаго творения Декарта — «Аналитической геометрии» — и еще более в открытом вскоре *Ньютоном* и *Лейбницем* анализе безконечно малых геометрия, хотя и на совершенно чуждой ей почве, нашла, наконец, методы, которых недоставало для дальнейшаго развития даже в руках таких геометров, как Архимед. С этого времени развитие геометрии пошло быстро вперед, но не самостоятельным путем, при помощи средств, являющихся прямыми результатами ея природы, а путем, всецело принадлежащим чуждой области арифметическо-алгебраическаго направления, и при помощи средств, имеющих хотя и тесную, но все таки побочную, непрямую связь с природой геометрии. Таким образом, западно-европейские математики сделались самостоятельными деятелями также и в закрытой для них до сих пор области геометрии, явившись продолжателями дела древних греческих геометров, хотя не по духу и средствам, а только по содержанию предмета. Работы, создавшия высший анализ, начались с допущенных математиками XVI в. отступлений от требований строгой очевидности, которыми Архимед обусловливал употребление метода исчерпывания. Наибольшаго развития эти отступления достигли в гениальном сочинении астронома *Кеплера*: «Nova stereometria doliorum vinariorum etc,» (Linc., 1605), во многом предугадавшем и даже предвосхитившем последующий ход развития. Следующими затем ступенями развития, постепенно приближавшими высший анализ к превращению в анализ безконечно-малых, представший *Ньютону* в форме метода флюкций, а *Лейбницу* в форме дифференциальнаго и интегральнаго исчислений, были: метод неделимых *Кавалери*, методы квадратур и кубатур *Ферма*, *Роберваля*, *Паскаля* и *Валлиса*, способы *Роберваля* и *Барроу* проведения касательной к кривым и, наконец, метод определения наибольших и наименьших величин *Ферма* и основанный на этом методе его-же способ проведения касательной.

XVII в. ознаменовался также важными успехами практики вычислений, состоявшими во введении во всеобщее употребление *Симоном Стевином* десятичных дробей и в открытии логарифмов *Иобстом Бюрги* и *Джоном Непером*. Тому же веку принадлежит и заслуга создания, трудами *Паскаля* и *Ферма*, теории вероятностей, как самостоятельной науки. Этим же двум ученым наука обязана значительными успехами в области неопределеннаго анализа и теории чисел. Главным предметом деятельности математиков XVIII века было развитие созданнаго в прошлом столетии анализа безконечно-малых и его приложений, преимущественно к геометрии и механике. В числе многоразличных результатов упомянутаго развития заслуживают особеннаго внимания приведшие к созданию таких новых отраслей математическаго анализа, как вариационное исчисление и исчисление конечных разностей. Все важнейшие труды, как великих математиков эпохи *Эйлера* и *Лагранжа*, так и всех сколько нибудь выдающихся, были посвящены указанному главному предмету деятельности века. Но при этом они не забывали также и другия математическия науки, которыя все приобрели в XVIII в. более или менее значительныя приращения. С точки зрения истории развития М. в Западной Европе, особенное значение в среде многоразличных успехов XVIII в. имеют сделанные в области разработки геометрии в исходящем из ея природы направлении древних греческих геометров или, короче, в области синтетической геометрии. Увлеченные легкостью и быстротою открытия новых геометрических истин на почве аналитической геометрии и анализа безконечно-малых, математики XVII и XVIII вв., за немногими счастливыми исключениями, не придавали должнаго значения тому, что разрабатывают геометрию на чуждой ей почве индусско-арабскаго арифметическо-алгебраическаго направления. Другими словами, они не обращали внимание на то, что все еще не овладели греч. наукой вполне. Только немногие из них, глубже других проникшие в последнюю, как *Дезарг*, *Паскаль*, делали несмелыя попытки работать в одном с нею направлении. Такое, обусловливаемое ходом умственнаго развития, невольное игнорирование синтетич. геометрии продолжалось до конца XVIII в., когда, наконец, трудами *Монжа*, в созданной им «Начертательной геометрии», и *Карно*, в его «Геометрии положения», были даны средства ея развития. Последователям этих ученых, действовавшим уже в XIX в., *Понселе*, *Штейнеру*, *Шалю* и др., оставалось только, продолжая их дело далее, быстро повести развитие геометрии по новым для Западной Европы, чисто геометрическим путям. Только с этого времени усвоение западно-европейскими народами греческой геометрии может считаться закончившимся вполне, а сами они могут быть признаны взявшими в свои руки дальнейшее развитие М. во всех известных областях и направлениях. Выразившаяся в этом последнем успехе в деле усвоения знаний, приобретенных человечеством, полная зрелость математическаго гения народов Западной Европы ознаменовалась в XIX в. такими важными и быстрыми успехами всех отраслей М., которые совершенно затмевают все сделанное в прошлом XVIII в. и для сколько-нибудь достаточнаго изображения которых предлагаемый очерк не может дать места.

Для России период самостоятельной деятельности в области М. начался с конца первой четверти XIX в., хотя, как это всегда бывало в соответствующих случаях и прежде, провозвестники его наступления, в виде работ академиков *Румовскаго*, *Котельникова*, *Гурьева* и *Висковатова*, появлялись еще в конце XVIII и в начале XIX вв. Само собою разумеется, что в качестве провозвестников, эти работы могли быть и были опытами самостоятельнаго решения различных частных вопросов, давно уже выдвинутых движением науки. После 1825 г. в геометрических трудах *Лобачевскаго*, только недавно оцененных по достоинству Западною Европою, и в работах по чистой и прикладной М. *Остроградскаго* и *Чебышева*, оценка которых, благодаря положению авторов, как членов спб. акд. наук, и их связям в ученом мире, последовала гораздо скорее и выразилась в их избрании в число немногих иностранных членов парижской академии наук, русская математическая наука получила общее признание в Западной Европе и заняла довольно видное положение. В последния 30 лет труды русских математиков не только охотно помещались в иностранных периодических изданиях, но нередко обращали на себя внимание Зап. Европы даже и в русском оригинале. Главными двигателями быстраго развития в России самостоятельной деятельности в области М., на ряду с академией наук, явились в последнее время возникшия при университетах математическия общества. Первым основанным в России обществом этого рода было возникшее в 1811 г. при моск. университете общество математиков. Но, по условиям времени, оно могло преследовать не ученыя, а только чисто учебныя цели, выразившияся в составлении и переводе учебников и в организации лекций по математическим наукам для желающих. Существование общества было непродолжительно и закончилось вызванным тяжелыми обстоятельствами времени неожиданным превращением его в училище колонновожатых. Появление ученых математических обществ сделалось возможным в России только в 1860-х гг., когда (в 1864 г.) было основано старейшее из них, московское математическое общество. Затем были основаны: в 1879 г. харьковское математическое общество, в 1889 г. киевское физико-математическое общество, в 1890 г. казан-

ское физико-математическое общество и в 1894 г. спб. математическое общество. Киевское и казанское общества существовали, впрочем, и ранее в виде секций физико-математических наук при обществах естествоиспытателей тех же городов. Как на самый крупный из результатов деятельности этих обществ на пользу и преуспеяние русской математической науки, следует указать на издаваемыя ими периодическия издания и сборники своих протоколов и ученых трудов. В настоящее время органами русской математической литературы, кроме изданий академии и ученых записок университетов, служат следующия периодич. издания частных лиц и ученых обществ. В Москве: «Физико-математическия науки в их настоящем и прошедшем», издаваемыя *В. В. Бобыниным* и посвященныя главным образом истории, философии и библиографии физико-математических наук (выходит XIII-й том); «Математич. Сборник», издав. моск. математическим обществом (выходит XVIII том) и «Труды отделения физических наук общества любителей естествознания» (выходит VIII том). В Казани: «Известия физико-математическаго общества при имп. казанском университете» (выходит VI-й т.). В Харькове: «Сообщения математическаго общества при харьковском университете» (выходит V т. 2-й серии). В Одессе: «Вестник опытной физики и элементарной математики», популярно-научный журнал, издаваемый с 1886 г. (со второй половины) *Э. К. Шпачинским*. Заключать от этого сравнительнаго обилия периодических изданий, посвященных М., к существованию интереса к ея развитию в русском образованном обществе, было бы, однако, большой ошибкой. Такого интереса нет даже в меньшинстве, получившем высшее математическое образование, как это можно видеть не только из опыта редакций этих изданий, но и из того общеизвестнаго факта, что все эти издания, за исключением одного, существуют не на собственные доходы, а на субсидии правительства или на средства, доставляемыя издающими их обществами.

В. Бобынин.

БОЛЬШАЯ СОВЕТСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ (БСЭ)

1-е издание БСЭ выпущено по постановлению Президиума ЦИК СССР (февраль 1925) в 1926—47 в 66 томах (дополнительный том СССР) тиражом 50—80 тыс. экземпляров. Содержит 65 тыс. статей. Объём издания 4,4 тыс. авторских листов текста. Главный редактор О. Ю. Шмидт. Математич. раздел возглавляли В. Ф. Каган и А. Н. Колмогоров (с 1936). Авторы основных статей по математике: П. С. Александров (Инварианты топологические, Множеств теория, Топология), В. И. Гливенко (Интеграл, Логика математическая (соавтор), Функциональный анализ), В. Ф. Каган (Аналитическая геометрия, Бесконечно-большие и бесконечно-малые, Векторное исчисление, Геометрия), А. Н. Колмогоров (Континуум, Корреляция, Математика, Мера, Многомерное пространство, Ориентация, Поверхность), Н. Н. Лузин (Дифференциальное исчисление, Функция), В. И. Романовский (Математическая статистика), Л. Н. Сретенский (Потенциала теория), В. В. Степанов (Дифференциальные уравнения), О. Ю. Шмидт (Алгебра, Группа), А. П. Юшкевич (Интегральное исчисление, Логарифм).

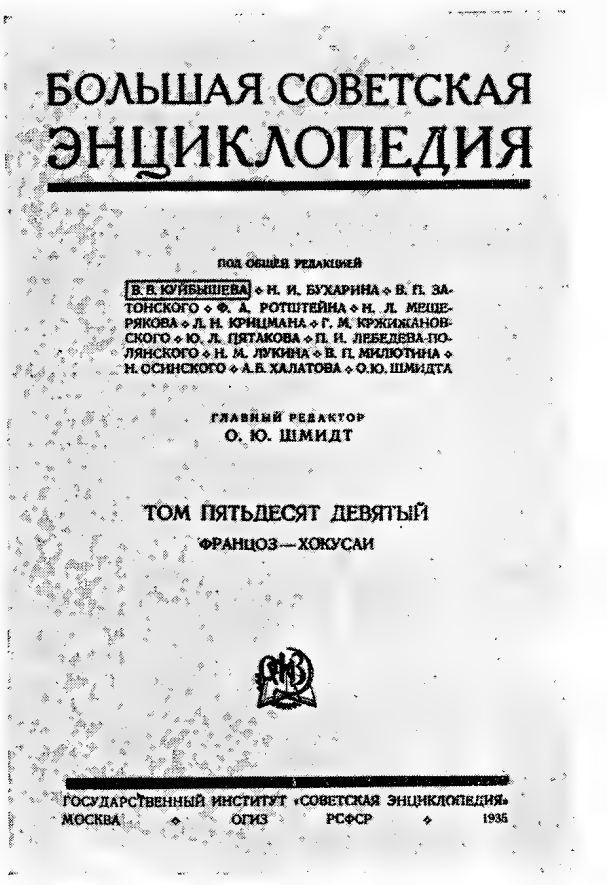
2-е издание БСЭ выпущено по постановлению Совета Министров СССР (февраль 1949) в 1950—58 в 51 томе (51-й том дополнительный) тиражом 250—300 тыс. экземпляров. Содержит 100 тыс. статей. Объём издания 4,9 тыс. авторских листов текста. Главные редакторы С. И. Вавилов и Б. А. Введенский (с 1951). Математич. раздел возглавлял А. Н. Колмогоров.

3-е издание БСЭ выпущено по постановлению ЦК КПСС (февраль 1967) в 1969—78 в 30 томах тиражом 600—632 тыс. экземпляров. Содержит 105 тыс. статей. Объём издания 3,5 тыс. авторских листов текста. Главный редактор А. М. Прохоров. Математический раздел возглавлял Ю. В. Прохоров.

Математич. статьи БСЭ-2 и БСЭ-3 были широко использованы в Основной части настоящего Словаря; к наиболее важным из них даны подписи авторов.

Ниже воспроизводится из БСЭ-1 статья «Функция», написанная Н. Н. Лузиным.

ФУНКЦИЯ (в математике), обозначает в самом общем понимании связь между переменными величинами. Если величина x может принимать произвольные значения и указано какое-либо правило, посредством к-рого приводятся в соответствие с этими значениями определенные значения другой величины y, то мы говорим, что y является функцией от x и записываем это символически $y=f(x)$ или $y=F(x)$ или $y=\varphi(x)$ и т. п. Величину x называют независимой переменной, или аргументом, y — зависимой переменной. Однако такое определение Ф. слишком расплывчато и нуждается в следующих уточнениях: 1) относительно изменения независимой переменной x: как того интервала ab, внутри к-рого она может изменяться ($a<x<b$), так и того, принимает ли она все числовые значения от a до b (непрерывная независимая переменная) или лишь нек-рые, напр. лишь целочисленные; 2) относительно самого характера правила, указывающего, каким образом значению x соответствует значение y; 3) относительно природы аргумента x, являющегося действительным или комплексным переменным, и т. д.



Понятие ф у н к ц и и — одно из самых основных понятий современной математики. Оно не сложилось сразу, но, возникнув более двухсот лет тому назад в знаменитом споре о звучащей струне, подверглось глубоким изменениям уже в начавшейся тогда энергичной полемике. С тех пор идут непрестанное углубление и эволюция этого понятия, к-рые продолжаются до наст. времени. Поэтому ни одно отдельное формальное определение не может охватить всего содержания этого понятия, усвоить к-рое возможно, лишь проследив основные линии его развития, теснейшим образом связанного с развитием естествознания, в частности математической физики.

Главные колебания массивной системы. Представим себе какую-нибудь массивную систему (напр., железный мост), находящуюся в положении равновесия. Если эта система будет слегка выведена из него, то, стремясь возвратиться к нему, она будет совершать колебания. Колебание системы называется г л а в н ы м, если все точки системы о д н о в р е м е н н о проходят через положение своего равновесия. Еще в 17 в. рассмотрение движения системы с одной степенью свободы было в существенном закончено, и в 18 в. началось изучение движений систем со многими степенями свободы. Первые шаги в этом направлении были сделаны знаменитым Иваном Бернулли (1727). Желая изучить движение звучащей

струны, он мысленно помещает на горизонтальную невесомую нить, натянутую при помощи гирьки, на равных расстояниях n равных грузиков. Он дает периоды главных колебаний для случаев, когда число грузиков меньше 8, и указывает тот важный принцип, по к-рому сила, действующая на материальную частицу при главном колебании, всегда пропорциональна расстоянию этой частицы от ее положения равновесия. Из этого принципа он тотчас же устанавливает, что отношение $\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{y_k}$ должно быть независящим от k; здесь y_k обозначает расстояние k-го грузика от упомянутой невесомой нити, находящейся в положении равновесия; при этом следует тотчас же указать, что амплитуда колеблющихся частиц предполагается всегда бесконечно-малой. Этот способ дал ему уравнение в конечных разностях для y_k. Входящие в эти разностные уравнения постоянные определяются из алгебраического уравнения n-й степени, и каждому из его корней отвечает определенное главное колебание всей системы. Но он не мог исследовать действительность этих корней и отсутствие у них кратности.

Несколько позже (1732—36) сын И. Бернулли Даниил Бернулли и его друг Эйлер занялись аналогичной задачей определения главных колебаний вертикальной невесомой нити, прикрепленной вверху, снабженной опять n грузиками и свободно раскачивающейся на ветру. Первый, замечательный экспериментатор, дал сперва опытное решение для $n=2$ и 3, а затем доказал верность его и теоретически. Второй, не менее замечательный математик, трактовал общий случай и доказал, что при главном колебании стороны колеблющегося многоугольника пересекают вертикальное положение нити в постоянных точках. Оба они затем начали исследовать и другие системы, напр. пластинку, погруженную в жидкость и раскачивающуюся там, раскачивание тяжелой палки, подвешенной за один конец, и наконец маятник.

Во всех этих задачах Бернулли и Эйлер ограничивались только главными колебаниями. Когда сила зависела лишь от места материальной частицы, главные колебания были гармоническими, т. е. такими, в к-рых отклонение k-й частицы давалось формулой $y_k=f_k\cos at$, где f_k для каждой частицы было свое собственное; длительность же колебания для всех частиц оказывалась одной и той же: $T=\frac{2\pi}{a}$. Совершенно явно Д. Бернулли формулировал в общем виде существование главных колебаний, но он не мог исследовать действительности и различия соответствующих корней вспомогательного уравнения. Крайне важным является то фундаментальное обстоятельство, что начало сложения колебаний, т. е. получение произвольного движения системы из одних только главных колебаний, тогда еще ускользало от них обоих. Одни лишь теоретики музыки (Рамо, 1726) уже давно указывали, что кроме основного тона музыкального инструмента имеются еще и обертоны. Важно подчеркнуть, что сосредоточение внимания на основном колебании было основано на следующей ошибке: еще с исследований знаменитого Тейлора (1713) среди математиков укоренилось заблуждение, от к-рого не был свободен сначала даже Д. Бернулли, будто бы всякое сложное колебание очень быстро устремляется к status uniformis, именно к основному колебанию. Физически это до известной степени верно, т. к. трение, сопротивление воздуха и т. п. заставляют энергию рассеиваться, выделяя основное слагающее. Но все дело было в том, что это заключение молчаливо переносили на математический аппарат, т. е. на решение дифференциальных уравнений, в к-рых отнюдь не содержалось этого побочного явления.

Предельный переход от дискретных систем к непрерывным. От случая конечного числа материальных частиц Д. Бернулли и Эйлер, не задумываясь, перешли к случаю непрерывных систем тем, что они просто представляли эти системы составленными из очень большого или бесконечно-большого числа частиц. Смелость математиков 18 в. общеизвестна: никто из них кроме Вариньона, Николая Бернулли и Д'Аламбера не понимал трудностей перехода к пределу. Для них было самоочевидно, что предложение, имеющее силу для всякого конечного числа n, должно иметь смысл и силу и для n бесконечно-возрастающего. Они плохо различали между «очень большим» и «бесконечно-большим», между результатами, имеющими ограниченную точность, и результатами, точность к-рых может быть увеличиваема по произволу. Они употребляли разность вместо дифференциала, сумму вместо интеграла, не делая между ними различия. Обычно перенос заключения от конечного на бесконечное делался двояко: или в уже готовых формулах или еще в самом начале. Очень важным примером первого является работа Д. Бернулли о качании тяжелой однородной гибкой нити, подвешенной вверху. Сначала он берет невесомую нить, отягощенную n грузиками, решает эту задачу и в ответе, полагая n бесконечно-большим, получает решение о колебаниях тяжелой гибкой нити в виде $y=\cos\left(\frac{t}{T}\right)f(x)$, где x — абсцисса точки нити, y—ее отклонение от положения равновесия и где $f(x)=1-\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{2!a}\right)^2-\left(\frac{x}{3!a}\right)^3\cdots$ Здесь a определяется так, чтобы $f(l)=0$, где l — длина тяжелой нити.

Из ранее найденного результата для случая грузиков он заключает, что уравнение $f(l)=0$ имеет бесконечно много корней: $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ и что корень a_k соответствует такому главному колебанию, при к-ром тяжелая нить кроме точки подвеса имеет еще k неподвижных точек.

Прямое определение главных колебаний дифференциальным уравнением. Важнейшим примером перехода к пределу уже в самом начале исследования является замена системы n обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2y_k}{dt^2}=f(y_{k+1}, y_k, y_{k-1}) \qquad (1)$$

одним дифференциальным ур-ием с частными производными

$$\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=F\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2y}{\partial x^2}\right). \qquad (2)$$

Это делается, полагая $y_k=y_{k-1}+\Delta y_{k-1}$ и $y_{k+1}=y_{k-1}+2\Delta y_{k-1}+\Delta_2 y_{k-1}$ и заменой разностей дифференциалами. При этом способе на место системы алгебраических уравнений, связывающих начальные значения y-ков при главном колебании и соответственно с этим на место одного разностного уравнения, объединяющего все эти уравнения, приходит одно обыкновенное дифференциальное уравнение для начальной фигуры. Притом получают это уравнение, также принимая $y=Y\cos at$ в уравнении (2) для отыскания главного колебания и требуя, чтобы Y зависело только от x (а не от t). Наконец нужно принять во внимание те исключительные условия, к-рые имеются для начальной и конечной точек системы, и выразить их при помощи особых уравнений (граничные условия). Первым повел исследование звучащей струны этим путем Тейлор (1713). Он доказал, что фигурой колебания струны будет кривая, радиусы кривизны к-рой относятся, как ординаты. Иначе говоря, он получил уравнение $y''=-n^2y$, давшее ему после двух интеграций количество, пропорциональное синусу аргумента, пропорционального абсциссе. Тейлор не написал своего решения explicite, потому что в ту эпоху не был введен значок sin для синуса. По этой причине он не мог поставить вопроса о том, единственным ли способом подбираются постоянные интегрирования, чтобы удовлетворить всем условиям. Он впадает здесь в свою знаменитую ошибку, думая, что главное колебание только одно и что всякое другое движение звучащей струны стремится перейти в найденное им основное колебание, даже когда начальное движение было произвольным. Вслед за ним Герман и Д. Бернулли повторяют его ошибку; получая своим способом решение Тейлора, Д. Бернулли говорит о том, что фигура звучащей струны есть socya trochoidis, потому что тогда названия синусоиды еще не было. Оба указанных автора (1716 и 1728) не подозревают о возможности иных движений звучащей струны. Первые предчувствия о существовании многих других главных колебаний зародились у Д. Бернулли, когда он начал трактовать проблему о колебаниях свободно висящей тяжелой гибкой нити (1732 и 1739), в к-рой он видит аналог звучащей струны. Он тут же пробует делать физические опыты со звучащей струной, наблюдая, что в узловых точках бумажки, надетые на струну, не сбрасываются ею. Эйлер же в эту эпоху (1734) все еще говорит лишь об основном тоне. Только в 1744 Эйлер, трактуя проблему главных колебаний упругой пластинки, закрепленной на одном конце, показывает, что вспомогательное ур-ие, корням к-рого соответствуют главные колебания, имеет бесконечно много корней, к-рые он тут же старается аппроксимировать.

Спор о звучащей струне. Работа Д'Аламбера. Хотя у Д. Бернулли и

Эйлера были намеки на множественность главных колебаний звучащей струны, однако Д'Аламбер первый, в своей знаменитой работе 1747, дал почти исчерпывающее решение этого вопроса. Он прямо заявляет, что целью его работы является доказательство того, что проблема формы звучащей струны имеет бесконечно много других решений, кроме «подруги циклоиды». Метод Д'Аламбера состоит в следующем: отправляясь от дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ помощью тождеств $d\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx+\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\,dt$ и $d\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\,dx+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,dt$, он получает как следствия: $d\left(\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\right)\cdot(dt+dx)$ и $d\left(\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\right)(dt-dx)$, откуда он тотчас же заключает, что $\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial x}$ зависит только от $t+x$, а $\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial x}$ зависит только от $t-x$, иначе говоря $\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial x}=\Phi(t+x)$ и $\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial x}=\Delta(t-x)$; следовательно $dy=\frac{\partial y}{\partial t}\,dt+\frac{\partial y}{\partial x}\,dx=\frac{1}{2}\Phi(t+x)\,d(t+x)+\frac{1}{2}\Delta(t-x)d(t-x)$.

Отсюда Д'Аламбер, интегрируя, получает окончательное решение $y=\psi(t+x)+\delta(t-x)$, к-рое он не колеблясь называет «общим решением». В случае, когда струна, закрепленная в точках $x=0$ и $x=l$ оси абсцисс OX, проходит в момент времени $t=0$ через положение равновесия (ось OX), решение это принимает вид $y=\psi(x+t)-\psi(x-t)$, где ψ есть периодическая четная функция с периодом $2l$; в случае же, когда струна в начальный момент времени $t=0$ имеет вид $y=\Sigma(x)$, а скорости ее частиц в этот момент времени даются формулой $\frac{\partial y}{\partial t}=\sigma(x)$, тогда решение принимает вид $y=\psi(t+x)-\psi(t-x)$, где периодическая с периодом $2l$ функция ψ определяется из наложенных дополнительных условий $\psi(x)-\psi(-x)=\Sigma(x)$ и $\psi(+x)+\psi(-x)=\int\sigma(x)dx$. Это в сущности и заканчивало работу совершенно.

Решение Эйлера. Вслед за Д'Аламбером Эйлер (1748) берется за ту же самую проблему. Он замечает, что его решение несущественно отличается от решения Д'Аламбера, но он подчеркивает, что дает действительно общее решение. Эйлер предполагает, что начальная скорость (при $t=0$) частиц струны равна нулю и что начальная фигура струны (при $t=0$) есть $y=f(x)$. В этих условиях решение Эйлера следующее: $y=\frac{1}{2}f(x+t)+\frac{1}{2}f(x-t)$. И он первый отмечает, что продолжительность колебания струны не зависит от начальной фигуры, если только она неделима на тождественные аликвотные части. Может на первый взгляд показаться, что решения Д'Аламбера и Эйлера тождественны, отличаясь лишь во второстепенных пунктах. Однако это было совсем не так: хотя оба и употребляют ту же терминологию, но под одинаковыми словами они разумеют глубоко различные вещи. В одном они сходятся: под уравнением они разумеют равенство между двумя аналитическими выражениями (не вдаваясь впрочем в обсуждение того, что такое аналитическое выражение). И оба они считают, что если два аналитических выражения совпадают численно во всех точках какого-нибудь отрезка, то они обязаны совпадать всюду. Но Д'Аламбер и Эйлер глубочайше разнятся между собой в понимании самого смысла слова «функция»: для Д'Аламбера это было произвольное аналитическое выражение; для Эйлера это была произвольно начертанная кривая.

Полемика между Д'Аламбером и Эйлером. Полностью эта противоположность взглядов выявилась в энергичной полемике, заострившей идеи и облекшей их в точные слова. Д'Аламбер первый начал искать противоречия в понимании Эйлером слова «функция». Он пишет: «нельзя мыслить более общего аналитического выражения для количества y, как только предполагая его функцией от x и t; но при этом предположении проблема звучащей струны имеет решение лишь тогда, когда различные фигуры этой струны содержатся в одном и том же уравнении». Д'Аламбер заключает, что найденное им самим и Эйлером решение только тогда имеет смысл, когда заданная функция $f(x)$ есть периодическая функция. Эйлер возражает на это вопросом: «Если найденное решение в тех исключительных случаях, когда фигура струны не может быть охвачена одним уравнением, негодно, то что тогда называть решением?». Он настаивает на том, что «данная им геометрическая конструкция всегда справедлива, какова бы ни была начальная фигура струны», «что различные части начальной кривой вовсе не связаны уравнением, а просто соединены их описанием» и что «знание геометрической линии совершенно достаточно для знания движения, без того, чтобы нужно было прибегнуть к вычислениям». Реплика Д'Аламбера не заставила ожидать себя. Настаивая на своем понимании решения, он отмечает тот часто ускользающий факт, что уже самое наличие дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ требует, чтобы отношение $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ имело определенную (конечную) величину, и, значит, чтобы кривая обладала определенной кривизной в этой точке. В особенности это относится к концам струны, где в силу $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$ радиус кривизны должен быть бесконечно велик. Наличие же всяких точек искусственных соединений разнородных кривых, вроде угловых точек, делает в них силу неопределенной и, значит, движение невозможным: «сама природа здесь останавливает вычисления». Что же касается до того, как на деле будет двигаться такая составная струна,— «оставим физике позаботиться о себе самой». Эйлер, уклоняясь от продолжения полемики, ограничивается указанием на то, что возможно создать теорию дифференциальных уравнений, содержащих такие «неправильные» или «смешанные» функции. На возражения Д'Аламбера он замечает, что его решение, употребляющее такие «неправильные» функции, подтверждает например подмеченный Д. Бернулли факт распространения вдоль струны сотрясений. Д'Аламбер, настаивая на своей точке зрения, повторяет, что наличие на струне угловой точки делает решение невозможным.

Идеи Д. Бернулли. Совершенно иначе подошел к проблеме Д. Бернулли. Он уже имел нек-рый опыт в изучении вопросов акустики и начал понимать, что звучащая струна имеет бесчисленное множество главных колебаний. Из исследования систем дискретных точек он вывел заключение, что наиболее общее движение струны можно получить сложением главных колебаний.

Идеи Д. Бернулли созрели в 1753 и заключение, к к-рому он пришел, было то, что ур-ие

$$y=\alpha\sin x\cos t+\beta\sin 2x\cos 2t+\gamma\sin 3x\cos 3t\ldots$$

охватывает как решение Д'Аламбера, так и Эйлера. Таким образом Д. Бернулли открыл важнейший принцип математической физики, и ему принадлежит честь не только его формулировки, но и ясного понимания далеко идущих последствий. Но если Д. Бернулли понимал значение и смысл открытого им принципа сложения колебаний, то математически он не мог его обосновать, чем вызвал живейшие возражения как Д'Аламбера, так и Эйлера. Сначала Эйлер указал, что Д. Бернулли сам не замечает того совершенно неприемлемого следствия, к-рое содержится в его идеях и согласно к-рому совершенно произвольная Ф. переменного x изобразима рядом синусов кратных дуг. По мнению Эйлера, тогда Ф. была бы нечетная и периодическая. Мы видим, что Эйлер снова неявно опирается на тот принцип, в силу к-рого два аналитических выражения, численно совпадающих в каком-нибудь отрезке, должны совпадать всюду. Д. Бернулли ответил на это указанием, что его формула содержит бесчисленное множество неопределенных коэффициентов, к-рыми всегда можно распорядиться таким образом, чтобы заставить его кривую пройти через сколько угодно точек заданной кривой и тем самым получить сколько угодно сильное приближение. Относительно возможности упущения из этого процесса той или иной отдельной точки Д. Бернулли ссылается на возражения, к-рые Д'Аламбер делал раньше Эйлеру. Эйлер на это ответил, что подобрать коэффициенты желаемым для Д. Бернулли образом весьма трудно, если не невозможно. С своей стороны Д'Аламбер заявил, что он вполне согласен с Эйлером в его возражениях Д. Бернулли и что он идет дальше, т. к. думает, что не всякая (аналитическая) периодическая функция может быть изображена рядом синусов, что всякая Ф., изобразимая рядом синусов, должна обладать непрерывной кривизной и что совпадение обеих кривых в бесконечно многих точках еще не делает их тождественными. Из характера спора между Д'Аламбером и Д. Бернулли легко усмотреть, что

первый был по современной терминологии «арифметизатором» математического анализа; второй же был физиком и смотрел на вещи с этой точки зрения.

Выступление Лагранжа. В то время, как знаменитейшие математики спорили о математических принципах, выдвинутых проблемой звучащей струны, на сцене появляется неизвестный никому молодой человек, Лагранж, сразу обративший на себя внимание своими «ловкими» вычислениями (1759). Лагранж внимательнейшим образом изучил состояние проблемы звучащей струны и занял определенную позицию в этом споре: он всецело присоединился к Эйлеру и стал в оппозицию к Д'Аламберу и Д. Бернулли. Желая доказать правоту Эйлера, Лагранж ставит на первый план проблему интерполирования. Беря одну из «неправильных» функций Эйлера, т. е. беря просто графически данную кривую, вообще состоящую из кусков совершенно различных линий, Лагранж делит ось абсцисс на малые равные отрезки. Затем, проводя в точках деления перпендикуляры и отмечая т. о. последовательность точек на графической кривой, Лагранж ищет интерполяционную кривую, проходящую через отмеченные точки. Интерполяцию Лагранж предпринимает линейную тригонометрическую с ограниченным числом членов, откуда следовало, что его интерполирующие кривые были «законами» и для Д'Аламбера, т. к. были даны простыми аналитическими выражениями. Разрешив т. о. интерполяционную задачу, Лагранж ищет решения проблемы звучащей струны для интерполяционной кривой. Совершив наконец несколько переходов к пределу, Лагранж получает в окончательном результате формулу Эйлера для фигуры звучащей струны. Интересно, что в руках Лагранжа было величайшее открытие, мимо к-рого он прошел, его не заметив: делая подготовку к окончательному выводу формул Эйлера, Лагранж по дороге получает тригонометрические ряды Фурье. Следовало лишь сделать перестановку пределов, и открытие закона коэффициентов Фурье было бы сделано, а вместе с ним были бы окончены и все дебаты. Но мысль Лагранжа устремлялась по другому пути, и он, почти касаясь открытия, так мало сознавал это, что бросил по адресу Д. Бернулли фразу: «Досадно, что столь остроумная теория несостоятельна», хотя именно идеи Д. Бернулли, перешедшие к Фурье, собственно и решили спор. В следующей работе (1760) Лагранж снова берется за проблему струны, идя на этот раз уже методом Д'Аламбера, и приходит к формулам этого последнего, как ему казалось, «не употребив никакой непрерывности» («непрерывности» в смысле Эйлера, т. е. на современном языке «аналитической продолжаемости»). На самом деле это было не совсем верно, ибо, как известно, Лагранж глубоко верил в то, что всякая непрерывная (в современном смысле) Ф. имеет все производные и даже разложима в ряд Тейлора, за исключением может быть отдельных точек: поэтому было в высшей степени трудно проследить, где в рассуждениях Лагранжа входит или не входит эйлеровская непрерывность. Критики Лагранжа, не входя в принципиальные стороны его исследования и признавая его выкладки в целом «исключительно ловкими», возражали лишь против отдельных пунктов. Прежде всего Д'Аламбер обрушился на многочисленные у Лагранжа переходы к пределу: тонкий ум Д'Аламбера вполне прозревал связанные с ними трудности. Затем Д'Аламбер возражает против употребления расходящихся рядов. Лагранж, отвечая ему, просто указывает на то, что «ни один человек, заменив ряд $1+x+x^2+x^3\ldots$ формулой $\frac{1}{1-x}$, еще не совершил ошибки». Далее Лагранж, защищаясь от возражений Д'Аламбера (сделанных этим последним и Эйлеру) о принудительном существовании в точках звучащей струны радиусов кривизны, указывает, что «природа не может остановить выкладок, т. к. физически угловых точек у струны нет, а всегда есть некая закругленность, вызванная жесткостью струны». В дальнейшей переписке Д'Аламбер принуждает Лагранжа согласиться с тем, что решение последнего неявно предполагает наличие и конечность всех производных. А так как и Д'Аламбер и Лагранж разделяли господствовавшее в то время убеждение в том, что наличие всех производных делает Ф. разложимой в ряд Тейлора, то Лагранж был вынужден согласиться с тем, что он молчаливо ввел эйлерову непрерывность, иначе говоря — изображение Ф. уравнениями, на чем всегда и настаивал Д'Аламбер.

Лагранж впрочем сделал еще одну попытку подкрепить свои соображения, истинность к-рых он весьма определенно чувствовал. В новом изложении он проводит кривую, являющуюся решением задачи о струне и составленную из m синусоид, через определенное число точек. Существенно, что точки эти теперь уже не лежат на самой заданной кривой, но расположены вблизи нее. Эту проведенную кривую Лагранж назвал «генератриссой». Он замечает, что когда m очень велико, отклонения генератриссы от начальной формы струны очень малы, и тогда можно эту начальную фигуру рассматривать как кусок генератриссы. Он ставит вопрос: не предполагает ли это уже, что начальная фигура струны составлена из синусоид? И отвечает: если дело идет о «геометрическом» тождестве, такое предположение неизбежно; но во всех остальных случаях начальная кривая является как бы родом асимптоты, к к-рой генератрисса неограниченно приближается, никогда однако не делаясь тождественной с ней. А из коэффициентов своей интерполяционной формулы Лагранж тут же выводит заключение, что пренебрегать отклонением генератриссы можно лишь тогда, когда начальная фигура имеет непрерывные производные всех порядков; это свойство должно сохраняться во все время движения струны. Только в этих условиях движение струны возможно. Но Лагранж не показывает читателю, что это утверждение есть полный отказ от защиты точки зрения Эйлера (что было его первоначальной целью) и составляет возврат к Д'Аламберу. Этот же последний упорно держался своих взглядов, настаивая на незаконности употребления расходящихся рядов. Достойно внимания, что он цитирует Ф. $\sqrt[3]{\sin x}$ как пример того, что всюду конечная Ф. не разложима в ряд Тейлора. От его острого взора не ускользает, что именно этот пример направляется против него же самого: с одной стороны, здесь налицо «уравнение», и, значит, такая форма струны допускает решение; с другой — здесь конечности всех производных уже не имеется. Чтобы помочь делу, Д'Аламбер говорит, что бесконечно-большие значения производных допустимы, лишь бы не было только скачков. Дебаты эти длились еще 20 лет, не получая окончательного решения.

Открытие Фурье. Понятие Ф. вовсе не является в настоящий момент окончательно выкристаллизовавшимся и беспрекословно установленным, как это казалось одно время в конце 19 в.: без преувеличения можно сказать, что в наст. момент понятие Ф. подверглось дальнейшей эволюции и что спор о звучащей струне все еще длится, только разумеется уже совсем в другой научной обстановке, другими лицами и в другой терминологии. Возвращаясь к спору 18 в. и рассматривая его уже с современной точки зрения, следует прежде всего отметить чрезвычайную проницательность и интуитивную мощь споривших мыслителей и необыкновенное богатство глубоких аналитических идей, связанных с этим спором и в значительной степени порожденных им. В этом смысле спор был пестрым клубком, составленным из глубоких и труднейших вопросов, касавшихся возможности перехода к пределу и перестановки пределов; условий пользования расходящимися рядами; сходимости ряда Тейлора при наличии всех производных; различия Ф. от ее аналитического изображения; аналитического продолжения Ф.; понятия произвола; бесконечных определителей; кривой без кривизны и кривой, составленной из одних угловых точек; интерполирования; разрывов Ф. и, в особенности, тригонометрических рядов. Последние имели в споре и в последующее время такое значение, что справедливо получили в дальнейшем имя «оси, около которой вращается весь математический анализ». Разбираться в столкновении всех этих идей не легко даже в свете современного математического анализа; притом у нас нет полной уверенности в правильном понимании точки зрения каждого из споривших мыслителей. Напр. Эйлер еще в 1744 сообщает Гольбаху формулу $\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$, отнюдь не делая отсюда заключения о том, что два аналитических выражения могут совпадать в отрезке, без того, чтобы совпасть всюду. Такое заключение казалось в ту эпоху чудовищным, и Эйлер, имея в руках уже точный факт, прямо подтверждающий это, не видел его по каким-то неясным для нас причинам. В общем, в свете современного математического анализа, дело повидимому происходило следующим образом. Вопрос, поставленный спором, касался

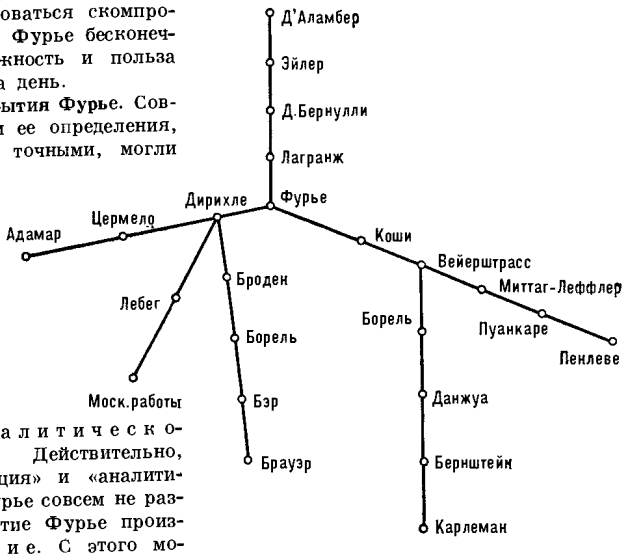
отношения между аналитическим определением функции и определением до некоторой степени физическим; если отклонить произвольно струну из ее положения равновесия, то существует ли формула, дающая в точности начальное положение струны? Ни тонкий аналитический ум Д'Аламбера, ни творческие усилия Эйлера, Д. Бернулли и Лагранжа не могли решить этого труднейшего вопроса. Сделать это выпало на долю Фурье, к-рый в 1807 к общему изумлению дал правило вычисления коэффициентов a_n и b_n тригонометрического ряда $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, изображающего «произвольно заданную» Ф. $f(x)$. Формулы эти

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha \text{ и}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha,$$

получившие тотчас же имя «формул Фурье», категорически решили спор в пользу Д. Бернулли: главным возражением против Д. Бернулли и было как-раз отсутствие правила вычисления коэффициентов тригонометрического ряда, изображающего «произвольно» заданную функцию $f(x)$. Оставалось, правда, еще возражение против Фурье, состоявшее в том, что неизвестно было, сходятся ли его ряды; но, во-первых, уже одно столь простое правило вычисления коэффициентов тригонометрического ряда говорило само за себя; а, во-вторых, последовавшие работы Лежен Дирихле (1805—1859) окончательно установили сходимость рядов Фурье для всякой Ф. $f(x)$, имеющей ограниченное число максимумов и минимумов. Открытие Фурье произвело величайшее недоумение и растерянность среди всех математиков. Оно опрокидывало все понятия. До сих пор считали, как это делали Эйлер и Д'Аламбер, что всякое аналитическое выражение изображает только такую кривую, последовательные части к-рой взаимно зависят друг от друга. Эйлер ввел свой термин «непрерывная функция» для того, чтобы выразить эту взаимную зависимость частей Ф.; в наст. время его термин «непрерывность» получил совсем иной смысл. Под влиянием идеи эйлеровской непрерывности Лагранж в своей теории аналитических функций (1797) пытался доказать, что всякая непрерывная функция разложима в ряд Тейлора: уже в то время чувствовалась связь между различными частями Ф., разлагаемой в ряд Тейлора, т. к. сознавали, что знание малой дуги позволяет узнать всю кривую. И вот Фурье показал, что подобные претензии тщетны и невозможны, т. к. физик, чертящий произвольным образом кривую, в каждый момент имеет возможность изменить течение кривой по своему капризу; но раз кривая уже начерчена, то оказывается возможным представить ее единым аналитическим выражением. Таким образом начали приходить к парадоксальному результату, будто нет никакой органической связи между различными участками одной и той же прямой или различными дугами одной и той же окружности, потому что открытие Фурье показывало, что можно охватить единой аналитической формулой, одним уравнением непрерывную линию, составленную из отрезков различных прямых или дуг различных окружностей. Правда, раздавались робкие голоса, указывавшие, что уравнение единой прямой или единой окружности выглядит «проще», чем разложение Фурье. Но скоро увидели, что этот критерий «простоты» никуда не годился, так как заставлял ограничиваться лишь алгебраическими функциями и запрещал пользоваться скомпрометированными открытием Фурье бесконечными разложениями, важность и польза которых росла со дня на день.

Понятие Ф. после открытия Фурье. Современное понимание Ф. и ее определения, кажущиеся нам сейчас точными, могли родиться лишь после открытия Фурье. Открытие это ясно показало, что большинство недоразумений в споре о звучащей струне происходило от смешения двух понятий, казавшихся совпадающими, но на самом деле глубоко различных: понятия самой Ф. и понятия ее аналитического изображения. Действительно, оба эти понятия: «функция» и «аналитическое выражение» до Фурье совсем не различались и лишь открытие Фурье произвело их расщепление. С этого момента усилия математиков направились по двум совершенно различным руслам. С одной стороны, стремление удержать взаимную зависимость частей кривой вылилось в современную теорию функций комплексного переменного. На этом пути предстояло уже совершенно отделить понятие Ф. от ее аналитического изображения. Это и было сделано Вейерштрассом в понятии «аналитическая» («голоморфная») Ф. С другой стороны, открытие Фурье и изучение значений аналитических выражений разрушали всякую связь между различными частями кривой. Казалось, что значения аналитического выражения обладают лишь одним свойством: быть определенными — в остальном же они совершенно произвольны, будучи независимы друг от друга. В этом смысле и было определено понятие Ф., данное Дирихле. Это определение явилось основным для современной теории функций действительного переменного. Определения Ф., данные Вейерштрассом и Дирихле, внесли в свое время большую ясность и успокоение в среду математиков. Казалось, что эта ясность уже окончательна и что больше ничего не остается, как развивать следствия добытых наконец после стольких трудов и усилий твердых определений. Однако в самое последнее время стало очевидным, что среди математиков отнюдь не установилось полного единодушия относительно ценности и даже смысла полученных определений Ф.: все чаще и чаще стали появляться подкрепляемые неоспоримыми фактами намеки на то, что определение Ф., данное Вейерштрассом,— слишком узко; с другой стороны, математики с чувством глубочайшего изумления констатировали, что в их среде нет полного единодушия в понимании смысла определения Ф., данного Дирихле: в то время как одни находили его совершенным, другим оно казалось слишком широким, а третьи просто отрицали за ним какой-либо смысл. Таким образом сделалось ясно, что спор о звучащей струне возобновился в наши дни, но в ином свете и с иным содержанием. В общем, схема развития понятия Ф. представляется следующей:



Функции действительного переменного. Открытие Фурье показало, что можно рассматривать как единую Ф. ординату непрерывной кривой, составленной из дуг кривых, не имеющих между собою ничего общего и следовательно совершенно различной природы. Органическая (логическая) связь между различными частями кривой, изображенной единым аналитическим выражением — и притом столь простым, каков напр. тригонометрический ряд,— была совершенно разрушена. В этих условиях казалось, что ничего другого не оставалось делать, как совершенно забыть об аналитическом выражении и заявить, что понятие Ф. исчерпывается просто совокупностью численных значений для разных величин x — значений, вообще говоря, совершенно независимых одно от другого. Этой идеей и руководился Лежен Дирихле, когда он устанавливал свое знаменитое определение Ф., сохраняющее силу и по настоящий момент.

Определение Ф. по Дирихле: y есть Ф. переменного x, определенная на отрезке $[a\leqslant x\leqslant b]$, если всякому значению переменного x, содержащемуся в этом отрезке, соответствует вполне определенная величина переменного y, причем совершенно неважно, каким именно способом установлено указанное соответствие. Это определение сразу пролило яркий свет на целый ряд явлений

математического анализа, понимание к-рых было смутным. Вначале оно казалось столь совершенным, что было принято почти единогласно. Долгое время это определение рассматривали как настоящее открытие; самую формулировку его считали столь точной, что не допускали и мысли о возможности ее изменения. И действительно, это определение поставило на ноги целый ряд изысканий. С этого момента начали думать, что дальнейшие работы математического анализа должны быть посвящены лишь разысканию свойств тех или иных частных семейств Ф., получающихся из данного Дирихле общего определения Ф. путем его ограничения. Так. обр. возникли отделы анализа, посвященные семействам: непрерывных (в смысле Коши) Ф.; монотонных; имеющих ограниченное число максимумов и минимумов; удовлетворяющих условиям Липшица, Дини; дифференцируемых и т. д. Лишь тогда, когда указанные частные семейства были выделены и изучены, стали подыматься голоса, требовавшие большей ясности от определения Дирихле, вначале не дававшего никакого повода для сомнений. Атакуемым пунктом в этом определении оказались слова: «причем совершенно неважно, каким именно способом установлено указанное соответствие». Возражения против этого пункта и его защита впоследствии связались с обсуждением одного положения теории множеств, называемого принципом произвольного выбора и высказанного Цермело («аксиома Цермело»). Одним из первых, кто совершенно ясно высказал свое недовольство этой «прибавкой» к определению Ф. по Дирихле, был Броден (1897). К сожалению, его соображения носили слишком общий характер; поэтому не все математики своевременно обратили внимание на его сомнения. Броден указывал на то, что определение Ф. должно иметь нек-рое специальное свойство, чтобы легко передаваться от ума к уму. Чтобы получить представление об этом свойстве, разделим каким-нибудь способом основной отрезок $[a, b]$, где нами определяется Ф. $y(x)$, на бесконечное число отрезков, к-рые мы обозначим через $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n, \ldots$ — Пусть определяемая нами Ф. $y(x)$ совпадает: в первом отрезке δ_1 с ординатою нек-рой прямой линии L_1, во втором отрезке δ_2 — с ординатою нек-рой циклоиды L_2, в третьем отрезке δ_3 — с ординатою нек-рой лемнискаты L_3, и т. д. Броден спрашивает: когда следует рассматривать в этом случае Ф. $y(x)$ как определенную? И отвечает: тогда и только тогда, когда имеется определенный закон выбора кривых $L_1, L_2, L_3, \ldots$, т. е. когда эти кривые имеют между собою нечто общее и следовательно в нек-ром смысле будут между собой однородными («гомогенными»). Согласно Бродену, Ф., составленная из бесконечного множества абсолютно неоднородных («гетерогенных») между собой кривых, не может быть предметом изучения, т. к. такая Ф. никогда не может быть нам заданной (или данной); задать или дать абсолютно разнородные кривые можно только тогда, когда они имеются в конечном числе: в этом случае они могут быть заданы абсолютно независимыми между собою. Но бесконечное число абсолютно независимых между собою кривых, согласно Бродену, никогда не может быть предметом изучения. Независимо от Бродена и немного позже его, за требование определенного закона, всегда молчаливо подразумеваемого, когда дело идет о понятии Ф., высказались Борель, Бэр и Лебег (1905). Бэр указал на то, что там, где дело идет о бесконечном, там аналогия мешка с шарами, к-рый передают из рук в руки, должна быть раз навсегда изгнанной: хотя всякая Ф. и является, по существу, совокупностью численных значений, соответствующих различным величинам переменного x, однако эту совокупность нельзя просто передать из рук в руки, как упомянутый мешок; здесь совершенно необходимо описание закона соответствия всякому x числа $y(x)$, причем именно этот закон и должен быть сообщаем всякому, кто хочет рассматривать эту Ф. $y(x)$. Для нашего ума «все приводится к конечному», замечает Бэр. Борель, желая по возможности точнее выявить всю разницу его взглядов и взглядов Цермело и Адамара, производит такой «умственный эксперимент». Прежде всего он отмечает, что десятичное разложение числа $\pi=3{,}1415926535\ldots$ следует рассматривать как вполне определенное, потому что во всех учебниках по элементарной геометрии показывается, каким образом можно вычислить сколько угодно десятичных знаков. В силу этого всякий десятичный знак, напр. миллионный, можно рассматривать как вполне определенный, даже если он еще никем не был вычислен. Потом Борель берет миллион людей, выстроенных в ряд, и, заставляя каждого назвать наудачу десятичный знак, получает нек-рое десятичное разложение, обрывающееся на миллионном десятичном знаке. Это разложение Борель продолжает еще рассматривать как вполне определенное. Наконец Борель предлагает расположить в ряд не миллион людей, а бесконечное множество и заставить каждого из них назвать наудачу десятичный знак. Борель спрашивает, можно ли полученное таким образом бесконечное десятичное разложение продолжать еще рассматривать как вполне определенное, как напр. вполне определенным является десятичное разложение числа π. Ответ Бореля гласит: математики с таким складом ума, как у Цермело и Адамара, конечно будут рассматривать это бесконечное десятичное разложение как «вполне определенное». За самого же себя Борель отвечает отрицательно, ибо полученное таким образом число может оказаться лишенным закона, так что два математика, разговаривающие о нем, никогда не будут уверены в том, что говорят об одном и том же числе; не обладая законом, образующим десятичные знаки такого числа, они не могут быть уверены в его тождестве. Лебег выразился еще определеннее, утверждая, что математик, не обладающий законом, осуществляющим рассматриваемую им Ф, $y(x)$, никогда не может быть уверен, что в разные моменты своего рассуждения он говорит о той же самой функции: здесь дело идет уже не об общем языке двух математиков, а просто о согласии математика с самим собой. Наоборот, Адамар, полемизируя с Борелем, утверждает, что нисколько не затруднительно рассматривать как вполне определенные десятичные разложения, «лишенные закона», т. к. напр. в кинетической теории газов говорят о скоростях молекул в данном объеме газа, хотя никто никогда в действительности их не будет знать. Адамар указывает, что требование закона, определяющего рассматриваемую Ф. $y(x)$, сильно напоминает требование аналитического выражения для Ф. и значит отбрасывает нас назад к 18 в.

Математические работы Бэра и Лебега пролили много света, хотя вместе с этим и чрезвычайно запутали вопрос. Бэр взялся за систематическое исследование изображения Ф. аналитическими выражениями. Принимая во внимание, что в силу теоремы Вейерштрасса всякая непрерывная Ф. $f(x)$ изобразима как сумма равномерно сходящегося ряда многочленов $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$, Бэр называет все непрерывные Ф.— функциями класса 0. Далее, функциями класса 1 Бэр называет такие разрывные Ф. $f(x)$, которые являются пределами непрерывных Ф., т. е. $f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Функции $f(x)$, к-рые не относятся к классам 0 или 1, но к-рые являются пределами Ф. класса 1, Бэр называет функциями класса 2 и т. д. Определение Бэра идет по всем конечным числам и по всем счетным трансфинитным числам, в результате чего Бэр получает свою знаменитую классификацию функций:

$$K_0, K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots, K_\omega, \ldots, K_\alpha, \ldots |\Omega.$$

Всякая Ф. $f(x)$, входящая в классификацию Бэра, имеет определенное аналитическое изображение помощью многочленов, над к-рыми простираются знаки переходов к пределу, в конечном или счетном числе. Таков тип аналитических выражений, рассмотренных Бэром. Лебег существенно дополнил изыскания Бэра, доказав, что рассмотрение всех иных аналитических действий, как-то: дифференцирование, разложение в ряды, интегрирование, привлечение каких-либо трансцендентных функций, как напр. $\sin x$, $\log x$ и т. д., совершенно бесполезно, т. к. всякая Ф. $f(x)$, образованная конечным или счетным числом таких операций, необходимо войдет в классификацию Бэра. Лебег притом дал важное доказательство существования Ф. $f(x)$ в каждом классе K_α классификации Бэра и в заключение нашел глубокомысленным, но чрезвычайно сложным приемом индивидуальную функцию $f(x)$, уже не входящую в классификацию Бэра. Открытие Лебега произвело столь же ошеломляющее впечатление, как в свое время открытие Фурье: результат Лебега показал, что логическое определение индивидуальной Ф. является более широким, чем чисто математическое определение, т. к. путем логиче-

ского определения была получена частная Ф. $f(x)$, к-рая не может быть получена никакими переходами к пределу в конечном или счетном числе, отправляясь от многочленов. Ф., определенная Лебегом и невходящая в классы Бэра, очень сложна и природа ее еще не изучена. Но московские работы показали, что самый деликатный пункт рассуждений Лебега вызывает возражения: когда Лебег доказывал, что всякое аналитическое выражение, составленное из математических знаков, в конечном или счетном числе преобразуется в выражение Бэра, составленное из простых (счетных) переходов к пределу, то он, не имея действительно исчерпывающего каталога всех возможных аналитических выражений, подвергал свое дело большой опасности, т. к. всегда могло оказаться аналитическое выражение, не преобразующееся в выражение Бэра. И действительно московские работы показали, что уже аналитическое выражение

$$f(x)=\overline{\lim_{y\to+\infty}}\ \overline{\lim_{m\to+\infty}}\ \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ P_{m,n}(x,y),$$

где $P_{m,n}(x, y)$ есть многочлен от букв x и y и где переходы к пределу буквами m и n простые (счетные), а переход к верхнему пределу буквой y есть непрерывный (несчетный), уже несводимо к выражению Бэра при надлежащем подборе многочлена $P_{m,n}(x, y)$. И вместе с тем выяснилось, что очень часто аналитические выражения, как предвидел это Борель, не служат ни к чему, т. к. даже Ф. класса 1 классификации Бэра повидимому ставят нас лицом к лицу с принципиально неразрешимыми проблемами. Указанные вопросы о природе аналитических выражений далеко еще не разрешены. Но следует указать на то, что среди мнений математиков, возражающих против определений Ф. Дирихле, имеются заметные и важные нюансы: так, в то время как Лебег мирится с любым законом (логическим или математическим), лишь бы он давал Ф.-индивид, Борель вносит дальнейшее ограничение, требуя, чтобы закон был счетным (т. е. имеющим дело с натуральными числами, а не с континуумом). Брауэр повидимому идет еще дальше, отказываясь рассматривать даже бесконечность натуральных чисел.

Функции комплексного переменного. Совсем иные судьбы претерпело определение Ф., имевшее целью дать понятию Ф. такое содержание, при к-ром «знание малой дуги рассматриваемой кривой приводит к знанию всей кривой». Правда, подобно тому как Дирихле на пути действительного переменного удалось дать такое определение Ф., которое рассматривалось как уже окончательное, так и на пути комплексного переменного Вейерштрассу удалось прийти к определению Ф., к-рое столь совершенно, что большинство математиков и до сих пор рассматривает его как единственное и во всяком случае как исчерпывающее все нужды практики. Однако в то время как критика определения Дирихле явным образом домогается его сужения, критика определения Вейерштрасса, наоборот, ищет его расширения. Работам Вейерштрасса предшествовали работы Коши (1789—1857). Коши первый понял, что упомянутое свойство кривой определяться малой дугою нужно объяснять привлечением комплексного переменного: это переменное должно играть хотя и вспомогательную, но неизбежную роль. Мысли Коши и его основные теоремы были приведены в порядок и систематизированы Вейерштрассом (1815—1897). Основная идея Вейерштрасса состояла во введении т. н. аналитического продолжения. Из изысканий Коши следовало, что всякий ряд $P(x-a)$, расположенный по положительным степеням разности $x-a$, сходится внутри круга C с центром в точке a определенного радиуса, вне к-рого он заведомо расходится. Сумма же ряда внутри круга C имеет производные всех порядков. Вейерштрасс рассматривает эту сумму ряда $P(x-a)$ как «аналитическую функцию», определенную внутри круга C, и ищет расширения области существования этой функции путем особого процесса. Основная теорема, на к-рую этот процесс опирается, следующая: если круги сходимости двух данных рядов $P(x-a)$ и $P(x-b)$ пересекаются и если в общей части этих кругов имеется точка, в которой значения обеих сумм и всех их производных соответственно равны, тогда обе суммы рассматриваемых рядов тождественны в общей части обоих кругов. Вейерштрасс рассматривает в этом случае каждый из указанных двух рядов как непосредственное продолжение другого и называет каждый из них «элементом» определяемой аналитической Ф. Вот определение Ф. (аналитической) по Вейерштрассу: аналитическая Ф. $f(x)$ есть совокупность элементов, выводимых из данного помощью последовательных непосредственных продолжений. Вольтерра и Пуанкаре внесли окончательную ясность в это определение, доказав, что для полного определения аналитической Ф. во всем поле ее существования достаточно проделать лишь счетное число непосредственных продолжений. Аналитическая Ф. $f(x)$ называется однозначной, когда нет точки x, в к-рой два различных элемента $P(x-a)$ и $P(x-b)$ Ф. имели бы существенно различные значения. Совокупность точек z, находящихся внутри кругов, принадлежащих элементам рассматриваемой однозначной Ф. $f(z)$ называется естественной областью ее существования. Всякая точка, принадлежащая границе естественной области существования однозначной Ф., называется особой точкой этой Ф. Основной теоремой является следующая: на окружности сходимости всякого элемента аналитической Ф. $f(z)$ лежит особая точка. Определение Ф., данное Вейерштрассом, сразу внесло яркий свет в бесчисленные области математического анализа, казавшиеся до того времени темными. Оно сразу объяснило бесчисленное количество парадоксов и вызвало необъятное количество работ (продолжающихся и до сих пор), посвященных свойствам аналитических Ф. Казалось, что наконец было найдено определение Ф. столь совершенное, что дальше предстоит лишь изучать свойства, из него вытекающие. Самое главное, что казалось наконец разгаданным то свойство Ф., в силу к-рого «значение малого участка кривой определяет ее всю»: это свойство явилось просто следствием самого определения Ф. Вдобавок ко всему разъяснились многие неразгаданные раньше свойства аналитических выражений, преимущественно рядов и бесконечных произведений: равномерно-сходящийся ряд в какой-нибудь области D, составленной из аналитических Ф. в этой области, оказывался имеющим своей суммой аналитическую Ф. в D. Загадка аналитического выражения, сходящегося к разным Ф. в разных областях, объяснялась тем, что между этими областями была нарушена равномерная сходимость, как напр. у ряда

$$\frac{1+z}{1-z}+\frac{2z}{z^2-1}+\frac{2z^2}{z^4-1}+\frac{2z^4}{z^8-1}+\dots,$$

сходящегося к $+1$ внутри круга $|z|=1$ и к -1 вне его. Так. обр. понятия аналитической Ф. и аналитического выражения были расцеплены. Первые совершенно определенные указания на недостаточность определения Ф., по Вейерштрассу, были сделаны Борелем (1895), к-рый несколько раз делал попытки построения более общей теории, чем теория Вейерштрасса. Из этих попыток две первые встретили решающие возражения Пуанкаре и Пенлеве. И лишь третья (1917) должна быть признана удовлетворительной. Поискам нового, более широкого класса Ф., чем аналитические Ф. Вейерштрасса, была посвящена значительная часть научного творчества Бореля, и в этой области им были высказаны многие чрезвычайно глубокие идеи, легшие в основу почти всех дальнейших работ его последователей в этом направлении. Основным пунктом возражений Бореля против определения Вейерштрасса было указание на совершенную искусственность границы «естественной области существования аналитической однозначной функции». Граница эта в самом деле естественна, если ее образуют конечное или счетное число точек. Но если эта граница является замкнутой линией, то «очень часто,— замечает Борель,— граница эта является совершенно искусственной, так как аналитическое выражение, дающее нам функцию с такой границей, оказывается равномерно сходящимся и вне ее и, значит, дающим некоторую наружную функцию. Обе эти функции, внутренняя и наружная, с точки зрения Вейерштрасса, являются существенно различными, так как они непродолжаемы одна в другую. Но по существу это есть единая функция, только разрезанная особой линией на две части, так как можно найти класс таких аналитических выражений, что если одна часть удовлетворяет алгебраическому и дифференциальному соотношению, то и другая — тоже». Аналитические выражения, к-рые имеет в виду Борель, суть ряды рациональных дробей

$$\sum\frac{A_n}{z-a_n},$$

где ряд $\sum |A_n|$ есть сходящийся ряд, а особые точки a_n («полюсы аналитического выражения») всюду плотны на рассматриваемой замкнутой линии или бесконечно накопляются вблизи нее.

Возражения против этой попытки Бореля были сделаны Пуанкаре и Вольфом. Первый указал, что всегда можно разрезать рассматриваемую замкнутую линию на такие две части A и B и определить такие две аналитические Ф. (с точки зрения Вейерштрасса) $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$, что $\Phi_1(z)$ будет аналитической вне A, $\Phi_2(z)$ будет аналитической вне B и что несмотря на это $\Phi_1(z)+\Phi_2(z)=F_1(z)$ внутри кривой и $\Phi_1(z)+\Phi_2(z)=F_2(z)$ вне кривой, где $F_1(z)$ и $F_2(z)$ суть две произвольные Ф., из к-рых одна аналитическая внутри кривой, другая аналитическая вне кривой, причем обе непродолжаемы нигде через кривую. Вольф же построил такой ряд $\sum \frac{A_n}{z-a_n}$, к-рый сходится к нулю внутри кривой, причем полюсы a_n скоплялись в кривой снаружи и ряд $\sum |A_n|$ сходился. После возражений Пуанкаре Борель изменил свою теорию, прибегнув к звездным разложениям Миттаг-Леффлера. Звездное разложение Миттаг-Леффлера представляет собой обобщение ряда Тейлора, т. к. n-й член его есть линейное выражение от первых n коэф-тов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ряда Тейлора. Борель высказал убеждение в том, что понятие аналитической функции, как его дал Вейерштрасс, еще сильно привязано к частному классу аналитических выражений, именно — рядам Тейлора, и что если за «элемент функции» взять не ряд Тейлора $K(x-a)$, а звездное разложение Миттаг-Леффлера, то по лучам звезды Миттаг-Леффлера можно проскользнуть через полюсы аналитического выражения, всюду плотно лежащие на особой линии, во внешнее пространство, если звездное разложение Миттаг-Леффлера было составлено для внутренней точки кривой. Надо иметь в виду, что область сходимости звездного разложения Миттаг-Леффлера для аналитической функции $f(z)$ получается так: зажигают источник света в начальной точке a разложения Миттаг-Леффлера $M(x-a)$, а во все особые точки разлагаемой аналитической Ф. вбивают в плоскость непрозрачные колышки: тогда освещенные места («звезда») и будут областью сходимости звездного разложения $M(x-a)$ к $f(z)$. Вычисления Бореля, казалось, подтвердили его идею, т. к. звездное разложение $M(x-a)$ для внутренней точки a оказалось сходящимся на бесконечном множестве лучей звезды и именно к величине наружной Ф. на этих лучах. Но Пенлеве сделал в своей блестящей, детальной и чрезвычайно тонкой работе возражение Борелю, указав ему, что это может быть и случайностью, т. к. имеются звездные разложения Миттаг-Леффлера, сходящиеся на отрезке луча к нулю без того, чтобы все разложение изображало нуль. Тогда Борель сделал третью, на этот раз уже удавшуюся попытку, предположив ряд $\sum |A_n|$ чрезвычайно сильно сходящимся (не слабее, чем $e^{-e^{n^4}}$). Это предположение он связал с «моногенностью на множестве» [т. е. существованием $f'(z)$ по множеству]. Новая теория Бореля оказалась выдержавшей испытание, и для известного класса Ф. $f(z)$ (в смысле Дирихле для комплексного переменного) звездные разложения непременно должны сходиться к $f(z)$, и следовательно знание величины Ф. и ее производных вполне определяло Ф. в ее целом. Это подавно справедливо тогда, когда Ф. известна на каком-либо отрезке. Несколько поздно для дела оправдание третьей теории Бореля пришло от московских работ (Привалов, Лузин). Именно было доказано, что аналитическая Ф. вблизи спрямляемой кривой, уничтожающаяся почти всюду на ней при стремлении к ее точкам по касательным путям, необходимо должна быть тождественной нулю. А так как наружная Ф. Бореля почти всюду по некасательным путям принимает на особой линии (предположенной спрямляемой) те же самые значения, что и внутренняя функция, то отсюда следует, что такая наружная функция может быть только одна. Эта единственность подтверждает идеи Бореля об органической связи внутренней и внешней непродолжаемых функций.

Совсем на иной путь вступили Данжуа, С. Н. Бернштейн и Карлеман, отыскивая наиболее естественное обобщение понятия аналитической функции. Большая оригинальность их исследований заключается в стремлении оставаться на почве одного только действительного переменного, не привлекая к рассмотрениям комплексных чисел.

Отправной пункт С. Н. Бернштейна — его результаты о наилучшем приближении аналитических Ф.; основной теоремой, послужившей исходным пунктом, является следующая: если $f(x)$ голоморфна во всякой точке отрезка $[a \leqslant x \leqslant b]$, тогда наилучшее приближение $E_n f$ Ф. $f(x)$ помощью многочлена n-й степени должно удовлетворять неравенству $E_n f < M\rho^n$, где $\rho < 1$. С. Н. Бернштейн называет Ф. $f(x)$ квазианалитической (P), если имеется такая бесконечная последовательность целых положительных $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, для к-рых удовлетворено неравенство $E_{n_k} f < M\rho^{n_k}$. Ф. эти оказываются замечательными, т. к. фундаментальная теорема Бернштейна гласит: всякая квазианалитическая (P) Ф. $f(x)$ вполне определяется на всем отрезке $[a \leqslant x \leqslant b]$ знанием ее значений на какой-нибудь его части $[a' \leqslant x \leqslant b']$. Это предложение дало Бернштейну возможность определить квазианалитическое продолжение (P) как сохранение неравенства $E_{n_k} f < M\rho^{n_k}$ в более широком отрезке $[c \leqslant x \leqslant d]$, содержащем в себе данный отрезок $[a \leqslant x \leqslant b]$. Наблюдающийся факт существенно различного продолжения данной Ф. $f(x)$ за отрезок $[a, b]$ в зависимости от перемены базы $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ квазианалитического продолжения (P) С. Н. Бернштейн уподобляет факту многозначности обычных аналитических Ф.

Другое определение полагает для квазианалитичности Карлеман. В то время как квазианалитические (P) функции С. Н. Бернштейна могут не обладать даже и первой производной, Карлеман ставит непременным условием наличие у рассматриваемой им функции $f(x)$ производных всех порядков. Он обозначает через C_A семейство всех таких Ф. $f(x)$, для к-рых в данном отрезке $[a, b]$ справедливо неравенство: $|f^{(n)}(x)| < k^n A_n$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ — данная последовательность положительных чисел, а k — любое положительное постоянное, независящее от n.

Основной теоремой Карлемана—Данжуа является следующее важное предложение: для того чтобы семейство C_A было квазианалитическим (т. е. сохраняющим свойство: знание Ф. на части $[a', b']$ отрезка $[a, b]$ определяет ее на целом отрезке), необходимо и достаточно, чтобы всякая монотонная мажоранта ряда $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}}$ была расходящимся рядом. Лично Данжуа установил лишь достаточность этого условия. Определение Карлемана уже получило приложение к теории моментов; его отношение к определению С. Н. Бернштейна оказалось неопределенным, так как здесь нет ни тождества ни отношения общего к частному.

Лит.: Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1915; его же, Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, P., 1930; Burkhardt H., Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen, Lpz., 1901; Hobson E. W., The theory of function of a real variable, v. 1—2, Cambridge, 1921—26; Borel E., Leçons sur la théorie des fonctions, P. [1905] (см. Cinq lettres sur la théorie des fonctions); его же, Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions, P., 1922; Lebesgue H., Sur les fonctions représentables analytiquement, «J. math. pur. appl.», 1905, t. 1; Bernstein S., Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytique d'une variable réelle, P., 1925; Carleman T., Fonctions quasi-analytiques, P., 1926.

Н. Н. Лузин.

СЛОВАРЬ ШКОЛЬНОЙ ИНФОРМАТИКИ

Наука и образование обладают интересным свойством взаимной дополняемости. Наука, черпая свой материал из обыденного сознания и повседневных наблюдений, с помощью эксперимента и рассуждения создаёт систему понятий и отношений между ними, отражающую научную картину мира. Задача образования — осуществить обратный процесс: вдохновляясь научной картиной мира, сформировать на новом уровне обыденное сознание и опору для повседневных наблюдений и деятельности, опирающихся на завоёванные наукой знания.

Разнонаправленность науки и образования приводит к тому, что наука отгораживается от обыденного сознания высоким стилем терминологии, борьбой с дилетантством и другими проверенными средствами. Понимание этой дистанции сразу выявляет двойную сложность и противоречивость труда учителя. В то же время в масштабах общества связь между наукой и обыденным сознанием нераздельна, хотя и подвергается постоянному испытанию на разрыв. Лучше всех сознают эту постоянную напряжённость энциклопедисты. Конечно, в стиле энциклопедий, особенно тематических, верх берёт наука. Реально это становится возможным благодаря распространённости высшего образования среди учителей.

В отношении предлагаемого вниманию читателя краткого энциклопедического словаря школьной информатики, выходящего в виде приложения к Математическому энциклопедическому словарю, перед его составителями стояла особо сложная задача. Первое — это становящийся характер самой науки информатики и связанная с этим нечёткость и, так сказать, недостаточная авторитетность терминологии, второе — отсутствие прецедентов и прототипов, третье — недостаточный запас профессиональных и научных знаний у преподавателей информатики.

Понимание этих трудностей в сочетании с очень малым временем на подготовку словаря привело к ряду его особенностей. Во-первых, отбор терминов и понятий был сделан максимально экономно. За основу был взят школьный курс «Основы информатики и вычислительной техники» с учётом компонента популярной литературы и средств массовой информации; к сожалению, составители не могут поручиться за безошибочность отбора терминов. Во-вторых, в стиле подачи материала было отдано явное предпочтение популярности, нежели строгости изложения. Это привело к некоторой нестыкованности способов изложения этой и основной частей Математического энциклопедического словаря. Наконец, чтобы хоть как-то компенсировать «несобранность» терминологии в курсе школьной информатики, вместо обычной раздачи словника нескольким десяткам невзаимодействующих специалистов было принято решение максимально ограничить авторский коллектив в надежде на установление более глубокой связи между статьями словаря и большей выдержанности стиля (основной автор — А. П. Ершов, он же — глава авторского коллектива).

В основной части Математического энциклопедического словаря, составленной ещё до того, как было принято решение о приложении по школьной информатике, тоже имеется ряд терминов и понятий, относящихся к информатике. Для удобства читателя указатель этих терминов воспроизводится в конце данного приложения. В статьях из этого списка можно найти ряд ссылок на литературу. Отдельный перечень литературы по информатике не приводится, поскольку большая часть книг по информатике, к сожалению, мало доступна, особенно учительству.

Учитывая явно экспериментальный характер данного словаря по школьной информатике, его составители будут благодарны за любую реакцию читателя.

А

АВАРИЙНЫЙ ОСТАНО́В (от араб. авар — повреждение, ущерб) — см. *Останов.*

АВМ — *аналоговая вычислительная машина.*

АВТОМАТИЗА́ЦИЯ (от греч. αὐτόματος — самодействующий) — 1) деятельность, направленная на частичное или полное исключение человека из трудового процесса путём передачи его функций специально создаваемым машинам — автоматам. 2) Научно-технич. дисциплина, разрабатывающая и изучающая методы, средства и приёмы такой деятельности.

А. является неизбежной ступенью развития производительных сил общества, идущей вслед за механизацией — созданием машин и механизмов, преобразующих под управлением человека разные виды энергии, сырья и полупродуктов в предметы материального производства. А. наступает, когда машине-автомату передаются функции управления исполнительными устройствами и общего контроля за производственным процессом.

Особенностью текущего этапа научно-технич. прогресса является то, что объектом А. становится не только материальное производство, но и сфера умственной, творческой деятельности человека: организационно-административное управление, распределение ресурсов и принятие решений, проектирование и конструирование, все виды работы с документами, финансово-экономич. деятельность, информационное обслуживание, здравоохранение, научная работа и образование.

А. является главным полем применения *вычислительной техники.* Основной способ использования — это встраивание компьютера в машину, сопряжение его с частями машины или исполнительными механизмами посредством датчиков и командных устройств и загрузка в память компьютера нужной управляющей программы. Главный способ А. умственной деятельности человека — это создание *автоматизированных рабочих мест* и их прикладного *программного обеспечения.*

А. предъявляет новые, более высокие требования к трудовым и профессиональным навыкам, уровню культуры и сознательности каждого трудящегося. Производительный труд при этом смыкается с трудом интеллектуальным, направленным на программирование и настройку автоматов, инженерную подготовку производства, контроль и обеспечение безопасности. Подготовка общества к высокой степени А. производительных сил — одна из главных задач общего и профессионального образования.

АВТОМАТИЗИ́РОВАННАЯ СИСТЕ́МА УПРАВЛЕ́НИЯ, АСУ,— организованная совокупность правил работы, *баз данных* и *пакетов прикладных программ,* предназначенная для управления с использованием ЭВМ производственным процессом, деятельностью предприятия или организации, процессом принятия решений.

АВТОМАТИЗИ́РОВАННОЕ РАБО́ЧЕЕ МЕ́СТО, АРМ,— рабочее место работника умственного труда или служащего, оборудованное средствами вычислительной техники. Обычно основу АРМ составляет *терминал,* соединённый с центральной ЭВМ, или *персональная ЭВМ.* Конструкция и способ работы с вычислительными средствами, используемыми на АРМ, подчиняются дополнительным требованиям удобства и безопасности, соблюдения санитарно-гигиенич. норм, сочетаемости с интерьером помещения и прочим человеческим факторам. Типовой состав АРМ включает в себя *клавиатуру, дисплей* и малогабаритные устройства печати и дисковой памяти. Первыми массовыми АРМ стали рабочие места банковских служащих и кассиров авиабилетных касс (напр., система «Сирена» в СССР). В инженерном деле большое распространение получили АРМ конструкторов. Появление *микропроцессоров* и созданных на их основе персональных ЭВМ привело к возникновению АРМ для работников разных профессий: делопроизводителей, бухгалтеров, администраторов, врачей, преподавателей, учащихся и др. Основу развития АРМ составляет интеграция используемых в них вычислительных средств и средств связи. Это позволяет объединять АРМ на предприятии в т. н. локальные сети и присоединять к глобальным сетям передачи и обработки информации. В результате работающие вступают в постоянную и не зависящую от расстояний связь друг с другом в режиме *электронной почты* и телеконференций и имеют постоянный доступ к *базам данных* и *вычислительным центрам* коллективного пользования.

АВТОМАТИ́ЧЕСКИЙ РЕЖИ́М — режим работы ЭВМ, при котором она автоматически и безостановочно исполняет программу, находящуюся в оперативной памяти.

АВТОНО́МНАЯ ЭВМ — см. *Электронная вычислительная машина.*

АДМИНИСТРАТИ́ВНАЯ СИСТЕ́МА (от лат. administratio — управление)— часть *операционной системы* ЭВМ.

АДМИНИСТРА́ТОР баз данных — см. *База данных.*

А́ДРЕС (франц. adresse) в программировании — цифровое или буквенно-цифровое обозначение зоны *запоминающего устройства* или отдельной его *ячейки,* определяющее место хранения информации в памяти ЭВМ.

А́ДРЕСНАЯ ЧАСТЬ команды — см. *Машинная команда.*

АЛГО́Л (ALGOL — сокращение от слов ALGOrithmic Language, англ. algorithmic — алгоритмический, language — язык) — алгоритмический процедурно-ориентированный *язык программирования.* Различают А.-60 и А.-68. А.-60 сыграл большую роль при становлении основных понятий программирования для ЭВМ; используется в основном для решения научно-технич. задач. А.-68 является многоцелевым универсальным языком программирования; относится к т. н. расширяемым языкам, т. е. является удобным при использовании в различных областях применения.

АЛГОРИ́ТМ (от имени среднеазиатского учёного 9 в. аль-Хорезми — латинизированное Algorithmi) — предписание исполнителю (человеку или автомату) выполнить точно определённую последовательность действий, направленных на достижение заданной цели или решение поставленной задачи. От любых предписаний, т. е. текстов, побуждающих к действию, А. отличается рядом свойств, допускающих его автоматич. исполнение, а именно: понятность, дискретность, точность, результативность и массовость.

Каждый А. разрабатывается в условиях точно описанной обстановки, включающей строгую формулировку решаемой задачи, перечень объектов, вовлекаемых в условие задачи и в её решение, и возможности исполнителя: свойства объектов, к-рые он может узнавать, и действия, к-рые он может совершать. Эти возможности в совокупности наз. системой команд исполнителя.

Среди объектов обстановки часто бывает некое действующее лицо (тоже человек или автомат), к-рое взаимодействует с исполнителем А. Такое действующее лицо удобно называть поручителем, поскольку последний может передавать А. исполнителю, побуждая его к действию, задавать исполнителю исходные данные к А. и следить за исполнением А.

Понятность А. для данного исполнителя означает, что он содержит предписания о выполнении только таких действий и о проверке только тех свойств объектов, к-рые входят в систему команд исполнителя. Предписание о выполнении отдельного законченного действия исполнителя наз. командой А.

Свойство дискретности состоит в том, что команды А. выполняются последовательно, с точной фиксацией моментов окончания выполнения одной команды и начала выполнения следующей.

Свойство точности означает, что после выполнения каждой очередной команды точно известно, завершено ли исполнение А. или же какая команда должна выполниться следующей.

Результативность А. состоит в том, что после конечного числа шагов исполнение А. завершается решением задачи либо обнаруживается, что по той или иной причине процесс решения не может быть продолжен.

Свойство массовости выражается в том, что А. единым образом применяется к любой конкретной формулировке задачи, для решения к-рой он разработан.

Указанные свойства А., взятые в совокупности, позволяют исполнителю успешно решать задачи, не обладая тем знанием, к-рое нужно для разработки самого А. Ограниченность системы команд, простота и точность правил исполнения А. позволяют формализовать функции исполнителя, передавать решение задач автоматич. машинам.

См. также *Вспомогательный алгоритм*, *Основной алгоритм*, *Рекурсивный алгоритм*.

АЛГОРИ́ТМА (ПРОГРА́ММЫ) СХЕ́МА — математическая конструкция, отражающая логическую соподчинённость команд и способы именования величин, *алгоритма* или *программы*, но абстрагирующаяся от содержания действий, выполняемых командами, и конкретных значений величин. Используется в теоретич. программировании для определения и обоснования формальных правил преобразования программ.

АЛГОРИТМИЗА́ЦИЯ — 1) этап решения задачи, состоящий в нахождении по формулировке задачи *алгоритма* её решения. 2) Раздел *информатики*, изучающий методы, приёмы построения алгоритмов и их свойства (иногда также наз. алгоритмикой).

Существенной и начальной стадией А. является теоретич. анализ решаемой задачи. Обычно задача, подлежащая алгоритмич. решению, возникает не изолированно, а в тесной связи с нек-рой частью окружающего нас мира, называемой предметной областью. Теоретич. анализ задачи состоит прежде всего в построении *модели* предметной области, т. е. в выделении её объектов, относящихся к ним понятий, в установлении свойств и отношений между объектами. Построенная теория позволяет описывать процессы и действия, допустимые в предметной области, после чего становится возможным точно определить как формулировку задачи, так и действия, к-рые могут приводить к её решению.

В результате фиксируются возможности исполнителя, точное условие задачи, называемое также спецификацией алгоритма, и обстановка, в к-рой должно развиваться исполнение искомого алгоритма.

В общем случае А. является творческим процессом, требующим от составителя глубоких знаний в теории предметной области и способностей к догадке. Содержанием А. как науки является создание методов систематич. построения алгоритмов и в особенности методов строгого доказательства того, что построенный алгоритм решает поставленную задачу, т. е. удовлетворяет своей *спецификации*.

Важной частью развитой теории предметных областей является разработка универсальных алгоритмов, гарантированно решающих широкий класс задач, и методов их конкретизации, позволяющих ради эффективности адаптировать алгоритм к суженной постановке задачи, не утрачивая знания, воплощённого в универсальном алгоритме.

Крупным разделом А. является анализ алгоритмов, т. е. изучение их свойств, в частности теория сложности алгоритмов.

АЛГОРИ́ТМИКА — см. *Алгоритмизация*.

АЛГОРИТМИ́ЧЕСКИЙ ЯЗЫ́К — формальный *язык* для записи алгоритмов. В информатике термины «А. я.» и «язык программирования» нередко используются как синонимы, но иногда они противопоставляются по двум признакам: не всякий А. я. подкреплён реализацией на ЭВМ в рамках нек-рой системы программирования; не всякий *язык программирования* — алгоритмический; бывают и декларативные, непроцедурные, языки программирования.

АЛУ — арифметико-логическое устройство. См. *Процессор*.

АЛФАВИ́Т (греч. ἀλφάβητος — от названий первых двух букв греч. алфавита — альфа и бета, или вита) — 1) то же, что набор *литер*, т. е. конечное множество установленных соглашением элементов, служащих для представления информации путём комбинирования своих *вхождений* по условленным правилам, обычно в форме последовательности (текста).

2) Множество всех литер, к-рые в языке программирования, редакторе и т. п. отнесены к синтаксич. категории *букв* (так что, напр., их можно использовать в *идентификаторах*).

3) Множество литер, представляющих буквы национального письма, в частности русский А. (азбука), латинский А. и др.

Во всех трёх значениях А. обычно есть упорядоченное множество. Для набора литер ЭВМ такой порядок определяется их кодировкой; существует ряд международных и советских стандартов на кодировки, ни один из к-рых не соответствует вполне русскому А. по составу букв или по их порядку. Под влиянием английского языка, в к-ром затруднительно образовать прилагательное от слова «буква», прилагательное алфавитный в информатике обычно означает «буквенный». Зато, говоря о расположении *слов* по А., алфавитный порядок называют лексикографическим порядком.

АЛФАВИ́ТНО-ЦИФРОВА́Я КЛАВИАТУ́РА — см. *Клавиатура*.

АЛФАВИ́ТНО-ЦИФРОВО́Е ПЕЧА́ТАЮЩЕЕ УСТРО́ЙСТВО, АЦПУ, — *внешнее устройство* ЭВМ, предназначенное для вывода данных в печатном виде на бумажный носитель данных.

АЛФАВИ́ТНО-ЦИФРОВО́Й ДИСПЛЕ́Й — см. *Дисплей*.

АНА́ЛИЗ СЦЕН (от греч. ἀνάλυσις — разложение) — см. *Искусственный интеллект*.

АНА́ЛОГОВАЯ ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ МАШИ́НА (от греч. ἀναλογία — соответствие, сходство), АВМ,— *вычислительная машина*, в которой обработка информации происходит с помощью специально подобранного физического процесса, моделирующего вычисляемую закономерность. Составляя сравнительно скромную часть вычислительной техники, АВМ до сих пор сохраняют своё значение в прикладных научных исследованиях и проектных разработках, где исследователю приходится иметь дело с заданным классом задач (как правило, на решение дифференциальных уравнений), позволяющим путём варьирования небольшого числа параметров переходить от одной задачи к другой. Полезным свойством АВМ является практически мгновенное получение решения после задания параметров задачи и установления физич. процесса, моделирующего исследуемую закономерность.

Первыми АВМ были специализированные решающие устройства электромеханич. типа, в к-рых главными были интегрирующие и дифференцирующие устройства, позволяющие мгновенно вычислять интеграл и производную заданной функции, отслеживая её изменение во времени. Успехи электротехники и радиоэлектроники в дальнейшем сделали более практичным использование электрич. явлений в качестве моделирующих физич. процессов.

АНА́ЛОГО-ЦИФРОВА́Я ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ МАШИ́НА, АЦВМ, гибридная вычислительная машина,— аналоговая *вычислительная машина*, в которой числовые характеристики моделирующего физического процесса представлены в цифровой форме. Основная причина появления АЦВМ — это возможность сочетать преимущества (или необходимость) непрерывного физич. процесса с удобством задания и прочтения относящихся к нему величин в цифровой форме. Наиболее распространённые гибридные устройства — всевозможные счётчики, расходомеры и приборы с цифровой шкалой. Важными элементами АЦВМ являются аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи — преобразующие непрерывно изменяющуюся

величину в последовательность чисел, представленных в позиционной системе счисления, или наоборот.

АНА́ЛОГО-ЦИФРОВО́Й ПРЕОБРАЗОВА́ТЕЛЬ — см. *Аналого-цифровая вычислительная машина.*

АРИФМЕ́ТИКО-ЛОГИ́ЧЕСКОЕ УСТРО́ЙСТВО, АЛУ,— см. *Процессор.*

АРИФМЕТИ́ЧЕСКОЕ УСТРО́ЙСТВО ЭВМ — основная часть *процессора* ЭВМ, выполняющая операции по обработке информации.

АРХИ́В (лат. archivum) в вычислительной технике — система административных мероприятий и программных средств, обеспечивающая хранение и доступность *данных* в форме документов (*модулей*, *программ*, *массивов*, *файлов*).

Реально документы в разные моменты времени могут располагаться на различных уровнях внешней памяти, и функция А. состоит в том, чтобы избавить программиста от необходимости учитывать особенности этих уровней. Развитый А. обеспечивает автоматич. загрузку («подкачку») необходимых файлов на носители, непосредственно доступные ЭВМ, и откачку данных, к к-рым давно не было обращений, на менее оперативные *носители* (напр., с рабочего диска на «архивную» магнитную ленту).

Обычно в А. различают несколько видов документов (напр., тексты модулей, рабочие программы, результаты счёта и т. п.). Между документами могут существовать специфич. отношения, обслуживаемые специальными функциями (напр., хранение разных версий одного модуля, контроль согласованности документов и т. п.).

АРХИ́ВНАЯ ПА́МЯТЬ — см. *Память.*

АРХИТЕКТУ́РА (лат. architectura, от греч. ἀρχιτέκτων — строитель) ЭВМ — общее описание структуры и функций ЭВМ на уровне, достаточном для понимания принципов работы и системы команд ЭВМ, но скрывающем детали её технического и физического устройства.

Архитектурное описание ЭВМ опирается на её структурную схему, т. е. указание функционально обособленных *устройств* машины и способов их соединения информационными каналами и линиями передачи управляющих сигналов. Другой составной частью А. ЭВМ является структура её *памяти*, т. е. указание всех её регистров, ячеек оперативной, постоянной и внешней памяти с указанием их формата и способа адресации. Функционирование ЭВМ задаётся общим алгоритмом автоматич. исполнения машинной программы и описанием её системы команд.

В основе подавляющего большинства современных и ранее разработанных ЭВМ лежит так наз. архитектура фон Неймана, названная в честь американского учёного Дж. фон Неймана (1903—57), впервые изложившего принципиальные положения А. ЭВМ во 2-й пол. 40-х гг. 20 в. Основные принципы архитектуры фон Неймана состоят в следующем.

1) ЭВМ состоит из *процессора*, *памяти* и *внешних устройств.*

2) Единственным источником активности (не считая стартового и аварийного вмешательства человека-оператора) в ЭВМ является процессор, к-рый, в свою очередь, управляется программой, находящейся в памяти ЭВМ.

3) Память состоит из ячеек, имеющих каждая свой адрес. Каждая ячейка хранит команду программы или к-рую единицу обрабатываемой информации, причём и команда и информация выглядят одинаково (машинное слово).

4) В любой момент процессор выполняет одну команду программы, адрес к-рой находится в специальном регистре процессора — *счётчике команд.*

5) *Обработка информации* происходит только в регистрах процессора. Информацию в процессор можно ввести из любой ячейки памяти или внешнего устройства и, наоборот, можно направить из процессора в любую ячейку или на внешнее устройство.

6) В каждой команде программы зашифрованы следующие предписания: а) из каких ячеек памяти взять обрабатываемую информацию; б) какие совершить операции с взятой информацией; в) в какие ячейки памяти направить полученную информацию; г) как изменить содержимое счётчика команд, чтобы знать, откуда взять для выполнения следующую команду.

7) Процессор исполняет программу команда за командой в соответствии с изменением содержимого счётчика команд и расположением команд в памяти, пока не получит команду остановиться.

В последующих поколениях ЭВМ архитектура фон Неймана обогатилась многими дополнительными чертами, к-рые можно уподобить переходу от сольной игры на музыкальном инструменте к звучанию симфонического оркестра, однако исходные принципы управления работой ЭВМ с помощью хранимой в памяти программы остались нетронутыми.

АССЕ́МБЛЕР (англ. assembler, от assemble — собирать, монтировать) — система *программирования*, позволяющая составлять программы в терминах команд *машинного языка*, но с использованием более удобной системы обозначений. Машинная программа имеет вид записи заполнения участка оперативной памяти, где рядом с адресом ячейки указывается её содержимое — обрабатываемая информация и машинная команда — и то и другое в виде двоичного слова, записываемого в 8-ричной или 16-ричной системе счисления. При этом команда обычно состоит из двух частей — кода операции и адресной части. Основных неудобств в работе человека с машинной программой два: а) невозможность следить за смыслом программы из-за числовой кодировки операций, адресов ячеек и обрабатываемой информации; б) зависимость вида программы от её места в памяти: при размещении одной и той же программы и информации в разных участках памяти вид программы из-за смены адресов будет изменяться.

А. позволяет при записи машинной программы использовать символич. обозначения для кодов операции, адресов ячеек и обрабатываемой информации. Для записи кодов операции и обрабатываемой информации применяются стандартные обозначения, позволяющие записывать числа и тексты в общепринятой форме, а для кодов команд — мнемонич. знаки или сокращения. Для обозначения команд и величин, размещаемых в памяти, программист может ввести любые *имена* (*метки* для команд, символич. адреса для величин), отвечающие содержательному смыслу программы.

Аналогично, содержательные имена получают подпрограммы, позволяя тем самым повысить наглядность команд их вызова.

Программа на языке А. записывается построчно по одной команде в строке в четыре колонки: метка команды (если она есть), код операции, адресная часть и комментарий. Поскольку все внутренние ссылки в программе выражены с помощью символич. имён, вид программы не зависит от способа её последующего размещения в памяти.

Работа А. состоит во вводе программы и в составлении таблицы всех используемых в ней имён. На основе подсчёта числа величин, длины программы и, если нужно, дополнительных указаний программиста происходит распределение памяти, так что каждое имя в программе получает конкретный адрес. После этого А. заменяет символич. имена на их адреса, символич. коды команд на числовые, в результате чего программа приобретает готовый к исполнению вид. Кроме указанных действий А. может производить сборку программы из раздельно написанных кусков, производя согласование взаимных ссылок, объединять написанную программу с библиотечными подпрограммами и выполнять другие служебные функции, способствующие отладке программы и контролю за её исполнением.

АССОЦИАТИ́ВНАЯ ПА́МЯТЬ (от ср.-век. лат. associatio — соединение) — *память*, в к-рой доступ к информации осуществляется не по адресу, а по

некоторому признаку, ассоциируемому с нужной информацией. Этот признак, называемый также *ключом* или поисковым образом, хранится в А. п. вместе с соответствующей ему информацией. Выборка из А. п. требует особой процедуры просмотра содержимого памяти, обеспечивающей нахождение информации с заданным ключом. Типичный пример ассоциативного поиска — поиск слова в словаре; здесь заданное слово является ключом, а словарная статья (перевод или толкование) — информацией, соответствующей этому ключу. В худшем случае ассоциативный поиск требует полного просмотра всей памяти, что при больших объёмах хранимой информации неэффективно. В то же время большое количество задач обработки информации требует организация её хранения в А. п. Поэтому в информатике существует специальный раздел, изучающий способы размещения и поиска информации в А. п. Разнообразие этих способов сводится к двум главным приёмам: сортировке ключей (упорядочению) и свёртке ключей (хэшированию). Оба приёма задают закон, по к-рому информация заносится в А. п.

При упорядочении информация располагается в зависимости от значения ключей, например лексикографич. порядок слов в словаре. Такое упорядочение позволяет находить нужную информацию по ключу, делением А. п. пополам и ограничением дальнейшего поиска в той половине, к к-рой относится ключ.

При хэшировании выбирается та или иная расчётная формула, к-рая вычисляет по ключу его свёртку — число, являющееся адресом ячейки в заданном диапазоне адресов А. п. Соответствующая информация и её ключ хранятся в ячейке, на к-рую указывает свёртка. При поиске информации по ключу вычисление его свёртки по той же формуле немедленно даёт требуемую информацию.

Указанные общие схемы организации А. п. имеют усложнения, позволяющие добавлять и исключать информацию, не нарушая упорядоченности ключей, а в случае хэширования — разрешать коллизии, а именно, когда разные ключи имеют одну и ту же свёртку. На практике хэширование и упорядочение используются в сочетании, напр. в словаре с клапанами. Клапан, приклеенный к краю страницы с помещённой на нём буквой, является простейшей свёрткой ключа — слова до его первой буквы. При этом происходит коллизия: все слова, начинающиеся на заданную букву, направляют поиск в один и тот же раздел словаря, отмеченный соответствующим клапаном. Внутри раздела поиск производится с учётом лексикографич. упорядочения слов.

АСУ — *автоматизированная система управления.*

АУ — *арифметическое устройство.*

АЦПУ — *алфавитно-цифровое печатающее устройство.*

Б

БА́ЗА ДА́ННЫХ (франц. base, от греч. βάσις — основание) — организованная совокупность *данных*, предназначенная для длительного хранения (обычно во внешней памяти ЭВМ) и постоянного применения. Слово «база» подчёркивает, что Б. д. является не случайным собранием сведений, но является постоянной основой для нек-рого вида конкретной деятельности человека — пользователя Б. д.

Приведение данных в систему, удобную для постоянного и многократного применения, является неотъемлемым признаком человеческой культуры, основанной на письменности. Предшественниками компьютерных Б. д. являются таблицы, каталоги, телефонные книги, календари, карты и атласы, всевозможные картотеки, досье и многие другие виды справочных изданий и документов.

Распространение справочной информации в виде печатных изданий несёт в себе внутреннее противоречие и постоянно отстаёт от потребностей общества. Обеспечение доступности и полноты информации требует больших тиражей и частых переизданий, что приводит к значительным издержкам и не всегда достигается. Эти противоречия хорошо видны на примере телефонных книг. Организация компьютерных Б. д. разрешает это противоречие, исключая из информационного обслуживания тиражируемый материальный носитель. Концентрация информационного фонда в одном месте — внешней памяти ЭВМ — обеспечивает как сохранность, так и пополняемость информации, а электрич. связь центральной ЭВМ с автоматизированными рабочими местами и терминалами пользователей обеспечивает постоянный и быстрый доступ к информации.

Компьютерная Б. д. в своей работе опирается на ту или иную *файловую систему*, к-рая обеспечивает хранение данных, их поиск во внешней памяти и выдачу на внешние устройства ЭВМ. Посредником между пользователем и Б. д. является *базами данных система управления* — особая системная программа, к-рая, воспринимая запрос пользователя, отдаёт необходимые команды файловой системе и формирует информационное сообщение в удобной пользователю форме.

Единицей хранения и доступа к Б. д. является *запись*, напр. библиографич. карточка в электронном каталоге, листок по учёту кадров в Б. д. отдела кадров, реферат статьи в автоматизированном реферативном журнале, чертёж детали в системе автоматизации проектирования. Каждая запись имеет в своём составе своего рода заголовок, или ключ, по к-рому она может быть найдена. Заголовки записей объединяются в справочные таблицы, являющиеся как бы оглавлением Б. д. Составление ключей и справочных таблиц подчиняется формальным правилам, обеспечивающим полную автоматизацию поиска информации в Б. д.

Среди пользователей Б. д. выделяется особая категория доверенных лиц, к-рые имеют право вносить изменения в Б. д. В отличие от обычных пользователей эти доверенные лица наз. администраторами Б. д.

БА́ЗА ЗНА́НИЙ — организованная совокупность знаний, представленная в форме, которая допускает автоматическое или автоматизированное использование этих знаний с помощью ЭВМ. Понятие Б. з. появилось в кон. 70-х гг. 20 в. как распространение понятия *базы данных* на системы справочной информации, содержащие не только конкретные факты, но и описание общих закономерностей и правил. Напр., при решении задач из тригонометрии базой данных можно считать таблицы функций, а роль Б. з. играют различные тригонометрич. тождества, выражающие свойства тригонометрич. функций и соотношения между ними.

Первыми применениями ЭВМ, опирающимися на использование Б. з., явились *экспертные системы*, *вычислительные эксперименты* и системы автоматизации проектирования.

БА́ЗАМИ ДА́ННЫХ СИСТЕ́МА УПРАВЛЕ́НИЯ, СУБД,— совокупность языковых и программных средств, предназначенная для создания, обслуживания (ведения) и использования *базы данных* многими пользователями. Основные функции СУБД: перевод схемы, определяющей структуру данных и записанной на языке определения данных (принятом в данной СУБД), в нек-рое внутреннее представление, используемое системой при дальнейшей работе с данными; создание базы данных (загрузка данных в базу); реализация запросов пользователей (формулируемых на специальном языке, принятом в данной СУБД) на сортировку и отбор по заданным критериям, а также извлечение нек-рой части базы данных, что может сопровождаться редактированием и обработкой информации; обновление нек-рых частей базы данных без изменения структуры данных; обеспечение защиты данных и приоритетов в их использовании.

БА́ЗОВОЕ ПРОГРА́ММНОЕ ОБЕСПЕ́ЧЕНИЕ — см. *Программное обеспечение.*

БАЙТ (англ. byte) — набор из стандартного числа (обычно 8) *битов* (двоичных цифр), обрабатываемый как единое целое, а также запоминающее устройство для хранения такого набора. Во втором значении Б. служит единицей измерения объёма данных и ёмкости памяти. Производные единицы: к и л о б а й т (сокращённо Кбайт; 1 Кбайт = 2^{10} байт=1024 байт) и м е г а б а й т (Мбайт; 1 Мбайт= =1024 Кбайт). Посредством 8 битов стандартного Б. можно закодировать 256 различных значений, чаще всего для одной из следующих целей.

1) Д в о и ч н о е п р е д с т а в л е н и е целого числа (или адреса) из отрезка от 0 до 255_{10}.

2) П р е д с т а в л е н и е л и т е р ы. Б. может содержать двоичный код нек-рой *литеры*; в связи с этим число литер во внутреннем алфавите ЭВМ обычно не превышает 256.

3) Д в о и ч н о - д е с я т и ч н о е п р е д с т а в л е н и е ч и с е л. Б. разбивается на 2 т е т р а д ы (2 четырёхбитных набора), в каждую из к-рых помещается код десятичной цифры или знака числа.

4) Б. может быть физич. частью более крупной логически неделимой е д и н и ц ы п р е д с т а в л е н и я и н ф о р м а ц и и, напр. числа с плавающей запятой.

При реализации запоминающих устройств 8 основных (информационных) битов Б. обычно сопровождаются девятым (контрольным), к-рый, как правило, устанавливается так, чтобы сумма всех 9 битов была нечётной (или, наоборот, чётной). Нарушение этого свойства служит признаком ошибки при передаче данных.

БАНК ДА́ННЫХ (от итал. banca — скамья, лавка менялы) — совокупность баз данных, объединённых общностью применения. Примером Б. д. может служить совокупность *баз данных*, обслуживающих автоматизированную систему управления работой предприятия: персонал, оборудование, материалы и полуфабрикаты, распорядительная документация, нормативы и стандарты, смежники и поставщики, заказчики и получатели. Другой пример: Б. д. Всесоюзного института научно-исследовательской и технич. информации, в к-ром отдельными базами данных являются магнитные ленты, содержащие выпуски реферативных журналов по отдельным наукам и указатели к ним.

БАРАБА́ННЫЙ ГРАФОПОСТРОЙ́ТЕЛЬ — см. *Графопостроитель*.

БЕЗБУМА́ЖНЫЙ СПО́СОБ о б р а б о т к и и н ф о р м а ц и и — способ работы с документами, при котором подлинники документов возникают и хранятся в памяти ЭВМ, а их внешний вид воспроизводится в виде изображения на экране дисплея. Б. с. работы с документами не является буквально безбумажным: использование бумажных носителей в качестве заготовки документа или его распечатки возможно и определяется соображениями удобств, привычки или иной необходимости. Важным является то, что оригинал документа хранится в памяти ЭВМ, передаётся средствами *электронной почты* и существует в бумажной форме лишь в виде копии. Безбумажное делопроизводство требует особых юридических, правовых и технич. процедур для скрепления безбумажного документа аналогом подписи ответственного лица.

Б. с. работы с документами получает распространение в финансовых расчётах, в подготовке публикаций и построении программ для ЭВМ, в разработке разного рода информационно-справочных систем. Переход на Б. с. является протяжённым во времени процессом переноса на машинные носители всей основной текстовой информации, циркулирующей в обществе, и в переносном смысле именуется б е з б у м а ж н о й и н ф о р м а т и к о й.

БЕЗУСЛО́ВНЫЙ ПЕРЕХО́Д — см. *Переход*.

БЕЙСИК (англ. basic) — *язык программирования*, ориентированный на обучение основам программирования; отличается простотой конструкции, а также возможностью осуществления *диалогового режима* работы с ЭВМ. Б. используется в основном при программировании на персональных ЭВМ.

БИБЛИОТЕ́КА (греч. βιβλιοθήκη, от βιβλίον — книга и θήκη — хранилище) в и н ф о р м а т и к е — организованная совокупность *программ* или *вспомогательных алгоритмов*. Обычно Б. алгоритмов или программ хранится во внешней памяти ЭВМ, в рамках той или иной *файловой системы*, обеспечивающей автоматизированный доступ к отдельным алгоритмам и программам. Каталог содержимого Б. размещается в отдельном *файле* и используется для доступа или быстрого просмотра Б.

Различаются Б. компилирующего и интерпретирующего типа. Обращение к Б. компилирующего типа происходит при предварительной сборке алгоритма или программы, к-рая затем с помощью транслятора переводится в готовую к исполнению форму. Обращение к Б. интерпретирующего типа происходит при исполнении программы или алгоритма непосредственно в момент вызова подпрограммы или вспомогательного алгоритма.

БИНА́РНЫЙ (от лат. binarius — двойной) — то же, что *двоичный*.

БИПОЛЯ́РНЫЙ ТРАНЗИ́СТОР — см. *Транзистор*.

БИС — большая *интегральная схема*.

БИТ (от англ. BInary digiT — двоичный разряд) — 1) Б. в в ы ч и с л и т е л ь н о й т е х н и к е, д в о и ч н а я ц и ф р а,— позиция двоичной цифры в двоичном коде; то же, что двоичный разряд. Число Б. памяти определяет максимальное количество двоичных цифр, ею вмещаемых; число Б. данных есть количество двоичных разрядов, в к-рых они записаны.

2) Б. в т е о р и и и н ф о р м а ц и и, д в о и ч н а я е д и н и ц а,— единица измерения к о л и ч е с т в а и н ф о р м а ц и и, определяемая как количество информации в испытании с двумя взаимоисключающими равновероятными исходами.

БИ́ТОВАЯ ЦЕПО́ЧКА — см. *Цепочка*.

БЛОК-СХЕ́МА (нем. Block, голл. blok и греч. σχῆμα — наружный вид, форма) — графическое представление управляющей структуры программы или алгоритма. Состоит из замкнутых фигур стандартной формы (рис. 1) — блоков — и соединяющих их стрелок. В блоках записываются команды или названия действий, а стрелки

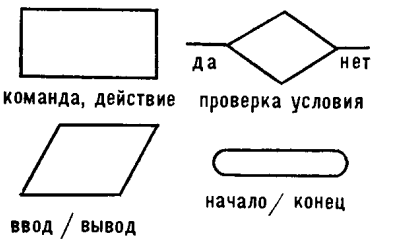


Рис. 1. Примеры стандартных блоков блок-схемы.

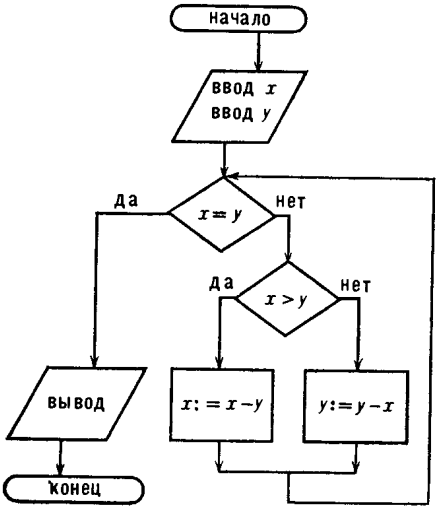


Рис. 2. Пример блок-схемы алгоритма.

указывают на порядок их выполнения. Б.-с. используются в качестве вспомогательного средства для наглядного представления структуры сложных действий, а также для документирования программ. На рис. 2 в качестве примера приводится Б.-с. алгоритма, согласно к-рому с внешнего устройства вводятся два натуральных числа x, y и находится их наибольший общий делитель, значение к-рого выводится на внешнее устройство.

По мере развития техники составления программ в режиме прямого диалога с ЭВМ Б.-с. уступают место структурному представлению программ средствами *языков программирования* высокого уровня.

БОД — единица быстродействия (пропускной способности) *канала связи*, равная 1 бит/с. Назв. по имени французского изобретателя Ж. Бодо (J. Baudot, 1845—1903).

БОРТОВА́Я ЭВМ — см. *Электронная вычислительная машина.*

БУ́КВА — 1) Б.— элемент алфавита некоторого *языка* (в том числе национального, алгоритмического), относимый в грамматике этого языка к синтаксической категории «буквы»; в частности, в языках программирования Б. употребляются для записи *идентификаторов.*

2) Б.— *литера* и *код* какого-либо из устройств ЭВМ, представляющие некоторую Б. (в указанном выше значении); такие литеры служат знаками языковых Б., причём соответствие между теми и другими, как правило, неоднозначно.

БУ́КВЕННО-ЦИФРОВА́Я КЛАВИАТУ́РА — см. *Клавиатура.*

БУ́ФЕР (англ. buffer, от buff — смягчать толчки) в вычислительной технике — способ сопряжения устройств ЭВМ, работающих с разной скоростью или асинхронно по отношению друг к другу. Принцип работы Б. хорошо виден на таких обыденных примерах, как конвейер для выдачи багажа в аэропорту или лотки с хлебом в булочных самообслуживания.

Один из способов организации Б. в ЭВМ — это выделение участка памяти с циклич. нумерацией ячеек: напр., при счёте адресов Б., состоящего из 100 ячеек, счёт начинается с нуля и, достигая 99, переходит снова на нуль и т. д. (счёт по модулю 100). Имеются также две ячейки, содержимым к-рых являются адреса Б., называемые соответственно точкой записи и точкой чтения. В начальный момент, когда буфер пуст, точка чтения и точка записи совпадают. При записи m слов в Б. они пишутся с адреса, указанного в точке записи, после чего содержимое точки записи увеличивается на m (по модулю ёмкости Б.). При чтении n слов из Б. они читаются с адреса, указанного в точке чтения, после чего содержимое точки чтения увеличивается на n. В любой момент точка чтения отстаёт от точки записи на величину, равную текущему заполнению Б.

БУ́ФЕРНАЯ ПАМЯ́ТЬ — см. *Процессор.*

БЫСТРОДЕ́ЙСТВИЕ канала связи — см. *Канал связи.*

БЫСТРОДЕ́ЙСТВИЕ ЭВМ — показатель, характеризующий скорость работы ЭВМ или её производительность. Большинство команд ЭВМ выполняются за одно и то же минимальное время, называемое стандартным тактом работы машины. В связи с этим простейшей единицей измерения Б. ЭВМ является величина, обратная стандартному такту, выраженному в долях секунды. Обычно используется единица, бóльшая в 10^6 раз и называемая МИПС. Стандартный такт, характеризуя скорость работы ЭВМ, не всегда достаточен для оценки её производительности, т. к. при решении числовых задач в научных и инженерных расчётах большое место занимают операции над числами с плавающей запятой длиной до 64 бит, к-рые зачастую требуют заметно большего времени, нежели стандартный такт. В таких случаях оценивают Б. ЭВМ, указывая нек-рое среднее количество миллионов команд, выполняемых за секунду. Соответствующая единица называется мегафлоп.

Для оценки среднего Б. ЭВМ применяют так наз. стандартные смеси команд, характеризуемые тем или иным процентным соотношением наиболее часто исполняемых команд ЭВМ.

В

ВВОД — *команда* исполнителю взять порцию данных из определённого места внешней среды и поместить её в память исполнителя. При записи алгоритмов на алгоритмич. языке внешняя среда является частью обстановки и определяется для каждого алгоритма наиболее подходящим способом. При записи программ для ЭВМ на нек-ром языке программирования внешняя среда фиксируется правилами языка и устройством ЭВМ. В этом случае В. производится с внешних устройств: внешней памяти, клавиатуры, перфоленты или перфокарты, линии связи, манипуляторов (напр., *«колобок»*, *джостик*).

В. бывает трёх типов: по команде, запросу и прерыванию. Примером В. по команде является В. с внешней памяти. В этом случае инициатива в выполнении В. полностью принадлежит исполнителю. В. по запросу предполагает взаимодействие исполнителя с поручителем. При выполнении команды В. по запросу исполнитель приостанавливает свою работу, посылает поручителю сигнал запроса и ожидает очередную порцию данных с нек-рого внешнего устройства, управляемого поручителем. В. по прерыванию происходит не по команде программы исполнителя, а по инициативе поручителя или независимо работающего внешнего устройства, напр. линии связи, установленной на приём. В этом случае исполнитель прерывает исполнение основной программы и выполняет нек-рые стандартные действия, направленные на своевременное чтение и сохранение поступающих данных.

ВВО́ДА УСТРО́ЙСТВО — см. *Внешнее устройство.*

ВЕ́КТОР (от лат. vector — несущий) в информатике — занумерованная конечная последовательность однотипных величин, линейная таблица. В языках программирования употребляется также под названием массив. Элементы последовательности, образующей В., наз. его компонентами; номер компоненты В.— её индексом. Переменная или любое выражение, значения к-рых пробегают диапазон индексов В., наз. индексной переменной (выражением). Если V — имя В., то его компоненты обозначаются путём приписывания индекса i с подъёмом (иногда заключаются в круглые скобки): V^i, $V^{(i+j)}$ (верхний индекс); с опусканием: V_i, V_{i+j} (нижний индекс) или на той же строке с взятием индекса в квадратные скобки: V[i], V[i+j]. Последнее является стандартным способом записи индексов в языках программирования.

Для описания В. указываются его имя, тип его компонент и диапазон индексов. Напр., вектор T, образуемый вещественными компонентами, занумерованными от 1 до 100, описывается в школьном алгоритмич. языке в виде:

```
вещ таб T [1:100],
```

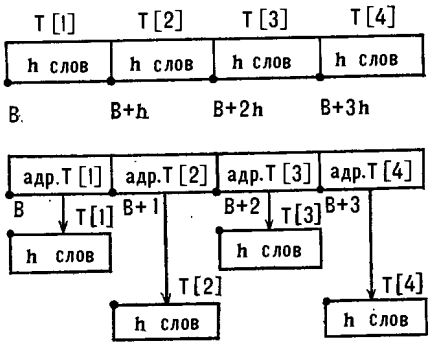
в языке бейсик в виде:

```
DIM T (99)
```

(при этом компоненты могут нумероваться только от нуля), в языке паскаль в виде:

```
var T:array [1...100] of real.
```

Важной особенностью представления В. в памяти ЭВМ является то, что каждая его компонента занимает



Схематическое изображение упакованного и рассредоточенного векторов: B—базовый адрес; h—количество машинных слов; T (i)— компонента вектора.

одно и то же количество h машинных слов. Это позволяет хранить В. в памяти в так наз. упакованном виде, когда соседние компоненты В. располагаются в соседних участках памяти (рис., вверху), начиная с базового адреса B., так что адрес i-й компоненты находится по простой зависимости B+(i—1)·h. Если же по тем

или иным причинам размещать компоненты В. в соседних участках памяти невозможно, то упаковываются только ссылки на компоненты В., рассредоточенные по разным участкам памяти (рис., внизу).

Конструкция ЭВМ предусматривает специальные индекс-регистры и команды, обеспечивающие быстрый доступ к компонентам В. при исполнении программ. Компонентами В. могут быть не только числа или литеры, но и структурные объекты, в частности тоже В., причём глубина композиции может быть любой. Такая n-кратная векторная композиция наз. n-мерным массивом и является стандартным составным объектом многих языков программирования. Особо выделяется случай n=2, т. е. вектор векторов, наз. также матрицей, прямоугольной таблицей или двумерным массивом.

ВЕКТОРИЗАЦИЯ — см. *Исполнение.*

ВЕ́КТОРНЫЙ ДИСПЛЕ́Й — см. *Дисплей.*

ВЕЛИЧИНА в информатике — объект, имеющий имя и значение определённого типа. Понятие В. сложилось в результате синтеза понятий физич. величины, константы и переменной в математике и ячейки памяти в вычислительной технике и программировании. В теоретич. рассуждениях В. является абстрактным объектом, задаваемым своими свойствами, поэтому практич. употребление В. в алгоритмизации и программировании требует решения вопросов о текстовом представлении величин и значений в языках программирования и об их реализации в той или иной ЭВМ. В. являются главным средством для обозначения обрабатываемой информации при составлении алгоритмов и программ.

В. различаются прежде всего по времени и области их существования. В., являющиеся постоянной частью обстановки и внешние по отношению к алгоритму, наз. глобальными. Примером глобальных В. для алгоритмов работы с графич. информацией являются само поле рисования, его размеры и текущая координата курсора. Аргументы и результаты алгоритма в школьном алгоритмич. языке — это пример В., внешних по отношению к данному алгоритму, возникающих перед его исполнением и исчезающих после завершения исполнения. Промежуточные В.— пример внутренних, или локальных, В., «невидимых» извне использующего их алгоритма. В частности, после исполнения вспомогательного алгоритма все его промежуточные В. перестают существовать. Такие соглашения о периоде существования величин позволяют экономно расходовать память ЭВМ при исполнении программ, а также избегать путаницы при использовании одних и тех же обозначений в разных алгоритмах.

В. различаются также по степени их изменчивости. В отличие от переменной, В., значение к-рой не может быть изменено в период её существования, наз. константой. При этом различаются константы литеральные (см. *Литерал*), у к-рых их значение определяется однозначно по изображающему их имени, напр. 3.14158, и инициируемые, значение к-рых задаётся в момент их введения в действие, напр.

вещ *pi*=3.14158.

В отличие от физич. В., к-рые в любой момент времени имеют нек-рое значение, В. в информатике могут в какие-то моменты не иметь значения, быть неопределёнными. Стандартным допущением также является то, что В. может изменить своё текущее значение (т. е. значение на данный момент времени) только под вполне определённым внешним воздействием, как правило, в результате выполнения команды присваивания. Взятие значения В. обычно не изменяет её текущего значения.

Главной характеристикой В. является её тип — описание нек-рого множества объектов, к-рому принадлежат значения данной В. Простые, или скалярные. В. принимают значения, к-рые являются неделимыми объектами. Примерами простых В. являются числовые В. (натуральные, целые, вещественные), а также В., принимающие значения из заданного конечного множества, напр. логические (множества {0, 1} или {**истина, ложь**}). На практике числовые В. реализуются конечными множествами целых и рациональных чисел. Эти множества характеризуются диапазоном (наибольшее число, наименьшее положительное число) и точностью представления (обычно количество значащих цифр).

Составные В. принимают значения, к-рые, в свою очередь, составлены из более простых значений. Примерами составных В. являются *строки*, *векторы* и *записи*. С каждой составной В. связывается способ именования, или доступа, к составляющим его значениям. Напр., если z — комплексное число, то стандартные функции $\mathrm{Im}(z)$ и $\mathrm{Re}(z)$ позволяют обращаться к его мнимой и действительной частям соответственно.

Обычно тип назначается величине раз и навсегда при составлении алгоритма или программы. Такие типы В. наз. статическими. В некрых языках программирования тип В. назначается в процессе исполнения программы, определяясь типом первого присваиваемого В. значения. Такие типы В. наз. динамическими.

В записи алгоритмов и программ В, упоминаются под своими именами. В отличие от математич. традиции использовать преимущественно однобуквенные имена В. в информатике в интересах большей наглядности часто используют длинные имена (*идентификаторы*), мнемонически напоминающие о содержательном назначении В. При необходимости указать конкретное значение В. это значение записывается в виде литеральной константы.

При реализации в ЭВМ каждой В. отводится нек-рый участок памяти. Простой В. обычно сопоставляется одна ячейка памяти; её адрес соответствует имени В., а её содержимое соответствует значению В. Способы реализации составных В. в ЭВМ отличаются большим разнообразием и определяются, с одной стороны, особенностями системы команд ЭВМ, с другой — устройством транслятора, переводящего программы с языка программирования на машинный язык.

ВЕ́НТИЛЬ в вычислительной технике — то же, что *совпадения схема.*

ВЕРИФИКА́ЦИЯ (от лат. verus — истинный и facio — делаю) — доказательство соответствия алгоритма (программы) задаче, для решения к-рой он составлен.

ВЕ́ТВЛЕ́НИЕ — *команда* исполнителю выбрать для выполнения одну из двух указанных команд (или групп команд) в зависимости от соблюдения или несоблюдения заданного условия. В. является главным средством достижения гибкости в поведении исполнителя, реализации обратной связи от обстановки к исполнителю.

В школьном алгоритмич. языке В. позволяет исполнителю выбрать по условию У для выполнения одну из двух серий команд СЕРИЯ 1 и СЕРИЯ 2. Если условие У соблюдается, выполняется СЕРИЯ 1, в противном случае выполняется СЕРИЯ 2. В зависимости от длины серий В. записывается в строчку:

```
если У то СЕРИЯ 1 иначе СЕРИЯ 2 все
```

или в столбик:

```
если У
| то СЕРИЯ 1
| иначе СЕРИЯ 2
все
```

с соблюдением указанного отступа для большей наглядности. Этой же цели может служить вертикальная линия, соединяющая служебные слова **если** и **все**, к-рые играют роль скобок, ограничивающих команду В.

Возможна сокращённая форма В., когда при несоблюдении условия У ничего не надо делать, т. е. СЕРИЯ 1 либо выполняется, либо пропускается:

```
если У то СЕРИЯ 1 все
```

или:

```
если У
| то СЕРИЯ 1
все
```

В языках программирования, в к-рых порядок выполнения команд

указывается с помощью *меток*, В. реализуется посредством команд *перехода*.

ВИНЧЕ́СТЕРСКИЙ ДИСК — см. *Магнитный диск*.

ВИРТУА́ЛЬНАЯ ПА́МЯТЬ — см. *Память*.

ВИРТУА́ЛЬНЫЙ ОБЪЕ́КТ (от ср.-век. лат. virtualis — способный) — идеальный объект, описанный в виде действующей программной *модели*, но проявляющий себя во взаимодействии с пользователем как реально существующий. Первым широким применением этой идеи в вычислительной технике была виртуальная оперативная *память*, реализованная в 60-е гг. 20 в. в ряде ЭВМ 2-го поколения. Программист пишет свои программы в расчёте на виртуальную память большого объёма, напр. 100К слов, хотя в физич. оперативной памяти он может использовать, напр., только 10К слов. Память делится на страницы — порции равной длины, напр. по 512 слов. При работе ЭВМ в физической оперативной памяти размещается только 20 каких-то страниц виртуальной памяти, а остальные 180 страниц хранятся во внешней памяти — барабане или дисках. Если в какой-то момент в выполняемой команде появляется адрес, относящийся к странице, к-рая находится во внешней памяти, происходит переброска: нужная страница прочитывается в оперативную память на место другой страницы, к-рая переносится для сохранности во внешнюю память. При хорошо продуманной стратегии переброски, осмотрительном программировании и оптимальном размере страниц суммарное замедление скорости решения задачи невелико, что создаёт иллюзию десятикратного увеличения объёма оперативной памяти.

Концепция виртуальных устройств получила особое распространение в вычислительных центрах коллективного пользования, вызывая у пользователей комфортабельное ощущение полного обладания нужными для них ресурсами вычислительной системы.

ВНЕ́ШНЕЕ ПРЕРЫВА́НИЕ — см. *Прерывание*.

ВНЕ́ШНЕЕ УСТРО́ЙСТВО, периферийное устройство, ЭВМ — устройство для внешней машинной обработки информации (в отличие от преобразований информации, выполняемых центральным процессором ЭВМ). По роду выполняемых операций В. у. ЭВМ подразделяются на следующие группы: устройства подготовки данных, служащие для занесения информации на промежуточные *носители* данных (перфокарты, перфоленты, магнитные ленты или диски и др.), для контроля нанесённой информации, её дублирования, распечатки с перфокарт, сортировки перфокарт, переноса с одного носителя на другой и др. вспомогательных операций; устройства ввода — для считывания информации (как с промежуточных носителей, так и непосредственно с первичных цифровых и текстовых документов, графиков и т. п.) и преобразования её в кодовую последовательность электрич. сигналов, подлежащих передаче в центральный процессор; устройства вывода — для регистрации результатов обработки информации или их отображения (различают вывод информации на промежуточный носитель с целью последующего её использования в другой ЭВМ, станках с числовым программным управлением и т. д. и вывод информации на *дисплей*, *алфавитно-цифровое печатающее устройство*, *графопостроитель*, синтезатор речи для непосредственного восприятия человеком); устройства для хранения больших объёмов информации (*запоминающие устройства* на магнитных лентах, дисках); устройства передачи информации на большие расстояния по линии связи, обеспечивающие взаимодействие многих пользователей с ЭВМ (аппаратура передачи данных, *терминалы* и др.).

Электронная часть современных В. у. ЭВМ (блоки управления, преобразователи представления информации, регистры, логические и запоминающие устройства, устройства отображения, считывающие элементы и т. п.) выполняется на основе *микропроцессоров* с использованием *интегральных схем*, электронно-лучевых приборов, фотодиодов и др. электронных приборов, что позволяет уменьшить их габаритные размеры и массу, а также повысить их надёжность. Многие В. у. ЭВМ выпускаются в настольном и портативном исполнении.

ВНЕ́ШНЯЯ ПА́МЯТЬ — см. *Память*.

ВНУ́ТРЕННЕЕ ПРЕРЫВА́НИЕ — см. *Прерывание*.

ВНУ́ТРЕННЯЯ ПА́МЯТЬ — см. *Память*.

ВОЗВРА́Т — *команда* исполнителю вернуться после исполнения вспомогательного алгоритма (процедуры, подпрограммы) к продолжению исполнения основного алгоритма (программы). В школьном алгоритмич. языке нет явной команды В., и в нём необходимость В. определяется моментом завершения исполнения вспомогательного алгоритма, т. е. достижения служебного слова **кон.** В машинных языках и нек-рых языках программирования (напр., бейсик, фортран) команда В. записывается в явном виде. Выполнение В. на ЭВМ требует при переходе на подпрограмму запоминания текущего значения счётчика команд для правильного определения места, с к-рого нужно продолжать исполнение основной программы. Выполнение В. при исполнении вспомогательного алгоритма вычисления функции требует дополнительных действий для выдачи значения функции. В школьном алгоритмич. языке принято соглашение, согласно к-рому в качестве вычисленного значения функции при выполнении В. берётся текущее значение служебной переменной **знач.**

ВРЕ́МЯ ДО́СТУПА к информации — см. *Память*.

ВСПОМОГА́ТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИ́ТМ — *алгоритм*, исполнение которого задаётся путём *вызова* его из другого алгоритма, основного по отношению к вызываемому. В. а.— стандартное средство для последовательного и систематич. решения сложных задач путём разбиения их на части; основной способ многократного использования ранее найденных алгоритмов.

Использование В. а. выглядит как расширение системы команд исполнителя специальной командой вызова, к-рая побуждает исполнителя выполнить следующее действие: «исполнить указанный алгоритм для заданного условия решаемой им задачи». Вызвать можно любой алгоритм, запись к-рого доступна исполнителю. Важно то, что составителю основного алгоритма не надо знать, как устроен В. а.; достаточно знать лишь, какую задачу он решает и как надо записать его вызов.

Использование В. а. для решения задачи путём разбиения её на части достигается применением принципа пошагового уточнения алгоритма, состоящего в следующем. При поиске алгоритма для решения сложной задачи не сразу видно, какая последовательность заданной системы команд исполнителя приведёт к её решению. Тогда разработчик алгоритма пытается обратить процесс поиска алгоритма, спрашивая себя, какой должна быть система команд исполнителя, чтобы просто выразить алгоритм решения исходной задачи. Часто такую специально подобранную систему команд легко придумать и получить в ней в качестве первого шага нек-рую запись алгоритма. После этого анализируется придуманная система команд. Действие, выполняемое каждой из этих команд, рассматривается как новая подзадача, для к-рой нужно найти алгоритм. Очевидно, что такой алгоритм будет В. а. по отношению к тому, к-рый найден на предыдущем шаге. Такая последовательность шагов уточнения исходного алгоритма продолжается до тех пор, пока появляющиеся В. а. не окажутся выраженными в терминах исходной системы команд исполнителя.

ВСТРО́ЕННАЯ ЭВМ — см. *Электронная вычислительная машина*.

ВХОЖДЕ́НИЕ знака в данные — конкретный экземпляр знака, использованный при кодировании данных. Математически данные можно рассматривать как отображение множества знаковых позиций (или

однозначно им соответствующих номеров) в используемый *алфавит* (словарь и т. п.). В этом случае В. есть пара ⟨знак, знаковая позиция⟩.

ВЦ — *вычислительный центр*.

ВЦКП — *вычислительный центр* коллективного пользования.

ВЫБОР — *команда* исполнителю выбрать для выполнения одну из нескольких указанных команд (или групп команд) в зависимости от комбинации соблюдения и несоблюдения условий, заданных в команде выбора.

В школьном алгоритмич. языке В. позволяет исполнителю согласно любому числу n условий У1, У2, . . ., Уn выбрать для исполнения одну из $n+1$ серий команд СЕРИЯ 1, СЕРИЯ 2, . . ., СЕРИЯ n, СЕРИЯ ω. Команда В. записывается в столбик:

```
выбор
| при У1:СЕРИЯ 1
| при У2:СЕРИЯ 2
| . . . . . .
| при Уn:СЕРИЯ n
| иначе СЕРИЯ ω
все
```

с соблюдением указанного отступа для большей наглядности. Этой же цели может служить вертикальная линия, соединяющая служебные слова **выбор** и **все**, к-рые играют роль скобок, ограничивающих команду В.

Выполнение В. состоит в последовательной проверке соблюдения условий в порядке их записи, начиная с У1. Как только будет найдено первое условие Уi, к-рое соблюдено, выполняется соответствующая СЕРИЯ. Если ни одно из условий У1, У2, . . ., Уn не соблюдается, выполняется СЕРИЯ ω. Возможна сокращённая форма В., имеющая вид:

```
выбор
| при У1:СЕРИЯ 1
| при У2:СЕРИЯ 2
| . . . . . .
| при Уn:СЕРИЯ n
все
```

Сокращённая форма допустима, когда заранее известно, что хотя бы одно из условий обязательно соблюдается либо при несоблюдении ни одного из условий У1, У2, . . ., Уn ничего не надо делать.

Эффект действия команды В. существенно зависит от порядка, в к-ром записываются условия и серии в команде. Исключение составляет важный частный случай, когда условия У1, У2, . . ., Уn попарно несовместны, т. е. никакая пара условий не соблюдается одновременно. В этом случае строки Уi: СЕРИЯ i могут записываться в команде в любом порядке.

ВЫБОРКА в информатике — см. *Кортеж*.

ВЫВОД — *команда* исполнителю передать текущее значение указанного выражения во внешнюю среду. При записи алгоритмов на школьном алгоритмич. языке внешняя среда является частью обстановки и определяется для каждого алгоритма наиболее подходящим способом. При записи программ для ЭВМ на нек-ром языке программирования внешняя среда фиксируется правилами языка и устройством ЭВМ. В этом случае В. производится на выходные *внешние устройства*: внешнюю память, перфоленты или перфокарты, принтер, дисплей, линию связи. Часто информация выводится для того, чтобы быть увиденной поручителем или пользователем. В этом случае важную роль в выполнении В. играет визуализация и форматирование информации, т. е. уточнение её внешнего вида: расположение на листе бумаги или экране дисплея, размер, выбор шрифта и т. п. Для этой цели команды В. в языках программирования обычно содержат дополнительные форматные параметры, задающие тот или иной формат выводимой информации.

ВЫВОДА УСТРОЙСТВО — см. *Внешнее устройство* ЭВМ.

ВЫДАЧА в вычислительной технике — см. *Листинг*.

ВЫДЕЛЯЕМЫЙ КАНАЛ СВЯЗИ — см. *Канал связи*.

ВЫЗОВ — *команда* исполнителю исполнить указанный вспомогательный алгоритм (процедуру, подпрограмму). Обычно запись алгоритма содержит так наз. формальные параметры — нек-рые имена, обозначающие объекты, к-рые задаются алгоритму поручителем, диктуются обстановкой, в к-рой исполняется алгоритм. Такие объекты наз. фактическими параметрами алгоритма. Фактич. параметры и их соответствие формальным задаются в команде В.

В школьном алгоритмич. языке формальными параметрами алгоритма являются его аргументы и результаты. При В. вспомогательного алгоритма каждому аргументу сопоставляется в качестве фактич. параметра нек-рое выражение, текущее значение к-рого задаётся аргументу в качестве его начального значения. Каждому результату R алгоритма сопоставляется нек-рая переменная основного алгоритма, получившая в качестве результирующего то значение переменной R, к-рое она имеет к моменту завершения исполнения вспомогательного алгоритма. Такой способ установления связи между фактическими и формальными параметрами наз. В. по значению. При В. по значению вспомогательный алгоритм исполняется в том виде, в к-ром он записан, а его формальные параметры (аргументы и результаты) являются реальными переменными алгоритма.

Во многих языках программирования допускается другой способ установления связи между фактическими и формальными параметрами, наз. В. по имени. При В. по имени **запись** вспомогательного алгоритма подвергается систематич. изменению, к-рое состоит в том, что каждое вхождение формального параметра во вспомогательный алгоритм текстуально замещается на запись соответствующего фактич. параметра аналогично операции подстановки в математич. формулах. В результате имена формальных параметров в записи вспомогательного алгоритма исчезают. Модифицированный таким образом вспомогательный алгоритм работает непосредственно с величинами основного алгоритма, достигая нужного результата. Каждый способ В. имеет свои достоинства и недостатки. В. по значению позволяет исполнять вспомогательный алгоритм более автономно, но требует дополнительного расхода памяти ЭВМ. В. по имени не требует передачи значений и отвода памяти для аргументов и результатов, но труднее реализуем и требует согласования обозначений, используемых в основном и вспомогательных алгоритмах.

ВЫРАЖЕ́НИЕ в информатике — закономерно построенный текст, образованный знаками операций, именами функций и величин, скобками, записями констант, задающий правило вычисления своего значения как функции текущих значений входящих в него величин. В. в информатике записываются примерно по тем же правилам, что и арифметич. и алгебраич. В. в математике, однако имеют ряд стилистич. отличий, восходящих к *языкам программирования* и вызванных требованиями линеаризации записи выражений и экономного расходования символов и букв. Эти стилистич. отличия в основном состоят в следующем:

используются буквы латинского и русского алфавитов;

индексы записываются в строчку или берутся в квадратные скобки;

десятичная запятая заменяется точкой, вместо 10^n пишется En: 6.02E 23 вместо $6{,}02\cdot10^{23}$;

в качестве знака умножения используется звёздочка *, к-рая никогда не опускается;

в качестве знака степени используется стрелка ↑ или две звёздочки **;

в качестве знака деления используется косая черта /; числитель и знаменатель, если надо, берутся в скобки и пишутся в одну строку;

все функции используют только стандартное функциональное обозначение типа $f(x)$,. при этом аргумент всегда берётся в скобки.

При соблюдении этих правил известные формулы решения квадратного уравнения

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

получат следующий вид:

```
delta=b**2-4*a*c
x=(-b+sqrt(delta))/(2*a)
```

Дополнительной особенностью В. в информатике является запись вариантных выражений типа

$$y=\begin{cases} -x, & \text{если } x<0,\\ x & \text{в противном случае}\end{cases}$$

в виде так наз. условных выражений, по форме напоминающих команду ветвления в алгоритмич. языке.

В языке алгол-60 эта запись выглядит так:

y:= **if** $x<0$ **then** $-x$ **else** x,

в языке алгол-68:

y:=($x<0$ | $-x$ | x),

а с использованием служебных слов школьного алгоритмич. языка:

y:=**если** $x<0$ **то** $-x$ **иначе** x **все**

Использование условных В. позволяет компактно записывать рекурсивные определения функций, напр. для факториала $n!$:

fact (n)=**если** $n=0$ **то** 1 **иначе** fact ($n-1$)$*n$ **все**

или для степени x^n:

степень (x, n)=
если $n=0$ **то** 1 **иначе**
если n чётное **то** степень (x, $n/2$)$*$степень (x, $n/2$)
иначе степень (x, $n-1$)$*x$ **все все**

ВЫРЕЗКА в информатике — см. *Кортеж*.

ВЫСОКОГО УРОВНЯ язык программирования — см. *Язык программирования*.

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ МАШИ́НА — автоматическая машина, предназначенная для *обработки информации*, в том числе для вычислений, управления и решения задач. Первыми машинами, способными преобразовывать заранее закодированную информацию в воспроизводимую и упорядоченную последовательность действий, были музыкальные шкатулки, шарманки, механич. пианино и разного рода антропоидные автоматы. Важным предшественником В. м. явились жаккардовые ткацкие станки (нач. 19 в.), в к-рых рисунок ткани воспроизводился автоматически под управлением программы, закодированной комбинациями дырочек на картонной пластинке (см. *Перфокарта*).

Первый проект универсальной В. м. с программным управлением разработан английским изобретателем и математиком Ч. Беббиджем (1792—1871). Этот проект «аналитич. машины», объединивший принципы устройства часов, ранних счётных устройств Б. Паскаля и Г. Лейбница и жаккардовых станков, не был полностью реализован, но заложил ряд идей, нашедших позднее своё воплощение в ЭВМ.

Название изобретения Ч. Беббиджа сохранилось в семействе счётно-аналитических электромеханич. машин, работающих с перфокартами и получивших значительное распространение в 1-й пол. 20 в. для бухгалтерских расчётов и обработки данных переписей населения.

Развитие электротехники и радиоэлектроники привело к появлению в 30-е гг. 20 в. специализированных В. м., основанных на представлении информации в виде непрерывно изменяющихся величин (см. *Аналоговая вычислительная машина*, *Аналого-цифровая вычислительная машина*) или в цифровой форме (см. *Цифровая вычислительная машина*).

Развитие электрич. переключающих устройств в автоматич. телефонной связи и электронной контрольно-измерительной аппаратуры для наблюдения за быстропротекающими процессами в сочетании с успехами радиолокационной техники привело в 40-е гг. 20 в. к созданию первых *электронных вычислительных машин*, основанных на представлении информации в цифровой двоичной форме. С сер. 80-х гг. ЭВМ составляют основу вычислительной техники и всей растущей индустрии информатики.

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ НАУ́КА — см. *Информатика*.

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ СЕТЬ — то же, что *сеть* ЭВМ.

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ СИСТЕ́МА — ЭВМ, содержащая в своём составе несколько *процессоров* или расширенный состав *устройств*.

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ ТЕ́ХНИКА — ассортимент *вычислительных машин*, их внешних устройств, связанных с ними приборов, материалов и вспомогательного оборудования; отрасль машиностроения, производящая указанный ассортимент; техническая дисциплина, изучающая устройство, методы конструирования и способы производства указанного ассортимента.

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНОЕ УСТРО́ЙСТВО — ЭВМ или некоторые из её устройств, вмонтированные в другую машину и обеспечивающие её работу.

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНЫЕ СРЕ́ДСТВА — совокупность ЭВМ и других устройств вычислительной техники, используемых для постоянного решения определённой задачи.

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНЫЙ КО́МПЛЕКС — совокупность вычислительных машин и устройств, объединяемых в одну установку постоянного применения.

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР, ВЦ,— организация, имеющая в качестве основного оборудования средства вычислительной техники и предоставляющая эти средства в распоряжение пользователей. Значительная часть ВЦ работает в режиме хозрасчётных ВЦ коллективного пользования (ВЦКП), предоставляя за плату информационно-вычислительные ресурсы, базовое программное обеспечение, доступ к базам данных, принадлежащим ВЦ или размещаемым самими пользователями, а также ряд других услуг (консультации по программному обеспечению, хранение внешних носителей информации, ввод данных в ЭВМ, контрактные работы по программированию). Пользователи работают в ВЦКП, либо имея в нём постоянные рабочие места, либо в режиме посещения, либо в режиме телеобработки. В последнем случае центральная машина ВЦ соединяется линиями связи с удалёнными *терминалами* пользователей, а её *операционная система* работает в режиме разделения времени.

Структура ВЦ сложилась в пору первых двух поколений ЭВМ, когда вычислительная техника была дорога, а её эксплуатация требовала постоянного обслуживающего персонала. Появление *мини-ЭВМ* позволило приобретать вычислительную технику как лабораторное оборудование, не требующее капитального строительства и создания крупных структурных подразделений.

Появление *персональных ЭВМ*, *сетей* ЭВМ и систем *передачи данных* ограничивает сферу строительства ВЦ эксплуатацией крупных вычислительных комплексов, супер-ЭВМ, а также уникальных баз данных, для к-рых режим коллективного пользования отвечает сути дела.

ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕ́НТ — новый вид исследовательской работы, выполняемый с помощью ЭВМ. В отличие от натурного эксперимента в В. э. вместо физич. *модели* используется теоретич. модель, реализованная в виде машинной программы, а манипуляции с физич. моделью на лабораторном стенде заменяются систематич. расчётами на ЭВМ, в к-рых искомые характеристики модели вычисляются по заданным её параметрам.

Любой теоретич. расчёт, предсказывающий свойства или поведение исследуемого объекта, есть шаг к В. э. Классич. пример — работа французского астронома У. Леверье (1811—1877), рассчитавшего (1846) координаты гипотетич. планеты с последующим её обнаружением (планета Нептун) в указанной части небесной сферы. Не менее известным открытием наших дней, сделанным с помощью В. э., является предсказание «ядерной зимы» к-рая наступит в результате войны с применением атомного оружия.

До появления ЭВМ В. э. играл обычно подчинённую, частичную роль в исследованиях, лишь дополняющую натурный эксперимент. Высокая производительность ЭВМ, разработка подробных и полных теоретич. моделей позволяет в ряде случаев получать с помощью В. э. более достоверное и точное знание, нежели с помощью натурного эксперимента.

Для изучения многих явлений природы В. э. является единственным средством получения научного знания в связи с принципиальной невозможностью натурного эксперимента либо из-за масштаба явления (напр., изучение эволюции галактик), либо из-за невозможности воспроизвести необходимый диапазон физич. характеристик (напр., взаимодейст-

вие элементарных частиц сверхвысоких энергий).

В ряде случаев технич. проектирования В. э. оказывается экономически более целесообразным из-за удешевления и ускорения скорости разработки и возможности рассмотреть больше вариантов, нежели в случае натурного эксперимента.

В. э. является не только эффективным методом технич. конструирования или способом получения конкретных сведений об исследуемом объекте, но и средством чисто теоретич. исследования, получения общего знания и математич. результатов. Многие свойства геометрич. тел могут быть определены с помощью так наз. доказательных вычислений; знаменитая теорема о 4 красках (достаточных для раскраски географич. карты так, чтобы соседние страны были бы окрашены по-разному) не могла бы быть доказана без компьютерной проверки нескольких десятков тысяч лемм, справедливость к-рых надо было установить по ходу доказательства.

Г

ГАП — *гибкое автоматизированное производство.*

ГБАЙТ — то же, что *гигабайт.*

ГЕНЕРА́ТОР (лат. generator — производитель) — см. *Транслятор.*

ГИ́БКИЙ ДИСК, флоппи-диск, — см. *Магнитный диск.*

ГИБКОЕ АВТОМАТИЗИ́РОВАННОЕ ПРОИЗВО́ДСТВО, ГАП,— комплекс автоматизированного оборудования (технологического, транспортного, складского и др.) с единой *автоматизированной системой управления*, обеспечивающей быстрый переход с выпуска одного изделия на выпуск другого путём замены программы в системе управления и автоматич. смены инструментов и оснастки без изменения состава и расположения всего оборудования; способ организации промышленного производства мелкосерийных и единичных изделий на базе такого комплекса. ГАП позволяет резко повысить производительность труда, существенно снизить себестоимость продукции, выпускаемой в мелкосерийном производстве, экономить людские ресурсы при сохранении и даже увеличении программы выпуска изделий, повысить культуру производства.

ГИБРИ́ДНАЯ ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ МАШИ́НА (от лат. hibrida — помесь), ГВМ,— то же, что *аналого-цифровая вычислительная машина.*

ГИГАБА́ЙТ (от греч. γίγας — исполин и англ. byte) — производная единица измерения количества информации и ёмкости памяти, равная 1024 Мбайт($\sim 10^9$ *байт*).

ГЛОБА́ЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА́ — см. *Величина.*

ГЛОБА́ЛЬНЫЙ ОБЪЕ́КТ (франц. global — всеобщий, от лат. globus — шар) в информатике — объект, внешний по отношению к алгоритму (программе, процедуре), существующий и до и после исполнения алгоритма (программы, процедуры).

ГРАФИ́ЧЕСКИЙ ДИСПЛЕ́Й (от греч. γράφω — пишу) — см. *Дисплей.*

ГРАФИ́ЧЕСКИЙ ОБЪЕ́КТ — объект, допускающий возможность построения его изображения. См. *Машинная графика.*

ГРАФИ́ЧЕСКИЙ РЕДА́КТОР — редактор работы с графическими объектами.

ГРАФОПОСТРОИ́ТЕЛЬ — *внешнее устройство* ЭВМ для вычерчивания контурных изображений. В основе планшетного Г. лежит горизонтальная прямоугольная платформа. По её сторонам укреплены две параллельные стальные *Y*-штанги, по к-рым может перемещаться перпендикулярная им *X*-штанга. По *X*-штанге может перемещаться каретка, на к-рой вертикально укреплено рисующее перо. Перо может быть поднято над бумагой или опущено на неё. Движение штанги и каретки управляется двумя шаговыми двигателями, к-рые в соответствии с командами ЭВМ могут перемещать *X*-штангу или каретку на любую длину вплоть до шага, составляющего десятые доли мм. Скорость движения может быть до десятков см/с. Подъём и опускание пера тоже производятся по команде ЭВМ. Комбинируя перемещение *X*-штанги и каретки, можно в пределах точности наименьшего шага начертить любую фигуру, в том числе и криволинейную. В барабанном Г. *X*-штанга неподвижна и укреплена над образующей пустотелого цилиндра (барабана), на боковую поверхность к-рого накладывается лист бумаги. Барабан, вращаясь в ту или другую сторону, обеспечивает нужное относительное движение бумаги и пера в направлении оси *Y*.

Д

ДА́ННЫЕ в информатике — факты или идеи, выраженные средствами формальной системы, обеспечивающей возможность их хранения, обработки или передачи. Такую формальную систему называют языком представления Д.; синтаксис этого языка — способом представления информации; его семантику или прагматику — информацией.

Способ представления Д. может быть ориентирован на человека (напр., *распечатка*) или оборудование (электрич. сигналы, запись на магнитном накопителе). По отношению к некому устройству внутренним представлением наз. та форма Д., к-рой оно фактически оперирует; внешним представлением — форма Д., используемая для взаимодействия с человеком (иногда также с иными устройствами).

Этимологически термин «Д.» восходит к принятому в математике при постановке задач противопоставлению «данные величины — искомые величины»; однако в информатике этот оттенок утрачен, так что обычны этимологически несообразные обороты и даже термины вроде «выходные Д.» (в значении «результаты»).

Указанное соотношение терминов «Д.» и «информация» рекомендовано большинством терминологич. справочников, но на практике они обычно трактуются как синонимы; да и сама *информатика* занимается не столько информацией, сколько именно Д.

В духе вышеприведённого определения Д. обычно рассматривают как страдательную (пассивную) составляющую вычислительного процесса в противоположность действенному (активному) алгоритму. Однако это противопоставление не абсолютно: то, что в одном рассмотрении выступает как Д., в другом может стать алгоритмом.

Термин «Д.» употребляют преимущественно в программировании; в теории связи и при описании работы оборудования предпочитают термин «сигнал».

ДА́ННЫХ КЛА́ВИШИ — см. *Клавиатура.*

ДА́ННЫХ МЕ́ТКА — см. *Метка.*

ДА́ННЫХ СТРУКТУ́РА — совокупность элементов информации, находящихся в определённой, заранее заданной взаимосвязи; способ описания такой взаимосвязи. Наиболее известным примером организованной Д. с. является печатный документ: книга, паспорт, классный журнал, школьный дневник, математич. таблицы.

Основу Д. с. составляют выделение разделов, на к-рые распадаются *данные*, указание их порядка и соподчинённости, задание способа упоминания и обозначения разделов, указание типа информации, содержащейся в том или ином разделе. Основным способом упоминания раздела Д. с. является его именование: титул книги, заголовок газеты, название графы в документе и т. п. Однородные разделы Д. с. могут нумероваться (компоненты *вектора*, элементы *кортежа*, страницы книги) или просто располагаться в последовательности, как слова в тексте или элементы в списке. Соподчинённость Д. с. устанавливается тем, что один раздел может составлять часть другого: том собрания сочинений, глава в книге, страница газеты, абзац в главе, фраза в абзаце и т. д.

Основные операции над Д. с.— это составление её описания, заполнение разделов нужной информацией, поиск информации и её изменение. Имена разделов Д. с. являются тем

ключом, по к-рому происходит ассоциативный поиск соответствующего раздела информации. Описание Д. с.— это схема расположения и именования её разделов. Примерами описания Д. с. являются оглавления, каталоги и алфавитные указатели.

Д. с. входит в алгоритмы и программы в виде составных, или структурных, *величин*. Важным разделом программирования и вычислительной техники является нахождение способов размещения Д. с. в оперативной и внешней памяти ЭВМ и реализации основных операций со структурными объектами.

ДВОЙЧНАЯ ЕДИНИЦА в теории информации — то же, что *бит*.

ДВОЙЧНАЯ ЦИФРА в вычислительной технике — то же, что *бит*.

ДВОЙЧНЫЙ, бинарный, — связанный с выбором или наличием двух состояний, альтернатив, значений.

ДВОЙЧНЫЙ КОД — *код*, в котором для представления информации используются *цепочки* битов, напр. кодировка литер, представление чисел в двоичной системе счисления. При распечатке или задании двоично-кодированной информации для сокращения записи часто используют коды, основания к-рых являются степенью числа 2 (преимущественно 8 или 16). Удобство таких кодов состоит в простоте их преобразования в Д. к. и обратно.

Для представления целых чисел в ЭВМ используются прямой, обратный и дополнительный Д. к. Во всех трёх случаях предполагается, что длина битовой цепочки ограничена (и потому представимо лишь конечное множество чисел), а также что для представления знака числа выделен отдельный бит — знаковый разряд.

В прямом Д. к. знак кодируется нулём для положительных чисел и единицей для отрицательных, а абсолютная величина изображается в двоичной позиционной системе, напр. 5_{10}=«0 000101», -5=«1 000101».

Обратный Д. к. (или дополнение до единицы) для положительных чисел совпадает с прямым Д. к., а для отрицательных получается из соответствующего прямого Д. к. поразрядным обращением каждого бита, кроме знакового разряда, напр. 5_{10}=«0 000101», -5= =«1 111010». Обратный код позволяет унифицировать сложение и вычитание с оговоркой, что если при суммировании чисел в обратном коде длина результата превышает стандартную длину цепочки, то происходит циклич. перенос старшего разряда в младший, напр. $(+5_{10})+(-3_{10})=$ =«0000101»+«1111100»⇒1«0000001»⇒ ⇒«0000010»=2_{10}. Кроме того, нуль имеет два представления («1111111»= =—0). Для умножения и деления обратный код менее удобен, чем прямой. В основном обратный код нужен для получения дополнительного.

Дополнительный Д. к. (или дополнение до двух) для положительных чисел совпадает с прямым, а для отрицательных получается из обратного сложением с 1, напр. $+5_{10}$=«0 000101», -5_{10}=«1 111011». Преимущество дополнительного кода перед обратным состоит в упрощении суммирования, т. к. при таком кодировании не возникает необходимость в циклич. переносе из старшего разряда в младший; зато преобразование прямого кода в дополнительный и обратно уже не является простой поразрядной операцией.

О двоично-десятичном кодировании чисел см. в ст. *Байт*.

ДЕКЛАРАТИ́ВНЫЙ ЯЗЫ́К (от лат. declaratio — объявление, провозглашение) — то же, что непроцедурный *язык программирования*.

ДЕКОДИ́РОВАНИЕ (от лат. de- — приставка, означающая уничтожение, отмену, и *код*) — см. *Кодирование*.

ДЖО́СТИК (от англ. joystick) — внешнее устройство ЭВМ в виде рычага на шаровом шарнире, позволяющее рукой непосредственно перемещать курсор по экрану дисплея. Аналогично тому, как положение любой точки на глобусе может быть задано долготой и широтой, так и любое положение Д. определяется двумя углами отклонения рычага от вертикальной оси, измеряемыми в двух перпендикулярных плоскостях, пересекающихся по этой оси. Значения этих углов поворота в любой момент фиксируются измерительным устройством и подаются в ЭВМ в виде двух двоичных кодов. Стандартное использование Д.— это управление движением курсора на экране дисплея, когда его смещение по горизонтали и по вертикали пропорционально соответствующим углам поворота Д. Кроме этого, Д. широко применяется в качестве ручки управления в компьютерных играх и тренажёрах.

ДИАЛО́ГОВАЯ ПРОГРА́ММА (от греч. διάλογος — разговор) — программа, при исполнении которой происходит обмен информацией между исполнителем и поручителем, между ЭВМ и её пользователем. При автоматич. исполнении Д. п. инициатива в диалоге принадлежит обычно программе. При исполнении команды вывода Д. п. передаёт сообщение поручителю, после чего либо приостанавливается, либо продолжает свою работу. При исполнении команды ввода Д. п. нек-рым образом сообщает поручителю, что готова ввести информацию, после чего приостанавливается в ожидании реакции со стороны поручителя. В ряде случаев поручитель может в любой момент вмешаться в работу Д. п., послав ей сигнал прерывания, напр. нажав на специально выделенную для этой цели клавишу.

ДИАЛО́ГОВЫЙ РЕЖИ́М — режим работы ЭВМ, при котором происходит обмен сообщениями между пользователем и исполняемой программой.

ДИЗЪЮ́НКЦИЯ (лат. disjunctio — разобщение) — логическая связка, означающая «или».

ДИНАМИ́ЧЕСКИЙ РЕГИ́СТР (от греч. δύναμις — сила) — см. *Регистр*.

ДИНАМИ́ЧЕСКИЙ ТИП величины — см. *Величина*.

ДИСК (греч. δίσκος) в вычислительной технике — см. *Магнитный диск*, *Оптический диск*.

ДИСКЕ́ТА — см. *Магнитный диск*.

ДИСКОВО́Д — см. *Магнитный диск*.

ДИСПЕ́ТЧЕР (от англ. dispatch — быстро выполнять) в вычислительной технике — часть *операционной системы* ЭВМ, организующая совместное исполнение программ на ЭВМ и связь процессора с внешними устройствами. Д. побуждается к работе либо вызовом из исполняемой программы, либо сигналом прерывания от тех или иных устройств ЭВМ. При выполнении вызова Д. принимает на себя роль поручителя, к-рый находит нужную подпрограмму операционной системы и организует её исполнение. Для обработки прерываний в Д. имеется таблица, в к-рой зафиксированы все возможные источники прерываний, их относительный приоритет (менее приоритетное прерывание не может прервать обработку более приоритетного), а также адреса подпрограмм операционной системы, обслуживающих то или иное прерывание. При поступлении сигнала прерывания Д. приостанавливает исполнение основной программы, запоминает состояние процессора в момент прерывания и вызывает нужную подпрограмму обслуживания прерываний. После её завершения Д., используя запомненное состояние процессора, возобновляет исполнение прерванной программы.

Наличие Д. и системы прерываний позволяет организовать независимое функционирование отдельных устройств ЭВМ так, чтобы они не задерживали друг друга, а также повышать общую производительность ЭВМ на основе мультипрограммного режима работы.

ДИСПЛЕ́Й (от англ. display — показывать, воспроизводить) в вычислительной технике — *внешнее устройство* ЭВМ, служащее для воспроизведения на телевизионном экране находящейся в памяти ЭВМ информации (визуальной) в виде текстов и изображений. По своим возможностям Д. делятся на алфавитно-цифровые, векторные и растровые. Алфавитно-цифровые Д. предназначены для воспроизведения

только текстовой информации или для имитации графич. объектов посредством используемого в Д. фиксированного набора литер. На экране алфавитно-цифровых Д. обычно размещается 20 строк текста по 80 литер в строке. Векторные Д. носят обычно специализированный характер и используются для воспроизведения графич. информации, к-рая может быть составлена из отрезков прямых (векторов). Наиболее универсальными являются растровые Д., в к-рых изображение строится в виде мозаики близко расположенных друг к другу световых точек — элементов изображения. Каждый элемент изображения характеризуется яркостью и цветностью: от одноцветного с двумя градациями яркости до многоцветного с несколькими градациями яркости. Информация о каждом элементе изображения кодируется двоичным кодом, к-рый хранится в так наз. опорной памяти Д. От размера доступной опорной памяти зависит разрешающая способность Д., к-рая указывается обычно в виде произведения числа элементов изображения по горизонтали на соответствующее число по вертикали. Различают Д. малого, среднего и высокого разрешения, для к-рых средними показателями в настоящее время считаются соответственно 200×250, 400×600 и 800×1000 элементов изображения. В качестве Д. малого разрешения для нек-рых типов персональных ЭВМ могут использоваться бытовые телевизоры, однако в большинстве ЭВМ и терминальных устройств применяются специальные телевизионные мониторы.

В подавляющем большинстве Д. используются вакуумные электронно-лучевые трубки со строчной развёрткой изображения на экране. В ряде конструкций портативных ЭВМ применяются плоские Д., в к-рых элементом изображения является жидкий кристалл. Его оптические отражающие свойства управляются через подводимое напряжение тока соответствующим двоичным кодом из опорной памяти.

Д. входит обычно в комплект персональной ЭВМ, иногда составляя с ней единое целое, или присоединяется к ЭВМ через линию связи в виде автономного устройства, содержащего также в своём составе клавиатуру (см. *Экранный пульт*).

Д. является главным средством оперативного взаимодействия человека с ЭВМ. При этом пользователь не только наблюдает за работой ЭВМ, но и контролирует свои собственные действия. Необходимая обратная связь при этом обеспечивается прежде всего курсором — особым подвижным знаком, воспроизводимым ЭВМ на экране Д. и отмечающим рабочую точку экрана. Положение курсора на экране может задаваться как исполняемой на ЭВМ программой, так и самим человеком с помощью клавиш управления курсором, имеющихся на клавиатуре Д. или ЭВМ, а также специальными манипуляторами (см. *Джостик*, «*Колобок*»).

ДОКАЗА́ТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕ́НИЯ — см. *Вычислительный эксперимент*.

ДОПОЛНИ́ТЕЛЬНЫЙ ДВОИ́ЧНЫЙ КОД — см. *Двоичный код*.

ДО́СТУП — см. *Величина*.

Е

ЕДИ́НАЯ СИСТЕ́МА ЭЛЕКТРО́ННЫХ ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНЫХ МАШИ́Н, ЕС ЭВМ,— семейство согласованных по своей *архитектуре* ЭВМ, производимых в СССР и др. странах — членов СЭВ с кон. 60-х гг. 20 в. В основе ЕС ЭВМ лежит архитектура, известная под назв. IBM/360 (а также её последующая модификация IBM/370), разработанная в США в корпорации IBM и со временем ставшая одним из технич. стандартов на универсальные ЭВМ 3-го поколения.

Модели ЕС ЭВМ — вычислительные машины общего назначения, предназначенные главным образом для установки и эксплуатации в вычислительных центрах. Главная особенность архитектуры ЕС ЭВМ — возможность развивать спектр услуг и наращивать информационно-вычислительные мощности в сочетании с полной преемственностью в использовании накапливающегося программного обеспечения.

Весь диапазон производительности ЕС ЭВМ составляет от десятков тысяч до миллионов операций в секунду и разбит на пять перекрывающихся диапазонов, для каждого из к-рых конструируется текущая базовая модель центрального *процессора*. Соответствующими шифрами начальных моделей из этого ряда были ЕС 1020, ЕС 1030, ЕС 1040, ЕС 1050 и ЕС 1060. По мере технич. прогресса в каждом из диапазонов появляется очередная модель, обладающая более высокими характеристиками и отличающаяся в своём шифре значением последнего разряда. Напр., современная старшая модель ЕС 1067 имеет производительность 10 МИПС, что на порядок выше, чем у первой модели ЕС 1060.

В ЕС ЭВМ имеется развитая система команд, к-рые выполняются одинаково на всех моделях. Любая программа, созданная для нек-рой модели, может быть исполнена на любой старшей или более поздней модели.

В последние годы для старших моделей ЕС ЭВМ разработан ряд специализированных процессоров, допускающих параллельную обработку информации и ускоряющих тем самым выполнение сложных научных и инженерных расчётов. Среди младших моделей системы появилась персональная ЕС ЭВМ 1840, на к-рой можно работать как автономно, так и в режиме дистанционной связи с др. моделями ЕС.

Базовое программное обеспечение ЕС ЭВМ наз. её *операционной системой* (ОС ЕС). Это понятие является расширенным и включает в себя кроме собственно операционной системы несколько систем управления базами данных, трансляторы с таких языков программирования, как фортран, ПЛ/I, кобол, алгол-60, алгол-68 и паскаль, транслятор с машинного языка ассемблер, а также развитую библиотеку различных служебных подпрограмм.

Основу применения ЕС ЭВМ составляет *пакетный режим* исполнения программ. В то же время ОС ЕС допускает включение заданий в пакет с удалённых терминалов (теледоступ) и диалоговое взаимодействие пользователя с исполняемой программой (телеобработку). Последние версии ОС ЕС обеспечивают также режим коллективного пользования, включая предоставление пользователю той или иной виртуальной машины (см. *Виртуальный объект*), т. е. создание для исполнения программы пользователя обстановки, имитирующей любую заказанную им конфигурацию оборудования и базового программного обеспечения ЕС ЭВМ.

ЁМКОСТЬ памяти, объём памяти,— см. *Память*.

Е-ПРАКТИКУМ — программное средство, поддерживающее школьный курс основ информатики и вычислительной техники. Его основное назначение — дать возможность учащемуся строить непосредственно на экране *дисплея* ЭВМ *алгоритмы*, составленные на школьном алгоритмич. языке, и наблюдать за их исполнением.

В процессе построения алгоритма управляющая программа Е-п. следит за соблюдением правил записи команд алгоритмич. языка, подсказывает написание служебных символов и их правильное расположение в тексте. В процессе исполнения алгоритма можно задавать режим исполнения (от покомандного до автоматического), следить за значениями переменных, выбором ветвей в командах выбора и ветвления, числом повторений циклов.

Ж, З

ЖЁСТКИЙ ДИСК — см. *Магнитный диск*.

ЗАГОЛО́ВОК алгоритма — начальная часть записи алгоритма, обычно содержащая имя алгоритма, перечень его аргументов, результатов и глобальных величин с указанием типов принимаемых ими значений.

Оформление З. необходимо для обеспечения требуемой дисциплины разработки алгоритма, а также для того, чтобы составитель основного алгоритма мог использовать данный алгоритм в качестве вспомогательного и правильно записать его вызов (без изучения самого алгоритма). Понятие «З.» аналогичным образом определяется и для программы (см. *Процедура*).

ЗАГРУ́ЗЧИК в вычислительной технике — часть *операционной системы* ЭВМ, вводящая подлежащую исполнению программу из внешней памяти в оперативную. З.— это обычно последняя инстанция в длинной цепочке трансляции машинной программы с входных языков программирования. Программы, подлежащие загрузке, уже записаны в двоичном коде, но сохраняют так наз. перемещаемую форму, т. е. не привязаны к конкретному месту памяти ЭВМ. З. вводит программу в предписанное место памяти и осуществляет настройку адресов в командах программы, отвечающую выбранному месту. Кроме этого, З. может осуществлять сборку исполняемой программы из нескольких, отдельно приготовленных частей, производя необходимое согласование адресов, относящихся к разным частям (редактирование внешних связей).

ЗА́ПИСЬ в информатике — 1) поименованная порция информации, хранящаяся в *файловой системе* или *базе данных*. 2) Совокупность поименованных значений, образующих вместе значение структурной *величины*.

ЗАПОМИНА́ЮЩЕЕ УСТРО́ЙСТВО ЭВМ, ЗУ,— устройство, предназначенное для записи, хранения и воспроизведения информации; *память* ЭВМ. Запись информации осуществляется путём преобразования её в электрич., оптич. или акустич. сигналы либо механич. перемещения для воздействия на нек-рую физич. среду (*носитель*, накопитель) с целью соответствующего изменения её состояния, формы или целостности.

В зависимости от принципа записи-считывания информации различают ЗУ с неразрушающим считыванием (в к-рых после однократной записи допускается многократное считывание информации без её регенерации, напр., ЗУ на *перфокартах*, *магнитных лентах* или *магнитных дисках*) и с разрушающим считыванием (в к-рых воспроизведение информации сопровождается изменением состояния накопителя таким образом, что после каждого считывания необходимо восстанавливать ранее записанную информацию, напр. ЗУ на ферритовых сердечниках, *транзисторах*).

Основными технич. показателями ЗУ, определяющими их эффективность, являются: ёмкость — максимальное число слов или знаков, к-рые можно одновременно хранить (выражается обычно в байтах или Кбайтах), и быстродействие, характеризуемое временем полного цикла обращения к ЗУ, иногда временем выборки, а для ЗУ на магнитных лентах и дисках — скоростью ввода (вывода) информации.

В зависимости от выполняемых функций ЗУ подразделяются на оперативные (ОЗУ), сверхоперативные (СОЗУ) и внешние (ВЗУ), постоянные (ПЗУ) и полупостоянные (ППЗУ). ОЗУ и СОЗУ, обычно выполненные на ферритовых сердечниках или больших интегральных схемах (БИС), предназначены для записи и хранения информации, используемой непосредственно при выполнении арифметич. и логич. операций в процессе реализации программы. ВЗУ, преимущественно большой ёмкости на магнитных лентах или дисках, служат для расширения возможностей ОЗУ и хранения больших массивов информации, непосредственно не используемых в вычислительном процессе. ПЗУ, как правило на ферритовых сердечниках или БИС, предназначены в основном для хранения программ, постоянных коэффициентов, справочных таблиц, таблиц различных функций и т. п. В *роботах*, *станках с ЧПУ*, *микро-ЭВМ* и *микропроцессорах* используются главным образом ЗУ одного типа, у к-рых накопитель может быть условно разделён на зоны, выполняющие функции ОЗУ, ПЗУ и др.

ЗАПЯТА́Я в информатике — см. *Плавающая запятая*, *Фиксированная запятая*.

ЗАТУХА́НИЕ сигнала — см. *Канал связи*.

ЗАЩИ́ТА ДА́ННЫХ — совокупность организационных мер и технических приёмов, обеспечивающих сохранность информации в памяти ЭВМ или на машиночитаемых носителях. При этом имеется в виду предотвращение не только физич. уничтожения информации, но и так наз. несанкционированного доступа к информации, т. е. использования информации лицом, на то не уполномоченным.

Наиболее реальными причинами физич. потери информации являются сбои в работе ЭВМ, помехи или потери в линии связи, нарушения энергоснабжения ЭВМ, физич. порча носителей внешней памяти, пожары, затопления и другие стихийные бедствия, а также похищение носителей. Разнородность причин потери информации требует комплексных мер и приёмов по обеспечению её сохранности. З. д. является одним из главных требований к грамотному конструированию ЭВМ и её программного обеспечения. Этому же способствует строгое соблюдение правил технич. эксплуатации вычислительных средств. Обычные административные и организационные меры по технике безопасности, надлежащему хранению носителей информации и поддержанию дублирующих фондов также полностью сохраняют своё значение.

В основе предотвращения несанкционированного доступа к данным лежит строгое разделение системного и пользовательского режимов работы ЭВМ, поскольку механизм З. д. реализуется в ЭВМ именно в тех условиях, когда машина управляется внутренними программами операционной системы, обычно недоступными для пользователей. По этой границе режимов работы ЭВМ проходит линия борьбы с так наз. компьютерными хакерами (взломщиками)— лицами, к-рые направляют свои профессиональные знания и изобретательность на ненадлежащее использование ЭВМ, иногда приводящее к противоправным действиям (компьютерные преступления). Одной из распространённых форм нарушения З. д. является незаконное копирование информации, в частности находящейся на коммерчески распространяемых носителях информации, напр., программное обеспечение на дискетах.

Основными методами борьбы с несанкционированным доступом являются технич. решения, ограничивающие деятельность пользователя ЭВМ выделенными ему ресурсами памяти, системы паролей для правильной идентификации пользователей, разного рода «электронные замки», препятствующие копированию информации, системы кодирования и шифровки передаваемой информации, наконец, совокупность административных мер, правоохранительных и юридических актов.

ЗНАК в информатике — 1) то же, что «З. числа» в математике. 2) То же, что *литера*. 3) Основное понятие семиотики; материальный предмет, физич. явление или действие, в определённых условиях (в совокупности образующих знаковую ситуацию) служащие для представления информации на основе ассоциации, связи или по соглашению.

Для информатики характерно совместное рассмотрение З. (и знаковых систем), образующих большое число иерархич. уровней.

ЗНА́КОВЫЙ РАЗРЯ́Д — см. *Двоичный код*.

ЗНАЧЕ́НИЕ в информатике— см. *Имя*.

ЗНАЧЕ́НИЙ ТАБЛИ́ЦА в программировании — таблица, которую ведёт исполнитель алгоритма и в которой отмечается последовательность выполнения команд, а также записываются текущие значения величин алгоритма. Является своего рода протоколом исполнения алгоритма, используется как методич. средство освоения понятий алгоритмич. языка и как средство проверки правильности алгоритма. В произ-

водственном программировании покомандный контроль исполнения программы является важным средством её отладки.

ЗУ — *запоминающее устройство.*

И

ИГРА́ в информатике — см. *Компьютерная игра.*

ИДЕНТИФИКА́ТОР (от ср.-век. лат. identifico — отождествляю) — *символ*, используемый в программе для именования обрабатываемых ею данных, в частности переменных *величин*, *меток*, *процедур*.

В большинстве языков программирования И. может служить любая цепочка *букв* и *цифр*, начинающаяся с буквы, напр. А, *x*, читЛит, поз7, *r2y* (но не 32ЛК2Б). В нек-рых языках программирования длина И. ограничена (напр., в фортране учитываются первые 6 *литер*).

Как и всякий *знак*, И. может служить именем лишь в определённых «знаковых ситуациях», регламентируемых языком программирования. Нек-рое количество так наз. стандартных И. доступно изначально; напр., И. стандартных функций sin, entier в алголе. Кроме них, программист может вводить свои И.; область действия такого И. (или его «область видимости», т. е. часть текста программы, где действует желаемая «знаковая ситуация») обычно (но не всегда) ограничена рамками наименьшей процедуры или подобной программной единицы, содержащей определяющее *вхождение* этого И. (напр., в «описание переменной в алголе-60).

Удачный выбор И. значительно улучшает удобочитаемость программы. В интересах удобочитаемости нек-рые языки допускают разбивку И. пробелами (алгол, фортран) или особой литерной разбивки (напр., подчерком); используется также смена регистра букв, напр.:

размер экрана (алгол),
размер — экрана (рапира, ада),
размерЭкрана (паскаль).

ИМИТАЦИО́ННАЯ МОДЕ́ЛЬ (от лат. imitatio — подражание) — см. *Модель.*

ИМПЕРАТИ́ВНЫЙ ЯЗЫК (от лат. imperativus — повелительный) — то же, что *процедурный язык*; см. также *Язык программирования.*

ИМЯ в информатике — объект, служащий для обозначения другого объекта (своего значения).

ИНВЕ́РТОР, «НЕ»-схема,— логический элемент, реализующий операцию отрицания (инверсию). И. представляет собой электронное устройство с одним входом и одним выходом, сигнал на выходе к-рого возникает только при отсутствии сигнала на входе. Различают потенциальные и импульсные И. Потенциальный И. обеспечивает низкий уровень напряжения на его выходе при высоком уровне на входе и наоборот. Импульсный И. преобразует импульсные сигналы, либо изменяя полярность входных сигналов, либо формируя импульс на выходе при отсутствии сигнала на входе.

И́НДЕКС (лат. index — указатель) в информатике — *величина*, значение которой используется как номер члена некоторой последовательности, в частности элемента табличной величины.

ИНЖЕНЕ́РНЫЙ КАЛЬКУЛЯ́ТОР — см. *Калькулятор.*

ИНИЦИ́ЙРУЕМАЯ КОНСТА́НТА (от лат. injicio — вбрасываю, вызываю, возбуждаю) — см. *Величина.*

ИНСТРУ́КЦИЯ (от лат. instructio — устройство, наставление) в программировании — то же, что *команда.*

ИНТЕГРА́ЛЬНАЯ СХЕ́МА (от лат. integer — целый), ИС, микросхема,— микроминиатюрное электронное устройство, элементы которого нераздельно связаны (объединены) конструктивно, электрически и (или) оптически. По конструктивно-технологич. особенностям ИС разделяют на монолитные (элементы и межэлементные соединения к-рых выполнены на одной подложке) и гибридные (состоящие из монолитных плёночных ИС, к к-рым монтируются дискретные бескорпусные полупроводниковые приборы и ИС); по форме представления информационных сигналов — на аналоговые и аналогово-цифровые. ИС характеризуются степенью интеграции — числом содержащихся в схеме элементов. В зависимости от степени интеграции условно различают малые (МИС), средние (СИС), большие (БИС) и сверхбольшие (СБИС) интегральные схемы.

ИС предназначены для ввода, обработки и вывода информации, представленной в виде электрич., оптич. и др. сигналов в аналоговой или цифровой форме. В цифровых ИС обработка информации осуществляется посредством дискретных сигналов. Цифровые ИС применяются при создании функциональных устройств — *микропроцессоров*, сумматоров, дешифраторов и др. Цифровые ИС, выполняющие одну или несколько логич. функций, наз. логическими ИС. В аналоговых ИС обработка информации осуществляется посредством непрерывных сигналов. К аналогово-цифровым ИС относятся устройства преобразования аналоговых сигналов в цифровые и обратно.

Совершенствование ИС ведётся в направлении дальнейшего повышения степени их интеграции, снижения потребляемой мощности, увеличения быстродействия, расширения температурного диапазона, а также снижения стоимости и улучшения технико-экономич. показателей, создания оптимальных рядов ИС и т. п.

ИНТЕЛЛЕКТУА́ЛЬНЫЙ ОБЪЕ́КТ (позднелат. intellectualis, от лат. intellectus — познание, понимание, рассудок) (в применении к устройствам и средствам, автоматизирующим умственную работу) — объект, способный к такому взаимодействию с пользователем, при котором последний общается с ним в привычных для его работы понятиях и выражениях, получает от него осмысленную информацию в удобно воспринимаемой форме (напр., интеллектуальный *терминал*, *интерфейс*); демонстрирующий признаки разумного поведения (напр., интеллектуальный *робот*).

См. также *Искусственный интеллект.*

ИНТЕРПРЕТА́ТОР (от лат. interpretator — толкователь) — часть системы программирования, моделирующая непосредственное исполнение программы без предварительного перевода её на машинный язык.

ИНТЕРФЕ́ЙС (англ. interface), сопряжение,— способ и средства установления и поддержания информационного обмена между исполнительными устройствами автоматической или человеко-машинной системы. В общем случае И. состоит из трёх частей: аппаратной части, обеспечивающей механич. и электрич. соединение; протокола — системы правил и соглашений о кодировании, синхронизации и логич. организации передаваемой информации; управления — программы или отдельного устройства, непосредственно выполняющего обмен. В вычислительной технике И. является одним из первоочередных объектов стандартизации, поскольку это делает возможной независимую разработку широкой гаммы технич. устройств при сохранении их взаимозаменяемости.

Различают последовательный и параллельный И. В последовательном И. любая порция двоичной информации передаётся последовательно, бит за битом. Примером такого И. является стандартный И. для связи процессора персональной ЭВМ с широкой гаммой внешних устройств (напр., *джостиком*, *«колобком»*, *световым пером*, *графопостроителем*, телетайпом и т. п.). В параллельном И. порция двоичной информации, состоящая из *n* битов, передаётся одновременно по *n* каналам. Примером такого И. является 8-битовый И., осуществляющий связь *процессора* персональной ЭВМ с *печатающим устройством.*

ИНФОРМАТИЗА́ЦИЯ — одно из проявлений современного периода развития производительных сил человеческого общества, состоящее в объективном усилении роли достоверного, исчерпывающего и опережающего знания во всех видах человече-

ской деятельности. В своей основе необходимость И. предопределяется исчерпанием возможностей экстенсивного развития производительных сил, осознанием ограниченности естественных ресурсов среды человеческого обитания, ростом сложности производственных отношений, появлением так наз. глобальных проблем, стоящих перед человечеством в целом и требующих осознания его единства на основе нового социально-политич. мышления.

В широком смысле И. означает повышение степени информированности общества в целом и каждого его члена в отдельности, формирование общественного сознания на основе научно обоснованной и достоверной картины мира. При этом важным является не просто пассивная доступность любой информации, а правильное и своевременное её использование в гармоничном сочетании интересов общества и личности.

Технич. основой И. являются *компьютеризация* и всемерное развитие систем связи. При этом появляется дополнительная форма отчуждения человеческого знания, его активизация и использование как непосредственной производительной силы в виде *программного обеспечения* ЭВМ. Научной и методологич. основой И. служат *информатика*, *кибернетика* и их прикладные направления.

Важной социально-образовательной предпосылкой И. является распространение компьютерной грамотности и информационной культуры в обществе.

ИНФОРМА́ТИКА — 1) находящаяся в становлении наука, изучающая законы и методы накопления, передачи и обработки *информации* с помощью ЭВМ. 2) И. (в переносном смысле) — область человеческой деятельности, связанной с применением ЭВМ.

Название науки «И.», подчёркивающее ключевую роль «информации» как своего основного понятия, образовано в соответствии с традициями латинского словообразования и введено в употребление почти одновременно в ряде европейских стран в сер. 60-х гг. 20 в. (ср. франц. informatique, нем. Informatik). В англоязычных странах эта же наука получила название «computer science» («в ы ч и с л и т е л ь н а я н а у к а»).

Предмет И. существовал и развивался задолго до появления ЭВМ, однако либо покрывался др. науками, либо оставался в стороне от научного анализа. Появление ЭВМ, стремительное их развитие и применение актуализировало проблематику И., выявило её своеобразие, придало её проблемам масштаб и вычленимость, сформировало большой контингент новых специалистов. Современная И. сложилась в недрах математики и кибернетики, системотехники и электроники, логики и лингвистики. Основные научные направления И. образуют такие дисциплины, как теоретич. основы *вычислительной техники*, статистич. теория *информации*, теория *вычислительного эксперимента*, *алгоритмизация*, *программирование* и *искусственный интеллект*.

Информация, являясь в своей всеобщности скорее общенаучной категорией, нежели конкретным термином, входит в И. через её более специфич. понятия *модели*, *данных*, *алгоритма* и *программы*. Используемое при этом понятие ЭВМ (компьютера) относится не только к тем или иным технич. машинам, но и к любому физически воплощённому или мысленному процессу автоматич. *обработки информации*. Это позволяет применять идеи и методы И. к изучению информационного взаимодействия в биологических, социальных и др. природных системах.

П р и к л а д н а я И. обслуживает науку, технику, производство и др. виды человеческой деятельности путём создания и передачи в общество *информационной технологии*. Эффективное и повсеместное освоение этой новой технологии ставит перед всеми видами образования масштабные задачи распространения компьютерной грамотности и содействие её перерастанию в информационную культуру общества.

См. также *Информатизация*.

ИНФОРМАЦИО́ННАЯ МОДЕ́ЛЬ — *модель*, в которой изучаемое явление или процесс представлены в виде процессов передачи и обработки информации.

ИНФОРМАЦИО́ННАЯ ТЕХНОЛО́ГИЯ — создаваемая прикладной *информатикой* совокупность систематических и массовых способов и приёмов обработки информации во всех видах человеческой деятельности с использованием современных средств связи, полиграфии, вычислительной техники и программного обеспечения. И. т. всегда являлась неотъемлемой и существенной частью человеческой цивилизации, и её многовековое развитие взаимообусловливало параллельное развитие производства, науки, искусства и образования. В основе И. т. лежат те или иные технич. изобретения (печатный станок, телеграф, фотоаппарат, пишущая машинка, телефон, звукозапись, радио, телевизор, видеозапись и др.), к-рые со временем приводили к созданию грандиозных социально-технич. структур, удовлетворявших информационные потребности общества (книгопечатание, почта, электросвязь, радио- и телевещание, кинематограф, пресса, библиотечное и архивное дело).

Изобретение ЭВМ, в особенности *микропроцессоров*, приводит к революционным изменениям И. т. Помимо того, что ЭВМ является главным средством *автоматизации* физич. и умственного труда, компьютер посредством *безбумажного способа* делопроизводства, *электронной почты*, *машинной графики*, *оптических дисков* и безнаборного способа печати объединяет существовавшие ранее раздельно средства И. т., придавая им невиданную гибкость и взаимодополняемость.

ИНФОРМА́ЦИЯ (от лат. informatio — разъяснение, изложение) — содержание сообщения или сигнала, сведения, рассматриваемые в процессе их передачи или восприятия; одна из исходных общенаучных категорий, отражающая структуру материи и способы её познания, несводимая к другим, более простым понятиям.

ИС — *интегральная схема*.

ИСКУ́ССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕ́КТ (от лат. intellectus — познание, понимание, рассудок) — раздел *информатики*, изучающий методы, способы и приёмы моделирования и воспроизведения с помощью ЭВМ разумной деятельности человека, связанной с решением задач.

Фундаментальным разделом И. и. является теория п р е д с т а в л е н и я з н а н и й. Её назначение — найти такие способы описания и представления фактов, общих сведений, закономерностей, правил и предписаний, к-рые позволят использовать все эти знания с помощью нек-рых универсальных и формальных процедур анализа, рассуждения и синтеза, доступных для программной реализации на ЭВМ. Для реализации этих универсальных процессов И. и. разрабатывает специальные логико-алгоритмич. языки, позволяющие объединять вычислительные, комбинаторные и логич. шаги в обработке сложноорганизованной информации (напр., язык лисп).

Ещё одним фундаментальным разделом И. и. является теория *обработки информации*, выраженной на естественном языке. Задача этого раздела — опираясь на точное и явное выражение грамматич. правил языка — найти методы и способы понимания устной речи, извлечения смысла из письменного сообщения, перевода с одного языка на другой, синтеза речи и т. п. с тем, чтобы реализовать все эти формы языковой практики на ЭВМ в виде так наз. лингвистич. процессоров.

Фундаментальные разделы И. и., воспринимая достижения смежных наук (математики, логики, психологии, физиологии, кибернетики, бионики, лингвистики и др.), результируют в создании теоретич. моделей целенаправленного поведения человека, включая такие основные его компоненты, как восприятие, рассуждение и действие. Эти теоретич. модели, имея собственную познавательную ценность, выступают в качестве строи-

тельных блоков в решении различных прикладных задач И. и.

В настоящее время основные приложения И. и. относятся к робототехнике и к построению так наз. интеллектуальных программных систем, помогающих человеку в решении задач и в управлении. В робототехнике главными задачами И. и. являются задачи «машинного зрения» и управления движением. «Машинное зрение» включает в себя способность *робота* ориентироваться в пространстве, воспринимать обстановку и строить её план (т. н. анализ сцен), узнавать контуры и форму предметов, обнаруживать и обходить препятствия при движении и т. п.

Управление движением позволяет роботу перемещаться, совершать рабочие движения своими подвижными элементами, воспринимать нагрузку и дозировать собственные усилия. Задачи «машинного зрения» и управления движением тесно связаны друг с другом.

Наиболее актуальными прикладными задачами И. и. в области построения программных систем являются *экспертные системы*, *базы знаний* и лингвистич. процессоры. Внутренняя «технологическая» задача И. и. — разработка систем программирования на основе логико-алгоритмич. языков.

ИСПОЛНЕ́НИЕ — последовательное выполнение действий, предписываемых командами алгоритма или программы. Принцип строго последовательного И. является абстракцией, вводимой для достижения необходимой точности и однозначности в описании действий исполнителя и архитектуры ЭВМ. На практике ради повышения производительности ЭВМ многие действия по И. программы выполняются одновременно (параллельное И.). Основными видами параллельного И. являются: совместная работа центрального *процессора* ЭВМ и *внешних устройств* (совмещение счёта с обменом), одновременное И. программ операционной системы и программы пользователя или нескольких программ пользователя (мультипрограммный режим), одновременное И. программы несколькими процессорами (мультиобработка), начало И. следующего действия до завершения предыдущего (конвейеризация), одновременное выполнение одной операции над многими величинами (векторизация), совмещение команды с поиском следующей (И. с упреждением). Все эти виды параллельного И. строго контролируются конструкцией ЭВМ, устройством операционной системы и правилами языков программирования для того, чтобы не нарушить правильности алгоритма, построенного в условиях абстракции строго последовательного И.

ИСПОЛНИ́ТЕЛЬ — человек или автоматическое устройство, которому поручается исполнить *алгоритм* или *программу*.

ИСПОЛНИ́ТЕЛЬНЫЙ А́ДРЕС — см. *Машинная команда*.

ИФИП — *Международная федерация по обработке информации*.

К

КАЛЬКУЛЯ́ТОР (от лат. calculator — счётчик) — портативное вычислительное устройство. В отличие от предшествующих ему арифмометра с ручным приводом или электромеханических счётных машин современные К. являются электронными приборами и не имеют движущихся частей, за исключением клавиш. Основу К. составляет *микропроцессор*, исполненный обычно на одной сверхбольшой *интегральной схеме* и содержащий в своей постоянной памяти библиотеку подпрограмм, выполняющих действия над десятичными числами. По степени портативности К. делятся на карманные и настольные.

На лицевой панели К. имеет клавиатуру для ввода чисел и команд и индикатор для воспроизведения результатов действий. Изображения цифр и нек-рых др. знаков строятся из линейных элементов аналогично способу записи почтового кода на конвертах. На оборотной стороне К. находится доступ к узлу питания: от сети, стандартных электрических и аккумуляторных батарей. Нек-рые конструкции К. имеют на лицевой стороне панель солнечных батарей. К. являются наиболее массовыми вычислительными устройствами с мировым производством, составляющим десятки миллионов штук в год. По сложности и стоимости К. делятся на простейшие, инженерные и программируемые.

Простейшие К. имеют клавиши для ввода десятичных чисел и выполнения четырёх арифметич. действий, извлечения корня и ряда вспомогательных операций. Инженерные К. существуют в разных вариантах и обычно допускают дополнительные команды вычисления тригонометрич. и логарифмич. функций. Программируемые К. по своей структуре приближаются к обычным ЭВМ. Они имеют оперативную память для хранения чисел и команд и обладают развитой системой команд, позволяющей реализовать как линейные программы, так и содержащие ветвления, циклы, подпрограммы и векторные величины.

Простейшие и инженерные К. работают в режиме непосредственного выполнения набираемых команд. Устройство управления К. содержит несколько вспомогательных регистров, позволяющих вычислять значения выражений, содержащих несколько знаков операций и функций без записи промежуточных результатов (т. н. цепочечные вычисления). Программируемые К. в дополнение к режиму непосредственного выполнения имеют режим ввода и редактирования программы, составляемой из команд К., а также режим автоматич. исполнения введённой программы. Нек-рые конструкции программируемых К. имеют память в виде узкой и упругой пластинки, покрытой магнитным слоем (магнитной карты), на к-рую после её вставки в предусмотренную прорезь в корпусе К. можно записать вводимую в К. программу и в дальнейшем хранить её на магнитной карте в готовом к исполнению виде.

КАНА́Л СВЯ́ЗИ — техническое средство для передачи сигналов между устройствами, находящимися на расстоянии друг от друга. Информация, передаваемая с помощью одиночных или последовательных сигналов, наз. сообщением. К. с. состоит из трёх главных частей: передатчика, приёмника и линии связи. Передатчик превращает сообщение в сигналы (модуляция), приёмник восстанавливает сообщение из сигналов (демодуляция), линия связи — это протяжённая физическая среда, передающая сигналы. Эта среда чаще является искусственной: металлич. провод, волновод, стекловолокно, но может быть и естественной: материальная среда (воздух, вода) для передачи акустич. сигналов, физич. пространство для передачи электромагнитных сигналов. Передача сигнала всегда сопровождается рассеянием части энергии; величина, пропорциональная логарифму отношения мощностей полученного и переданного сигналов, наз. затуханием.

В основе работы К. с. лежит распространение вдоль линии связи акустич. или электромагнитных колебаний в виде импульсов или синусоидальных гармоник. Наложение сигнала на исходный колебательный процесс состоит в изменении амплитуды, частоты и фазы несущих колебаний и наз. соответственно амплитудной, частотной и фазовой модуляцией. Диапазон частот колебательного процесса, в к-ром затухание примерно одинаково для любой частоты, наз. полосой пропускания канала и составляет для телефонных К. с. 300—3400 Гц, радиовещательных — 30 Гц — 15 кГц, телевизионных — 50 Гц — 5 МГц, оптоволоконных — до сотен МГц.

В вычислительной технике К. с. применяются для передачи двоичной информации между узлами процессора (шина, магистраль), между процессором и внешними устройствами (селекторный К. с. и мультиплексный К. с.), для связи ЭВМ и терминалов (локальная сеть) и для удалённой связи между ЭВМ (региональная сеть). Пропуск-

ная способность, или быстродействие, цифрового К. с. определяется количеством битов информации, передаваемых по К. с. за единицу времени: бит/с, байт/с и т. д. Единица быстродействия бит/с иногда наз. бод.

Внутренняя магистраль ЭВМ работает со скоростью, определяемой тактовой частотой её элементной базы, и составляет десятки Мбит/с. Селекторный К. с. применяется для связи с внешней магнитной памятью и переключается поочерёдно на то или иное устройство. Мультиплексный К. с. позволяет связать процессор сразу с несколькими сравнительно медленными внешними устройствами (терминалами, печатающими устройствами и т. п.). Быстродействие К. с. в локальных сетях зависит от конструкции и составляет от нескольких Кбит/с до 10 Мбит/с. Для региональных сетей используются общие каналы государственной системы связи, главным образом телефонные. При этом различается связь по выделенным (т. е. постоянно закреплённым) и по коммутируемым (т. е. назначаемым автоматически в момент набора телефонного номера) К. с.

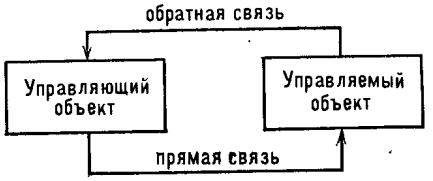
Научные основы передачи информации по К. с. составляют содержание теории информации, а также ряда разделов физики и техники, объединяемых названием «теория и техника связи».

КАНА́ЛЬНЫЙ ТРАНЗИ́СТОР — см. *Транзистор*.

КБА́ЙТ — то же, что *килобайт*.

КИБЕРНЕ́ТИКА (греч. κυβερνητική — искусство управления) — наука, изучающая общие законы управления и взаимосвязи в организованных системах (машинах, живых организмах и обществе). Становление К. как самостоятельной науки связывается с книгами амер. учёного Норберта Винера «Кибернетика или управление и связь в животном и машине» (1948) и «Кибернетика и общество» (1954), в к-рых на конкретном научном материале было провозглашено и обосновано единство законов управления и информационного взаимодействия в искусственных и естественных системах.

Известное из теории автоматич. регулирования представление о системе управления как об управляющем и управляемом объектах, соединённых каналами прямой и обратной связи (см. схему),



было обобщено Н. Винером и его последователями до универсального принципа управления и информационной связи. В этом обобщении процессы обработки и передачи информации были выделены в самостоятельную сущность безотносительно к природе естественных процессов, лежащих в основе функционирования системы управления. Описание обработки информации в виде *алгоритмов* с их последующей реализацией на ЭВМ значительно раздвинуло возможности *моделирования* естественных процессов управления, сделало реальной передачу автоматич. устройствам многих видов человеческой деятельности.

Методологические и общенаучные положения К. в соединении с обобщением практич. опыта применения ЭВМ привели к созданию в 60-х гг. 20 в. более развитой и конкретной системы понятий и методов, составивших основу *информатики*. При этом К. сохраняет своё значение как важное направление современной методологии и философии науки, одновременно конкретизируя свои положения и идеи в прикладных дисциплинах, изучающих технич., биологич. и социальные управляющие системы (технич. К., медико-биологич. К., экономич. К.).

КИЛОБА́ЙТ (от греч. χιλιάς — тысяча и *байт*) — производственная единица измерения количества информации и объёма памяти, равная $1024 = 2^{10}$ *байт* ($\sim 10^3$ байт).

КЛАВИАТУ́РА (нем. Klaviatur, от лат. clavis — ключ) в вычислительной технике — внешнее устройство ЭВМ с набором клавиш, обеспечивающих ручной ввод данных, представленных посредством *литер*. Обычно К. подключается к дисплею или печатающему устройству, позволяющему зрительно контролировать ввод данных. Важнейшими разновидностями являются цифровые К., применяемые в *калькуляторах*, кассовых аппаратах и т. п., и буквенно-цифровые (или алфавитно-цифровые) К., основу к-рых составляет пишущая машинка. Нередко на одном блоке смонтированы и буквенно-цифровая и цифровая К. Современные *терминалы*, как правило, оснащены буквенно-цифровой К.

Среди клавиш важнейшую роль играют клавиши данных (буквенно-цифровые клавиши) и клавиши управления. С одной клавишей данных обычно связано несколько литер, и то, какая литера будет передана при нажатии на такую клавишу, зависит от того, какой был задан регистр К. (режим работы К., определяемый специальными клавишами управления, клавишами переключения регистра; не путать с регистрами, означающими особый род памяти).

На К. советских терминалов обычно имеются, в частности, следующие регистры: РУС (регистр букв русского алфавита), ЛАТ (регистр букв латинского алфавита), НР (нижний регистр, регистр строчных букв), ВР (верхний регистр, регистр прописных букв).

Как правило, К. не позволяет вводить данные с бо́льшей скоростью, чем 20 литер в секунду; обычная для человека скорость достигает 3—10 ударов в секунду.

КЛЮЧ в информатике — известная информация, ассоциируемая с некоторой неизвестной информацией и являющаяся отправной точкой для её поиска. К. представляет собой *цепочку* (литер или битов), служащую *именем* группы *данных* и используемую для получения доступа к данным, их сортировки и т. п. Напр., в словаре ключами служат заглавные ключевые слова и фразы (словосочетания), позволяющие по изображению термина («цепочка», «имя», «ключевое слово» и др.) найти определение его смысла.

КЛЮЧЕВО́Е СЛО́ВО — 1) *слово*, характеризующее контекст, в котором оно используется. 2) В языках программирования — то же, что *служебное слово*.

КОБО́Л (COBOL — сокращение от слов Common Business Oriented Language, англ. common — общепринятый, business — деловой, oriented — ориентированный, language — язык) — *язык программирования*, предназначенный для решения экономических задач. Использование К. позволяет упростить процесс подготовки задач для решения на ЭВМ и отладку программ, а также облегчает обучение программированию и осуществление строгого учёта документации программ в стандартизованном виде.

КОД (франц. code, от лат. cōdex — свод законов) — 1) множество *слов*, используемых при *кодировании* (кодировке). 2) К. в программировании — представление *команд* и прочих *данных* на *машинном языке* в виде, пригодном для непосредственной обработки автоматич. средствами, а также программный модуль на таком языке. См. *Двоичный код*.

КОДИ́РОВАНИЕ — процесс представления информации в виде дискретных *данных*. К. есть отображение Φ произвольного множества M в множество *слов* C нек-рого *алфавита*. Кодом называют как отображение Φ, так и множество кодовых комбинаций, т. е. образ $\Phi(M) \subseteq C$. Обратное относительно К. действие (отображение Φ^{-1} из C в M, если таковое существует) наз. декодированием. Важную роль при вычислениях играют двоичное К. *литер*, при к-ром каждой литере взаимно однозначно соответствует *байт*, и двоичные позиционные коды (прямой, обратный, дополнительный). См. *Двоичный код*.

КО́ДОВАЯ КОМБИНА́ЦИЯ — см. *Кодирование*.

КОЛЛИ́ЗИЯ (от лат. collisio — столкновение) в информатике — см. *Ассоциативная память.*

«КОЛОБО́К», «мышь», в вычислительной технике — внешнее устройство, служащее для ручного управления перемещением *курсора* на экране *дисплея*. «К.» имеет вид плоской коробочки, свободно катающейся по любой поверхности и накрываемой ладонью. В основание коробочки вмонтирован опорный вращающийся шарик (собственно «К.»). На поверхности этого шарика нанесена сетка делений, к-рая позволяет фиксировать его положение в виде двух угловых координат с точностью до градуса. Любое перемещение «К.» по опорной плоскости непрерывно замеряется в виде двух угловых смещений опорного шарика, величина к-рых задаёт смещение курсора на плоскости экрана дисплея соответственно по вертикали и горизонтали. Обратная связь от дисплея к человеку позволяет легко координировать движение руки, накрывающей «К.», с движением курсора. Среди семейства манипуляторов «К.» удобен тем, что позволяет сочетать сравнительно размашистые движения с точной подгонкой в пределах позиции одного символа на экране дисплея. Перемещение «К.» может сопровождаться выдачей компьютеру управляющего двоичного сигнала путём нажатия кнопки, установленной на верхней поверхности «К.».

КОМА́НД СИСТЕ́МА — фиксированный набор команд, определяющих операционные возможности *исполнителя* и используемых в записи алгоритма (программы).

КОМА́НДА — входящее в запись алгоритма (программы) типовое предписание исполнителю выполнить некоторое законченное действие (операцию). Употребимы также названия инструкция и оператор (в языках программирования). Возможность задания и выполнения К. в разных вариантах означает, что она является типовой. Для внесения такого разнообразия в запись К. последняя снабжается параметрами, выбор значения к-рых определяет конкретный вариант К. Напр., К. присваивания в алгоритмич. языке имеет два параметра: переменная, к-рой задаётся значение, и выражение, служащее источником этого значения; в *машинной команде* загрузки сумматора параметром является адрес ячейки памяти, содержимое к-рой передаётся в сумматор. Различают простые и составные К. В запись простой К. не входят какие-либо другие К. (понятие, аналогичное простому предложению в грамматике русского языка). Примером простой К. на алгоритмич. языке является К. *присваивания*, *вызова*, *ввода* и *вывода*. В запись составной К. входят в качестве составной части другие К. (понятие, аналогичное сложному предложению в грамматике русского языка). Примерами составных К. на алгоритмич. языке являются К. *ветвления*, *повторения* и *выбора*.

КОМА́НДНЫЙ РЕДА́КТОР — см. *Редактор.*

КОМА́НДНЫЙ РЕЖИ́М — режим, при котором исполнитель находится в постоянном ожидании команды поручителя. Получив команду, исполнитель выполняет её и останавливается в ожидании следующей команды.

КОММУНИКАЦИО́ННАЯ ЭВМ — см. *Передача данных.*

КОММУТИ́РУЕМЫЙ КАНА́Л СВЯ́ЗИ — см. *Канал связи.*

КОМПИЛЯ́ТОР (от франц. compilateur — похититель) — то же, что *транслятор.*

КОМПЛЕКСИ́РУЕМАЯ ЭВМ — см. *Электронная вычислительная машина.*

КОМПОНЕ́НТА ВЕ́КТОРА — см. *Вектор.*

КОМПЬЮ́ТЕР (англ. computer, от лат. computo — считаю, вычисляю) — то же, что *электронная вычислительная машина.* Термин обычно употребляется в применении к персональным ЭВМ.

КОМПЬЮТЕРИЗА́ЦИЯ — перестройка видов человеческой деятельности, направленная на постоянное и широкое применение ЭВМ и методов информатики в данной деятельности. Одна из главных частей более широких процессов *электронизации* и *информатизации* общества. Основными формами К. являются: встраивание ЭВМ, главным образом *микропроцессоров*, в разного рода существующие машины (напр., автомобили, телефоны, станки, фотоаппараты, бытовые приборы и др.); создание *автоматизированных рабочих мест* на базе персональных ЭВМ; конструирование *роботов*; построение *автоматизированных систем управления* работой машин и производств; создание автоматизированных систем организационного управления и принятия решений; переход к *безбумажному способу* делопроизводства; создание автоматизированных информационных систем и *вычислительных центров* коллективного пользования; построение автоматич. систем наблюдения за природными явлениями и антропогенного происхождения; создание глобальных систем связи и распространения массовой информации.

КОМПЬЮ́ТЕРНАЯ ИГРА́ — техническая игра, в которой игровое поле находится под управлением ЭВМ или воспроизводится на экране *дисплея.* Одно из основных и массовых применений микропроцессорной вычислительной техники, относящихся к досугу, воспитанию и образованию.

Огромная популярность К. и. обусловлена тем, что, сохраняя традиционные привлекательные стороны игры, К. и. приобретает дополнительные свойства динамичности, зрительной наглядности и в особенности способности к нарастанию сложности и разнообразия по мере роста тренированности или мастерства играющего. К последнему свойству примыкает представляемая К. и. возможность, позволяющая играющему самому совершенствовать и программировать игру по мере накопления им необходимых знаний и умения.

К. и. строится на основе модельного описания обстановки игры, включающей, как и любая модель решения задачи на ЭВМ, перечень объектов, вовлечённых в игру, и отношений между ними, правила игры, в частности условия перехода от одного уровня игры к другому, более высокому. Особое место в К. и. занимают сопутствующие сквозные характеристики игры: правила визуального воспроизведения игрового поля, звуковое и текстовое сопровождение, ведение долговременной истории игры и т. п. Многоплановость К. и. требует при её проектировании и реализации разработки подробных сценариев, для записи к-рых создаются специальные языки.

Для эффективной разработки К. и. создано немало технич. приёмов и программных средств, многие из к-рых оказываются полезными далеко за пределами игрового применения ЭВМ.

К. и. продемонстрировали свою несомненную полезность в распространении вычислительной техники, в преодолении боязни или сопротивления её продуктивному применению, в организации современного досуга и в образовании. В то же время, как и любое массовое явление, К. и. создают определённые социальные проблемы, порождая явления отчуждённости, ухода от действительности, дисгармонии в межличностных отношениях.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ХА́КЕР (англ. hacker) — см. *Защита данных.*

КОНВЕЙЕРИЗА́ЦИЯ (от англ. convey — перевозить) — см. *Исполнение.*

КОНКАТЕНА́ЦИЯ — операция с двумя аргументами, определённая над текстами или любыми конечными последовательностями. Результатом выполнения операции является последовательность, составленная из аргументов так, что первый член второго аргумента следует непосредственно за последним членом первого аргумента. Единого обозначения для К. не сложилось, наиболее употребительны «+», «//»; иногда, аналогично умножению, знак К. подразумевается, но не ставится. Напр., при А=«Ленин», В=«град» А+В=А//В=АВ=«Ленинград».

КОНКРЕТИЗИ́РУЮЩЕЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — см. *Программирование.*

КОНСТА́НТА (от лат. constans — постоянный) — постоянная *величина.*

КОНЪЮНКЦИЯ (от лат. conjunctio — союз, связь) — логическая связка, означающая «и».

КОРТЕ́Ж (франц. cortège — выезд) — составное значение, образованное конечной последовательностью однотипных значений, называемых элементами кортежа. К., в отличие от *вектора*, может иметь переменное число элементов с нумерацией, начинающейся всегда с единицы. При явной записи элементов К. они заключаются в угловые скобки и разделяются запятыми: ⟨1, 3, 5, 7, 9, 11⟩. Стандартные операции над К.— определение длины, т. е. числа элементов К. («длин»), и *конкатенация* («+»). Напр., длин (⟨«север», «юг»⟩ + ⟨«запад», «восток»⟩) = длин (⟨«север», «юг», «запад», «восток»⟩)=4. Элементами К. могут быть объекты любого типа, в том числе сами К. Напр., коэффициенты системы S двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c, \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\}$$

могут быть записаны в виде составного К.:

$$S=\langle\langle a, b, c\rangle, \langle a', b', c'\rangle\rangle.$$

Для обращения к элементам К. используются операции выборки $F[i]$ (i-й элемент кортежа F) и вырезки $F\ [c : d]$ (подкортеж кортежа F, образованный элементами с номерами от c до d включительно). Например,

$$S\ [1]=\langle a, b, c\rangle,$$

$$S\ [2][3]=c',$$

⟨«север», «юг», «запад», «восток»⟩ [2 : 3]=⟨«юг», «запад»⟩.

К. является стандартной конструкцией языка программирования рапира.

КРИСТА́ЛЛ (от греч. κρύσταλλος, первонач.— лёд) в вычислительной технике — основа *интегральной схемы* (ИС), имеющая вид прямоугольной пластины площадью около 1 см², вырезанной обычно из кристаллич. кремния высокой степени чистоты. Покрывая окисленную поверхность К. фоточувствительным материалом, на ней фотографируют в ультрафиолетовых или рентгеновских лучах рисунок ИС, предварительно изготовленный в виде диапозитива, или фотошаблона. После проявления скрытого изображения его протравливают, фиксируя тем самым на поверхности К. структуру ИС (фотолитография). Вносимые затем на открытые участки К. специально подобранные примеси разных веществ придают отдельным элементам ИС нужные электрич. свойства. Цикл формирования плёнок, фотолитографии, травления, введения примесей при изготовлении интегральной схемы может повторяться несколько раз. Степень интеграции ИС на К. определяется минимальными размерами простейшего её элемента, составляющего для современной технологии несколько мкм. Такие размеры элементов ИС позволяют размещать на одном К. целиком *микропроцессор* (т. н. однокристальный микропроцессор) или оперативную *память* микро-ЭВМ объёмом до 1 Мбит.

КУРСО́Р (англ. cursor — указатель, от лат. cursor — бегун) — особый подвижный знак, воспроизводимый ЭВМ на экране *дисплея* и отмечающий рабочую точку его экрана.

Л

ЛЕКСЕ́МА (от греч. λέξις — слово, выражение) — см. *Символ.*

ЛЕКСИКОГРАФИ́ЧЕСКИЙ ПОРЯ́ДОК — см. *Алфавит.*

ЛЕКСИ́ЧЕСКАЯ СВЁРТКА — см. *Символ.*

ЛЕКСИ́ЧЕСКИЙ АНАЛИЗА́ТОР — см. *Транслятор.*

ЛЕ́НТА в вычислительной технике — см. *Магнитная лента, Перфолента.*

ЛЕНТОПРОТЯ́ЖКА — см. *Магнитная лента.*

ЛИНГВИСТИ́ЧЕСКИЙ ПРОЦЕ́ССОР (от лат. lingua — язык и *процессор*) — см. *Искусственный интеллект.*

ЛИНЕАРИЗА́ЦИЯ (от лат. linearis — линейный) записи выражений — см. *Выражение.*

ЛИНЕ́ЙНАЯ ТАБЛИ́ЦА — см. *Вектор, Таблица.*

ЛИНЕ́ЙНЫЙ алгоритм (программа) — алгоритм (программа), выполняемый строго последовательно, в порядке записи команд, не имеющей *ветвлений* и *повторений.*

ЛИ́НИЯ СВЯЗИ — см. *Канал связи.*

ЛИСП (LISP — сокращение от слов LISt Processing language, англ. list — список, process — обрабатывать, language — язык) — *язык программирования*, ориентированный на обработку структурных данных; широко используется при программировании сложных логич. задач (напр., задач искусственного интеллекта).

ЛИ́СТИНГ (от англ. list — список) — буквенно-цифровая информация о результатах обработки текста программы (протокол трансляции, редактирования и др.), полученная на ЭВМ. Л. называют также напечатанный на бумаге текст программы, её распечатку. Процесс получения Л. с результатами обработки информации на ЭВМ называют выдачей.

ЛИ́ТЕРА [от лат. lit(t)era — буква] — элемент *алфавита.* В ходе вычислительного процесса Л., используемые для дискретного внешнего и внутреннего представления информации (данных), обычно различны (письмена, печатные знаки, звуковые сигналы, упорядоченные наборы электрич. импульсов, комбинация пробивок, напр. на перфокарте). Между нек-рыми из них существует соответствие, определяемое правилами *кодирования*, на основе к-рого говорят о разных представлениях литеры. Внутреннее представление Л. обычно занимает один *байт*, поэтому иногда эти термины употребляются как синонимы.

Во многих случаях необходимо различать понятия Л. и *вхождение* Л. (напр., слово «балалайка» содержит четыре вхождения Л. «а»).

С разными аспектами обработки данных связаны различные классификации Л. К важнейшим классам относятся буквы и цифры. По отношению к программным и аппаратным средствам Л., действующие как команды, наз. служебными (или управляющими). Напр., для печатающего устройства служебные Л. задают установку позиции печати, перевод строки, шрифт и т. п.; в нек-рых трансляторах подчёркивание или точка используются как выделители служебных слов, кавычки ограничивают текстовые литералы и т. д. Служебная Л., разграничивающая элементы данных (напр., знаки пунктуации, пробелы и др.), наз. разделителем.

ЛИТЕ́РАЛ [англ. literal — буквальный, от лат. lit(t)eralis — письменный], самоопределённая константа,— изображение константы в языке программирования, заключающее в себе всю информацию о её значении независимо от контекста (в отличие от *идентификатора* константы, смысл к-рого задаётся его определением).

ЛИТЕРА́ЛЬНАЯ КОНСТА́НТА —см. *Величина.*

ЛИ́ТЕРНАЯ ЦЕПО́ЧКА — см. *Цепочка.*

ЛОГИ́ЧЕСКАЯ ИНТЕГРА́ЛЬНАЯ СХЕ́МА — см. *Интегральная схема.*

ЛОКА́ЛЬНАЯ ВЕЛИЧИ́НА (от лат. localis — местный) — см. *Величина.*

ЛОКА́ЛЬНЫЙ ОБЪЕ́КТ в информатике — объект, внутренний по отношению к алгоритму (программе), возникающий в процессе исполнения алгоритма (программы) и исчезающий после его (её) завершения.

М

МАГАЗИ́Н (франц. magazin, от араб. махазин — склады) в информатике — то же, что *стек.*

МАГИСТРА́ЛЬ (от лат. magistralis — руководящий, главный) в вычислительной технике — внутренний *канал связи* в ЭВМ, служащий для обмена информацией между устройствами.

МАГНИ́ТНАЯ ЛЕ́НТА (греч. μαγνῆτις — магнитный железняк, от Μαγνῆτις λίθος, букв.— камень из Магнесии, древнего города в М. Азии) в вычислительной технике — вид внешней магнитной памяти, в которой носителем информации является движущаяся пластмассовая лента, покрытая магнитным слоем. Основными узлами устройства являются лентопротяжка, блок головок чтения/записи и управление. Собственно М. л. хранится и

устанавливается на лентопротяжку в съёмных катушках (бобинах) либо в кассетах. Среди разнообразия устройств М. л. преобладают два стандарта: М. л. длиной в несколько сотен метров, шириной в 1 дюйм, с 8 дорожками для одновременного чтения/записи 1 байта информации общей ёмкостью до 1000 Мбайт и двухдорожечная М. л. длиной в несколько десятков метров, ёмкостью до 10 Мбайт, хранимая в компактных кассетах для бытовых магнитофонов.

Основное назначение М. л.— длительное хранение больших объёмов информации в форме, пригодной для прямого ввода в ЭВМ. Достоинством М. л. является её большая ёмкость и относительная дешевизна по сравнению с другими видами внешней памяти; очень серьёзным недостатком — большое среднее время ожидания поступления требуемой информации (скорость движения М. л. составляет от нескольких см до нескольких м в секунду в зависимости от конструкции). Поэтому М. л. обычно используется для начальной загрузки исходной информации к решаемой задаче с её последующим использованием в более быстрой памяти.

Для избирательного доступа к информации М. л. размечается на занумерованные зоны, в к-рых обычно размещается порция информации, записываемая и читаемая целиком. При указании номера зоны управление подводит нужный участок М. л. к головкам чтения/записи, после чего производит требуемый обмен информацией.

МАГНИ́ТНАЯ ПА́МЯТЬ — см. *Память, Магнитная лента, Магнитный барабан, Магнитный диск.*

МАГНИ́ТНЫЙ БАРАБА́Н в вычислительной технике — вид внешней магнитной памяти, в которой носителем информации является металлический пустотелый цилиндр, боковая поверхность которого покрыта магнитным слоем. Цилиндр находится на одной оси с электромотором и вращается со скоростью нескольких десятков об/с. По образующей цилиндра установлены головки чтения/записи — каждая головка на отдельную дорожку, проходящую по окружности цилиндра. Ёмкость М. б. определяется числом дорожек (обычно несколько десятков), диаметром цилиндра (в пределах полуметра) и плотностью записи на дорожке (100—500 бит/см). Время доступа к информации зависит от скорости вращения и в среднем составляет время половины оборота (порядка 10 мс).

М. б. широко применялись на ЭВМ 1-го и 2-го поколений (в частности, М-20, БЭСМ-6), но со временем были вытеснены, с одной стороны, дисковой памятью, с другой — полупроводниковой оперативной памятью большого объёма.

МАГНИ́ТНЫЙ ДИСК в вычислительной технике — вид внешней магнитной памяти, в которой носителем информации является вращающийся металлический или пластмассовый диск, покрытый магнитным слоем. Информация на М. д. размещается на концентрич. дорожках. Расстояние между дорожками составляет доли мм, плотность записи на дорожке зависит от конструкции и физич. свойств носителя и составляет от нескольких сотен до нескольких тысяч бит/см. Двоичные слова обычно записываются на дорожку последовательно. Позиция каждого слова на носителе фиксируется специальным процессом разметки М. д., в результате чего каждое слово на М. д. имеет адрес и может быть прочитано независимо.

Над поверхностью М. д. по его радиусу укрепляется металлич. штанга, на к-рой с помощью шагового двигателя движется головка чтения/записи. Расстояние между головкой и поверхностью носителя стараются свести к минимуму, и в лучших конструкциях оно составляет несколько микрон. Движением головки по штанге обеспечивается выбор нужной дорожки. В нек-рых конструкциях М. д. радиальное смещение головки обеспечивается улиточным пазом. Среднее время выборки из дисковой памяти складывается из времени подвода головки к дорожке и ожидания нужного слова на дорожке (в среднем — половина оборота М. д.). Эти времена сильно зависят от конструкции и составляют от нескольких мс до долей секунды. На нек-рых конструкциях М. д. большой ёмкости и стоимости ради повышения скорости и плотности записи головки делают неподвижными и выстраивают их в ряд по одной головке на каждую дорожку.

Наиболее массовой конструкцией М. д. являются гибкие диски, или флоппи-диски. В них носителем информации является дискета — тонкий упругий пластмассовый диск, покрытый магнитным слоем с одной или обеих сторон. Дискета хранится и используется обычно в кассете, в к-рой для доступа головки к магнитному слою имеется радиальная прорезь. В центре кассеты есть отверстие, через к-рое дискета надевается на ось дисковода — механич. узла, обеспечивающего вращение дискеты и перемещение головки. В дисковод дискета вставляется через щель в торце устройства. Гибкие М. д. используются в персональных ЭВМ и либо встраиваются в корпус процессора, либо подсоединяются к нему в виде отдельного устройства.

Дискеты играют очень большую роль в качестве средств хранения и распространения программ и другой машинной информации. Формирование библиотек программного обеспечения всё в большей степени производится путём накопления дискет. Наиболее массовыми стандартами дискет являются в настоящее время 5-дюймовые и 3-дюймовые (по диаметру). Ёмкость дискет зависит от конструкции и колеблется от 350 до 1000 Кбайт.

Всё большее количество персональных ЭВМ использует также в качестве внешней памяти т. н. жёсткие диски, или винчестерские диски. Это тоже компактные устройства, обычно встраиваемые в корпус процессора, в них носитель является жёсткой конструкцией, заключённой в герметичный кожух. В результате диск нельзя вынимать из машины, но зато можно существенно повысить скорость работы и ёмкость (до нескольких десятков Мбайт).

На больших ЭВМ используют стационарные устройства дисковой памяти большой ёмкости, составляющей от нескольких сотен Мбайт до нескольких Гбайт. В настоящее время М. д. являются основным видом внешней памяти ЭВМ.

МА́ЛАЯ ЭВМ — то же, что *мини-ЭВМ*.

МА́ЛЫХ ЭВМ СИСТЕ́МА, СМ ЭВМ,— семейство *мини-ЭВМ* общего назначения, используемых для выполнения небольших по объёму инженерных и экономич. расчётов, управления технологич. процессами, автоматизации проектирования и научных исследований и т. п. СМ ЭВМ содержит стандартный *интерфейс*, несколько *процессоров* различной производительности, *запоминающие устройства* (в том числе оперативную память) и *внешние устройства*. Использование в СМ ЭВМ стандартного интерфейса позволяет создавать вычислительные комплексы с различным составом оборудования.

МАНТИ́ССА (от лат. mantissa — прибавка) числа — см. *Плавающая запятая*.

МАРКЁР (франц. marqueur, от marquer — отмечать) — см. *Метка*.

МАССИ́В (франц. massif, букв.— мощный, сплошной) в программировании — 1) составная величина, элементы которой можно представить расположенными в узлах целочисленной решётки, заполняющей *n*-мерный параллелепипед (см. *Вектор*). 2) То же, что набор данных (см. *Файл*).

МА́ССОВАЯ ПА́МЯТЬ — см. *Память*.

МАТЕМАТИ́ЧЕСКАЯ МОДЕ́ЛЬ — *модель*, в которой изучаемое явление или процесс представлены в виде абстрактных объектов и математических закономерностей.

МАТЕМАТИ́ЧЕСКОЕ ОБЕСПЕ́ЧЕНИЕ ЭВМ — то же, что *программное обеспечение* ЭВМ. Иногда к М. о. ЭВМ относят также *библиотеки* алгоритмов, выраженных в машинно-независимой форме, и собрания общих математич. и вычислительных методов решения задач на ЭВМ.

МА́ТРИЦА (нем. Matrize, от лат. matrix — источник, начало) в информ-

матике, двумерный массив,— то же, что прямоугольная *таблица*.

МАШИ́НА (франц. machine) в вычислительной технике — см. *Аналоговая вычислительная машина*, *Аналого-цифровая вычислительная машина*, *Вычислительная машина*, *Цифровая вычислительная машина*, *Электронная вычислительная машина*.

МАШИ́ННАЯ ГРА́ФИКА — совокупность методов, средств и приёмов, позволяющих ЭВМ вводить в свою память и воспроизводить данные, имеющие форму изображений, графиков и т. п.

МАШИ́ННАЯ КОМА́НДА — *команда*, которая может быть непосредственно выполнена на ЭВМ, то есть входящая в систему её команд. М. к. представляется двоичным кодом, обычно составляющим одно *машинное слово*. М. к. состоит из двух частей: фиксированного кода операции и переменной адресной части. Значение кода операции отличает один тип М. к. от другого. Запас кодов операции определяет объём системы команд ЭВМ.

Во многих случаях выполнение законченного действия на ЭВМ требует указания трёх адресов: для 1-го аргумента, 2-го аргумента и результата. В зависимости от того, сколько из этих адресов указывается явно в адресной части, различают трёх-, двух-, одно- и нуль-адресные М. к. В ЭВМ первых поколений часто применялись трёхадресные М. к., однако это оказалось неэкономичным. В двухадресных М. к. адрес результата выполнения команды мог совпадать с адресом одного из аргументов. Наибольшее распространение получили одноадресные М. к., т. к. в связи с резким ростом объёмов оперативной памяти надо было решать проблему максимального увеличения диапазона адресов в пределах фиксированного формата машинного слова. Другие величины, вовлекаемые в выполнение М. к., указываются номерами регистров процессора ЭВМ или подразумеваются кодом операции. При выполнении циклов часто приходится повторно выполнять одну М. к. для разных адресов ячеек. В таких случаях формирование т. н. исполнительного адреса М. к. производится путём сложения адреса, указанного в команде, с текущим значением специального индекс-регистра процессора. Необходимость такого сложения указывается в адресной части М. к. специальным признаком.

При записи М. к. обычно используется система символич. обозначений, образующая язык *ассемблера* для данной ЭВМ, когда адреса ячеек памяти обозначаются именами соответствующих величин задачи, а код операции изображается мнемонич. обозначением выполняемой операции.

МАШИ́ННОЕ СЛО́ВО — см. *Слово*, *Ячейка*.

МАШИ́ННЫЙ ПЕРЕВО́Д — перевод текстов с одного языка на другой, выполненный по формальным правилам, реализованным в виде программ для ЭВМ. Развитые системы М. п. работают по многоэтапной схеме, состоящей из двух главных частей: анализа переводимого текста и синтеза перевода. М. п. осуществляется обычно пофазно. Этапами анализа являются: ввод фразы в ЭВМ; лексический анализ (на уровне слов и частей речи); поверхностный синтаксический анализ (на уровне членов предложений); глубинный синтаксический анализ (учитывающий смысловые связи между словами). В результате анализа возникает внутреннее представление фразы, отражающее её смысл и находящееся «на равной дистанции» от входного и выходного языков. Начальный этап синтеза обеспечивает т. н. оснащение внутреннего представления фразы словами выходного языка, последующие же этапы осуществляют расстановку слов в нужном порядке с последующим извлечением из словаря их внешней лексич. формы и формирование окончательного вида переведённой фразы.

Задача М. п. является классич. проблемой *искусственного интеллекта* и прикладного языкознания, уровень решения к-рой определяет общий прогресс в автоматизации умственной работы человека.

МАШИ́ННЫЙ ЯЗЫК — способ записи программ, допускающий их непосредственное исполнение на ЭВМ. Программа на М. я. является последовательностью *машинных команд*. Процессор непосредственно воспринимает и выполняет команды, выраженные в виде двоичных кодов, располагаемых в *ячейках* памяти ЭВМ.

Для подавляющего большинства пользователей ЭВМ М. я. скрыт от применения слоями базового и прикладного *программного обеспечения*, позволяющего работать с заранее составленными программами или составлять программы на *языке программирования* высокого уровня. В тех же случаях, когда при разработке базового программного обеспечения М. я. нужен по существу, применяются средства более удобной записи машинных команд, чем двоичный код (см. *Ассемблер*).

МБАЙТ — то же, что *мегабайт*.

МЕГАБА́ЙТ (от греч. μέγας — большой и *байт*) — производная единица измерения количества информации и объёма памяти, равная 1024 Кбайт ($\sim 10^6$ *байт*).

МЕГАФЛО́П (от англ. megaflop — миллион операций в секунду) — см. *Быстродействие* ЭВМ.

МЕЖДУНАРО́ДНАЯ ФЕДЕРА́ЦИЯ ПО ОБРАБО́ТКЕ ИНФОРМА́ЦИИ, ИФИП (IFIP — International Federation for Information Processing),— союз национальных научных обществ, объединяющих специалистов по информатике, вычислительной технике и её применению. Учреждена в 1959 в Париже на Международном конгрессе, проведённом под эгидой ЮНЕСКО. В 1987 ИФИП объединяла национальные общества 45 стран. Советский Союз, одна из стран-учредителей, представлен в ИФИП Академией наук СССР. Высший орган ИФИП — генеральная ассамблея представителей стран-членов. ИФИП работает по трёхлетнему циклу, выбирая на этот срок президента и другие руководящие органы федерации и организуя с этой же периодичностью всемирные компьютерные конгрессы.

Основными постоянными рабочими органами ИФИП являются 11 технич. комитетов по всем основным направлениям информатики и вычислительной техники. Главная форма работы ИФИП в дополнение к организации конгрессов — подготовка и проведение международных рабочих конференций, включая издание их трудов. На рабочую конференцию обычно приглашается не более 100 специалистов, к-рые в течение трёх дней заслушивают ок. 30 докладов, отбираемых для обсуждения Международным программным комитетом в соответствии с заданной темой конференции.

Для коллективного обсуждения актуальных научных проблем и выполнения совместных международных проектов технич. комитеты образуют рабочие группы учёных. Рабочая группа ИФИП по алголу, созданная при технич. комитете по программированию, внесла значительный вклад в развитие языков программирования, поддержав разработку и стандартизацию языка алгол-60 и разработав язык алгол-68.

МЕ́ТКА — 1) М. в языках программирования — *символ*, служащий *именем* некоторой команды алгоритма или программы. Обычно М. используются для организации управления в программе (переходах, циклах языка фортран и т. п.).

В алголе-68 и симуле в качестве М. используют *идентификаторы*, в бейсике — целочисленные *литералы*, одновременно служащие номерами операторов (и строк) в тексте программы. В фортране и паскале М. также изображаются *словами* из цифр, однако арифметич. значение соответствующих им целых чисел не играет никакой роли (кроме как в правиле отождествления: левые нули в М. несущественны, напр. М. 0099 и 99 эквивалентны).

В *ассемблерах* термин «М.» используется в значении символич. адреса и может относиться к идентификатору подпрограммы, константы, переменной и т. п.

2) М. данных, маркёр,— *литера* или *слово*, используемые для разграничения или идентификации записей в файле; запись, характеризующая набор *данных* (идентификация файла, ограничения на доступ к нему и т. п.).

МИКРОКАЛЬКУЛЯ́ТОР (от греч. μικρός — малый и *калькулятор*), электронный калькулятор, — портативная *микро-ЭВМ* индивидуального пользования. На лицевой стороне металлического или пластмассового корпуса расположены *клавиатура* для ввода исходных данных и команд на выполнение различных операций, а также световое табло (индикатор), показывающее вводимые в М. данные и результаты вычислений. В некоторые М. дополнительно встраиваются миниатюрные устройства ввода-вывода информации (напр., с *магнитной ленты*), а также *печатающие устройства*. У большинства М. помимо питания от автономного источника предусмотрена возможность подключения к сети переменного тока через специальный преобразователь.

Различают простейшие, инженерные и программируемые М. Простейшие М. позволяют выполнять арифметич. действия, запоминать число, складывать с числом, хранящимся в памяти, или вычитать из него, а также ряд других простейших операций. Инженерные М. помимо арифметич. действий и простейших вычислительных операций (типа $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$) позволяют вычислять тригонометрические, показательные, степенные, логарифмические и др. функции, а также сложные функции со скобками и функции, используемые в математич. статистике. Инженерные М. имеют до трёх и более регистров памяти. Отличительной особенностью программируемых М. является возможность осуществлять вычисления в автоматич. режиме по заранее составленной и затем введённой в его память программе. Память такого М. имеет до 15 и более регистров и может хранить одновременно до 100 команд.

МИКРОПРОГРА́ММА — вспомогательная *программа*, постоянно находящаяся во внутренней памяти процессора ЭВМ и реализующая алгоритм выполнения *машинной команды* в виде последовательности более мелких операций.

МИКРОПРОЦЕ́ССОР — *процессор*, выполненный в виде одной или нескольких больших *интегральных схем* (БИС). М., используемые в средствах вычислительной техники различного назначения (для решения широкого круга разнотипных задач), называют универсальными. М., предназначенные для построения какого-либо одного типа вычислительных устройств, называют специализированными; типичный пример — М. в *микрокалькуляторе*. По способу управления различают М. со схемным и с микропрограммным управлением. М. со схемным управлением имеют высокое быстродействие, однако их работа определяется фиксированной системой команд. Функционирование М. с микропрограммным управлением определяется последовательностью микропрограмм, состав и очерёдность выполнения к-рых может устанавливаться пользователем. Такие М. имеют сравнительно невысокое быстродействие, но они более универсальны, легче перестраиваются с одного вида применения на другой.

По структуре М. подразделяются на секционированные (как правило, с микропрограммным управлением) и однокристальные (с фиксированной разрядностью и постоянным набором команд). Секционированные М. обладают способностью к наращиванию параметров (прежде всего разрядности) и расширению своих функциональных возможностей: каждая из БИС, образующая секцию М., способна объединяться с другими, создавая при этом различные функциональные устройства. Однокристальные М. с фиксированной разрядностью и с постоянным набором команд конструктивно выполняются в виде одной БИС.

М. получили широкое применение в системах управления технологическим и контрольно-испытательным оборудованием, транспортными средствами, космич. аппаратами, бытовыми приборами и т. п. На базе М. создаются различные типы микро-ЭВМ, программаторов и др. устройства автоматики и вычислительной техники.

МИКРОСХЕ́МА — то же, что *интегральная схема*.

МИ́КРО-ЭВМ — *электронная вычислительная машина*, выполненная на основе *микропроцессора*. По выполняемым функциям М.- ЭВМ аналогичны так наз. большим ЭВМ; их отличительной особенностью являются малые габаритные размеры и масса, высокая надёжность, низкая стоимость, а также удобство эксплуатации. Применяются преимущественно как управляющие ЭВМ в системах автоматического и автоматизированного управления, напр. технологич. процессами; часто встраиваются непосредственно в управляемый объект. Другое массовое применение М.-ЭВМ — в качестве *терминала* для связи с *вычислительными центрами* коллективного пользования, оборудования *автоматизированных рабочих мест*, а также автономного использования в качестве *персональных ЭВМ*.

М.-ЭВМ появились практически одновременно с микропроцессорами и получили широкое распространение в промышленности, на транспорте, в сфере быта и т. д. В СССР одной из первых самых массовых и распространённых была М.- ЭВМ «Электроника-60», обладающая быстродействием — 250 тыс. операций в 1 с, разрядностью — 16, числом команд — 72, ёмкостью оперативной памяти — 64 Кбайта, габаритными размерами — 300×300×90 (базовый вариант), потребляемой мощностью — 27 Вт.

МИ́НИ-ЭВМ, малая ЭВМ,— малогабаритная *электронная вычислительная машина* малой или средней производительности (СМ). . Различают М.- ЭВМ общего назначения и специализированные. Характеризуются высокой надёжностью и сравнительно низкой стоимостью. Реализация на М.-ЭВМ сравнительно широких информационно-логических и вычислительных возможностей достигается рациональным выбором системы команд, разрядности кодов, скорости выполнения операций, набора внешних устройств, а также оптимальным распределением функций между основными устройствами, использованием микропрограммного управления и микроэлектронной элементной базы. Проблемная ориентация М.-ЭВМ определяется её математич. обеспечением, а также набором внешних устройств. Для решения сложных задач М.-ЭВМ объединяются в однородные вычислительные сети. М.-ЭВМ общего назначения применяют в основном для решения несложных инженерно-технич. задач и т. п.; специализированные — в системах автоматич. управления. Такие ЭВМ используются также в качестве мультиплексных и селекторных каналов связи в вычислительных системах и коммуникационных процессоров в вычислительных сетях.

ОСНОВНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАЛЫХ ЭВМ

Параметры	СМ-3	СМ-4	СМ-1800	СМ-1420
Производительность, тысяч операций/с	250	800	500	1000
Объём оперативной памяти, Кслов . . .	28	124	28	124
Объём внешней памяти на магнитных дисках, Мбайт . . .	4,8	9,6	4,8	29

МИПС (от англ. million instructions per second — миллион операций в секунду) — единица измерения быстродействия ЭВМ; равна 1 млн. операций в секунду.

МИС — малая *интегральная схема*.

МОДЕЛИ́РОВАНИЕ — исследование явлений, процессов или систем объектов путём построения и изучения их *моделей*; один из основных способов научного познания и технич. проектирования. Методы *информатики* с применением средств *вычислительной техники* создали новый способ М., получивший назв. *вычислительного эксперимента*. М. с помощью ЭВМ опирается на триаду основных понятий

информатики: модель — алгоритм — программа. Эта триада не только указывает на этапность процесса М., но и подчёркивает взаимосвязь используемых понятий. Алгоритм решения задачи не может быть построен без модели, в терминах к-рой формулируется условие этой задачи. В свою очередь, плодотворной может быть только такая теоретич. модель, для к-рой можно найти практич. алгоритмы нахождения одних характеристик изучаемого явления через другие, заданные.

Использование ЭВМ при М. носит троякий характер: 1) вычислительное, когда ЭВМ применяется для прямых расчётов по программе, замыкающей указанную триаду; 2) инструментальное, когда ЭВМ применяется: а) для формирования и поддержания модели в виде компьютерной *базы знаний* или *экспертной системы*; б) для систематич. перехода от спецификации решаемой задачи в терминах модели к алгоритму и затем к его программной реализации с помощью системы программирования; 3) диалоговое, когда ЭВМ применяется для поддержания взаимодействия исследователя и ЭВМ в ходе вычислительного эксперимента или решения задачи и, в частности, для визуализации результатов расчётов, зачастую позволяющей воссоздать физический, зрительный образ исследуемого объекта или явления.

МОДЕ́ЛЬ (франц. modèle, от лат. modulus — мера) — общенаучное понятие, означающее как идеальный, так и физический объект, анализ которого или наблюдение за которым позволяет познавать существенные черты другого исследуемого явления, процесса или объекта. Принципиальным свойством М., оправдывающим её использование в качестве орудия познания, является наличие наблюдаемых и устойчивых свойств и характеристик (параметров М.). Физич. М. являются основой экспериментальных и наблюдательных наук. Идеальные М. являются одновременно исходными посылками и результатами построения теории изучаемого объекта, явления или процесса, а их предсказательная сила становится главным практич. критерием достоверности и полноты М.

Теоретич. М. всегда представляет собой систему, т. е. нечто целое, обладающее определёнными свойствами и характеристиками и состоящее из частей — подсистем или элементарных объектов со своими свойствами и характеристиками. Составляющие М. вступают друг с другом в определённое взаимодействие, наличие и устойчивость к-рого обеспечивает системные свойства М.

Предметом информатики являются т. н. информационные М., т. е. такие, в к-рых изучаемое явление или процесс представлены в виде процессов передачи и обработки информации, а параметры как самой М., так и её составляющих представлены в числовой, текстовой или иной сигнальной форме. Взаимодействие между составляющими М. в таком случае описывается в виде постоянного соотношения (закона), связывающего параметры взаимодействующих объектов. Примером числовой характеристики теоретич. объекта является масса и скорость материальной точки, текстовой характеристики — химич. состав и структура полимерной молекулы, сигнальной характеристики — состояние проводимости или непроводимости нервного волокна. Типичным примером информационного подхода к описанию взаимодействия являются законы физики, имеющие вид уравнений, связывающих параметры взаимодействующих объектов (закон всемирного тяготения, уравнения Максвелла, соотношения между массой и энергией и т. п.).

Важным классом идеальных М. являются математические М., в к-рых изучаемое явление или процесс представлены в виде абстрактных объектов и наиболее общих математич. закономерностей, выражающих либо законы природы, либо внутренние свойства самих математич. объектов, либо правила логич. рассуждения. Информационный характер математич. М. является принципиальной основой возможности применения ЭВМ для программной реализации таких М. в интересах *вычислительного эксперимента*. Это требует создания специальных методов, позволяющих вычислять математич. закономерности на ЭВМ, что составляет предмет вычислительной математики. Наиболее распространёнными математич. М. являются уравнения математич. физики и линейной алгебры. Они составляют основу классич. разделов физики, химии, механики и техники и широко применяются в инженерно-конструкторских расчётах. Большая часть этих М. относится к классу непрерывных, т. е. основанных на принципе безграничной делимости времени и пространства и соответствующей теории вещественных чисел и функций. Материальные объекты в этих М. обычно рассматриваются как ансамбль бесконечного множества материальных точек, в к-ром описание поведения составного макрообъекта получается путём предельного перехода. Необходимость учёта квантовых закономерностей на микроуровне и рассмотрение сложных иерархич. систем на макроуровне привели к появлению дискретных М., использующих математич. аппарат алгебры, логики, комбинаторики и теории графов.

Практика инженерного конструирования и вычислительного эксперимента привела к появлению особого класса т. н. имитационных М., на к-рых изучается поведение сложных неоднородных систем. Имитационное моделирование опирается на известную или гипотетическую, но заданную изначально структуру системы. Для каждого входящего в систему объекта в памяти ЭВМ поддерживается таблица его параметров. Каждое элементарное взаимодействие в системе реализуется в виде одного или нескольких алгоритмов, позволяющих рассчитывать неизвестные параметры взаимодействия по заданным. Полученный набор подпрограмм дополняется системным блоком — ведущей программой, организующей поочерёдное или совместное исполнение подпрограмм взаимодействия в соответствии с заданной структурой системы. В результате ЭВМ, снабжённая такой совокупностью программ, имитирует поведение системы, выдавая значения её искомых параметров в виде таблиц по шагам времени либо по последовательности происходящих в системе событий.

МО́ДУЛЬ (от лат. modulus — мера) — функционально законченное изделие, являющееся частью системы и обладающее свойством заменяемости.

МОНИТО́Р (лат. monitor — напоминающий, надзирающий) — 1) М. в программировании — часть *операционной системы* ЭВМ, организующая согласованную работу нескольких программ. 2) М. в вычислительной технике — дисплей, в котором изображение строится на экране электронно-лучевой трубки.

МУЛЬТИОБРАБО́ТКА (от лат. multum — много) — см. *Исполнение*.

МУЛЬТИПЛЕ́КСНЫЙ КАНА́Л СВЯ́ЗИ — см. *Канал связи*.

МУЛЬТИПРОГРА́ММНЫЙ РЕЖИ́М — см. *Исполнение*.

«МЫШЬ» в вычислительной технике — то же, что *«колобок»*.

Н

НАКОПЛЕ́НИЕ ИНФОРМА́ЦИИ — один из основных видов работы с *информацией*. При пассивном Н. и. поступающая информация просто «складируется», при этом принимаются меры к обеспечению её сохранности и повторного считывания. Типичный пример — запись звуковой информации на магнитофонную ленту или стенографирование выступления. При активном Н. и. происходит определённая обработка поступающей информации, имеющая много градаций, но в целом направленная на обогащение знания получателя информации, начиная с простейшего анализа, напр. разбиения сообщения на отдельные сигналы, и кончая высшими творческими достижениями человеческого сознания.

Развитие *информатики* постоянно продвигает границу возможностей в

извлечении знания при Н. и. с применением ЭВМ. Одна из первичных задач Н. и.— это преобразование накапливаемой информации из её формы в виде физич. сигналов в символич. форму, а также сжатие информации, т. е. устранение избыточности в её представлении. При этом часто приходится решать задачу распознавания образов, т. е. выделения в потоке накапливаемой информации устойчивых сочетаний сигналов, составляющих «образ» распознаваемого объекта — буквы, контура, фигуры и т. п. Типичными представителями подобного рода задач, решаемых при Н. и., являются компьютерное распознавание человеческой речи и обработка изображений, поступающих с космических аппаратов.

НЕОПРЕДЕЛЁННАЯ ВЕЛИЧИНА́ — см. *Величина*.

НЕПРОЦЕДУ́РНЫЙ ЯЗЫ́К — то же, что декларативный *язык программирования*; см. также *Процедурный язык*.

НЕСОВМЕ́СТНЫЕ УСЛО́ВИЯ — см. *Выбор*.

НОСИ́ТЕЛЬ данных (информации) — физическое тело или среда для записи, хранения и воспроизведения информации. Н. различают по физич. структуре (магнитные, полупроводниковые, диэлектрические), типу используемого материала (бумажные, пластмассовые, металлические, комбинированные), форме представления данных (печатные, рукописные, магнитные, перфорационные), принципу считывания информации (механические, оптические, магнитные, электрические), конструктивному исполнению (карточные, ленточные, дисковые, барабанные съёмные и несъёмные), а также в зависимости от возможности осуществлять перезапись — Н. однократной записи (при которой изменение свойств среды носит необратимый характер; перфоносители, оптич. диски и др.) и Н. многократной записи (допускающие перезапись, при к-рой изменение свойств среды носит обратимый характер; полупроводниковая и все виды магнитной памяти). Информация записывается на Н. посредством изменения физич., химич. или механич. свойств запоминающей среды. См. также *Память*.

О

ОБЕСПЕ́ЧЕНИЕ ЭВМ программное — см. *Программное обеспечение* ЭВМ.

ОБРАБО́ТКА ДА́ННЫХ — обработка информации с помощью ЭВМ.

ОБРАБО́ТКА ИНФОРМА́ЦИИ — процесс закономерного изменения представления и содержания информации, осуществляемый в живой, естественной или искусственной системе.

О. и. всегда происходит (см. схему) в нек-рой обстановке — внешней среде, являющейся источником

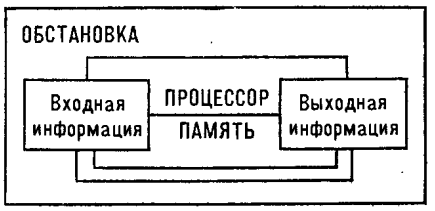


Схема обработки информации.

входной информации и потребителем выходной информации. Непосредственная О. и., т. е. переработка входной информации в выходную, выполняется *процессором*. Процесс О. и. в общем случае приводит также и к изменению самого процессора. При этом предполагается, что процессор располагает *памятью*. Разнообразие состояний памяти характеризует степень изменчивости процессора.

О. и. допускает различные содержательные трактовки: взаимодействие процессора с обстановкой; реализация причинной связи между входом и выходом процессора, поведение процессора в обстановке; вычисление процессором выходной информации как нек-рой функции входной информации; накопление информации, т. е. изменение состояния памяти процессора под воздействием входной информации.

О. и.— это процесс, проходящий во времени. В ряде случаев О. и. должна подчиняться заданному темпу поступления входной информации и допустимому пределу задержки в выработке выходной информации. Это — О. и. в реальном масштабе времени. Примером такого рода О. и. является управление работой машин и устройств. В других случаях время воспринимается как дискретная цепочка мгновенно происходящих событий, при этом важна лишь их последовательность, а не значение разделяющих события временных промежутков. Сами же события состоят в изменении тех или иных элементов обрабатываемой информации. Такой подход применяется обычно при О. и. в *моделировании*.

Наиболее простой формой О. и. является последовательная О. и., производимая одним процессором, в к-ром в любой момент времени происходит не более одного события. При наличии в системе нескольких процессоров, работающих одновременно, говорят о параллельной О. и.

В общем случае О. и. не исчерпывает всего взаимодействия процессора с обстановкой. На практике шаги процессора по О. и. сопровождаются теми или иными физич. действиями, совершаемыми его исполнительными устройствами и направленными на достижение определённой цели. В этом случае О. и. выступает как способ управления поведением процессора. Трактовка управления поведением системы как О. и. является одним из универсальных принципов *кибернетики*.

ОБРА́ТНЫЙ ДВОИ́ЧНЫЙ КОД — см. *Двоичный код*.

ОБСТАНО́ВКА в информатике — искусственная или естественная среда, в которой действует *исполнитель* или, вообще, любой *процессор*, осуществляющий *обработку информации*. См. также *Операционная обстановка*, *Программная обстановка*.

О́БЩЕГО НАЗНАЧЕ́НИЯ ЯЗЫ́К — см. *Язык программирования*.

ОБЪЁМ памяти, ёмкость памяти,— см. *Память*.

ОДНОПРОСМОТРО́ВЫЙ ТРАНСЛЯ́ТОР — см. *Транслятор*.

ОПЕРАТИ́ВНАЯ ПА́МЯТЬ — см. *Память*.

ОПЕРА́ТОР (позднелат. operator — работник, исполнитель, от лат. operor — работаю, действую) — 1) О. в вычислительной технике — профессиональный пользователь, контролирующий работу ЭВМ. 2) О. в программировании — предписание выполнить законченное действие в языках программирования высокого уровня. Термин «О.» был введён в качестве отличительного от «машинной команды» для того, чтобы подчеркнуть функцию предписания языка программирования как оператора в математич. смысле, т. е. отображения либо одного состояния памяти на другое (О. *присваивания*), либо состояния памяти на одно из значений **истина** или **ложь** (О. проверки *условия*).

ОПЕРАЦИО́ННАЯ ОБСТАНО́ВКА — часть описания обстановки, характеризующая операционные возможности *исполнителя*. О. о. обычно включает в себя перечень доступных исполнителю действий, список свойств обрабатываемой информации, распознаваемых исполнителем, перечень отказов, т. е. аварийных ситуаций, блокирующих дальнейшие действия исполнителя. Если исполнитель взаимодействует с *поручителем*, в описание О. о. входят также аналогичные сведения о возможных действиях поручителя.

ОПЕРАЦИО́ННАЯ СИСТЕ́МА ЭВМ — комплекс программ, постоянно находящихся в памяти ЭВМ, организующий управление устройствами машины и её взаимодействие с пользователями. В О. с. обычно входят следующие программы: стартовая программа, производящая запуск ЭВМ и её самоконтроль; контроллеры внешних устройств, управляющие их работой, диспетчер, устанавливающий очерёдность исполнения

программ, наз. также **монитором** или **супервизором**; **редакторы** работы со структурными объектами; **загрузчик** для ввода программ в оперативную память; **файловая система**, ведающая информацией, находящейся во внешней памяти; **административная система**, ведущая учёт работы и расходования ресурсов (рабочего времени процессора и используемой памяти).

Для нек-рых типов ЭВМ, напр. для *Единой системы электронных вычислительных машин*, понятие О. с. трактуется расширительно, и к ней относится всё базовое программное обеспечение, в частности системы программирования и системы управления базами данных.

ОПЕРА́ЦИЯ в информатике — законченное действие по преобразованию информации.

ОПО́РНАЯ ПА́МЯТЬ ДИСПЛЕ́Я — см. *Дисплей*.

ОПТИМИЗА́ТОР (от лат. optimus — наилучший) — см. *Транслятор*.

ОПТИ́ЧЕСКАЯ ПА́МЯТЬ (от греч. ὀπτικός — зрительный) — см. *Память*, *Оптический диск*.

ОПТИ́ЧЕСКИЙ ДИСК в вычислительной технике — вид внешней памяти, в которой носителем информации является пластмассовый диск, а запись и считывание производится лучом лазера (**оптическая память**). Запись и считывание происходят последовательно при вращении диска в плоскости, перпендикулярной лучу, и переводом луча с одной дорожки на другую. Использование луча лазера в качестве канала передачи позволяет передавать сигналы очень большой частоты (до десятков МГц) и фокусировать луч на очень малом участке поверхности носителя (световое пятно диаметром в несколько микрон). В результате О. д. обеспечивает хранение и быстрое прочтение очень больших объёмов информации: до 0,5 Гбайта информации на диске диаметром 12 см, соответствующем одному из стандартов на так наз. компакт-кассеты с оптич. дисками, используемые в качестве грампластинок.

Обычно О. д. применяется в качестве односторонней памяти: запись информации производится в заводских условиях на матрицу, с помощью к-рой штампуются О. д. в нужном количестве экземпляров. В связи с этим О. д. используется главным образом для хранения информации энциклопедически-справочного характера, содержащей тексты, машинные программы и изображения.

Информация в О. д. хранится в двоичной форме. Один из способов записи на О. д. состоит в выжигании лучом лазера небольшого углубления на поверхности носителя в точке записи единицы. При чтении углубление фиксируется сдвигом фаз лучей, отражённых от углубления и от нетронутой поверхности носителя.

ОС — *операционная система*.

ОСНО́ВНОЙ АЛГОРИ́ТМ — *алгоритм*, в котором есть команда *вызова* другого (вспомогательного) алгоритма.

ОСТАНО́В — *команда* исполнителю прекратить исполнение алгоритма (программы). В нек-рых языках программирования О. понимается как пауза: если поручитель возобновляет исполнение программы, то исполнитель исполняет команду, стоящую в программе непосредственно за О. От О., предусмотренных программой, следует отличать **аварийные О.**, или **отказы**, т. е. прекращение исполнения программы, вызванное невозможностью для исполнителя выполнить очередную команду, напр. команду разделить число на нуль или команду роботу двинуться вперёд, когда перед ним находится препятствие. Отказ обычно сопровождается выдачей поручителю нек-рой сигнальной информации, привлекающей его внимание к наступлению отказа и его причине.

ОТКА́З — аварийный *останов*.

ОТЛА́ДКА программы — систематический процесс испытания работы программы и исправления обнаруживаемых при этом ошибок. О. состоит из многократного исполнения программы для специально подобранных тестовых наборов исходных данных. Тестовые наборы составляются таким образом, чтобы поведение программы при исполнении на этих наборах, в том числе результат исполнения, было бы заранее известно, при этом процесс исполнения затрагивал бы все команды программы. При О. программы исполняются в особом режиме, при к-ром ЭВМ выдаёт дополнительную информацию, обычно скрытую от поручителя в режиме автоматич. исполнения. Эта информация состоит из промежуточных значений, принимаемых величинами программы, фактич. числа повторений команд цикла, указаний о выбираемых ветвях вычислений в командах *ветвления*, перечня обращений к внешней памяти и т. п. Сопоставление такого рода «протокола» исполнения с предсказанным поведением программы позволяет не только обнаруживать расхождения в результатах, но и вскрывать причины таких расхождений.

О. — кропотливый и трудоёмкий процесс, к-рый занимает значительную долю общего времени разработки *программного обеспечения*. О. практически никогда не даёт исчерпывающих доказательств правильности каждой команды программы и лишь понижает до приемлемого предела вероятность неправильного срабатывания программы при её производственной эксплуатации. Именно поэтому получают постепенное развитие методы систематич. программирования, при к-рых построение программы сопровождается предъявлением доказательства её точного соответствия своей формальной *спецификации*.

ОТЛА́ДЧИК в программировании — часть системы программирования, способствующая *отладке* программ. Обеспечивает особый режим исполнения отлаживаемой программы, сопровождаемого выдачей «протокола» её исполнения. При отладке программ, выраженных на языке программирования высокого уровня, возникает дополнительная проблема, состоящая в том, что исполняется не сама программа, а её «машинный образ», полученный в результате трансляции. В таких случаях О. поддерживает словарь соответствия конструкций входного языка их машинным образам, что позволяет выдавать протокол исполнения машинной программы в понятиях языка программирования высокого уровня.

ОТРИЦА́НИЕ — логическая связка, означающая «не».

П

ПАКЕ́Т — см. *Передача данных*.

ПАКЕ́Т ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРА́ММ, ППП, — организованная совокупность программ постоянного применения для решения некоторого класса однотипных задач. Простейшим примером ППП является *подпрограмма* вычисления какой-либо математич. функции. Частной задачей из класса в данном случае является задача определения значения функции для заданных значений аргументов. Вместо того чтобы программировать вычисление функции для каждого значения аргумента, поручителю достаточно ввести в ЭВМ нужное значение и вызвать подпрограмму. *Библиотеки* стандартных подпрограмм исторически образовали первое поколение ППП. Примером более сложного ППП является программа вычисления определённого интеграла. Помимо обычных числовых параметров — пределов интегрирования и точности — аргументом является также формула подинтегральной функции, к-рая записывается на специальном входном языке ППП. В этом случае ППП имеет в своём составе **препроцессор**, осуществляющий перевод заданной формулы во вспомогательную подпрограмму, к к-рой обращается основная программа интегрирования.

С появлением *вычислительных центров* коллективного пользования и *персональных ЭВМ* получили развитие ППП, к-рые не просто решают типовую задачу из нек-рого класса, но и поддерживают целиком тот или иной вид профессиональной деятельности человека. Среди таких пакетов выделяются ППП общего назначения, поддерживающие т. н. универсальные

виды деятельности, присущие многим профессиям. Напр., ППП работы с документами, включая их подготовку, оформление, редактирование, печатание и рассылку; пакеты для ведения персональных досье, картотек и др. информационных фондов; ППП для выполнения расчётных работ с электронными таблицами.

Развитые ППП во многом воспроизводят структуру базового *программного обеспечения* и содержат мониторы для вызова библиотечных подпрограмм, языковые процессоры для перевода формулировки прикладной задачи на универсальный язык программирования, архивные подсистемы, специализированные базы данных, средства диалогового взаимодействия с пользователем. В ряде случаев такие подсистемы удаётся сделать типовыми, так чтобы они могли входить в ППП разных применений. Возможность таких типовых решений создаётся выделением в ППП двух разделов: т. н. системного наполнения, т. е. типовых подсистем, поддерживающих общую структуру пакета, его связь с базовым программным обеспечением и пользователем, и функционального наполнения, т. е. набора специальных программ, определяющих конкретную область применения ППП.

ПАКЕ́ТНЫЙ РЕЖИ́М — режим последовательного или совместного автоматического исполнения некоторой совокупности программ (пакета), заранее введённых вместе со своими входными данными во внешнюю память ЭВМ. См. также *Единая система электронных вычислительных машин*.

ПА́МЯТЬ в вычислительной технике — устройство ЭВМ, предназначенное для хранения обрабатываемой информации. Устройства П. состоят из трёх главных частей: *носителя* (информации) — физич. среды, непосредственно хранящей информацию, управления — устройства, выполняющего поиск нужного места на носителе и записывающего или считывающего информацию, и канала связи — линии связи П. с другими устройствами ЭВМ.

Характер носителя определяет следующие основные типы П.: регистровая П., в к-рой носителем является электронная схема, составляющая часть процессора ЭВМ; полупроводниковая П., в к-рой носителем является большая *интегральная схема*; ферритовая П., в к-рой носителем является сеть ферромагнитных сердечников в виде миниатюрных колечек, нанизанных на канву соединительных проводов; магнитная П., в к-рой носителем является магнитный слой, нанесённый на подвижную плоскую среду (см. *Магнитный диск*, *Магнитный барабан*, *Магнитная лента*); оптическая П., в к-рой носителем является светочувствительный слой, нанесённый на подвижную поверхность, а считывание и запись производится лучом лазера (см. *Оптический диск*); П. на перфоносителях, имеющих вид бумажной или пластмассовой ленты или карты (см. *Перфокарта*, *Перфолента*).

С точки зрения размещения информации носитель является протяжённым по одному или двум измерениям пространством, в к-ром выделены фиксированные позиции, хранящие бит информации. Запись информации заключается в скачкообразном изменении физич. состояния носителя в позиции. В зависимости от обратимости или необратимости изменения состояния различают носители с однократной (перфоносители, большая часть видов оптич. П., нек-рые виды полупроводниковой П.) и многократной (регистровая, магнитная, ферритовая П. и большая часть полупроводниковой П.) записью. Двумерный носитель позволяет обеспечить произвольный доступ к информации, когда время нахождения позиции не зависит от её местонахождения на носителе. Одномерные носители (перфолента, магнитная лента) обеспечивают последовательный доступ, когда достичь заданной позиции можно, только перебрав все «предшествующие» позиции.

В П. с произвольным доступом каждая позиция имеет адрес — число, к-рое однозначно выделяет данную позицию среди других. Диапазон адресов определяет общую ёмкость (объём) П. Обычно носители П. объединяют в своего рода батареи, позволяющие по одному адресу записать или прочитать сразу несколько битов информации, образующих одно машинное слово, обычно составляющее целое число *байтов*. Адресуемое место хранения одного машинного слова называют ячейкой П.

Вслед за ёмкостью основной характеристикой П. является среднее время доступа к её ячейкам. При заданной стоимости П. её ёмкость и время доступа являются конкурирующими показателями, поэтому в конструкции ЭВМ П. организована в виде иерархии подсистем. В этой иерархии прежде всего различается основная, или внутренняя, П. ЭВМ, непосредственно связанная с процессором (менее ёмкая и более быстрая), и дополнительная, или внешняя, П. (более ёмкая и менее быстрая). Информация из внешней П. перед её обработкой переписывается большими блоками во внутреннюю П.

В современных крупных ЭВМ средние характеристики разных уровней П. выглядят следующим образом:

Вид памяти	Объём	Время доступа
Регистровая	10—100 слов	10 нс
Сверхоперативная	Тыс. слов	100 нс
Оперативная	Млн. слов	500 нс
Массовая	Десятки млн. слов	мкс
Внешняя	Сотни млн. слов	мс
Архивная	Тысячи млн. слов	мс

Детальный учёт структуры П. затрудняет процесс программирования для ЭВМ, поэтому во многих *операционных системах* реализуется механизм т. н. виртуальной П., к-рый позволяет программе использовать большой диапазон адресов, существенно превышающий ёмкость оперативной П. Информация разбивается на порции, наз. страницами, и фактически располагается на всех уровнях П. от регистровой до внешней. Управляющий блок операционной системы следит за размещением страниц и организует необходимую циркуляцию информации между уровнями П. в зависимости от спроса на те или иные страницы.

ПАРАЛЛЕ́ЛЬНАЯ ОБРАБО́ТКА ИНФОРМА́ЦИИ — см. *Обработка информации*.

ПАРАЛЛЕ́ЛЬНОЕ ИСПОЛНЕ́НИЕ — см. *Исполнение*.

ПАРАЛЛЕ́ЛЬНЫЙ ИНТЕРФЕ́ЙС — см. *Интерфейс*.

ПАРАЛЛЕ́ЛЬНЫЙ РЕГИ́СТР — см. *Регистр*.

ПАРА́МЕТР (от греч. παραμετρῶν — отмеряющий) в программировании — аргумент или результат алгоритма (процедуры), указываемый в его заголовке. Имя, обозначающее П., наз. формальным П. В общем случае запись алгоритма, содержащая формальный П., является своего рода заготовкой, приобретающей законченный и подлежащий исполнению вид после текстуальной подстановки на место фактического П. величины, выражения или какой-либо др. конструкции языка. Фактич. П. указываются в команде *вызова* или задаются поручителем перед исполнением алгоритма. Если формальный П. является по смыслу величиной, то его замена на фактич. П. может выполняться не текстовой подстановкой, а путём вызова по значению. В этом случае формальный П. трактуется как переменная величина алгоритма. Если формальный П. является аргументом, то ему присваивается текущее значение соответствующего фактич. П. в качестве начального значения перед началом исполнения алгоритма. Если формальный П. является результатом, то по завершении исполнения алгоритма полученное значение П. присваивается соответствующему фактич. П.

ПАСКА́ЛЬ — учебно-производственный *язык программирования*; ориентирован на обучение программированию как систематической дисциплины, основанной на ряде фундаменталь-

ных понятий языка. П. широко используется также в качестве системного языка программирования (напр., для написания *трансляторов*). В 80-х гг. 20 в. П. получил широкое распространение в качестве языка для *персональных ЭВМ*.

ПЕРЕБРО́СКА — см. *Виртуальный объект*.

ПЕРЕДА́ТЧИК — см. *Канал связи*.

ПЕРЕДА́ЧА ДА́ННЫХ — новый вид автоматической электросвязи, позволяющий обмениваться данными между ЭВМ, находящимися на большом расстоянии друг от друга. П. д. происходит по стандартным *каналам связи*, предоставляемым для эксплуатации государственной системой связи. Для подсоединения к каналам ЭВМ должна быть снабжена переходным устройством — м о д е м о м (сокращение от модулятор — демодулятор), преобразующим данные в сигналы, пригодные для передачи по каналу связи.

Различие между двумя главными способами П. д. аналогично разнице между телефонным разговором (м о н о п о л ь н а я с в я з ь) и отправкой телеграммы (к о м м у т а ц и я п а к е т о в). При монопольной связи П. д. предшествует установление прямого электрич. соединения между источником и получателем данных, и используемый при этом канал недоступен для других абонентов. Коммутация пакетов предполагает наличие так наз. с е т и П. д.— системы каналов связи и специальных к о м м у н и к а ц и о н н ы х ЭВМ, управляющих движением и хранением данных в сети. Источник данных формирует в своей внешней памяти порцию передаваемых данных (п а к е т), снабжает её адресом получателя и отдаёт в сеть П. д., т. е. ближайшей коммуникационной ЭВМ. Пакет, попав в сеть П. д., движется по доступным каналам связи от одного узла сети к другому, пока не попадёт к получателю.

ПЕРЕДА́ЧА ИНФОРМА́ЦИИ — один из видов работы с информацией. П. и. происходит от и с т о ч н и к а к п о л у ч а т е л ю информации. Потенциальным источником информации может быть любой предмет или явление как живой, так и неживой природы. Мы говорим о нек-ром объекте как о получателе информации, если приходящие от источника сигналы, являющиеся физич. носителями передаваемой информации, приводят к нек-рому изменению состояния объекта.

П. и.— это реальный физич. процесс, протекающий в среде, разделяющей источник и получатель. Передаваемая информация обладает определённым строением, к-рое в своём простейшем выражении выглядит как последовательность сигналов, каждый из к-рых переносит элементарную порцию информации. Эта последовательность сигналов называется с о о б щ е н и е м.

Следует различать сообщение и заключённую в нём информацию. Информативность сообщения зависит как от возможного разнообразия сообщений, порождаемых источником, так и от способности получателя к внутренней перестройке под воздействием сообщения. Поскольку в общем случае такая перестройка может быть сколь угодно глубокой, невозможно определить верхнюю меру информативности сообщения. Существует, однако, мера минимального количества информации, заключённого в сообщении. Неформально эта мера определяется как минимальное количество вопросов (с ответами типа «да» — «нет»), к-рое нужно задать, чтобы отличить данное сообщение от любого из других возможных. При кодировании сообщений двоичными сигналами количество информации, заключённое в любом двоичном слове нек-рой длины n, совпадает с этой длиной, что и оправдывает использование *бита* в качестве единицы объёма информации.

ПЕРЕДА́ЧИ ИНФОРМА́ЦИИ УСТРО́ЙСТВО — см. *Внешнее устройство*.

ПЕРЕКЛЮЧА́ТЕЛЬ — 1) П. в в ы ч и с л и т е л ь н о й т е х н и к е — электромеханическая или электронная схема, позволяющая передавать сигнал по одному из нескольких возможных направлений. Простейшим является ручной П., в к-ром выбор направления осуществляется ручным перемещением контакта, соединяющего вход с одним из выходов. В электромеханич. П. вход соединяется с каждым из выходов с помощью электромагнитных реле, из к-рых в любой данный момент включено лишь одно. В электронных П. роль реле играют вентили.

2) П. в п р о г р а м м и р о в а н и и — вид команды *выбора*, в к-ром возможные варианты продолжения исполнения образуют занумерованную последовательность, а выбор между ними задаётся указанием номера. Напр., в языке алгол-60 П. задаётся его описанием, имеющим вид **switch** $I:=M_1, M_2, \ldots, M_n$, где $M_1, \ldots, M_n$ — произвольные n меток программы, а I — имя П. Переход по П. имеет вид оператора перехода **go to** $I\,[E]$, где E — любое целочисленное выражение. Если текущее значение E равно $i\,(1\leqslant i\leqslant N)$, происходит переход к оператору, помеченному меткой M_i.

ПЕРЕМЕ́ННАЯ ВЕЛИЧИ́НА — см. *Величина*.

ПЕРЕМЕЩА́ЕМАЯ ФО́РМА ПРОГРА́ММЫ — см. *Загрузчик*.

ПЕРЕХО́Д в п р о г р а м м и р о в а н и и — *команда* исполнителю продолжать исполнение алгоритма (программы) с указанного этой командой места. Универсальным способом указания мест П. в записи алгоритма являются *метки* команд — имена, помещаемые впереди команды и используемые в качестве её обозначения. Различают безусловные и условные П. Б е з у с л о в н ы й П. по метке M предписывает выполнить следующей команду, помеченную меткой M. У с л о в н ы й П. содержит условие P и (в общем случае) две метки M_1 и M_2. В зависимости от соблюдения или несоблюдения условия P происходит П. по метке M_1 или M_2 соответственно. При указании только одной метки альтернативой является переход к команде, следующей за командой П.

Во многих *языках программирования* метить можно любую команду (оператор) и помещать команды П. в любом месте программы. В результате управляющая структура программы может оказаться весьма запутанной. В языках так наз. с т р у к т у р н о г о п р о г р а м м и р о в а н и я изменение естественного порядка выполнения команд ограничивается структурными конструкциями типа команд *повторения*, *выбора*, *ветвления* и *вызова* процедуры, в к-рых переходы разрешаются только на закономерно указываемые места программы (программирование без команд П.). Примерами языков структурного программирования являются школьный алгоритмич. язык, язык рапира. Такие языки, как алгол-60, паскаль и фортран, допускают стиль структурного программирования в качестве добровольно соблюдаемых ограничений.

ПЕРИФЕ́РИЙНОЕ УСТРО́ЙСТВО ЭВМ — то же, что *внешнее устройство* ЭВМ.

ПЕРСОНА́ЛЬНАЯ ЭВМ (от лат. persona — личность), ПЭВМ,— малогабаритная *микро-ЭВМ*, устанавливаемая на рабочем месте пользователя в качестве приданного ему средства работы. Развитый комплект ПЭВМ включает в себя следующие устройства: *процессор* с оперативной и односторонней памятью, внешнюю память на гибком и (или) жёстком *магнитных дисках*, *клавиатуру*, средство перемещения курсора («мышь», или «колобок»), *дисплей* и *печатающее устройство*. Процессор может содержать устройство для сопряжения ПЭВМ с линиями связи, а также гнёзда для дополнительных плат, содержащих электронные схемы, расширяющие возможности ПЭВМ. Размеры стандартных ПЭВМ сравнимы с размером и массой обычного цветного телевизора, однако существуют варианты портативных однокорпусных ПЭВМ, к-рые помещаются в портфеле и весят 4—5 кг.

В односторонней памяти ПЭВМ размещаются ядро операционной системы и система программирования (обычно с языка бейсик). Объём оперативной памяти варьирует от 16 до 128 Кбайт в учебных ПЭВМ и от 64 до 512 Кбайт в ПЭВМ для профессиональной рабо-

ты. Память на гибких дисках составляет от 300 Кбайт до 1 Мбайт, а на жёстком диске — от 5 до 50 Мбайт.

ПЭВМ являются наиболее массовым видом вычислительной техники с мировым производством, исчисляемым миллионами штук в год.

ПЕРСОНА́ЛЬНЫЙ КОМПЬЮ́ТЕР, ПК, персональная ЭВМ, — малогабаритная *микро-ЭВМ*, устанавливаемая на рабочем месте пользователя в качестве приданного ему средства работы.

ПЕРФОКА́РТА (от лат. perforo — пробиваю), перфорационная карта,— прямоугольная карточка, обычно выполненная из тонкого эластичного картона (реже из пластмассы); служит для записи информации (её кодирования) пробивкой отверстий (перфораций) по определённой системе. Используется в качестве *носителя* данных для ЭВМ, а также в станках с программным управлением и т. п. Информация, записанная на П., доступна для многократного чтения, однако П. может быть использована только для однократной записи.

ПЕРФОЛЕ́НТА, перфорационная лента,— узкая тонкая лента из бумаги или пластмассы; служит для записи информации (её кодирования) пробивкой отверстий (перфораций) по определённой системе. Применяется только для однократной записи. Используется в качестве *носителя* данных для ЭВМ, в текстообрабатывающих устройствах, станках с программным управлением и т. п.

ПЕРФОНОСИ́ТЕЛЬ — см. *Память*, *Перфокарта*, *Перфолента*.

ПЕРФОРА́ТОР — *внешнее устройство* ЭВМ, предназначенное для занесения информации на промежуточные носители данных пробиванием отверстий (перфораций). П. различают по виду используемого носителя данных (ленточные или карточные П.); по способу ввода информации — с автоматич. вводом (напр., с ЭВМ) или с клавиатуры. По назначению П. делят на входные (для подготовки исходной информации, подлежащей обработке), выходные (для вывода результатов из ЭВМ) и дублирующие (перфораторы, репродукторы; для дублирования перфорированных носителей данных).

ПЕРФОРАЦИО́ННАЯ КА́РТА — *перфокарта*.

ПЕРФОРАЦИО́ННАЯ ЛЕ́НТА — *перфолента*.

ПЕЧА́ТАЮЩАЯ ГОЛО́ВКА в вычислительной технике — узел *печатающего устройства*, непосредственно переносящий красящее вещество на бумагу для построения печатного образа.

ПЕЧА́ТАЮЩЕЕ УСТРО́ЙСТВО, принтер, — электромеханическое устройство, автоматически печатающее результаты обработки информации ЭВМ на бумажных рулонах, лентах или листах в цифровой или буквенно-цифровой форме. К П. у. относятся *алфавитно-цифровое печатающее устройство*, электрофицированная пишущая машинка, телеграфный аппарат.

ПЕЧА́ТЬ — 1) П., печатающее устройство, в вычислительной технике — внешнее устройство ЭВМ для нанесения информации на бумагу. 2) П. в программировании — *команда* исполнителю напечатать на внешнем устройстве указанную информацию. В диалоговых системах обработки текстов пользователь с помощью экранного редактора может сформировать на экране дисплея точный образ печатаемой страницы, после чего команде П. остаётся лишь воспроизвести этот образ на бумаге. В программах, исполняемых в пакетном режиме, способ размещения печатаемой информации на бумаге указывается в виде форматного параметра команды П. Задание формата определяет число символов в строке, разбиение текста на страницы, позволяет организовывать числовой материал в виде таблицы, выбирать шрифт, ширину пробелов и т. п. В командах П. обычно существует подразумеваемый стандартный формат П., что позволяет в простых случаях полностью опускать форматный параметр.

ПК — *персональный компьютер*.

ПЛ/I (Programming Language; англ. program — программа, language — язык)— многоцелевой универсальный программно-ориентированный *язык программирования*. Предназначен для программирования широкого круга задач: вычислительных процессов, обработки символьной информации, задач обработки данных, процессов моделирования, решения логич. задач и задач в реальном масштабе времени, а также для разработки систем математич. обеспечения ЭВМ. ПЛ/I в значительной степени объединяет в себе фундаментальные понятия и средства таких языков программирования, как фортран, алгол, кобол и др. Характерной его особенностью является ориентация на современные *операционные системы*.

ПЛА́ВАЮЩАЯ ЗАПЯ́ТАЯ, представление чисел с плавающей запятой, — способ записи чисел в позиционной системе счисления с основанием R, при котором число N представляется в виде $N=\pm R^P\cdot q$, где p — целое число, называемое порядком числа N, а q — правильная дробь $\left(\frac{1}{R}\leqslant q<1\right)$, называемая мантиссой числа N. П. з. является основным способом представления чисел в ЭВМ, т. к. позволяет поддерживать вычисления с сохранением заданного числа значащих цифр в большом диапазоне значений чисел.

Действия над числами с П. з. требуют отдельных операций с порядками и с мантиссами чисел. Пусть в двоичной системе $N_1=2^{p_1}\cdot q_1$ и $N_2=2^{p_2}\cdot q_2$ (для определённости $p_1\geqslant p_2$, знак числа отнесён к знаку мантиссы). Тогда в основе арифметики чисел с П. з. лежат следующие соотношения:

$$N_1\pm N_2=2^{p_1}\cdot(q_1\pm 2^{-(p_1-p_2)}\cdot q_2),$$
$$N_1\cdot N_2=2^{p_1+p_2}\cdot(q_1\cdot q_2),$$
$$N_1/N_2=2^{p_1-p_2}\cdot(q_1/q_2).$$

Кроме указанных действий, реализация арифметики чисел с П. з. в ЭВМ требует дополнительных операций по определению знака результата, приведению результирующей мантиссы к требуемому диапазону (так наз. нормализация результата) и удержанию заданного форматом машинного слова числа цифр в мантиссе, сопровождаемому округлением.

ПЛАНШЕ́ТНЫЙ ГРАФОПОСТРОЙТЕ́ЛЬ — см. *Графопостроитель*.

ПЛА́ТА (от франц. plat — плоский)— пластина из электроизоляционного материала, предназначенная для монтажа электро- и радиоэлементов радиоэлектронного или электротехнич. устройства. Важной разновидностью является коммутационная П.— пластина из гетинакса, текстолита и т. п., на поверхности к-рой определённым образом (напр., фотохимич. или электрохимич. травлением) нанесены тонкие электропроводящие полоски для соединения устанавливаемых на П. транзисторов, дисков и др. устройств.

ПМК — программируемый *микрокалькулятор*.

ПОВТОРЕ́НИЕ, цикл, в программировании — *команда* исполнителю многократно повторить указанную последовательность команд. П. является важнейшим средством, позволяющим исполнителю выполнять длинные последовательности действий на основе коротких предписаний.

В школьном алгоритмич. языке используются две наиболее типичные команды П.: цикл типа **пока** и цикл типа **для**. Цикл типа **пока** содержит повторяемую серию команд СЕРИЯ и условие У и записывается в строчку

пока У **нц** СЕРИЯ **кц**

или в столбик

```
пока У
 | нц
 |   СЕРИЯ
 | кц
```

с соблюдением указанного отступа для большей наглядности. Этой же цели может служить вертикальная линия, соединяющая служебные слова **нц** (начало цикла) и **кц** (конец цикла), к-рые играют роль скобок, ограничивающих повторяемую серию.

Исполненне цикла типа **пока** начинается с проверки условия У. Если оно не соблюдается, выполнение команды П. завершается. Если условие У соблюдается, то исполняется СЕ-

РИЯ, после чего делается попытка снова выполнить команду П.

Цикл типа **для** содержит параметр цикла i и записывается в строчку:

для $i=E_1$ **шаг** E_2 **до** E_3 **нц** СЕРИЯ **кц**

или в столбик:

для $i=E_1$ **шаг** E_2 **до** E_3
нц
СЕРИЯ
кц

Исполнение цикла **для** начинается с задания параметру начального значения, равного текущему значению E_1.

Перед каждым повторением текущее значение параметра сравнивается со значением предела его изменения E_3. Предел считается исчерпанным, если $i>E_3$ при положительном шаге E_2 и если $i<E_3$ при отрицательном шаге E_2. При исчерпании предела выполнение команды П. завершается. Если предел не исчерпан, СЕРИЯ исполняется при текущем значении параметра i. По завершении СЕРИИ к параметру прибавляется значение шага E_2, после чего предпринимается попытка снова повторить цикл.

Конструкция шаг E_2 может опускаться, если предполагается, что шаг равен 1.

В языках программирования применяются также многие другие модификации команд и операторов П.

ПОДГОТО́ВКИ ДА́ННЫХ УСТРО́ЙСТВО — см. *Внешнее устройство.*

ПОДПРОГРА́ММА — *программа*, реализующая вспомогательный алгоритм. При исполнении П. на ЭВМ необходимо предусматривать выполнение ряда вспомогательных действий: выделение участка памяти для размещения П.; настройка П. по месту, т. е. модификация адресов команд и величин П., зависящих от её положения в памяти; учёт фактич. *параметров*, заданных в команде *вызова* П.; запоминание места ухода из главной программы для исполнения П., непосредственное исполнение П.; возврат к главной программе для продолжения её исполнения. Указанные вспомогательные действия вносятся в П. в виде дополнительных команд при её трансляции с языка программирования на машинный язык либо выполняются управляющей программой, постоянно находящейся в ЭВМ и организующей исполнение П.

ПОЗИЦИО́ННЫЙ КОД (от лат. positio — положение) — см. *Кодирование.*

ПО́ИСК ИНФОРМА́ЦИИ — один из основных видов работы с *информацией*. В широком плане является основой познавательной деятельности человека во всех её проявлениях: в удовлетворении любопытства, путешествиях, научной работе, чтении и т. п.; в более узком смысле означает систематич. процедуры поиска в организованных хранилищах информации: архивах, библиотеках, справочниках, досье, картотеках, находящихся как в собраниях физич. документов, так и на *носителях* данных, в *памяти* ЭВМ.

Искомая (неизвестная) информация всегда ассоциируется с нек-рой известной информацией, к-рая в виде *ключа* или поискового предписания служит опорой для П. и. Напр., мы хотим в адресном бюро узнать адрес человека. Известные нам фамилия, имя, отчество и возраст ассоциируются с неизвестным нам адресом и служат ключом к его розыску. Организация хранения данных, допускающая П. и. по ключу, реализуется в *ассоциативной памяти*; более развитые виды П. и. на основе поисковых предписаний реализуются в системах управления *базами данных*.

ПОИСКО́ВЫЙ О́БРАЗ — см. *Ассоциативная память.*

ПОКОЛЕ́НИЕ ЭВМ — период развития вычислительной техники, характеризуемый в начальный момент скачком в росте основных характеристик ЭВМ, вызванном обычно переходом на новую элементную базу, а в последующие моменты отмечаемый относительной стабильностью архитектурных и технич. решений. Ниже следует краткая сводка ориентировочных показателей и ступеней развития четырёх поколений ЭВМ по следующей схеме: временной период; элементная база; быстродействие; объём оперативной памяти; внешние устройства; новая архитектура; программное обеспечение.

Первое поколение. 1945—60; вакуумные лампы, память на электростатич. трубках; 0,1 МИПС; 100 Кбайт; магнитные барабан и лента, перфокарта и перфолента, цифровая печать и телетайп; архитектура фон Неймана; библиотеки стандартных программ и ассемблеры.

Второе поколение. 1955—70; полупроводниковые диоды и транзисторы, память на ферритовых сердечниках; 1 МИПС; 1 Мбайт; АЦПУ, графопостроитель, магнитный диск; совмещение работы отдельных устройств, мультипрограммный режим; операционные системы, языки программирования высокого уровня и трансляторы, системы управления базами данных.

Третье поколение. 1965—80; интегральные схемы, полупроводниковая память; 10 МИПС; 10 Мбайт; дисплеи, гибкие диски, матричные принтеры; мини-ЭВМ, сети ЭВМ и системы коллективного пользования; диалоговые системы, машинная графика, системы обработки текстов, промышленное производство программного обеспечения.

Четвёртое поколение. 1975—90; сверхбольшие интегральные схемы, полупроводниковая память до 256 Кбайт на кристалл; 100 МИПС; 100 Мбайт; лазерный принтер, винчестерский диск, оптич. диск; микро- и персональные ЭВМ, многопроцессорные системы; мини-ЭВМ высокой производительности (мегамини), локальные сети ЭВМ; базы знаний и экспертные системы, систематич. синтез программ, сборочное программирование, пакеты прикладных программ общего назначения.

Черты ЭВМ пятого поколения ещё только складываются. Их элементная база развивается эволюционно, однако ожидается достижение быстродействия свыше 1000 МИПС и объёма памяти до 1000 Мбайт. Создаются «супермикро» персональные ЭВМ с быстродействием до 10 МИПС. Значительное место в применении ЭВМ этого поколения займут методы искусственного интеллекта, использование логич. вывода в обработке и поиске информации.

ПОЛЕВО́Й ТРАНЗИ́СТОР — см. *Транзистор.*

ПОЛУПРОВОДНИКО́ВАЯ ПА́МЯТЬ — см. *Память.*

ПО́ЛЬЗОВАТЕЛЬ — человек, применяющий ЭВМ в своей работе; организация-заказчик, приобретающая ЭВМ в пользование.

ПОРУЧИ́ТЕЛЬ — человек или автоматическое устройство, которое поручает *исполнителю* выполнить алгоритм или программу и сообщает ему для этой цели текст предписания и необходимые исходные данные.

ПОРЯ́ДОК числа — см. *Плавающая запятая.*

ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНАЯ ОБРАБО́ТКА ИНФОРМА́ЦИИ — см. *Обработка информации.*

ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕ́ЛЬНЫЙ РЕГИ́СТР — см. *Регистр.*

ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНЫЙ ДО́СТУП к информации — см. *Память.*

ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРФЕ́ЙС — см. *Интерфейс.*

ПОСЛЕ́ДОВАТЕЛЬНЫЙ РЕГИ́СТР — см. *Регистр.*

ПОСТОЯ́ННАЯ ВЕЛИЧИ́НА — см. *Величина.*

ППП — *пакет прикладных программ.*

ПРАГМА́ТИКА (от греч. πράγμα — дело, действие) — см. *Язык.*

ПРЕДИКА́Т (от позднелат. praedicatum — сказанное) в программировании — *условие* в алгоритме или программе, выраженное в виде логической формулы, содержащей числовые или текстовые величины.

ПРЕДМЕ́ТНАЯ О́БЛАСТЬ — см. *Алгоритмизация, Язык.*

ПРЕДПИСА́НИЕ — текст, выраженный повелительными предложениями и побуждающий к действию.

ПРЕДСТАВЛЕ́НИЕ знаний — см. *Искусственный интеллект.*

ПРЕДСТАВЛЕ́НИЕ литеры — см. *Литера.*

ПРЕПРОЦЕ́ССОР — см. *Пакет прикладных программ.*

ПРЕРЫВА́НИЕ в вычислительной технике — приостановка исполнения программы ЭВМ, вызванная наступлением события, возможность которого предусмотрена, но момент наступления заранее неизвестен. Различаются внутренние и внешние П. Внутренние П. возникают

из-за невозможности выполнить очередную команду программы (см. *Останов*), напр. попытка разделить на нуль. Внешние П. возникают, когда совместно действующее *внешнее устройство* ЭВМ требует к себе внимания *процессора*, напр. из-за необходимости срочно отправить в память текст, пришедший по линии связи.

Для обработки П. процессор содержит в своём устройстве управления специальный регистр П., каждый двоичный разряд к-рого соответствует одной из возможных причин П. Появление единицы в разряде регистра означает возникновение причин для П. В этом случае процессор завершает выполнение очередной команды, запоминает адрес следующей команды основной программы, а сам переключается на исполнение специальной постоянно находящейся в машине программы обработки данного П. После завершения обработки основная программа продолжает исполняться с запомненной команды. При одновременном появлении нескольких причин для П. срабатывает определённая схема приоритетов, определяющая очерёдность обработки П.

ПРЕРЫВА́НИЯ СИСТЕ́МА — комплекс, который состоит из устройства процессора, воспринимающего сигналы прерывания, и программы-диспетчера, составляющего часть *операционной системы* ЭВМ и управляющего обработкой этих прерываний.

ПРИЁМНИК — см. *Канал связи.*

ПРИКЛАДНА́Я ИНФОРМА́ТИКА — см. *Информатика.*

ПРИКЛАДНА́Я ПРОГРА́ММА — программа, составленная для конкретного применения ЭВМ в интересах определённого круга пользователей.

ПРИКЛАДНО́Е ПРОГРА́ММНОЕ ОБЕСПЕЧЕ́НИЕ — см. *Программное обеспечение.*

ПРИ́НТЕР (англ. printer) — то же, что *печатающее устройство.*

ПРИСВА́ИВАНИЕ, присвоение, в программировании — *команда* исполнителю вычислить текущее значение указанного выражения и задать его в качестве нового значения указанной переменной. Выражение наз. источником П., а переменная — получателем П. Если E — источник и y — получатель, то в языках программирования используются следующие записи команды (оператора) П.:

$y := E$ (школьный алгоритмич. язык, алгол-60, алгол-68, паскаль)

$y = E$ (фортран, бейсик).

Реже применяются правосторонние П., в к-рых получатель стоит справа от источника:

$E \to y$, $E =: y$.

ПРОБЛЕ́МНО-ОРИЕНТИ́РОВАННЫЙ ПРОЦЕ́ССОР — см. *Процессор*, *Язык программирования.*

ПРОБЛЕ́МНО-ОРИЕНТИ́РОВАННЫЙ ЯЗЫК — см. *Язык программирования.*

ПРОГРА́ММА (греч. προγραμμα — объявление) — план действий, подлежащих выполнению некоторым исполнителем, обычно автоматическим устройством (чаще всего ЭВМ); предписание, *алгоритм.*

ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ — 1) этап решения задачи на ЭВМ, состоящий в разработке *программы* в соответствии с *алгоритмом* решения задачи, её *отладке* и дальнейшем развитии программы в ходе её применения.

2) Раздел *информатики*, изучающий методы и приёмы построения, отладки и развития программ для ЭВМ. Имеет место также расширенное представление о П., включающее в себя разработку алгоритма решения задачи, однако по мере развития методов точного формулирования задач на основе строгой теоретич. *модели* предметной области задачи разработка абстрактного алгоритма (см. *Алгоритмизация*) и его обоснование выделяются в отдельный этап.

П. происходит всегда в нек-рой конкретной *программной обстановке*, задающей тип ЭВМ, *язык программирования* и те или иные средства разработки программ (*библиотека* стандартных программ и модулей, *экспертная система*, *база данных*, *редактор*, *транслятор*, *отладчик* и т. п.). Задаются также ограничения на время исполнения программы и объём используемой памяти. Важной характеристикой является также представление о жизненном цикле разрабатываемой программы: одноразового или многократного применения; будет ли программа товарным продуктом, отчуждаемым от разработчиков; автономная программа или входящая в систему; диалоговая программа или работающая в чисто автоматич. режиме и т. п. Общим требованием является обеспечение достоверности и надёжности программы.

Различают три типа П.: синтезирующее, сборочное и конкретизирующее. Синтезирующее П.— полное построение программы по заданной *спецификации* задачи или по общему алгоритму её решения. Остальные виды П. опираются на разного рода заранее составленные заготовки программы. Сборочное П. опирается на библиотеку модулей или подпрограмм и состоит в выборе подходящих модулей и в их быстрой (иногда автоматизированной) сборке в результирующую программу, решающую задачу из того класса, на к-рый рассчитана библиотека модулей. Конкретизирующее П. предполагает существование универсальной программы, решающей любую задачу данного класса, и состоит в адаптации универсальной программы к особенностям частной решаемой задачи. В результате получается либо более простая программа, либо использующая меньшее количество ресурсов, нежели в общем случае. На практике эти три вида П. обычно встречаются в комбинации.

П. как научно-технич. дисциплина изучает теорию, методологию и технологию П. Теория П. изучает математич. абстракции программ, правила точного формулирования условия задач и алгоритмов и их формальных преобразований. Важным разделом теории являются способы точного описания языков П. и правил их трансляции в *машинные языки.* Конечной целью теории П. является придание П. доказательного характера, т. е. когда систематич. синтез программы по формальному описанию задачи может сопровождаться строгим доказательством соответствия программы решаемой задачи. Методология изучает П. как процесс применения знаний и показывает, как надо сочетать доступные приёмы и средства П. для закономерного получения эффективной программы. Технология рассматривает П. как организованный производственный процесс создания программного продукта и состоит из организационно-административных установок и регламентов, технич. стандартов инструментальных программно-аппаратных средств, поддерживающих коллективную деятельность разработчиков.

ПРОГРАММИ́РОВАНИЯ СИСТЕ́МА — часть базового *программного обеспечения*, поддерживающая процесс *программирования* на ЭВМ. Традиционный состав П. с. включает в себя: *редактор* для построения программ и ввода их в ЭВМ; *интерпретатор* для непосредственного исполнения программ на входном языке П. с.; *транслятор*, или компилятор, для перевода программ с входного языка на машинный язык; *отладчик* для проверочных запусков программ и их исправления; *библиотеку* периода трансляции, содержащую подпрограммы, объединяемые с главной программой в процессе работы транслятора; библиотеку периода исполнения, содержащую подпрограммы на машинном языке, вызываемые при исполнении составленной программы; *монитор*, организующий функционирование П. с. в целом.

Развитие методов доказательного программирования, переход к промышленной разработке программ обогащают П. с. новыми средствами, включающими системы формального преобразования и верификации программ, средствами сборочного и конкретизирующего программирования, базами знаний и экспертными системами, средствами документирования и организационной поддержки процесса программирования.

ПРОГРАММИ́РУЕМЫЙ КАЛЬКУЛЯ́ТОР — см. *Калькулятор.*

ПРОГРАММИ́РУЕМЫЙ МИКРОКАЛЬКУЛЯ́ТОР — *микрокалькулятор*, имеющий память, в которую мо-

жет быть введена программа решения задачи в автоматическом режиме работы.

ПРОГРАММИ́СТ — человек, разрабатывающий программу; профессия, связанная с разработкой, отладкой и применением программ на ЭВМ.

ПРОГРА́ММНАЯ ОБСТАНО́ВКА — совокупность технических и программных средств, определяющая операционные возможности автоматизированной разработки *программ*. П. с. является результатом развития традиционных систем программирования в сторону охвата всех этапов разработки *программного обеспечения* и его сопровождения на стадии эксплуатации. Аппаратную основу П. о. составляет инструментальная ЭВМ, обеспечивающая спецификацию, модификацию, трансляцию, отладку и исполнение разрабатываемых программ, диалоговое взаимодействие разработчиков с ЭВМ и их связь друг с другом, информационную поддержку проекта и выпуск документации. Операционные возможности П. о. представляются в виде совокупности отдельных видов работы, используемых по выбору разработчика. Информационную основу П. о. составляет *база данных* проекта, осуществляющая хранение во внешней памяти инструментальной ЭВМ всей текущей документации по разработке программ. Развитие формальных математически доказательных методов разработки программ вводит в П. о. *базы знаний* и *экспертные системы*, содержащие описание предметной области и её теоретич. моделей, правила формального манипулирования с программами, разного рода нормативную и справочную информацию.

ПРОГРА́ММНОЕ ОБЕСПЕ́ЧЕНИЕ, математическое обеспечение, ЭВМ — совокупность *программ*, приданных ЭВМ и позволяющих использовать её по назначению. Различают базовое П. о., состоящее из программ универсального применения и программ, образующих неразрывное целое с конструкцией ЭВМ, и прикладное П. о., ориентирующее ЭВМ на те или иные конкретные применения.

Базовое П. о. представляет собой комплекс взаимосвязанных программ и поэтому называется также системным П. о., а входящие в его состав программы наз. системными программами. К базовому П. о. обычно относятся операционная система, система программирования и система управления базами данных. По мере продвижения *персональных ЭВМ* и *терминалов* на рабочие места специалистов, использующих компьютеры без посредничества операторов или профессиональных программистов, возникла необходимость включения в состав базового П. о. системных программ, образующих так наз. *интерфейс* с пользователем (программы обработки команд пользователя, выбираемых из заданного меню, редакторы и др. средства работы с текстами, средства машинной графики и воспроизведения информации на экране дисплея).

Прикладное П. о. отличается большим разнообразием и поставляется не в комплекте с ЭВМ, как базовое, а приобретается в розницу в зависимости от потребностей пользователя. Такое П. о. организовано в виде *библиотек* стандартных программ, *пакетов прикладных программ*, а также отдельных программ для конкретных применений.

ПРОГРА́ММНЫЕ СРЕ́ДСТВА — совокупность *программ*, собранная или разработанная для решения определённой задачи.

ПРОГРА́ММНЫЙ ПРОДУ́КТ — программа многократного использования, разработанная профессиональными программистами и переданная обществу для распространения и применения в качестве предмета производственного назначения или потребительского товара.

ПРОИЗВО́ЛЬНЫЙ ДО́СТУП к информации — см. *Память*.

ПРОПУСКНА́Я ПОЛОСА́ канала — см. *Канал связи*.

ПРОПУСКНА́Я СПОСО́БНОСТЬ канала — см. *Канал связи*.

ПРОСТА́Я ВЕЛИЧИНА́ — см. *Величина*.

ПРОСТА́Я КОМА́НДА — см. *Команда*.

ПРОСТЕ́ЙШИЙ КАЛЬКУЛЯ́ТОР — см. *Калькулятор*.

ПРОТОКО́Л (франц. protocole, от греч. πρωτόκολλον — первый лист манускрипта) в информатике — см. *Интерфейс*.

ПРОЦЕДУ́РА (франц. procédure, от лат. procedo — продвигаюсь вперёд) — *программа* в языке программирования, реализующая вспомогательный алгоритм (подпрограмму). Запись П. обычно состоит из двух частей — заголовка и тела. В заголовке П. указывается её имя, а также информация о её *параметрах*, достаточная для того, чтобы можно было бы правильно записать команду *вызова* П., не изучая тело. Тело П. является текстом, приобретающим вид законченной программы после подстановки значений её параметров. В нек-рых языках программирования тело П. должно содержать команду *возврата*, отмечающую момент завершения исполнения П.

Среди П. иногда выделяют П.-функции, вычисляющие нек-рое значение как функцию параметров-аргументов. Это позволяет записывать вызовы таких П. внутри выражений в виде обычных функциональных обозначений. Запись тела П.-функции требует специального соглашения для указания особой переменной, значение к-рой при завершении исполнения П. берётся в качестве вычисляемого значения. В языке алгол-60 такая переменная должна иметь имя, совпадающее с именем самой П.-функции. В школьном алгоритмич. языке для этой цели используется фиксированное имя знач (значение).

ПРОЦЕДУ́РНЫЙ ЯЗЫК — то же, что императивный *язык программирования*. Термин «П. я.» следует признать неудачным, потому что в программировании процедура связана с более специальным понятием, чем то, к-рое предполагает определение «процедурный» в П. я. См. также *Алгоритмический язык*.

ПРОЦЕ́ССОР (англ. processor, от process — обрабатывать) — совокупность устройств ЭВМ, выполняющих функции по преобразованию информации. В зависимости от назначения различают центральные, функционально-ориентированные и проблемно-ориентированные П.

Центральный П., обычно называемый просто П., является ядром ЭВМ. Такой П. осуществляет обработку информации в ходе выполнения заданной программы, а также управляет всем вычислительным процессом и координирует действия др. устройств вычислительной машины. В состав П. входят: центральное устройство управления, арифметико-логич. устройство и устройство управления оперативной памятью. В него могут входить также оперативная *память* и (или) каналы ввода-вывода, независимо от того, выполнены они как отдельные устройства или частично используют оборудование центрального устройства управления. Центральное устройство управления П. определяет последовательность выборки команд и данных из оперативной памяти, осуществляет дешифровку команд и вырабатывает управляющие сигналы, координирует работу устройств ЭВМ, обрабатывает сигналы прерывания программ, обеспечивает защиту памяти, контролирует и диагностирует работу П. Арифметико-логическое устройство выполняет операции по обработке данных. Устройство управления оперативной памятью обеспечивает обмен информацией между оперативным запоминающим устройством и др. устройствами П. Для согласования скорости работы оперативной памяти со скоростью работы арифметико-логич. устройства используется буферная память — сверхоперативное запоминающее устройство небольшой ёмкости, но с более высоким, чем у оперативной памяти, быстродействием. Важнейшей характеристикой П. является его производительность — среднее число команд, выполняемых в единицу времени.

К функционально-ориентированным П. относятся П.

ввода-вывода данных, сервисные и т. п. П. ввода-вывода обеспечивает связь центрального П. с внешними устройствами ЭВМ и выполняет функции по преобразованию вводимой и выводимой информации. Основной характеристикой П. ввода-вывода является пропускная способность — количество передаваемой информации в *байтах* в единицу времени. Сервисный П. выполняет, как правило, роль *пульта управления* ЭВМ.

Проблемно-ориентированные П. предназначены для повышения (относительно центрального П.) скорости обработки нек-рых классов задач или отдельных процедур операционной системы. Как правило, проблемно-ориентированные П. являются дополнительными, специализированными П., к-рые подсоединяются к основной ЭВМ как внешнее устройство через *интерфейс* канала ввода-вывода или непосредственно в качестве одного из операционных ресурсов.

Элементная база П., её конструктивно-технологич. и физич. параметры существенно определяют технико-экономич. и эксплуатационные характеристики ЭВМ в целом. Дальнейшее совершенствование и переход к последующим *поколениям* ЭВМ связан с широким применением больших и сверхбольших *интегральных схем*. См. также *Микропроцессор*.

ПРЯМО́Й ДВОИ́ЧНЫЙ КОД — см. *Двоичный код*.

ПРЯМОУГО́ЛЬНАЯ ТАБЛИ́ЦА — см. *Таблица*.

ПУЛЬТ УПРАВЛЕ́НИЯ ЭВМ — устройство, с помощью которого обеспечивается взаимодействие оператора и обслуживающего персонала с ЭВМ. Выполняется в виде стола, стенда, панели, на к-рых размещаются органы управления и контроля (индикации), позволяющие управлять процессом обработки информации и технич. обслуживанием ЭВМ. Различают пульт оператора и инженерный пульт. С пульта оператора осуществляются запуск и остановка выполнения программы, начальный ввод программы и её корректировка, контроль за состоянием ЭВМ в целом и отдельных её устройств, индикация электропитания и т. п.; пульт имеет органы управления (кнопки, тумблеры, клавиатуру, различные переключатели и др.), индикаторы (на миниатюрных лампах накаливания, светодиодах, электронно-лучевых приборах и др.), пультовые накопители на магнитных дисках для загрузки микропрограмм и диагностич. информации, устройства ввода и регистрации информации (специализированные пишущие машины) и её отображения (дисплеи). Инженерный пульт предназначен гл. обр. для технич. обслуживания ЭВМ и проверки работоспособности её устройств во время профилактики; оснащён органами управления и индикации. Электронные устройства П. у. ЭВМ выполняются, как правило, на тех же логических и запоминающих элементах, что и основные устройства ЭВМ.

Введение в состав П. у. ЭВМ сервисного *процессора* в сочетании с *дисплеем*, помимо автоматич. управления всеми режимами работы пульта, расширяет возможности отображения информации (как в количественном отношении, так и по удобству восприятия её оператором), позволяет автоматически диагностировать состояние и неисправности основных устройств ЭВМ. По существу, такой пульт является специализированной ЭВМ.

ПЭВМ — *персональная ЭВМ*.

Р

РАБО́ЧАЯ ЯЧЕ́ЙКА — ячейка памяти ЭВМ, используемая для хранения промежуточных величин, возникающих при вычислении значения сложного выражения.

РАЗДЕЛЕ́НИЯ ВРЕ́МЕНИ СИСТЕ́МА — операционная система, обеспечивающая одновременную работу на ЭВМ нескольких пользователей, взаимодействующих с машиной через дистанционные внешние устройства (терминалы). Диспетчер Р. в. с. организует работу процессора ЭВМ аналогично шахматному гроссмейстеру, дающему сеанс одновременной игры. Поддерживая диалоговый режим работы, процессор использует паузу, во время к-рой пользователь обдумывает свой ответ, для того чтобы продвинуться в исполнении программ других пользователей. Р. в. с. применяются в вычислительных центрах коллективного пользования, а также в информационно-вычислительных системах, где необходим коллективный доступ к общей базе данных.

РАЗДЕЛИ́ТЕЛЬ — см. *Литера*.

РАЗОБЩЕ́НИЯ СХЕ́МА, «И Л И»-схема,— логический элемент, реализующий операцию дизъюнкции. Р. с. представляет собой электронное устройство с несколькими входами и одним выходом, сигнал на к-ром выдаётся только при наличии сигнала хотя бы на одном из его входов.

РАЗРЯ́Д — позиция в записи числа, занимаемая одной цифрой. Р. в вычислительной технике — часть ячейки памяти, хранящая один бит двоичной информации.

РАПИ́РА, Расширенный Адаптированный Поплан-Интерпретатор, Редактор, Архив, — учебно-производственный *язык программирования*. Разработан в начале 80-х гг. (в СССР). Р. является средством, обеспечивающим переход от учебного языка *робик* к языкам программирования высокого уровня. Р. построен на основе русской лексики. В качестве основного составного типа данных в языке используется *кортеж*, над к-рым определены операции склеивания (*конкатенации*), а также доступ к подкортежам и элементам кортежей. Основным средством структурирования программ являются *процедуры* и функции, допускающие использование нелокальных имён.

РАСПЕЧА́ТКА, листинг,— лист или рулон бумаги, на котором напечатана выведенная из ЭВМ информация.

РАСПОЗНАВА́НИЕ О́БРАЗОВ — см. *Накопление информации*.

РАСПРЕДЕЛЕ́НИЕ ПА́МЯТИ в программировании — этап составления машинной программы, на котором величинам задачи сопоставляются ячейки памяти, хранящие значение этих величин, а также таблица, в которой описано такое сопоставление.

РА́СТРОВЫЙ ДИСПЛЕ́Й (нем. Raster, от лат. rastrum — грабли) — см. *Дисплей*.

РЕГИ́СТР (от ср.-век. лат. registrum — список, перечень) клавиатуры — см. *Клавиатура*.

РЕГИ́СТР ЭВМ — устройство ЭВМ, предназначенное для промежуточного хранения двоичной информации в процессе выполнения вычислительных операций, а также для их преобразования. Р. представляет собой цепочку из бистабильных запоминающих элементов, каждый из к-рых обеспечивает запись и хранение одного двоичного разряда; число таких элементов в Р. (его разрядность), как правило, соответствует длине машинного слова или числу разрядов в команде ЭВМ. Существует множество различных схем Р. с использованием ферритовых сердечников, реле, электронных ключей и т. д. Чаще всего в качестве основного элемента применяется триггер. Начиная с ЭВМ 3-го поколения Р. создаются в виде *интегральной схемы*.

Наиболее часто Р. строят на таких триггерах, запись в к-рых осуществляется поразрядно по двум входам — установки в «1» и установки в «0». Если машинное слово записывается в ячейки Р. поочерёдно разряд за разрядом, то Р. называют последовательным; если же все разряды машинного слова записываются в Р. одновременно — параллельным; Р., допускающий обе формы записи, называют последовательно-параллельным.

Различают Р. статические и динамические. В статических Р. (их подавляющее большинство) каждый разряд машинного слова хранится в своей ячейке; в динамических Р. машинное слово непрерывно циркулирует по замкнутому контуру вдоль Р.

Операция сдвига на Р. (сдвиговый Р.) заключается в перемещении содержимого всех триггеров Р. на одинаковое количество разрядов в одном направлении — вправо или влево.

Работа Р. оценивается главным образом его быстродействием — временем переключения его элементов.

РЕГИСТРОВАЯ ПАМЯТЬ — см. *Память.*

РЕДАКТИРОВАНИЕ ВНЕШНИХ СВЯЗЕЙ программы — см. *Загрузчик.*

РЕДАКТОР (франц. rédacteur, от лат. redactus — приведённый в порядок) в программировании — часть *операционной системы* ЭВМ, помогающая пользователю вести работу со структурными объектами: строить их, вводить в ЭВМ, подвергать изменениям и воспроизводить на экране дисплея. Для каждого типа структурных объектов (обычных текстов, таблиц, текстов программ, графических объектов) разрабатываются свои Р., обладающие, однако, рядом общих свойств.

Различают Р. командные и экранные. В командных Р. для работы с объектами пишется специализированная программа, состоящая из команд редактирования, к-рые выполняются по отдельности либо в автоматич. режиме.

В персональных ЭВМ преобладают экранные Р., в к-рых работа производится путём прямого воздействия на объект, показываемый в данный момент на экране дисплея.

РЕЖИМ РАБОТЫ ЭВМ (франц. régime, от лат. regimen — управление) — см. *Автоматический режим, Диалоговый режим, Командный режим, Пакетный режим.*

РЕЗУЛЬТАТ в программировании — величина, определение значения которой является одной из целей исполнения алгоритма (программы).

РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ (от лат. recurrens, род. пад. recurrentis — возвращающийся) — равенство, связывающее очередной член последовательности чисел с выражением, содержащим в себе предшествующие члены последовательности. Примеры Р. с.:

Факториал:

$$1!=1;$$
$$(n+1)!=n!\cdot(n+1).$$

Последовательность Фибоначчи:

$$F(0)=0;\ F(1)=1;$$
$$F(n+2)=F(n)+F(n+1).$$

Быстрое вычисление x^n:

$$x^0=1;$$
$$x^{2n+1}=x^{2n}\cdot x;$$
$$x^{2n}=x^n\cdot x^n.$$

Р. с. — часто применяемый способ формулирования вычислительных задач, реализуемых циклическими и рекурсивными алгоритмами. Пример циклич. алгоритма:

```
алг цел ФАКТ (цел n)
  нач цел i
      знач:=1
      для i=2 до n
          нц
              знач:=знач×i
          кц
  кон
```

Пример рекурсивного алгоритма:

```
алг цел СТЕПЕНЬ (вещ x, цел n)
  нач
  выбор
      при n=1:знач:=1
      при чётное(n): знач:=СТЕПЕНЬ (x, n/2)×СТЕПЕНЬ(x, n/2)
      иначе знач:=СТЕПЕНЬ(x, n-1)×x
  все
  кон
```

РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ (от позднелат. recursio — возвращение) — *алгоритм*, при исполнении к-рого встречается команда вызова его же самого. Р. а. возникает при построении алгоритмов методом последовательного уточнения, когда решение некоторой задачи сводится к решению той же задачи, но в более простой формулировке. Способы решения задач, описываемые Р. а., весьма распространены, в том числе и в повседневной жизни. Например, читая текст, разбитый на страницы, мы, прочитав страницу, остаёмся перед той же проблемой прочтения текста, но содержащего на одну страницу меньше. Вычисляя значение арифметич. выражения, мы применяем к подвыражению, стоящему в скобках, те же правила, что и к исходному выражению.

В математике при нахождении алгоритмов вычисления числовых функций естественным источником Р. а. являются *рекуррентные соотношения*, позволяющие вычислять очередной член нек-рой числовой последовательности по формулам, связывающим очередной член со значениями предшествующих членов последовательности. Примером такой последовательности являются числа Фибоначчи

$$f_n\ (n=0,\ 1,\ \ldots):$$
$$f_0=1,$$
$$f_1=1,$$
$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\ (n=2,\ 3,\ \ldots).$$

Запись соответствующего Р. а. на алгоритмич. языке выглядит следующим образом:

```
цел алг ФИБ (цел n)
  нач
    если n=0 или n=1
        то знач:=1
        иначе знач:=ФИБ (n-1) +
         +ФИБ (n-2)
    все
  кон
```

РОБИК — учебный *язык программирования*, предназначенный для младших школьников. Разработан в начале 80-х гг. (в СССР). Р. построен на основе русской лексики (использует *предписания*, близкие к предложениям русского языка). В языке важную роль играет понятие исполнителя — гипотетич. объекта, действующего в нек-рой среде и имеющего свою систему предписаний (обычно модель реального объекта, известного учащемуся).

РОБОТ (чеш. robot) — программно-управляемое устройство, применяемое в производственных процессах для выполнения действий, аналогичных тем, какие выполняет человек, напр. при перемещении и закреплении предметов труда, смене инструментов, перемещении грузов. Первые Р. появились в 30-х гг. 20 в. в связи с автоматизацией производства, их стали применять в промышленности наряду с традиционными средствами автоматизации, в частности для выполнения монотонных, многократно повторяющихся движений (напр., для подачи заготовок на станки, снятия готовых деталей), а также замены человека при работе в условиях, опасных для жизни (повышенная температура, радиация и т. п.). В 70—80-х гг. роботостроение превратилось в развитую отрасль промышленности; тысячи Р. работают на различных промышленных предприятиях. По степени автоматизации и функциональным возможностям Р. принято разделять на 3 поколения.

Р. первого поколения (с программным управлением) имеют жёсткую, постоянную (неперестраиваемую) программу действий и характеризуются наличием элементарной обратной связи с окружающей средой; используются главным образом для перемещения предметов труда (деталей и готовых изделий) и различных грузов.

Р. второго поколения (с адаптивным управлением) имеют самоприспосабливающуюся систему управления на базе *микропроцессора* или *микро-ЭВМ*, автоматически меняющую программу действия Р. при непредвиденных изменениях свойств объекта воздействия или условий окружающей среды; такие Р. могут перемещать рабочий инструмент по определённому контуру, обходить случайные или меняющиеся препятствия и т. д. Они оснащены устройствами обработки информации.

Р. третьего поколения (с искусственным интеллектом, иногда называемые интегральными) обладают способностью к автоматич. обучению и адаптации в процессе выполнения производственных заданий, могут работать в диалоговом режиме, программировать работу исполнительных устройств и т. д. Действия Р. этого типа в наибольшей степени обладают признаками поведения человека.

С

САМООПРЕДЕЛЁННАЯ КОНСТАНТА — то же, что *литерал.*

СБИС — сверхбольшая *интегральная схема.*

СБОРОЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ — см. *Программирование.*

СВЁРТКА в информатике — см. *Ассоциативная память.*

СВЕРХОПЕРАТИВНАЯ ПАМЯТЬ — см. *Память.*

СВЕТОВОЕ ПЕРО, световой карандаш, — устройство системы

отображения информации (чаще всего *экранного пульта*), позволяющее идентифицировать данные на экране электронно-лучевого прибора. С. п. обеспечивает диалоговый режим работы оператора с ЭВМ, в частности осуществляет стирание с экрана ненужных знаков (или части изображения — чертежа, графика, функции), замену знаков (или дорисовку изображений), т. е. оперативную корректировку отображаемой информации, а также её ввод в ЭВМ. Принцип работы С. п. состоит в том, что при его приближении к поверхности экрана в соответствующей точке возникает дополнительная ёмкость, создающая избыточный заряд. При попадании луча развёртки в эту точку возникает сигнал, позволяющий передать ЭВМ точные координаты точки, к к-рой поднесено С. п.

СВЕТОВО́Й КАРАНДА́Ш — то же, что *световое перо*.

СВЯЗЕ́Й РЕДА́КТОР — составная часть таких системных программ, как *транслятор*, *ассемблер* и *загрузчик*. Устанавливает связи между модулями программы, а также между каждым модулем и используемыми в нём данными в соответствии с произведённым распределением памяти.

СДВИ́ГОВЫЙ РЕГИ́СТР — см. *Регистр*.

СЕЛЕ́КТОРНЫЙ КАНА́Л СВЯ́ЗИ (от лат. selector — сортировщик) — см. *Канал связи*.

СЕМА́НТИКА (греч. σημαντικός — имеющий значение) — система правил и соглашений, определяющая толкование и придание смысла конструкциям *языка*.

СЕ́РИЯ в программировании — группа команд алгоритма (программы), записанных подряд и выполняемых в порядке записи.

СЕ́ТЬ передачи данных — см. *Передача данных*.

СЕ́ТЬ ЭВМ — совокупность удалённых друг от друга ЭВМ, соединённых линиями *передачи данных* и способных к взаимно согласованному обмену информацией в процессе своей работы.

СЖА́ТИЕ ИНФОРМА́ЦИИ — см. *Накопление информации*.

СИГНА́Л (франц. signal, нем. Signal, от лат. signum — знак) — информация, представленная в виде значения или изменения значения физической величины. С. бывают непрерывные и дискретные. При цифровой *обработке информации* используются дискретные С. Преобразование непрерывных С. в дискретные осуществляется с помощью аналого-цифрового преобразователя; используется, напр., при обработке результатов измерений в физич. экспериментах, при управлении производственными процессами, для осуществления связи с аналоговыми вычислительными машинами.

СИ́МВОЛ (от греч. σύμβολον — условный знак) в информатике — 1) то же, что *литера*. 2) Элемент знаковой системы, представляемый *словом* из одной или нескольких литер. В языках программирования С. называют также лексемами и относят к ним определяемый описанием языка конечный набор специальных символов, идентификаторы, литералы. Напр., в языке паскаль к специальным С. отнесены «+», «:=», а также все служебные слова (напр., «end», «const»). С точки зрения содержащей их знаковой системы С. обычно выступают как цельные неделимые объекты (имена, разделители данных), поэтому обработка текста на языке программирования (особенно трансляция) обычно включает этап лексической свёртки, т. е. выделение С. в последовательности литер.

СИ́НТАКСИС (от греч. σύνταξις — построение, порядок) — совокупность правил записи сообщений на некотором *языке*. Для языков программирования С. обычно задают специальными математич. средствами — контекстно-свободными грамматиками.

СИНТАКСИ́ЧЕСКИЙ АНАЛИЗА́ТОР — см. *Транслятор*.

СИНТЕЗИ́РУЮЩЕЕ ПРОГРАММИ́РОВАНИЕ (от греч. σύνθεσις — соединение) — см. *Программирование*.

СИС — средняя *интегральная схема*.

СИСТЕ́МНАЯ ПРОГРА́ММА — программа, составляющая часть базового *программного обеспечения* ЭВМ.

СИСТЕ́МНОЕ НАПОЛНЕ́НИЕ — см. *Пакет прикладных программ*.

СИСТЕ́МНОЕ ПРОГРА́ММНОЕ ОБЕСПЕЧЕ́НИЕ — см. *Программное обеспечение*.

СКАЛЯ́Р (франц. scalaire, от лат. scalaris — ступенчатый), скалярная величина,— см. *Величина*.

СЛО́ВО в информатике — цепочка *битов* или *литер*, стандартно обрабатываемая как единый элемент *данных*. Применительно к оборудованию под С. понимают данные, занимающие ячейку памяти и позволяющие их использовать в качестве аргументов команды. Термин «С.» употребляется как синоним термина «ячейка», а также в производных терминах «полуслово», «двойное С.», «килослово». Стандартные длины С. в памяти ЭВМ выражаются степенями двойки и равны 8, 16, 32 и 64 бита. В системах текстовой обработки информации С.— максимальная цепочка литер, заключённая между литерами-разделителями (пробелами, концами строки и др.) и не содержащая разделителей. В языках программирования С. является *символом* (служебное слово, идентификатор, литерал и др.).

СЛУЖЕ́БНОЕ СЛО́ВО — элемент конечного набора специальных *символов* языка программирования. С. с. представляется словом, состоящим в основном из букв; иногда, преимущественно в языках ассемблера, содержит другие *литеры* (напр., цифры). Набор используемых С. с. определяется описанием языка программирования. Напр., в языке алгол-60 С. с. играют роль разделителей (операторные скобки **начало** и **конец**, имена операторов — на и др.), а также имён стандартных объектов (**истина**, **ложь**, целый и др.). В формальном языке существует возможность отличать С. с., играющие относительно транслятора особую роль, подобную роли служебных литер, от символов, вводимых или переопределяемых пользователем языка (в частности, от *идентификаторов*).

СМ ЭВМ — то же, что система малых ЭВМ (*мини-ЭВМ*).

СОВМЕСТИ́МОСТЬ в вычислительной технике — свойство различных по конструкции устройств выполнять идентичные функции.

СОВПАДЕ́НИЯ СХЕ́МА, «И»-схема, вентиль, — логический элемент, реализующий операцию конъюнкции. С. с. представляет собой устройство (напр., полупроводниковый диод) с несколькими (чаще всего двумя) входами и одним выходом, сигнал на к-ром выдаётся только при наличии сигналов на всех входах.

СОЕДИНЕ́НИЕ в программировании — сочленение последовательно выполняемых команд в *серию*. В школьном алгоритмич. языке и во многих языках программирования соединяемые команды (операторы) пишутся через точку с запятой «;», к-рая трактуется как знак операции С. В ряде случаев при записи команд в столбик (как в алгоритмич. языке) или в жёстком формате (как, напр., в языке фортран) разделяющая точка с запятой при переходе со строки на строку опускается.

СООБЩЕ́НИЕ — см. *Канал связи*, *Передача информации*.

СОПРЯЖЕ́НИЕ — то же, что *интерфейс*.

СОРТИРО́ВКА — один из основных алгоритмов обработки информации, состоящий в переупорядочении по нужному признаку заданной последовательности величин. Стандартной формулировкой задачи С. является следующая. Пусть дан вектор $a\,[1:n]$, между компонентами к-рого существует отношение порядка $\leqslant$: для любых $a\,[i]$ и $a\,[j]$ либо $a\,[i]\leqslant a\,[j]$, либо $a\,[j]\leqslant a\,[i]$. Элементарной транспозицией наз. преобразование вектора, состоящее в том, что две компоненты $a[i]$ и $a\,[j]$ меняются местами. Перестановкой вектора наз. любая последовательность элементарных транспозиций. С. вектора состоит в нахождении такой перестановки, в к-рой для любых $i\leqslant j$ выполнялось бы $a\,[i]\leqslant a\,[j]$.

Тривиально алгоритм С., основанный на сравнении «каждого с каждым», требует порядка n^2 действий. Разработаны эффективные алгоритмы С., требующие порядка $n\cdot\ln n$ действий. Эти алгоритмы существуют во многих вариантах и учитывают дополнитель-

ные особенности машинной реализации С.: порядок величины n, объём доступной оперативной памяти, особенности устройства внешней памяти, хранящей вектор, и т. п.

СОСТАВНА́Я ВЕЛИЧИНА́ — см. *Величина.*

СОСТАВНА́Я КОМА́НДА — см. *Команда.*

СПЕЦИАЛИЗИ́РОВАННАЯ ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ МАШИ́НА — см. *Вычислительная машина.*

СПЕЦИФИКА́ЦИЯ (от позднелат. specificus — особый) в программировании — точная и полная формулировка задачи, содержащая информацию для систематического построения алгоритма (программы), решающего данную задачу.

СПИ́СОК в программировании — представление составных величин в виде цепной последовательности, когда очередной член последовательности (элемент С.) одновременно содержит в себе *ссылку* на следующий член. Представление последовательности в виде С. целесообразно в случаях, когда элементами С. являются данные разного объёма, что затрудняет их расположение в памяти подряд в виде *вектора*. Другое удобство С. состоит в том, что операции по вставке и удалению членов последовательности не требуют перемещения в памяти других элементов С., а выполняются только подходящим переносом ссылок.

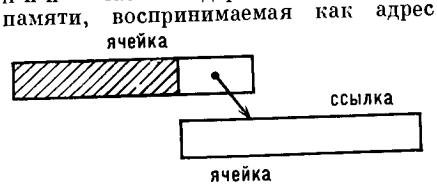
СПИ́СОЧНАЯ СТРУКТУ́РА — структура данных, описывающая информацию, организованную в виде *списка*.

СПРА́ВОЧНАЯ ТАБЛИ́ЦА — см. *База данных.*

СРАВНЕ́НИЯ СХЕ́МА — логический элемент, реализующий операцию сравнения двух величин и выделение разностного сигнала между ними. С. с. представляет собой устройство с двумя входами для сравниваемых величин и выход, на к-рый выдаётся результат сравнения. Выходной сигнал может указывать знак разности между сравниваемыми величинами или знак и абсолютное значение разности. Различают С. с. для дискретных и аналоговых величин. С. с. применяются в вычислительных устройствах, измерительных приборах, стабилизаторах и др.

СРЕДА в информатике — то же, что *обстановка.*

ССЫ́ЛКА в программировании — часть содержимого *ячейки* памяти, воспринимаемая как адрес



некоторой другой ячейки. С. широко используется для представления в памяти ЭВМ разного рода составных величин, таких, как *вектор*, *список* и т. п. При графич. представлении составных величин С. изображается стрелкой. Иногда С. наз. также указателем.

СТАНДА́РТНАЯ ФУ́НКЦИЯ — функция, программа вычисления которой задана постоянно в базовом *программном обеспечении.*

СТАНДА́РТНЫЙ ТАКТ работы ЭВМ — см. *Быстродействие* ЭВМ.

СТАНО́К С ЧПУ, станок с числовым программным управлением, — металлообрабатывающий станок с автоматическим выполнением рабочих операций по обработке детали, управляемый по заранее заданной *программе.*

СТА́РТОВАЯ ПРОГРА́ММА (англ. start — начинать, пускать в ход) — часть *операционной системы* ЭВМ.

СТАТИ́ЧЕСКИЙ РЕГИ́СТР (от греч. στατική — учение о равновесии) — см. *Регистр.*

СТАТИ́ЧЕСКИЙ ТИП величины — см. *Величина.*

СТЕК (от англ. stack — стог, груда) — структура данных или устройство памяти для хранения наращиваемой и сокращаемой последовательности значений, в которой в любой момент доступен только последний член последовательности. Примером С. является стопка книг на столе, в к-рой брать и класть книги можно только сверху. Программируемый микрокалькулятор содержит в своём устройстве четыре регистра X, Y, Z, T, организованные в виде С. При занесении в регистр X нек-рой величины a происходит следующая цепочка *присваиваний*

$$T:=Z;\ Z:=Y;\ Y:=X;\ X:=a$$

(старое содержимое T при этом пропадает). При выполнении операции над величинами из регистров X и Y результат остаётся в X и, кроме того, происходят присваивания

$$Y:=Z;\ Z:=T.$$

СТРАНИ́ЦА — см. *Виртуальный объект.*

СТРО́КА — стандартная *запись* в текстовом файле, в частности горизонтальный ряд вхождений *литер* на распечатке, на экране дисплея или пробитые на перфокарте текстовые данные. При стандартной пробивке на *перфокарте* помещается 80 литер; строка алфавитно-цифрового дисплея обычно содержит 72—80 литерных позиций, на печатающих *устройствах* их может быть 128. При хранении в *файле* или на *распечатке* строки обычно снабжаются номерами — целыми числами (напр., порядковыми номерами) или словами более общей формы. Номера строк позволяют точно указать нужную строку в командах *редактора*, при выдаче сообщений об ошибках в программе и т. п. Часто под С. понимают *цепочку* литер.

СТРО́ЧКА — см. *Строка*, *Цепочка.*

СУБД, система управления базами данных, — см. *Базами данных система управления.*

СУММА́ТОР — регистр в процессоре, допускающий операцию сложения со своим содержимым.

СУПЕРВИ́ЗОР (от англ. supervisor, букв. — надсмотрщик) — часть *операционной системы* ЭВМ, управляющая последовательностью исполнения программ при работе ЭВМ.

СУ́ПЕР-ЭВМ (от лат. super — сверху, над) — ЭВМ, обладающая предельными характеристиками по производительности и скорости для данного поколения ЭВМ. В СССР известным примером С.- ЭВМ 2-го поколения является БЭСМ-6, разработанная под руководством С. А. Лебедева и В. А. Мельникова в 1966, имеющая быстродействие порядка 1 МИПС.

Примером С.-ЭВМ 4-го поколения является многопроцессорный вычислительный комплекс Эльбрус-2, разработанный в 1980—85 под руководством Б. А. Бабаяна, В. С. Бурцева и Г. Г. Рябова. Комплекс содержит до 10 *процессоров* с быстродействием порядка 12 МИПС каждый, к-рые могут объединяться для решения одной задачи, достигая тем самым производительности порядка 100 МИПС. Специальная организация оперативной памяти в Эльбрусе-2 обеспечивает поток обрабатываемой информации, согласованный со скоростью работы процессоров. Всё базовое программное обеспечение комплекса Эльбрус-2 написано на языке программирования высокого уровня эль-76.

СЧЁТНО-АНАЛИТИ́ЧЕСКАЯ МАШИ́НА — см. *Вычислительная машина.*

СЧЁТЧИК КОМА́НД — особый регистр в *процессоре* ЭВМ, в котором по завершении выполнения очередной команды помещается адрес следующей по выполнению команды. Стандартным изменением С. к. является его постоянное приращение, так что команды выполняются в порядке их расположения в памяти. При выполнении команды перехода в С. к. направляется адрес, указанный в команде (для условного перехода — в зависимости от заданного условия). При выполнении команды стоп (*останов*) С. к. сначала получает приращение, после чего машина останавливается, чтобы при повторном пуске можно было продолжить исполнение программы. При выполнении вызова *подпрограммы*, приращённое значение С. к. запоминается в *стеке*, а в С. к. засылается адрес начала подпрограммы. При выполнении команды *возврата* из подпрограммы запомненный адрес извлекается из стека и направляется в С. к. для продолжения исполнения главной программы.

СЧИСЛЕ́НИЯ СИСТЕ́МА — способ изображения чисел и соответствующие ему правила действий над числами. При записи числа в нек-рой С. с. нижний правый индекс указывает на основание этой системы.

Т

ТАБЛИ́ЦА в программировании — составная *величина*, образованная совокупностью занумерованных значений одного типа; понятие школьного алгоритмич. языка. Частный случай более общего понятия *массива*, используемого в языках программирования. Различаются понятия линейной Т., то есть одномерного массива, или *вектора*, и прямоугольной Т., то есть двумерного массива, или матрицы.

ТА́ЙМЕР (англ. timer, от time — время) — устройство для измерения или индикации текущего времени или интервала. Обычно представляет собой счётчик, содержимое к-рого изменяется при поступлении сигнала времени. Т. может использоваться для прерывания выполнения программы по истечении заданного интервала времени; широко применяется при работе ЭВМ в реальном масштабе времени.

ТЕКУ́ЩЕЕ ЗНАЧЕ́НИЕ величины — см. *Величина*.

ТЕЛЕОБРАБО́ТКА ДА́ННЫХ (от греч. τῆλε — далеко) — первичная обработка и преобразование формы представления дискретной информации для передачи её по *каналам связи* с целью обеспечения дистанционного взаимодействия многих пользователей с ЭВМ. Осуществляется с помощью мультиплексоров передачи данных, процессоров телеобработки данных, аппаратуры передачи данных и абонентских пунктов.

ТЕ́ЛО процедуры — см. *Процедура*.

ТЕРМИНА́Л (от лат. terminalis — заключительный, окончательный) — *внешнее устройство* ЭВМ, предназначенное для обмена данными между пользователями и ЭВМ (в т. ч. удалённой) по каналам связи. Различают пассивные и активные Т. В пассивных Т. информация, подлежащая передаче, не обрабатывается; к таким Т. относятся телетайпы, устройства отображения информации (напр., *экранные пульты*). В активных Т. осуществляется обработка информации; такие Т. часто называют «интеллектуальными», что обусловлено использованием в них *микропроцессоров*.

ТЕТРА́ДА (греч. τετρα — начальная часть сложных слов, означающая четыре) — см. *Байт*.

ТИП величины — характеристика принимаемых величиной значений. В пкольном алгоритмич. языке, как и во многих языках программирования, существует система символич. обозначений Т. величин. Элементарные, т. е. не сводимые к другим, Т. значений изображаются отдельными *служебными словами* языка или их сокращениями: **нат** (натуральный), **цел** (целый), **вещ** (вещественный) в алгоритмич. языке; **integer** (целый), **real** (вещественный), **boolean** (логический) в алголе-60. Т. составных величин, т. е. комбинаций более простых значений, указываются в виде специальных типовых выражений, символически описывающих схему структуры данных, лежащую в основе составной величины. Напр., типовое выражение

цел табл произведение [1 : 9, 1 : 9] описывает в алгоритмич. языке структуру прямоугольной таблицы размером 9×9, состоящей из целых чисел, нумеруемых по строкам и столбцам от 1 до 9.

Типовое выражение

mod compl = **struct** (**real** Re, **real** Im) описывает в языке алгол-68 новый тип **compl** (комплексный) как структуру данных, образованную именованной парой вещественных компонент. Если теперь поместить в программе описание величины **compl** *Z*, то выражение *Z*, **Im of** *Z* и Re **of** *Z* будут обозначать соответственно саму комплексную величину *Z*, её мнимую и вещественную части.

ТРАНЗИ́СТОР (от англ. transfer — переносить и resistor — сопротивление) — электронный прибор на основе полупроводникового кристалла, имеющий три (или более) электрода, предназначенный для усиления, генерирования и преобразования электрических колебаний. Т. составляют два основных класса — полевые и биполярные. В полевых Т. (часто называют унипольрными или канальными) протекание тока через кристалл обусловлено носителями заряда только одного знака — электронами или дырками. В таких Т. изменение тока происходит под действием перпендикулярного току электрич. поля, создаваемого входным сигналом. В биполярных Т., представляющих собой кристалл с тремя чередующимися полупроводниковыми областями электронного или дырочного типа проводимости, протекание тока через кристалл обусловлено носителями заряда обоих знаков.

С изобретением Т. наступил период микроминиатюризации радиоэлектронной аппаратуры.

ТРАНСЛЯ́ТОР (лат. translator — переносчик), компилятор,— системная программа, выполняющая перевод программы, выраженной на входном языке программирования, в некоторый выходной язык программирования (обычно машинный). Т.— главная часть системы программирования. Типичный Т. с языка программирования высокого уровня состоит из следующих блоков: лексический анализатор выделяет в тексте входной программы служебные слова, имена и константы (заданные значения величины) и строит для них таблицу; синтаксический анализатор раскрывает соподчинённые конструкции программы (выражения, команды ветвления и повторения) и строит внутреннее представление транслируемой программы в виде, удобном для последующей обработки; оптимизатор производит формальное преобразование программы, направленное на её сокращение или ускорение исполнения; генератор выражает команды входного языка средствами команд выходного языка Т., распределяет память ЭВМ для размещения программы и её величин, вызывает из библиотеки стандартные подпрограммы, необходимые для транслируемой программы.

Если блоки Т. работают поочерёдно, то текст транслируемой программы «просматривается» Т. несколько раз. Для нек-рых языков программирования удаётся строить однопросмотровые Т., выполняющие полный перевод программы за один просмотр её входного текста.

ТРАНСЛЯ́ЦИЯ (от лат. translatio — передача) — перевод программы с одного (входного) языка программирования на другой (выходной) язык; процесс работы *транслятора*.

ТРАНСПОЗИ́ЦИЯ (от ср.-век. лат. transpositio — перестановка) — см. *Сортировка*.

У

УКАЗА́ТЕЛЬ — то же, что *ссылка*.

УНИВЕРСА́ЛЬНАЯ ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ МАШИ́НА (от лат. universalis — общий, всеобщий) — см. *Вычислительная машина*.

УНИВЕРСА́ЛЬНЫЙ ЯЗЫК ПРОГРАММИ́РОВАНИЯ — см. *Язык программирования*.

УНИПОЛЯ́РНЫЙ ТРАНЗИ́СТОР — см. *Транзистор*.

УПРАВЛЕ́НИЕ в вычислительной технике — см. *Управляющее устройство*, *Память*, *Пульт управления*.

УПРАВЛЕ́НИЯ КЛА́ВИШИ — см. *Клавиатура*.

УПРАВЛЯ́ЮЩЕЕ УСТРО́ЙСТВО ЭВМ — устройство, осуществляющее координацию совместной работы *процессора*, внешних, запоминающих и др. устройств ЭВМ с помощью управляющих сигналов, вырабатываемых им на основе поступающей информации. К основным функциям У. у. относится управление командами и операциями, выполняемыми ЭВМ. Управление командами осуществляется в соответствии с задаваемым программой порядком их следования. Развитие структуры ЭВМ привело к значительному увеличению потоков управляющей информации и соответственно к включению в состав У. у. таких блоков, как блок предварительного просмотра программ, микропрограммного управления, динамич. адресации виртуальной памяти и т. п.,

т. е. его превращению в отдельный процессор переработки управляющей информации.

УПРЕЖДЕ́НИЕ — см. *Исполнение.*

УСЛО́ВИЕ — запись утверждения о свойствах объектов, с которыми работает алгоритм (программа). С математич. точки зрения У. может быть любая формула исчисления предикатов, истинная или ложная, в зависимости от значений входящих в неё в качестве аргументов свободных переменных. В школьном алгоритмич. языке и языках программирования в качестве простых У. используются обычные отношения равенства и неравенства ($<$, $\leqslant$, $=$, $>$, $\geqslant$), связывающие любые выражения, для к-рых эти отношения могут иметь смысл. Из простых У. могут комбинироваться составные У. с помощью логич. связок, из к-рых наиболее употребимыми являются

отрицание **не not** $\neg$ $\neg(a \leqslant 2)$,
дизъюнкция **или or** $\vee$ $(x=1)\vee(x=2)$,
конъюнкция **и and** $\wedge$ & $(b \leqslant 10)\,\&\,(b > 0)$.

Об У. говорят, что они соблюдаются или не соблюдаются или что они истинны или ложны. Во многих языках программирования У. трактуются как логические выражения, принимающие два значения: **истина** и **ложь** (варианты: **true** и **false**, 1 и 0). При такой трактовке в качестве У. могут также использоваться вызовы процедур-функций, принимающих логич. значения.

УСЛО́ВНОЕ ВЫРАЖЕ́НИЕ — см. *Выражение.*

УСЛО́ВНЫЙ ПЕРЕХО́Д — см. *Переход.*

УСТРО́ЙСТВО в вычислительной технике — конструктивно или логически законченная часть ЭВМ, имеющая определённое функциональное назначение. См. *Алфавитно-цифровое печатающее устройство, Арифметическое устройство, Внешнее устройство, Вычислительное устройство, Запоминающее устройство, Печатающее устройство, Управляющее устройство.*

Ф

ФАЙЛ (от англ. file — досье, картотека), набор данных,— 1) совокупность упорядоченных и взаимосвязанных записей, имеющая описание для идентификации отдельных записей. 2) Последовательность записей, размещаемая на внешних запоминающих устройствах (внешней памяти) и рассматриваемая в процессе пересылки и обработки как единое целое.

ФА́ЙЛОВАЯ СИСТЕ́МА — часть *операционной системы* ЭВМ, ведающая использованием внешней памяти ЭВМ.

ФАКТИ́ЧЕСКИЙ ПАРА́МЕТР (от лат. factum — сделанное) — см. *Вызов, Параметр.*

ФЕРРИ́ТОВАЯ ПА́МЯТЬ (от лат. ferrum — железо) — см. *Память.*

ФИКСИ́РОВАННАЯ ЗАПЯТА́Я, представление чисел с фиксированной запятой,— обычный способ записи дробей в позиционной системе счисления в виде $N=\pm p,\ q$ (или $N=\pm p\cdot q$), где p — целое число, а q — правильная дробь. При таком представлении чисел в ЭВМ положение знака, разделяющего целые и дробные разряды числа, фиксировано по отношению к разрядам машинного слова в отличие от представления чисел с *плавающей запятой*, где положение соответствующего знака «плавает» в зависимости от значения порядка. Представление чисел с Ф. з. упрощает быстрое выполнение сложения и вычитания, но в условиях заданного формата машинного слова приводит к переполнению или потере значащих цифр при умножении и делении.

ФЛО́ППИ-ДИСК (англ. floppy disk), гибкий диск,— см. *Магнитный диск.*

ФОРМА́ЛЬНЫЙ ПАРА́МЕТР (от лат. forma) — см. *Вызов, Параметр.*

ФОРМА́Т (от лат. formo — придаю форму) в программировании — конструкция *языка программирования*, задающая правила размещения текстовой информации при её выдаче на печать или экран дисплея. См. также *Вывод, Печать.*

ФОРТРА́Н (**FORTRAN** — сокращение от слов **FOR**mula TRANslating language, англ. formula — формула, translate — переводить, language — язык) — *язык программирования*, предназначенный для решения научно-технических задач; один из первых наиболее распространённых алгоритмич. языков. Ф. имеет множество реализаций, что способствовало накоплению огромного числа библиотек и комплектованию на их основе больших программных комплексов.

ФУНКЦИОНА́ЛЬНОЕ НАПОЛНЕ́НИЕ — см. *Пакет прикладных программ.*

ФУНКЦИОНА́ЛЬНО-ОРИЕНТИ́РОВАННЫЙ ПРОЦЕ́ССОР — см. *Процессор.*

ФУ́НКЦИЯ (от лат. functio — исполнение, осуществление) в программировании — *вспомогательный алгоритм* (программа), вычисляющий некоторое значение как функцию своих аргументов. См. также *Процедура.*

Х, Ц

ХРАНЕ́НИЕ ИНФОРМА́ЦИИ — один из основных видов работы с информацией. Имеет огромное значение для обеспечения поступательного развития человеческого общества, многократного использования информации, передачи накапливаемого знания последующим поколениям. Сооружения, предметы изобразительного искусства, глиняные таблички, записи, книги, архивы, библиотеки, досье, пластинки, кинофильмы — всё это служит целям Х. и. Информатика вносит в проблемы Х. и. способы переноса информации на машинные носители, методы обеспечения как её сохранности, так и доступности к ней. См. также *Память, Поиск информации.*

ХРАНЕ́НИЯ ИНФОРМА́ЦИИ УСТРО́ЙСТВО — см. *Внешнее устройство.*

ХЭ́ШИРОВАНИЕ (от англ. hashing — перемешивание) — см. *Ассоциативная память.*

ЦВМ — *цифровая вычислительная машина.*

ЦЕНТРА́ЛЬНЫЙ ПРОЦЕ́ССОР — см. *Процессор.*

ЦЕПО́ЧЕЧНЫЕ ВЫЧИСЛЕ́НИЯ — см. *Калькулятор.*

ЦЕПО́ЧКА — последовательность *литер* или *битов* (литерная или битовая Ц.). В языках программирования *литералы*, изображающие значения Ц., выделяются обычно с помощью разного рода кавычек. К важнейшим операциям над Ц. относятся: сцепка (см. *Конкатенация*); выделение подцепочки или отдельного её звена (литеры или бита) по индексам; сравнение по правилам лексикографич. упорядоченности (см. *Алфавит*); определение длины Ц. Литерные Ц. используются для обработки текстовых данных, в частности для осуществления их ввода и вывода. К дополнительным операциям, характерным для битовых Ц., относятся поразрядно выполняемые операции булевой алгебры, которые обеспечивают их использование для представления вектора признаков.

В литературе по программированию вместо термина «Ц.» используют обычно термин «строка», что неудобно, т. к., напр., *строка* распечатки может быть сформирована из нескольких Ц. и, наоборот, одна Ц. может быть распечатана в несколько строк. Для разделения этих понятий строки распечатки часто называют строчками.

ЦИКЛ (от греч. κύκλος — круг) в программировании — то же, что *повторение.*

ЦИ́КЛА ПАРА́МЕТР в программировании — переменная величина, указываемая в заголовке цикла, область значений которой определяет число его повторений. Цикл повторяется многократно — пока не будет исчерпана область задания области значений Ц. п. Наиболее распространёнными способами задания области значений Ц. п. являются: арифметич. прогрессия с заданным начальным значением, разностью (шагом Ц. п.) и конечным значением; явно заданный список последовательных значений Ц. п.; комбинация начального значения, произвольной формулы пересчёта значения Ц. п. и отдельно задаваемого условия завершения команды цикла.

ЦИ́ФРА (от ср.-век. лат. cifra) в программировании — элемент конечного набора *литер*, используемых в *литералах*, представляющих натуральные числа. Особое значение в программировании имеют позиционные системы счисления с основаниями 2, 8, 10 и 16; для первых трёх используют обычные арабские Ц., недостающие шестнадцатеричные цифры (после «9») изображают первыми шестью буквами латинского алфавита: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* (в русском варианте алгола-68 для удобства печати на машинке с русским шрифтом для них установлены эквиваленты: А, Б, Ц, Д, Е, Ф). Напр., $1002_{10}=3EA_{16}$. Чтобы было проще отличить Ц. нуль от буквы «О», Ц. принято перечёркивать: ø. Двоичная Ц. наз. *битом*.

Все объекты, с к-рыми имеют дело ЭВМ, выражаются через натуральные числа, в конечном счёте — через Ц.; в частности, литеры сводятся к Ц. *кодированием*. Поэтому прилагательное «цифровой» иногда употребляют в значении «дискретный»: цифровая ЭВМ (ЦВМ, ЭВМ дискретного действия), станок с цифровым управлением и т. п.

См. также *Алфавитно-цифровое печатающее устройство*, *Двоичный код*.

ЦИ́ФРО-АНАЛО́ГОВЫЙ ПРЕОБРАЗОВА́ТЕЛЬ — см. *Аналого-цифровая вычислительная машина*.

ЦИФРОВА́Я ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ МАШИ́НА, ЦВМ, — *вычислительная машина*, осуществляющая по заданной программе *обработку информации*, представленной в цифровой форме. Каждой цифре в ЦВМ соответствует один или несколько дискретных сигналов, напр. электрич. импульсов. Процесс обработки информации на ЦВМ сводится к такому преобразованию сигналов, при к-ром результирующий сигнал численно равен итогу соответствующей вычислительной операции. ЦВМ (принципиально) состоит из устройств: арифметического, памяти, управления и ввода-вывода данных.

ЦИФРОВА́Я КЛАВИАТУ́РА — см. *Клавиатура*.

Ч, Ш

ЧИП в вычислительной технике — *кристалл* вместе с нанесённой на нём *интегральной схемой*.

ЧПУ, числовое программное управление, — см. *Станок с ЧПУ*.

ШАГ в программировании — 1) Ш. алгоритма — этап исполнения *алгоритма*, состоящий в выполнении одной простой команды или проверке *условия*. 2) Ш. параметра цикла — величина, на которую путём прибавления или вычитания меняется текущее значение параметра цикла (*повторения*).

ШИ́НА (нем. Schiene) — см. *Канал связи*.

ШКО́ЛЬНЫЙ АЛГОРИТМИ́ЧЕСКИЙ ЯЗЫК — система правил и обозначений для записи алгоритмов, принятая в школьном курсе «Основы информатики и вычислительной техники» в IX и X классах. Содержит конструкции, в той или иной степени присущие основным современным языкам программирования. См. *Алгоритм*, *Ввод*, *Вектор*, *Величина*, *Ветвление*, *Вспомогательный алгоритм*, *Выбор*, *Вывод*, *Вызов*, *Выражение*, *Е-практикум*, *Заголовок*, *Исполнитель*, *Команда*, *Повторение*, *Поручитель*, *Присваивание*, *Рекурсивный алгоритм*, *Таблица*.

Э

ЭВМ — *электронная вычислительная машина*.

ЭКРА́ННЫЙ ПУЛЬТ (от франц. écran — заслон, ширма) — устройство, состоящее из электронно-лучевого прибора, светового пера и клавиатуры. Э. п. позволяет визуально контролировать вводимую с помощью клавиатуры информацию и корректировать её, напр., с помощью светового пера. Э. п. применяется в качестве *внешнего устройства* ввода-вывода информации; обеспечивает работу оператора с ЭВМ в диалоговом режиме. См. также *Дисплей*.

ЭКРА́ННЫЙ РЕДА́КТОР — см. *Редактор*.

ЭКСПЕ́РТНАЯ СИСТЕ́МА (от лат. expertus — опытный) — *пакет прикладных программ* справочного характера, позволяющий пользователю принимать квалифицированные решения в процессе его основной деятельности. В основе создания Э. с. лежит эмпирич. принцип решения задач путём расследования. Этот принцип провозглашает существование универсальных (аналогично «дедуктивному методу» Шерлока Холмса) правил и приёмов, к-рые позволяют человеку, владеющему этими правилами, освоить некую проблемную область и, применяя ту или иную стратегию расследования и поиска, а также привлекая знания отдельных специалистов в данной области (экспертов), получать убедительные решения рассматриваемого круга задач. Принцип расследования лежит в основе таких профессий и видов человеческой деятельности, как журналист-исследователь (проблемник), врач-диагност, следователь, консультант.

Э. с., в отличие от решения задачи по алгоритму, не исключает человека из процесса решения, а, наоборот, сохраняет за ним инициативу. В то же время Э. с. не является просто пассивным источником полезной информации наподобие книжного справочника или компьютерной базы данных. В нужные моменты Э. с. подсказывает дальнейшее направление расследования, помогает изменить план поиска, рассчитывает варианты, развивает цепочки умозаключений в поисках противоречий.

Существенным элементом Э. с., объясняющим происхождение их названия, является включение в *базу знаний* Э. с. эмпирич. правил, наблюдений и описаний прецедентов, получаемых путём опроса экспертов. Эти опросы делаются в соответствии с тщательно и заранее разработанной формой, предполагающей нек-рую универсальную и реализуемую на ЭВМ схему учёта и следования советов экспертов.

Наиболее распространёнными областями применения Э. с. в настоящее время являются медицинская диагностика, поиск и идентификация химич. соединений, разведка полезных ископаемых, проектирование.

ЭЛЕКТРОНИЗА́ЦИЯ — глобальный процесс перестройки производительных сил современного общества на основе внедрения разнообразных видов электронного оборудования, прежде всего приборов, средств связи и вычислительной техники. Комплексная программа научно-технич. прогресса стран — участниц СЭВ до 2000 года выделяет в качестве наиболее приоритетных направлений Э. следующие разработки: *супер-ЭВМ* с быстродействием свыше 10 000 МИПС, массовое производство *персональных ЭВМ*, создание единой системы передачи цифровой информации, скоростных волоконно-оптич. линий связи, спутниковых систем связи, цифрового радио- и телевещания, видео- и звукозаписи, новых поколений электронных приборов и устройств (в т. ч. датчиков и контрольно-измерительных средств, унифицированных сверхбольших сверхскоростных *интегральных схем*). См. также *Информатизация*.

ЭЛЕКТРО́ННАЯ ВЫЧИСЛИ́ТЕЛЬНАЯ МАШИ́НА, ЭВМ, — *вычислительная машина*, в которой обработка информации, представленной в виде двоичного кода, производится с помощью электронных схем. Конструкции ЭВМ различаются по своей *архитектуре*, *поколениям*, *быстродействию* и типам.

В любой ЭВМ имеется *процессор*, выполняющий непосредственную *обработку информации* под управлением программы, *память* для хранения обрабатываемой информации (т. е. программа и её данные) и *внешние устройства*, связывающие ЭВМ с внешним миром: человеком (оператором или пользователем), объектом управления (датчиком или исполнительным механизмом), др. ЭВМ и внешними носителями информации.

По характеру использования ЭВМ делятся на встроенные, комплексируемые и автономные. Встроенные ЭВМ имеют конструкцию, способствующую их включению в качестве

составной части машины или прибора в виде сверхбольшой *интегральной схемы* (СБИС, однокристальные *микропроцессоры* и ЭВМ), *платы* (однопла́тные ЭВМ) или корпуса (однокорпусные ЭВМ). Особый класс встроенных ЭВМ составляют т. н. б о р т о в ы е Э В М, устанавливаемые на летательных аппаратах.

К о м п л е к с и р у е м ы е Э В М соединяются друг с другом, образуя многопроцессорные вычислительные комплексы и *вычислительные системы*.

А в т о н о м н ы е Э В М делятся по типам на *микро-ЭВМ*, *персональные ЭВМ* (ПЭВМ), *мини-ЭВМ*, т. н. средние ЭВМ, высокопроизводительные ЭВМ и *супер-ЭВМ*. Градации между типами ЭВМ меняются от поколения к поколению и определяются экономически целесообразными показателями стоимости, быстродействия, ёмкости памяти, а также габаритными размерами и массой.

Мировой парк ЭВМ в настоящее время насчитывает свыше 100 млн. микропроцессоров, десятки миллионов ПЭВМ, несколько миллионов мини-ЭВМ, порядка миллиона средних и высокопроизводительных ЭВМ и несколько сотен супер-ЭВМ. Средний темп роста производства ЭВМ в течение последних десятилетий находится в пределах 10—20% в год.

ЭЛЕКТРО́ННАЯ ПО́ЧТА — новый вид коммуникации между людьми с использованием ЭВМ. Э. п. является развитием телетайпной и телеграфной связи. Опирается на существование систем *передачи данных* и на возможность подключения *персональных ЭВМ* к линиям связи. Человек, желающий послать сообщение по Э. п., набирает его на *клавиатуре*, проверяет и редактирует сообщение на экране *дисплея*, после чего помещает в *память* своей ЭВМ. Затем через систему передачи данных либо устанавливается прямая связь с ЭВМ собеседника, либо сообщение аналогично телеграмме поступает в систему передачи данных для автоматич. передачи адресату. Преимуществом Э. п. является её оперативность, универсальность и дешевизна по сравнению с любыми другими способами пересылки сообщений.

ЭЛЕКТРО́ННАЯ СХЕ́МА — устройство, основными функциональными компонентами которого являются электронные (вакуумные, ионные, полупроводниковые, оптоэлектронные и др.) приборы. Э. с. применяют для генерирования, усиления, преобразования, хранения и передачи электрич. сигналов различной формы, мощности и частоты в радиотехнике, вычислительной технике, телевидении, радиолокации и других областях техники.

ЭЛЕКТРО́ННАЯ ТАБЛИ́ЦА — *пакет прикладных программ* для персональных ЭВМ, позволяющий производить вычисления над данными, образующими крупноформатную прямоугольную таблицу. В основе разработки Э. т. лежит тот факт, что значительная часть повседневной информационно-вычислительной работы, выполняемой людьми, состоит в ведении таблиц с поименованными или занумерованными строками и столбцами (классный журнал, платёжная ведомость, математич. таблица, расписание занятий, торговая накладная, складская спецификация и т. п.). Э. т. создаёт удобную программную обстановку для работы со всем разнообразием подобного рода документов. Э. т. содержит средства воспроизведения таблицы на экране дисплея, в том числе по частям, а также именования его строк и столбцов. С каждой позицией таблицы может быть связана расчётная формула, по к-рой определяется содержимое позиции. Многие вспомогательные действия по графич. оформлению таблицы, по суммированию её элементов, по её выводу на печать и т. п. выполняются в Э. т. автоматически.

ЭЛЕКТРО́ННЫЙ КАЛЬКУЛЯ́ТОР — то же, что *микрокалькулятор*.

Я

ЯЗЫК — множество *символов* и совокупность правил, определяющих способы составления из этих символов осмысленных сообщений. Принято противопоставлять языки естественные, или национальные, языкам искусственным, или специальным. Эти термины неудачны, т. к. искусственный Я. эсперанто и наднациональный церковнославянский бесспорно относятся к первой группе. Точнее было бы выделять языки второй группы по признаку наличия (или возможности) строго математич. описания, т. е. охарактеризовать её как класс формальных Я. (напр., *алгоритмический язык*, *язык программирования*, язык *ассемблера*). Функционирование формального Я. можно представить следующим образом: с каждым Я. связан класс элементарных (по крайней мере, в данном рассмотрении) объектов — его п р е д м е т н а я о б л а с т ь (напр., предметная область алгола — целые и вещественные числа, понимаемые как математич. объекты). Предметную область называют нулевым уровнем Я.; имена и коды объектов этого уровня образуют его первый уровень (напр., правила кодирования значений на ЭВМ), имена конструкций первого уровня — второй уровень Я. и т. д. до «верхнего» уровня, представляемого множеством всех текстов данного Я. В рамках такой многоуровневой модели Я. его с и н т а к с и с о м принято называть изучение языка в пределах отдельно взятого верхнего уровня; с е м а н т и к о й называют изучение связей между конструкциями разных уровней; отношения, выходящие за рамки этой модели (касающиеся реальности, преимущественно источника или получателя сообщений на Я.), составляют предмет п р а г м а т и к и. При программировании синтаксис определяет правила записи предписаний (напр., операторы разделяются точкой с запятой, перед то запятая не ставится и т. п.); семантика — значение программы в терминах предметной области; к прагматике относятся, в частности, соотнесение объектов предметной области с реальными характеристиками решаемой задачи, вопросы времени и стоимости вычислений, удобство и наглядность представления данных, короче — определение целесообразного образа действий, оценка применимости и средств Я. в контексте решаемой задачи.

ЯЗЫК ПРЕДСТАВЛЕ́НИЯ ДА́ННЫХ — см. *Данные*.

ЯЗЫК ПРОГРАММИ́РОВАНИЯ — формальный *язык* представления программ или их частей в рамках одной или многих систем программирования. Число «живых», т. е. употребляемых ныне, Я. п. измеряется сотнями. Для ориентации в этом множестве было предложено несколько классификаций Я. п.

Важнейший классификационный признак — категория пользователей, на к-рых ориентирован Я. п. (программистов и ЭВМ). Программу может составить:

автоматическая система программирования (напр., на промежуточном или выходном языке транслятора),

профессиональный программист (напр., системный программист, использующий т. н. языки реализации программного обеспечения, *машинные языки* и т. п.),

непрофессиональный программист, в частности специалист нек-рой предметной области, использующий язык управления *пакетом прикладных программ*, или учащийся; программисты этой группы обычно пользуются более или менее специализированными системами и предоставляемыми ими Я. п.

В течение долгого времени важнейшие применения ЭВМ были связаны с задачами вычислительной математики (инженерные и научные расчёты), обработкой текстов (символьной информации) и списков. Я. п., практически пригодные для работы в указанных областях, традиционно наз. у н и в е р с а л ь н ы м и Я. п. или Я. п. о б щ е г о н а з н а ч е н и я (напр., паскаль, алгол-68, ПЛ/I).

В связи с *исполнителем* принято различать машинные языки и Я. п. в ы с о к о г о у р о в н я. Это противопоставление относительно и неформально, но обычно предполагается, что для программирования на Я. п. высокого уровня не требуется знания машинных команд; в принципе возможен перенос написанных на таком языке программ с одной вычис-

лительной системы на другую; предлагаемая таким языком нотация «человечнее» (ближе к языку формулирования задачи), чем допускаемая языком *ассемблера*; структура Я. п. высокого уровня позволяет обеспечить автоматический контроль качества (надёжности) написанных на нём программ.

По характеру семантики (т. е. модели вычислительного процесса) в Я. п. можно выделить два основных наклонения — повелительное (императивное, представленное операторами, командами, предписаниями) и изъявительное (декларативное, описательное). В одних Я. п. преобладает описание действий, алгоритма, т. е. того, как получить результат. Такие языки называют императивными, процедурными, алгоритмическими, напр. фортран, бейсик, алгол, ПЛ/I, паскаль. Другие Я. п. предполагают не столько построение (вычисление) результата, сколько описание (декларацию) его свойств, т. е. каков искомый объект; на основе этой информации система программирования сама должна построить алгоритм. Такие языки называют декларативными, непроцедурными, проблемно-ориентированными; языками отношений, спецификаций, формулировки задачи, языками искусственного интеллекта, автоматич. программирования, синтеза алгоритмов. В большинстве систем, реализующих декларативные Я. п., практич. применимость достигается за счёт специализации, путём ограничения предметной области.

По режиму работы программиста и ЭВМ можно выделить языки, ориентированные на пакетный режим (фортран, алгол, ПЛ/I, кобол) и на диалоговый режим (бейсик); есть языки, рассчитанные на работу через *интерпретатор* (напр., лисп) или допускающие выделение работы *транслятора* (фортран, алгол, паскаль и т. п.).

ЯЧЕЙКА памяти — вместилище порции информации в *памяти* ЭВМ, доступной для обработки отдельной командой. Обычно имеет фиксированный для данной ЭВМ размер, исчисляемый в *битах* или *байтах*. Стандартными размерами Я. для современных ЭВМ в зависимости от их класса являются 8, 16, 32 и 64 бит. Содержимое Я. памяти называется *машинным словом*.

СПИСОК СТАТЕЙ ПО РАЗДЕЛУ «ИНФОРМАТИКА», ПОМЕЩЁННЫХ В ОСНОВНОЙ ЧАСТИ СЛОВАРЯ

Ада
Алгол
Алгол-68
Алгоритмический язык
Алгоритмов анализ
Альфа
База данных
Бейсик
Динамическая логика
Интерпретационная эквивалентность
Информатика
Кобол
Лисп
Машинная графика
Оператор
Операционная система
Отладка
Паскаль
ПЛ/I
Программ анализ
Программ верификация
Программ оптимизация
Программ синтез
Программа
Программирование
Программирование параллельное
Программирование прикладное
Программирование системное
Программирование теоретическое
Программирования система
Программирования язык
Программное обеспечение
Программы спецификация
Программы схема
Симула-67
Смешанные вычисления
Снобол
Структура данных
Трансляция
Фортран
Эль-76

АВТОРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКОГО СЛОВАРЯ

Л. М. АБРАМОВ
Б. Н. АГАФОНОВ
С. И. АДЯН
А. Д. АЛЕКСАНДРОВ
П. С. АЛЕКСАНДРОВ
В. В. АЛЕКСЕЕВ
В. Б. АНДРЕЕВ
Д. В. АНОСОВ
В. И. АРНАУТОВ
И. В. АРНОЛЬД
В. Я. АРСЕНИН
В. А. АРТАМОНОВ
С. Н. АРТЕМОВ
А. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ
А. В. БАКУШИНСКИЙ
Н. С. БАХВАЛОВ
И. Г. БАШМАКОВА
В. Д. БЕЛОУСОВ
Ю. К. БЕЛЯЕВ
Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ
В. И. БИТЮЦКОВ
А. В. БИЦАДЗЕ
В. В. БОБКОВ
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ
Л. Н. БОЛЬШЕВ
Ю. Ф. БОРИСОВ
А. А. БОРОВКОВ
Ю. А. БРЫЧКОВ
А. А. БУХШТАБ
Г. М. БАЙНИККО
И. В. БАПНЯРСКИЙ
Ф. П. ВАСИЛЬЕВ
Н. Я. ВИЛЕНКИН
Э. Й. ВИЛКАС
Э. Б. ВИНБЕРГ
А. И. ВИНОГРАДОВ
В. С. ВЛАДИМИРОВ
Д. А. ВЛАДИМИРОВ
В. В. ВОЕВОДИН
М. И. ВОЙЦЕХОВСКИЙ
И. И. ВОЛКОВ
Н. П. ВОРОБЬЕВ
И. П. ВРУБЛЕВСКАЯ
С. С. ГАЙСАРЯН
Т. А. ГЕРМОГЕНОВА
А. В. ГЛАДКИЙ
В. И. ГЛИВЕНКО
В. М. ГЛУШКОВ
В. В. ГНЕДЕНКО
В. Е. ГОВОРОВ
В. И. ГОЛУБОВ
Е. Г. ГОЛЬШТЕЙН
А. А. ГОНЧАР
Ю. А. ГОРЬКОВ
В. Н. ГРИШИН
А. В. ГУЛИН
Д. Ф. ДАВИДЕНКО
Ю. М. ДАБЫДОВ
В. И. ДАНИЛОВ
И. К. ДАУГАВЕТ
Л. М. ДЕГТЯРЕВ
А. Д. ДЕЕВ
В. Н. ДЕЛОНЕ
С. С. ДЕМИДОВ
В. П. ДЕМИДОВИЧ
В. Ф. ДЕМЬЯНОВ
Е. П. ДОЛЖЕНКО
В. К. ДОМАНСКИЙ
А. Г. ДРАГАЛИН
Я. С. ДУБНОВ
Е. Г. ДЬЯКОНОВ
Г. Н. ДЮБИН
А. Г. ЕЛЬКИН
Ф. И. ЕРЕШКО
С. М. ЕРМАКОВ
А. П. ЕРШОВ
Ю. Л. ЕРШОВ
Н. В. ЕФИМОВ
К. А. ЖЕВЛАКОВ
Ю. Г. ЗАРХИН
Л. В. ЗЕЛЕНОВА
А. В. ИВАНОВ
В. К. ИВАНОВ
О. А. ИВАНОВА
Х. Д. ИКРАМОВ
А. М. ИЛЬИН
В. А. ИЛЬИН
В. Ф. КАГАН
А. А. КАРАЦУБА
М. И. КАРГАПОЛОВ
В. Г. КАРМАНОВ
Н. А. КАРПОВА
М. К. КЕРИМОВ
Г. Д. КИМ
А. А. КИРИЛЛОВ
В. П. КОЗЫРЕВ
А. Н. КОЛМОГОРОВ
А. А. КОРБУТ
С. А. КОРДЮКОВА
А. И. КОСТРИКИН
В. Е. КОТОВ
В. В. КУДРЯВЦЕВ
Л. Д. КУДРЯВЦЕВ
Ю. А. КУЗНЕЦОВ
Е. Н. КУЗЬМИН
Л. П. КУПЦОВ
В. М. КУРОЧКИН
А. Г. КУРОШ
В. А. КУШНЕР
К. П. ЛАТЫШЕВ
В. И. ЛЕБЕДЕВ
В. М. ЛЕВИТАН
А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ
М. В. МАЛЮТОВ
А. А. МАРКОВ
А. И. МАРКУШЕВИЧ
С. С. МАРЧЕНКОВ
Г. И. МАРЧУК
С. В. МАТВЕЕВ
Ю. И. МЕРЗЛЯКОВ
Г. А. МЕЩЕРЯКОВ
В. М. МИЛЛИОНЩИКОВ
Г. Е. МИНЦ
Г. А. МИХАЙЛОВ
А. В. МИХАЛЕВ
В. М. МИХЕЕВ
П. С. МОДЕНОВ
Н. Н. МОИСЕЕВ
В. А. МОРОЗОВ
И. П. МЫСОВСКИХ
Н. М. НАГОРНЫЙ
М. А. НАЙМАРК
И. П. НАТАНСОН
В. В. НЕМЫЦКИЙ
В. А. НЕПОМНЯЩИЙ
В. И. НЕЧАЕВ
Е. С. НИКОЛАЕВ
М. С. НИКОЛЬСКИЙ
С. М. НИКОЛЬСКИЙ
П. С. НОВИКОВ
С. П. НОВИКОВ
А. Л. ОНИЩИК
А. С. ПАРХОМЕНКО
М. В. ПЕНТКОВСКИЙ
С. Л. ПЕЧЕРСКИЙ
Т. С. ПИГОЛКИНА
В. Е. ПЛИСКО
Э. Г. ПОЗНЯК
С. В. ПОКРОВСКИЙ
В. И. ПОНОМАРЕВ
Л. С. ПОНТРЯГИН
В. Л. ПОПОВ
В. В. ПОСПЕЛОВ
М. М. ПОТАПОВ
И. В. ПРОСКУРЯКОВ
А. В. ПРОХОРОВ
Ю. В. ПРОХОРОВ
А. П. ПРУДНИКОВ
Ю. П. ПЫТЬЕВ
Ю. В. РАКИТСКИЙ
П. В. РЕБЕРУК
В. Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ
Ю. А. РОЗАНОВ
Н. Х. РОЗОВ
А. М. РУБИНОВ
С. А. РУКОВА
В. С. РЯБЕНЬКИЙ
Ю. М. РЯБУХИН
В. К. САБЕЛЬФЕЛЬД
В. В. САЗОНОВ
М. К. САМАРИН
А. А. САМАРСКИЙ
А. А. САПОЖЕНКО
В. Н. САЧКОВ
А. Г. СБЕШНИКОВ
В. А. СЕВАСТЬЯНОВ
Л. А. СИДОРОВ
Ю. В. СИДОРОВ
В. А. СКВОРЦОВ
Е. Г. СКЛЯРЕНКО
Л. А. СКОРНЯКОВ
А. И. СОБОЛЕВ
В. И. СОБОЛЕВ
С. К. СОБОЛЕВ
Е. Г. СОБОЛЕВСКАЯ
Д. Д. СОКОЛОВ
А. П. СОЛДАТОВ
Е. Д. СОЛОМЕНЦЕВ
В. Г. СПРИНДЖУК
С. В. СТЕЧКИН
А. И. СУББОТИН
В. С. ТАНАЕВ
Е. Е.ТАРТЫШНИКОВ
С. А. ТЕЛЯКОВСКИЙ
А. Н. ТИХОНОВ
Г. П. ТОЛСТОВ
Е. С. ТОНКОВ
В. А. ТРЕНОГИН
П. Л. УЛЬЯНОВ
В. А. УСПЕНСКИЙ
А. П. ФАВОРСКИЙ
Д. К. ФАДДЕЕВ
Л. Д. ФАДДЕЕВ
В. В. ФЕДОРОВ
М. В. ФЕДОРЮК
И. П. ФОКИН
С. В. ФОМИН
Р. З. ХАСЬМИНСКИЙ
В. В. ХВЕДЕЛИДЗЕ
А. Я. ХЕЛЕМСКИЙ
Г. С. ХОВАНСКИЙ
М. Ш. ЦАЛЕНКО
Н. Н. ЧЕНЦОВ
С. Н. ЧЕРНИКОВ
А. Г. ЧЕРНЯКОВ
В. А. ЧУЯНОВ
Л. В. ШАБУНИН
В. В. ШАЙДУРОВ
А. Ф. ШАПКИН
Л. Н. ШЕВРИН
А. Н. ШИРЯЕВ
А. Л. ШМЕЛЬКИН
О. Ю. ШМИДТ
Ю. И. ШОКИН
А. И. ШТЕРН
А. П. ЮШКЕВИЧ
С. В. ЯБЛОНСКИЙ
А. М. ЯГЛОМ
Н. Н. ЯНЕНКО
Ю. И. ЯНОВ
Л. А. ЯНОВИЧ
Е. В. ЯНОВСКАЯ

В части тиража «Математического энциклопедического словаря», на стр. 351 замечена опечатка

напечатано: $\frac{dy}{dx} + a_2\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + a_n\frac{d^ny}{dx^n}$.

следует читать: $L[y] = a_0 + a_1\frac{dy}{dx} + a_2\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + a_n\frac{d^ny}{dx^n}$.

Математический энциклопедический словарь./Гл. ред.
М 34 Ю. В. Прохоров; Ред. кол.: С. И. Адян, Н. С. Бахвалов, В. И. Битюцков, А. П. Ершов, Л. Д. Кудрявцев, А. Л. Онищик, А. П. Юшкевич.— М.: Сов. энциклопедия, 1988.— 847 с., ил.

Словарь состоит из четырёх частей. Основная часть — «Алфавитный словарь терминов» — содержит ок. 3500 статей; вторая часть — «Биографический словарь»— ок. 900 статей; в третьей части — «Математика в энциклопедиях прежних лет» — помещены статьи выдающихся учёных прошлого, заимствованные из шести энциклопедий; в заключительной части — «Словарь школьной информатики» — даны определения понятий нового учебного предмета средней школы «Основы информатики и вычислительной техники».

Словарь рассчитан на широкий круг читателей—от любителей до профессионалов.

М $\frac{1702020000-002}{007\,(01)-88}$ **КБ-548—1987** **51 (03)**

ИБ № 154

Сдано в набор 12.06.87. Подписано в печать 22.03.88. Формат 84×108 1/16. Бумага типографская № 1. Гарнитура обыкновенно-новая. Печать высокая. 89,04 усл.-печ. л., 145,53 уч.-изд. л., 89,04 усл. кр.-отт. Тираж 150000 экз. Заказ **1600**. Цена 9 руб. 90 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Советская энциклопедия». 109817, Москва, Покровский бульвар, д. 8.

Набор и матрицы изготовлены в ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 113054, Москва, Валовая, 28.

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 2 «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129085, Москва, Проспект Мира, 105.